

**Editores**

**Alexandre Loureiro Madureira (Editor Chefe)**

Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC  
Petrópolis, RJ, Brasil

**Amanda Liz Pacífico Manfrim Perticarrari**

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP  
Jaboticabal, SP, Brasil

**Edson Luiz Cataldo Ferreira**

Universidade Federal Fluminense - UFF  
Niterói, RJ, Brasil

**Eduardo V. O. Teixeira (Editor Executivo)**

Universidade Federal do Ceará - UFC  
Fortaleza, CE, Brasil

**Jorge Manuel Vieira Capela**

Universidade Estadual Paulista - UNESP  
Araraquara, SP, Brasil

**Sandra Augusta Santos**

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP  
Campinas, SP, Brasil

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.9)**, as **figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página  
[http://www.sbmac.org.br/p\\_notas.php](http://www.sbmac.org.br/p_notas.php)

QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS E  
ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS EM  
DINÂMICA ESTRUTURAL: UMA  
INTRODUÇÃO A PARTIR DE EXEMPLOS  
COMPUTACIONAIS

Daniel Alves Castello  
castello@mecanica.ufrj.br

Thiago Gamboa Ritto  
tritto@mecanica.ufrj.br

Departamento de Engenharia Mecânica  
Escola Politécnica / COPPE  
Universidade Federal do Rio de Janeiro



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil  
2016

Coordenação Editorial: Igor Leite Freire

Coordenação Editorial da Série: Alexandre L. Madureira

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2016 by Daniel Alves Castello, e Thiago Gamboa Ritto. Direitos reservados, 2016 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

**Catálogo elaborado pela Biblioteca do IBILCE/UNESP**  
**Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner**

Castello, Daniel A. e Ritto, Thiago G.

Quantificação de incertezas e estimação de parâmetros em dinâmica estrutural: uma introdução a partir de exemplos computacionais

- São Carlos, SP :

SBMAC, 2015, 96 p., 21.5 cm - (Notas em Matemática Aplicada; v. 81)

e-ISBN: 978-85-8215-071-9

1. Quantificação de Incertezas 2. Modelagem Estocástica  
3. Dinâmica de estruturas 4. Exemplos Computacionais  
I. Castello, Daniel A. II. Ritto, Thiago G. III. Título. IV. Série

CDD - 51

Aos meus pais Annibal e Izaura (ambos *in memoriam*).  
À minha esposa Cristina e ao meu filho João.  
*Dedico*



# Agradecimentos

Nós gostaríamos de agradecer aos alunos da UFF e da UFRJ por nos inspirarem a escrever esse texto. Especialmente agradecemos a Ádamo Ramallete Ferraz, David Julian Gonzalez Maldonado, Gabriel Lucas Souza da Silva, William Pinto Hernández e Isadora Ruas Henriques pela revisão do texto e pelas sugestões dadas.

Agradecemos também a três professores que marcaram a nossa formação acadêmica. Prof. Christian Soize da Université Paris-Est, Prof. Rubens Sampaio da PUC-Rio e Prof. Fernando Rochinha da UFRJ.

Finalmente, agradecemos o suporte das agências de fomento brasileiras CAPES, CNPQ e FAPERJ.



# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Contexto e motivação . . . . .	1
1.2 Visão geral . . . . .	1
1.3 Estratégias para identificação . . . . .	7
1.4 Tipos de incertezas . . . . .	8
1.5 Envelope estocástico da resposta do modelo e erros de medição . . . . .	8
1.6 Organização do livro . . . . .	10
<b>2 Definições</b>	<b>13</b>
2.1 Variável aleatória . . . . .	13
2.2 Distribuição de probabilidade . . . . .	13
2.3 Distribuição conjunta . . . . .	14
2.4 Valor Esperado e Variância . . . . .	14
2.5 Probabilidade Condicionada . . . . .	15
2.6 Regra de Bayes . . . . .	15
2.7 Método de Monte Carlo . . . . .	15
2.8 Coeficiente de variação . . . . .	16
2.9 Histograma . . . . .	19
2.10 Quantil e percentil . . . . .	19
2.11 Nomenclatura . . . . .	21
<b>3 Problema Estático</b>	<b>23</b>
<b>4 Problema Dinâmico</b>	<b>31</b>
4.1 Análise no domínio da frequência . . . . .	32
4.2 Análise no domínio do tempo . . . . .	38
<b>5 Abordagem Bayesiana</b>	<b>47</b>
5.1 Problema da mola - caso estático . . . . .	50
5.2 Problema da viga - caso dinâmico . . . . .	55
<b>6 Conclusões</b>	<b>65</b>
<b>A Anexos</b>	<b>71</b>
A.1 Códigos do capítulo 3 . . . . .	71
A.2 Códigos do capítulo 4 . . . . .	74
A.3 Códigos do capítulo 5 . . . . .	83



# Prefácio

O livro dos jovens professores, Daniel Castello e Thiago Ritto, trata de um assunto atual e que ainda é pouco explorado no Brasil e mesmo internacionalmente. Só recentemente a *American Mathematical Society* criou sua revista sobre quantificação de incertezas.

O livro foi feito para principiantes, mas chamará atenção de todos para a modelagem estocástica e a quantificação de incertezas e fará com que elas sejam melhor estudadas entre nós.

O livro presta-se bem como texto de um mini-curso de 6 horas, como os oferecidos no CNMAC. A metodologia usada é a de fazer primeiro e justificar depois, cursos tipo mão-na-massa, ou aprendizagem por tentativa e erro. No livro, os conceitos fundamentais são rapidamente desenvolvidos, exemplificados, e só no capítulo final mostra-se a metodologia Bayesiana que perpassa todo o curso. O centro do livro é a estimação de parâmetros. Os parâmetros que se desejam estimar são modelados como variáveis aleatórias e usa-se a teoria da probabilidade para caracterizar as crenças sobre os valores dos parâmetros em função de um conjunto de medidas, isso é, sua caracterização através de uma distribuição de probabilidade.

Como uma visão desse tipo conflita com a usual, onde os parâmetros são determinísticos, o curso será muito importante para ajudar a que o aluno aprenda o conceito de estocástico, em oposição ao determinístico.

A técnica Bayesiana abre aos alunos um novo mundo, que é fascinante e bem mais consistente que o determinístico, ao qual os alunos estão acostumados e aceitam sem questionar. O livro os tirará da zona de conforto e os forçará a pensar.

Esta é a virtude do livro, usando uma situação simples, forçar a reflexão sobre um conceito dos mais importantes na atualidade, o conceito de estocástico, de incerteza e de sua quantificação. Para perceber que o conceito é complexo, basta lembrar que ele só é formalizado, em sua forma discreta, no século 16, com trabalhos de Pascal e Fermat, e mesmo assim ligado a jogos. Hoje sabemos, pela Teoria Quântica, que a Natureza é estocástica e, vivendo, nos convencemos que ele está entranhado na nossa vida.

Esperemos que este seja o primeiro de uma série de livros de Castello e Thiago.

Rio de Janeiro, 20 de junho de 2016.

Rubens Sampaio  
Professor da PUC-Rio



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Contexto e motivação

O processo de escrita deste livro partiu da ideia fundamental de organizar um material básico para introduzir dois temas de interesse que apresentam uma certa dificuldade teórica, (1) quantificação de incertezas e (2) estimação de parâmetros, de maneira simples, enfatizando exemplos computacionais.

Em 2008, foi criado um Comitê Técnico na Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas (ABCM) sobre ‘Quantificação de Incertezas e Modelagem Estocástica’ ([http://www.abcm.org.br/pages/comites\\_tecnicos](http://www.abcm.org.br/pages/comites_tecnicos)). Foi observado que existe uma carência por textos básicos nessa área e, nesse contexto, este livro tenta contribuir para preencher essa lacuna.

O material contido neste livro é parte de dois cursos que os autores ministram separadamente na COPPE/UFRJ, (1) ‘Modelagem Estocástica e Quantificação de Incertezas’ e (2) ‘Introdução à Identificação de Sistemas’. O material destes cursos foi organizado e simplificado no contexto de um mini-curso intensivo de matemática aplicada e computação na engenharia intitulado ‘Métodos Computacionais para Quantificação de Incertezas e Identificação’, ministrado conjuntamente pelos autores nos anos de 2014, 2015 e 2016 na COPPE/UFRJ. Em 2016 os autores também ministraram um mini-curso intitulado ‘*Parameter identification in the presence of uncertainties*’ no simpósio internacional *UNCERTAINTIES*, que é organizado por membros do Comitê Técnico da ABCM. Este livro tem grande influência de outros professores que participaram da formação acadêmica dos autores, principalmente os Profs. Christian Soize (Université Paris-Est), Rubens Sampaio (PUC-Rio), e Fernando Rochinha (COPPE/UFRJ).

### 1.2 Visão geral

Existe uma crescente demanda por análises mais realistas de estruturas flexíveis complexas tais como colunas de perfuração de petróleo, turbinas eólicas, veículos automotivos e componentes aeroestruturais. Neste contexto, destaca-se, como um dos ingredientes chave, a construção de modelos computacionais que levem em conta as incertezas. Tais modelos agregam mais informações para as análises preditivas e também para os projetos de otimização estrutural.

A modelagem computacional tem enorme importância na tomada de decisões críticas; por exemplo, no projeto de aviões, carros e turbinas. A capacidade dos

computadores têm aumentado ao longo dos anos e com isso a possibilidade de cálculos numéricos de modelos mais complexos, com previsões mais perto dos dados observados. Um modelo computacional viabiliza, por exemplo, a quantificação de riscos e a determinação de probabilidade de falhas e, também, a otimização de projetos. Vale ressaltar que, para se ter mais segurança dos resultados obtidos nas simulações numéricas, o modelo computacional tem que ser analisado a partir dos princípios da área denominada Verificação & Validação de Modelos, V&V [26]. Em linhas gerais, o modelo computacional deve ser verificado para assegurar que as contas e aproximações estão sendo feitas corretamente e validado para assegurar que o modelo físico empregado descreve, com certo nível de acurácia, o comportamento do sistema físico analisado.

Existem diversos livros que tratam do problema de quantificação de incertezas [12, 18, 24, 36] e de estimação de parâmetros [3, 5, 22]. A particularidade desse livro é a tentativa de transmitir e fixar os conhecimentos, relativos a esses dois temas, através de exemplos computacionais simples. Adicionalmente, ressalta-se o convite aos leitores para a realização de simulações numéricas, referentes aos exemplos apresentados durante os capítulos, com os códigos disponibilizados no Anexo do livro.

No que tange aos aspectos teóricos, optou-se pela apresentação do mínimo necessário e, por isso, destaca-se que a leitura deste livro pode ser feita conjuntamente com outros livros que complementem a parte teórica [8, 12, 27]. Além destas referências, o livro [13] aborda problemas estocásticos utilizando exemplos usando o Matlab<sup>®</sup>, e a apostila [33] aborda problemas de dinâmica estrutural no contexto determinístico.

Do ponto de vista científico, o número de publicações na área de quantificação de incertezas e modelagem estocástica vem crescendo nos últimos anos. Um exemplo disso é a recente criação da revista *International Journal for Uncertainty Quantification* em 2011 e da revista *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification* em 2013.

Na abordagem escolhida para as análises deste livro, as incertezas são modeladas usando a teoria da probabilidade [21] por esta ser considerada uma teoria completa e eficaz. Porém, existem outras teorias que são usadas para modelar incertezas, tais como a teoria *Info-Gap* [7] e a teoria de *Fuzzy-Sets* [41]. Essas outras teorias estão fora do escopo deste livro.

Por fim, dado que as análises de quantificação de incertezas e estimação de parâmetros demandam o uso de vários ingredientes, nesse capítulo é feita uma breve contextualização destes assuntos dentro de uma proposta de passos a serem seguidos para uma análise completa. As análises apresentadas no decorrer do livro visam colocar em prática partes desses passos que são apresentados a seguir.

## Passo 1 - construção do modelo computacional determinístico

O primeiro passo (Fig. 1.1) é construir um modelo computacional determinístico e, em seguida, escolher os parâmetros que serão considerados incertos. Essa etapa é de fundamental importância. Não se pode iniciar os passos subsequentes antes de se obter um modelo confiável que tenha sido verificado e, preferencialmente, validado. Esse modelo determinístico pode ser mais ou menos complexo, dependendo da aplicação de interesse. Os exemplos apresentados nesse livro não possuem um nível de dificuldade alto, pois o objetivo não é a construção de um modelo deter-

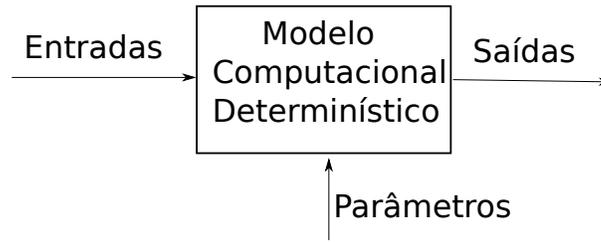


Figura 1.1: Passo 1 - construção do modelo computacional determinístico.

minístico, e sim a quantificação das incertezas e a estimação dos parâmetros. No Capítulo 3 será considerado um problema estático com um grau de liberdade. No Capítulo 4 um problema dinâmico com um grau de liberdade é tratado, e no capítulo 5 o problema de uma viga é analisado.

Os parâmetros incertos devem ser determinados a partir da experiência que se tem com o problema analisado e com o modelo usado. Um parâmetro incerto pode ser modelado por uma variável aleatória, e a esta variável deve ser atribuída uma função densidade de probabilidade, que determina a sua distribuição. No Capítulo 2 algumas definições da teoria da probabilidade são introduzidas. O problema pode ser mais complicado e tratar de processos, campos ou matrizes aleatórias. Mas não é possível analisar problemas complexos sem antes compreender problemas simples com variáveis aleatórias escalares.

## Passo 2 - construção do modelo computacional estocástico (ou probabilístico)

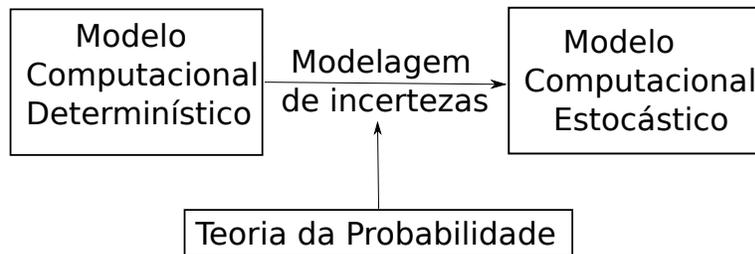


Figura 1.2: Passo 2 - construção do modelo computacional estocástico (ou probabilístico).

O segundo passo (Fig. 1.2) é construir o modelo estocástico. Para tal, deve-se definir um modelo probabilístico para as variáveis aleatórias do problema. Esse modelo probabilístico pode ser construído, por exemplo, usando o princípio da entropia máxima [21, 23, 37]. Esse princípio, que não será detalhado no presente livro, segue uma estratégia racional para a construção de um modelo probabilístico. Note que não se deve escolher arbitrariamente um modelo probabilístico, pois a resposta aleatória está diretamente associada a essa escolha. Como alguns dizem: *garbage in garbage out* (GIGO). Por exemplo, a distribuição Normal não pode ser usada para

modelar um parâmetro com entradas estritamente positivas, um vez que o suporte da distribuição Normal é a reta (ou seja, admite valores negativos).

Outra maneira de se construir um modelo probabilístico é usando a estratégia de testes de hipóteses [9], onde um modelo probabilístico proposto (hipótese nula) é confrontada com dados observados. A hipótese nula pode ser rejeitada ou não, segundo algum critério. Essa abordagem está fora do escopo desse livro.

Alternativamente, pode-se supor um modelo probabilístico inicial para uma variável aleatória  $e$ , a partir da abordagem Bayesiana, atualizar esse modelo probabilístico com dados experimentais. O Capítulo 5 detalha a estratégia Bayesiana para atualização do modelo probabilístico, onde parte-se de uma distribuição *priori* para os parâmetros de interesse e obtém-se uma distribuição *a posteriori*.

A partir da definição de um modelo probabilístico para os parâmetros incertos, tem-se o modelo estocástico (ou probabilístico) do sistema. A modelagem estocástica vem até esse ponto. A partir daqui deve-se considerar uma estratégia para resolver/aproximar o resultado do modelo estocástico.

### Passo 3 - aproximação da resposta do modelo computacional estocástico

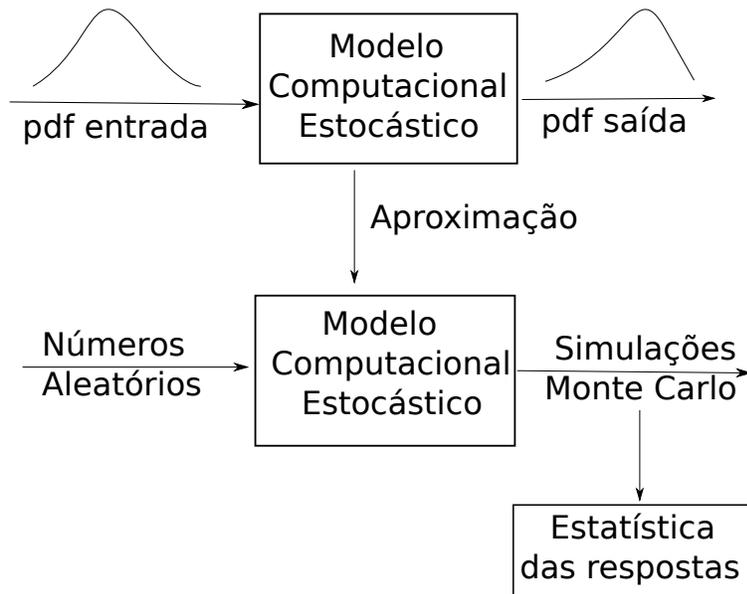


Figura 1.3: Passo 3 - aproximação da resposta do modelo computacional estocástico.

O terceiro passo (Fig. 1.3) é calcular ou aproximar o resultado do modelo estocástico. Considere, por exemplo, a relação entre deslocamento  $d$  e força  $f$  dada por  $f = kd$ , onde  $k$  é uma constante elástica. Se o parâmetro  $k$  é incerto, e a ele é atribuída uma distribuição de probabilidade, não é evidente como se calcula o deslocamento  $d$ , que conseqüentemente também deve seguir uma distribuição de probabilidade, ainda desconhecida. Existe um teorema fundamental que relaciona a distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias de saída com a distribuição

de probabilidade dos parâmetros incertos de um sistema [27], porém, em muitos casos, esse cálculo não é simples, ou, em algumas situações, até mesmo inviável.

Uma estratégia muito popular para se aproximar a distribuição de probabilidade da variável de interesse, a partir da distribuição de outras variáveis aleatórias, é o método de Monte Carlo [32], com o qual pode-se obter estatísticas das respostas do sistema. Mais detalhes sobre esse método são fornecidos no Capítulo 2.

Existem outras formas de aproximar a resposta de um modelo estocástico. Por exemplo, há autores [17, 24] que usam métodos espectrais, com o auxílio da Decomposição de Karhunen-Loève e do Caos Polinomial. Esses métodos estão fora do escopo deste livro.

## Passo 4 - estimação dos parâmetros

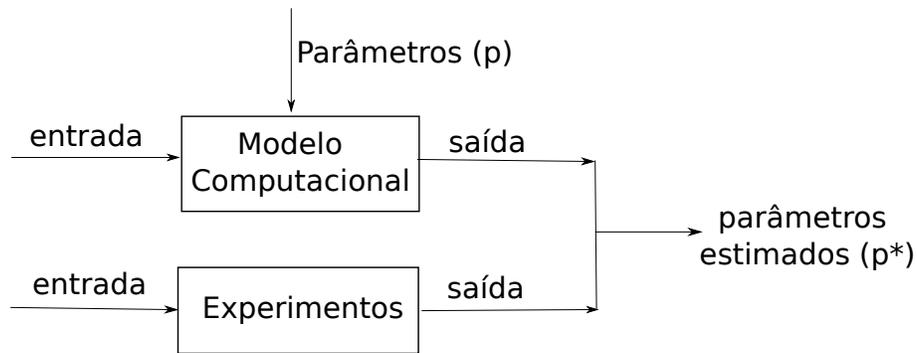


Figura 1.4: Passo 4 - diagrama ilustrativo do processo de estimação dos parâmetros.

O quarto passo (Fig. 1.4) é estimar os parâmetros de interesse. Antes da utilização do modelo para fins de projeto, faz-se necessária a devida calibração do mesmo, a qual se dá a partir da estimação dos seus parâmetros.

A Fig. 1.4 apresenta os principais elementos do processo de estimação de parâmetros. Os ingredientes fundamentais deste passo são o modelo em si e os dados experimentais medidos a partir de sensores de deslocamento, velocidade, temperatura etc. Estes dados experimentais podem ser obtidos a partir de ensaios em laboratório ou, em algumas situações, a partir dos próprios componentes mecânicos quando estes estão em operação em campo. Os dados experimentais são utilizados para calibrar o modelo computacional.

A seção 1.3 faz um breve relato sobre duas estratégias de identificação de parâmetros, e a partir do próximo capítulo essas estratégias são aplicadas. Aos leitores interessados em se aprofundar nessas e em outras estratégias de estimação de parâmetros recomendamos a leitura dos livros de Aster *et al.* [3], de Kaipio e Somersalo [22], de Sivia e Skilling [35], e a apostila de Fox *et al.* [16].

## Passo 5 - análises com o modelo estocástico calibrado

O quinto passo (Fig. 1.5) é explorar os resultados do modelo estocástico. A partir do momento em que o modelo estocástico está calibrado (i.e., os parâmetros

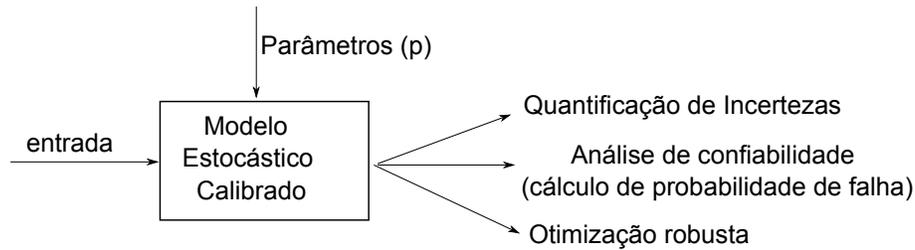


Figura 1.5: Passo 5 - análises com o modelo estocástico calibrado.

estão estimados) é possível fazer diversas análises, tais como propagação de incertezas, análise de confiabilidade e otimização robusta (ou estocástica) do sistema. Na otimização robusta, por exemplo, busca-se otimizar o desempenho do sistema, levando-se em conta as incertezas, daí a palavra robusta [39], mas esse assunto está fora do escopo deste livro.

## Passo 6 - atualização dos parâmetros a partir de novos dados experimentais

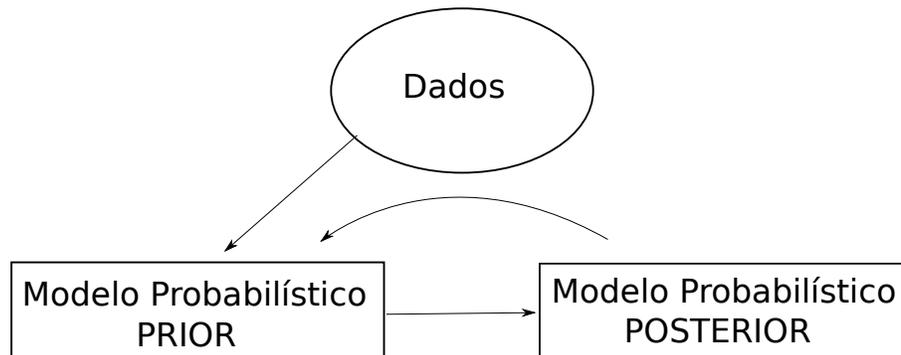


Figura 1.6: Passo 6 - atualização dos parâmetros a partir de novos dados experimentais.

No sexto passo (Fig. 1.6), os modelos probabilísticos são atualizados a partir da utilização de novos dados. De forma resumida, poderíamos explicar o fluxo de dados da Fig.1.6 como segue. Um conjunto inicial de dados  $\mathcal{D}_0$  estava disponível para o processo de estimação de parâmetros (passo 4). Como resultado deste processo obtemos um determinado nível de informação a respeito dos parâmetros de interesse que, por sua vez, está codificado a partir do modelo probabilístico *prior* (ver figura 1.6). Diante de um novo conjunto de dados  $\mathcal{D}_1$  podemos revisitamos o problema da estimação objetivando-se aumentar o nosso nível de informação a respeito dos parâmetros conjugando, desta vez, as seguintes informações: (1) o nível atual de informação descrito pelo modelo probabilístico *prior* com (2) os novos dados experimentais  $\mathcal{D}_1$ . Conseqüentemente, tem-se como resultado um modelo probabilístico atualizado que, por sua vez, ainda pode ser atualizado caso um novo conjunto de

dados  $\mathcal{D}_2$  esteja disponível e assim sucessivamente.

A atualização dos modelos probabilísticos pode ser feita através de uma abordagem Bayesiana. Conforme mencionado anteriormente, o Capítulo 5 detalha a estratégia Bayesiana para atualização de um modelo probabilístico, onde parte-se de uma distribuição *prior* e obtém-se uma distribuição *posteriori* para os parâmetros de interesse.

### 1.3 Estratégias para identificação

Serão consideradas duas estratégias para identificação de parâmetros: (1) determinística e (2) estocástica. De forma resumida, podemos destacar as seguintes características. A estratégia determinística não envolve modelos probabilísticos. Já a estratégia estocástica considera algum modelo probabilístico; por exemplo, o parâmetro e/ou o ruído de medição são modelados como variáveis aleatórias.

Considerando a estratégia determinística, pode-se construir um estimador pontual, que fornece como estimativa um único valor numérico para o parâmetro que se deseja estimar  $\hat{p}$ . Neste caso, o nível de conhecimento a respeito de  $p$  é codificado em um único valor  $\hat{p}$ . Ademais, deve-se destacar que esse estimador é uma variável aleatória, pois, para cada conjunto de dados experimentais, observa-se um valor diferente para  $\hat{p}$ . Apesar de um estimador pontual ser uma variável aleatória, essa estratégia é chamada de identificação determinística porque não há modelos probabilísticos envolvidos. Por exemplo, dado um conjunto de dados experimentais  $\mathbf{x}^{exp}$  e um modelo preditivo  $\mathbf{x}(p)$ , que depende de um parâmetro  $p$ , pode-se, por exemplo, estimar o valor desse parâmetro minimizando a seguinte métrica:  $\hat{p} = \operatorname{argmin} \|\mathbf{x}^{exp} - \mathbf{x}(p)\|^2$ . Ou seja, busca-se o valor de  $p$  que faz com que a resposta do modelo  $\mathbf{x}(p)$  seja a mais próxima possível dos dados experimentais disponíveis  $\mathbf{x}^{exp}$ . Nesse caso não há nenhuma hipótese relacionada a distribuições de probabilidade. Esse tipo de estratégia de identificação é usada nos capítulos 3 e 4.

Considere agora a estratégia estocástica onde os parâmetros de interesse e o ruído de medição são modelados como variáveis aleatórias, e a eles são atribuídos modelos probabilísticos. A partir de dados experimentais, os parâmetros dos modelos probabilísticos (média, variância,...) podem ser identificados a partir de estimadores pontuais. Nesse caso, a distribuição de probabilidade não se modifica, apenas os valores dos seus parâmetros que são estimados. Um método muito popular para estimar os parâmetros de um modelo probabilístico é o método da máxima verossimilhança [9].

Outra estratégia de identificação estocástica é a chamada estratégia Bayesiana, que é introduzida no capítulo 5. Nessa estratégia, os parâmetros que se deseja estimar são modelados como variáveis aleatórias, às quais são atribuídas uma distribuição de probabilidade inicial (*priori*). Essa distribuição é atualizada a partir de dados experimentais. De posse da distribuição de probabilidade atualizada (*posteriori*) é possível extrair estimadores pontuais, tais como, por exemplo, a média da *posteriori*.

Por fim, deve-se registrar que nos problemas apresentados neste livro, o processo de identificação é realizado utilizando-se o mesmo modelo computacional que foi utilizado para gerar os dados sintéticos necessários para a identificação. Isto é conhecido na literatura como um crime inverso e costuma gerar, na maioria das vezes, estimativas extremamente otimistas. Entretanto, os autores decidiram por trabalhar desta forma visando a simplicidade e a facilidade de leitura.

## 1.4 Tipos de incertezas

Antes de prosseguir para os capítulos seguintes, onde algumas definições serão introduzidas e diversos exemplos serão analisados, faz-se necessária a apresentação de algumas definições a respeito dos tipos de incerteza. Pode-se separar incerteza em dois tipos: (1) incerteza nos parâmetros e (2) incerteza no modelo (incertezas na estrutura do modelo). Incerteza nos parâmetros está relacionada com a incerteza nos parâmetros usados no modelo numérico; por exemplo, a amplitude da força de excitação, parâmetros necessários para descrever o comportamento físico de um material, e parâmetros geométricos. Já a incerteza no modelo está relacionada à estrutura do modelo empregado. Por exemplo, a análise dinâmica de um sólido prismático  $\mathcal{B}$  pode ser feita com o modelo obtido a partir da teoria da elasticidade. Por outro lado, pode-se adotar o modelo de viga de Timoshenko para realizar tais análises dinâmicas. Repare que o modelo de viga de Timoshenko adota simplificações cinemáticas para a descrição do movimento do corpo  $\mathcal{B}$ , hipóteses acerca da sua esbelteza, assim como a respeito da condições de carregamento. Outro exemplo que pode ser citado é a análise de um fluido adotando-se a hipótese de *fluido* ideal, na qual desconsideram-se os efeitos da viscosidade e da compressibilidade.

Outra separação que muitos autores utilizam é considerar (1) incerteza aleatória em oposição à (2) incerteza epistêmica. Incerteza aleatória é usada para classificar um parâmetro com variabilidade; por exemplo, velocidade do vento, ondas no mar e forças turbulentas que atuam nas asas de um avião; e incerteza epistêmica está relacionada com a falta de informação, ou informação incompleta sobre determinado parâmetro ou fenômeno; por exemplo, o parâmetro de amortecimento de uma estrutura (neste caso não sabemos o valor do parâmetro, mas espera-se que, em condições de operação padrão, este não esteja variando).

Erros relacionados às aproximações numéricas (erros de truncamento e de discretização) não são considerados incertezas. Esses erros podem e devem ser controlados, tal que sejam desprezíveis com respeito às incertezas mencionadas nos parágrafos anteriores.

Nós entendemos que todos os tipos de incertezas podem ser modelados usando a teoria da probabilidade. Entretanto, há quem defenda [6] que incertezas epistêmicas não devem ser modeladas usando a teoria da probabilidade.

## 1.5 Envelope estocástico da resposta do modelo e erros de medição

Possivelmente alguns leitores devem estar se perguntando sobre as vantagens, no contexto das análises de projetos de engenharia, adquiridas quando se utiliza um modelo computacional estocástico. Apresentamos a seguir, de forma resumida, uma característica bastante interessante, tanto do ponto de vista dos modelos quanto do ponto de vista dos dados experimentais, que se torna evidente quando incertezas são levadas em consideração nas análises de projeto de engenharia.

Considere que temos um modelo para descrever o sistema físico  $\mathcal{B}$  que fornece uma saída/resposta  $s = \mathcal{M}(t; p)$  como função do tempo  $t$  e de um parâmetro  $p$ . Adicionalmente, considere que temos uma bancada de testes para a realização de ensaios dinâmicos com  $\mathcal{B}$  e que há interesse em avaliar o nível de confiabilidade das previsões fornecidas pelo modelo dado por  $s = \mathcal{M}(t; p)$ . Para este fim, a equipe de engenharia deve confrontar os dados experimentais  $\{s^{exp}(t_1), s^{exp}(t_2), \dots, s^{exp}(t_N)\}$  obtidos nos ensaios de laboratório com a resposta  $\{s(t_1; \bar{p}), s(t_2; \bar{p}), \dots, s(t_N; \bar{p})\}$

fornecida pelo modelo, dadas as mesmas condições de operação do sistema, e avaliar o *nível de proximidade* entre os dados.

Em um primeiro cenário de análise considere: (1) que o parâmetro  $p$  é plenamente conhecido e  $p = \bar{p}$  (modelo determinístico) e (2) a resposta experimental adotada para as análises é obtida a partir da média dos ensaios dinâmicos obtidos no laboratório. A partir destas hipóteses temos como consequência imediata que tanto as previsões  $s(t_k) = \mathcal{M}(t_k; \bar{p})$  quanto os dados  $s^{exp}(t_k)$  são descritos por um único valor apenas para qualquer instante de tempo  $t_k$ . Nestas condições, uma forma de se avaliar o nível de proximidade entre os dados experimentais e a previsão de um modelo determinístico seria a partir de um gráfico como o apresentado na Fig. 1.7(a), no qual a curva contínua corresponde à previsão do modelo determinístico e os pontos representam a resposta experimental.

Em um segundo cenário de análise considere que: (1) o parâmetro  $p$  é considerado como sendo incerto e (2) a resposta experimental adotada para as análises deve utilizar os dados de todos os ensaios realizados no laboratório (dada as mesmas condições de operação). Dada a hipótese (1) deste segundo cenário, tem-se que a equipe de engenharia deve, primeiramente, enveredar pelos **Passos 2, 3 e 5** representados, de forma ilustrativa, nas Fig.1.2, 1.3 e 1.5. E, desta forma, a equipe de engenharia terá em mãos, para cada instante de tempo  $t_k$ , um conjunto de *respostas possíveis* representando, assim, o nível de incerteza das previsões para o instante  $t_k$ . Este conjunto de respostas possíveis foi obtido a partir de uma função de densidade de probabilidade *priori*, adotada para descrever o parâmetro incerto  $p$ , e utilizando um esquema como o descrito no **Passo 3** o qual está representado, de forma ilustrativa, na Fig.1.3 . Já com relação a hipótese (2) deste cenário, tem-se que estas informações podem ser resumidas em cada instante  $t_k$ , para fins de visualização, utilizando-se um valor médio e uma barra de erros. Nestas novas condições, uma forma de se avaliar o nível de proximidade entre os dados experimentais e a previsão de um modelo determinístico seria a partir de um gráfico no qual a região delimitada entre as curvas espessas corresponde ao envelope probabilístico das previsões do modelo estocástico e a resposta experimental é representada a partir de um valor médio e uma barra de erros associada. A construção do envelope de probabilidade é feita a partir do cálculo dos percentis (ver seção 2.10).

A quantidade de informações aumenta quando o envelope probabilístico do modelo computacional estocástico é traçado e barras de erro, relacionadas aos erros de medição, são inseridas para os pontos experimentais. Retornando à Fig.1.7(a), observamos que esta mostra boa correspondência entre previsão do modelo e dados experimentais. A equipe de engenharia diria, provavelmente, que as informações contidas na Fig.1.7(a) dão indícios favoráveis ao uso modelo computacional para a realização de análises diversas. Entretanto, para duas situações extremas, ilustradas a seguir, fica evidente que informações extras podem mudar a conclusão da equipe. Observe as Figs.1.7(b) e (c). A Fig. 1.7(b) considera erros experimentais grandes, o que significa que os dados experimentais não podem ser aceitos, e, conseqüentemente, não se pode validar o modelo numérico. Já a Fig. 1.7(c) considera incertezas grandes no modelo computacional, indicando que não se pode fazer uma previsão razoável com o modelo numérico proposto. Não seria possível chegar a essas conclusões se informações adicionais, relacionadas aos erros da medição e do modelo, não fossem levadas em consideração.

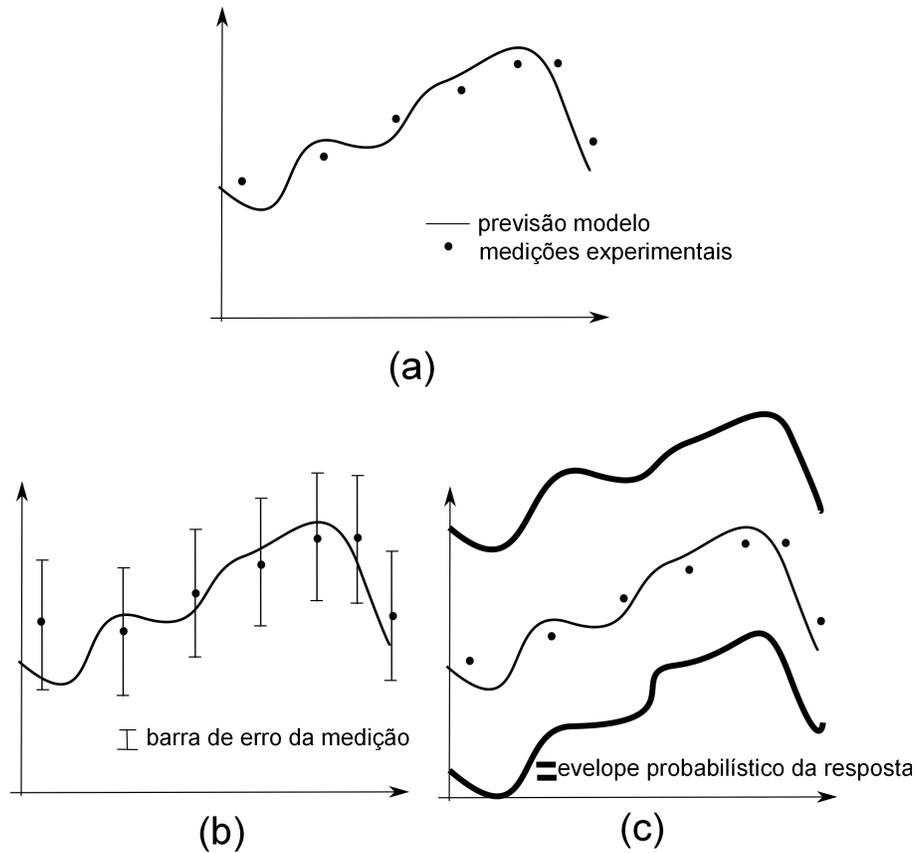


Figura 1.7: (a) Resposta do modelo determinístico (-) junto com a resposta experimental ( $\bullet$ ), (b) resposta experimental com o erro das medições e (c) envelope probabilístico do modelo estocástico.

## 1.6 Organização do livro

Este livro está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2, algumas definições da teoria da probabilidade, tais como variável aleatória e função densidade de probabilidade, são introduzidas. Além disso, uma breve explanação sobre o método de Monte Carlo é feita, e algumas formas de analisar uma amostra aleatória, tais como histograma e quantis, são definidas.

No Capítulo 3, um problema envolvendo um sistema mecânico estático com um grau de liberdade ( $f = k d$ ) é considerado, onde se deseja obter uma estimativa para o parâmetro de rigidez  $k$ . Além disso, um problema não-linear também é analisado, onde é discutido o problema de erro de modelagem.

No Capítulo 4, um problema envolvendo um sistema dinâmico com um grau de liberdade é tratado tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. A taxa de amortecimento, assim como a frequência natural dos sistemas, são consideradas incertas, e seus valores são estimados a partir de dados simulados.

No Capítulo 5, a metodologia Bayesiana é inicialmente aplicada ao sistema mecânico estático analisado no Capítulo 3 e, em seguida, ao problema que utiliza dados experimentais de uma viga engastada. O modelo adotado para a viga

é o de Timoshenko e as equações governantes do sistema, na forma discreta, são obtidas pelo método dos elementos finitos.

O Capítulo 6 faz um desfecho para o livro com algumas conclusões.



# Capítulo 2

## Definições

Neste capítulo serão introduzidas as definições que serão usadas ao longo do texto. Para uma leitura mais aprofundada sobre probabilidade, variáveis aleatórias e processos estocásticos, recomenda-se a leitura dos livros de Cataldo [8] e de Papoulis e Pillai [27]. Sobre o método de Monte Carlo recomenda-se a leitura dos livros de Rubstein e Kroese [32] e de Robert e Casella [31]. Vale notar que diversos tópicos, apesar de importantes, não estão no escopo deste livro. Por exemplo, o teorema central do limite e convergência de variáveis aleatórias.

### 2.1 Variável aleatória

Seja  $\Omega$  o conjunto amostral de um experimento, i.e., conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento. Uma variável aleatória  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  é uma função  $X = X(\omega)$  que associa um número real para cada elemento  $\omega \in \Omega$ .

### 2.2 Distribuição de probabilidade

A função cumulativa de probabilidade da variável aleatória contínua  $X$ , denominada  $F(x)$ , é tal que:

$$F(x) = P(X \leq x), \quad (2.2.1)$$

sendo  $P(X \leq x)$  a probabilidade de  $X \leq x$ . A função cumulativa de probabilidade é uma função não-decrescente que tem as seguintes propriedades:

$$0 \leq F(x) \leq 1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1. \quad (2.2.2)$$

Usualmente usamos a função densidade de probabilidade (pdf) de  $X$ , denominada  $\pi(x)$ , definida como segue:

$$\pi(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad (2.2.3)$$

onde a probabilidade de  $X \leq a$  pode ser obtida como segue

$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a \pi(x) dx, \quad (2.2.4)$$

e, conseqüentemente

$$F(a) = \int_{-\infty}^a \pi(x) dx. \quad (2.2.5)$$

A função densidade de probabilidade  $\pi(x)$  tem as seguintes propriedades:

$$\pi(x) \geq 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(x) dx = 1. \quad (2.2.6)$$

## 2.3 Distribuição conjunta

Dadas duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , a função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis  $X$  e  $Y$ , denominada  $\pi(X, Y)$ , é tal que  $P(X \leq a, Y \leq b)$  é dada como segue:

$$P(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b \pi(x, y) dx dy. \quad (2.3.7)$$

A função densidade de probabilidade marginal das variáveis  $X$  e  $Y$ , denominadas respectivamente como  $\pi(x)$  e  $\pi(y)$ , são definidas a seguir

$$\pi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(x, y) dy, \quad (2.3.8)$$

$$\pi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(x, y) dx. \quad (2.3.9)$$

## 2.4 Valor Esperado e Variância

O valor esperado de uma variável aleatória  $X$ , denominado  $\mathbb{E}[X]$ , é definido como segue

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \pi(x) dx \quad (2.4.10)$$

o valor esperado é o valor médio da variável aleatória. Uma medida muito usada para se obter a dispersão de uma variável aleatória  $X$  é denominada variância,  $Var[X]$ , que é definida como segue

$$Var[X] = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 \pi(x) dx. \quad (2.4.11)$$

Dadas duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , com distribuição conjunta  $\pi(x, y)$ , o valor esperado da variável  $X$  é dado como segue

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \pi(x, y) dy dx, \quad (2.4.12)$$

e a variância de  $X$  é dada como segue

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 \pi(x, y) dx dy. \quad (2.4.13)$$

note que a Eq. (2.3.8) foi usada nas duas últimas equações.

## 2.5 Probabilidade Condicionada

A probabilidade condicionada é escrita como  $P(A|B)$ . Essa é a probabilidade do evento  $A$  condicionada à ocorrência do evento  $B$ . Se os eventos  $A$  e  $B$  são independentes,  $P(A|B) = P(A)$ , ou seja, o conhecimento do evento  $B$  não muda a probabilidade de ocorrência do evento  $A$ . Podemos escrever o valor esperado da variável aleatória  $X$ , condicionada à  $Y = y$ , como segue

$$\mathbb{E}[X|y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \pi(x|y) dx. \quad (2.5.14)$$

Por fim, a variância da variável aleatória  $X$ , condicionada à  $Y = y$  é dada como segue

$$\text{Var}[X|y] = \sigma_{x|y}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X|y])^2 \pi(x|y) dx. \quad (2.5.15)$$

Com relação aos problemas que envolvem um conjunto de variáveis aleatórias  $\{X, Y, Z, W \dots\}$ , estes demandam o uso de funções de densidade de probabilidade conjunta  $\pi(x, y, z, w, \dots)$  envolvendo todas as variáveis as quais possibilitam o cálculo do valor esperado, valor esperado condicional, variância e variância condicional de maneira análoga às apresentadas para funções de duas variáveis.

## 2.6 Regra de Bayes

Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias, a Regra de Bayes permite relacionar  $\pi(x|y)$  e  $\pi(y|x)$  como segue

$$\pi(x|y) = \frac{\pi(y|x) \pi(x)}{\pi(y)}. \quad (2.6.16)$$

Essa regra será explorada no capítulo 5.

## 2.7 Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo [32], ou simulações de Monte Carlo, é um método para aproximar resultados de problemas estocásticos (ou probabilísticos) usando a geração de variáveis aleatórias, campos aleatórios ou processos estocásticos. Ele é um método não-intrusivo, ou seja, não há a necessidade de modificar o modelo computacional determinístico utilizado.

Considere, por exemplo, que se queira levantar as características estatísticas de uma variável de projeto de interesse  $Z = g(Y)$ , onde  $Y$  é uma variável aleatória cuja função densidade de probabilidade é conhecida e dada por  $\pi(y)$ . Em particular, no caso do valor esperado de  $Z$  temos que

$$\mathbb{E}[Z] = \int z \pi(z) dz = \int g(y) \underbrace{\left\{ \int \pi(z, y) dy \right\}}_{=\pi(y) \text{ (ver Eq.2.3.8)}} dz = \int g(y) \pi(y) dy \quad (2.7.17)$$

Destaca-se o fato de que, para a grande maioria das análises de projeto, as integrais presentes na Eq.(2.7.17) não possuem solução fechada. Por um lado, tem-se que

os mapeamentos  $Y \mapsto g(Y)$  são, geralmente, não-lineares. Por outro, tem-se que a distribuição  $\pi(z) = \int \pi(z, y) dy$  não possui, geralmente, uma solução fechada.

O Método de Monte Carlo fornece aproximações para integrais como as apresentadas na Eq. (2.7.17). O algoritmo básico para a simulação de Monte Carlo pode ser resumido como apresentado no **Algoritmo (1)**:

---

**Algoritmo 1** Cálculo do valor esperado de  $Z = g(Y)$ .

---

```

1: % Gerando realizações da variável aleatória Z;
2: r = 0
3: For j = 1 to Nmc
4:   r = r + 1;
5:   Gere uma realização y(r) da variável aleatória Y a partir de π(y) ;
6:   Simule o modelo computacional para calcular z(r) = g(y(r));
7:   Arquivar a realização y(r);
8: End
9: %
10: %Gerando uma aproximação do valor esperado
11: Calcular o valor esperado utilizando a Eq. (2.7.18).

```

---

As  $N_{mc}$  realizações  $\{z^{(1)}, \dots, z^{(N_{mc})}\}$  da variável de interesse são utilizadas para aproximar a integral em (2.7.17) como segue

$$\mathbb{E}[Z] \simeq \bar{z} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{r=1}^{N_{mc}} z^{(r)} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{r=1}^{N_{mc}} g(y^{(r)}) \quad (2.7.18)$$

na qual os termos contendo os somatórios correspondem ao estimador do valor esperado  $\mathbb{E}[Z]$ . Com relação à variância de  $Z$ , uma aproximação para a mesma pode ser obtida como segue

$$\sigma_z^2 \simeq S_z^2 = \frac{1}{N_{mc} - 1} \sum_{r=1}^{N_{mc}} (z^{(r)} - \bar{z})^2 \quad (2.7.19)$$

na qual o termo contendo o somatório em questão corresponde ao estimador para a variância da variável aleatória  $Z$ . Destaca-se que, na plataforma Matlab<sup>®</sup>, dado um conjunto de realizações  $\{z^{(1)}, \dots, z^{(N)}\}$ , os estimadores do valor esperado e da variância são obtidos com as funções *mean* e *var*, respectivamente.

## 2.8 Coeficiente de variação

O coeficiente de variação  $CV_y$  da variável aleatória  $Y$  é o adimensional definido como segue

$$CV_y = \frac{\sigma_y}{\mathbb{E}[Y]} \quad (2.8.20)$$

o qual nos fornece uma medida do nível de dispersão da variável  $Y$ . A título de ilustração, consideremos, por exemplo, a análise de três variáveis aleatórias  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  tais que  $X_1 \sim \mathcal{N}(1, 1)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{N}(1, 3^2)$  e  $X_3 \sim Weibull(k = 1, \lambda = 1)$ . Ao longo do texto, adota-se a notação  $W \sim (\mu_w, \sigma_w^2)$  para especificar que a variável aleatória  $W$  segue uma distribuição Normal/Gaussiana com média  $\mu_w$  e variância  $\sigma_w^2$ .

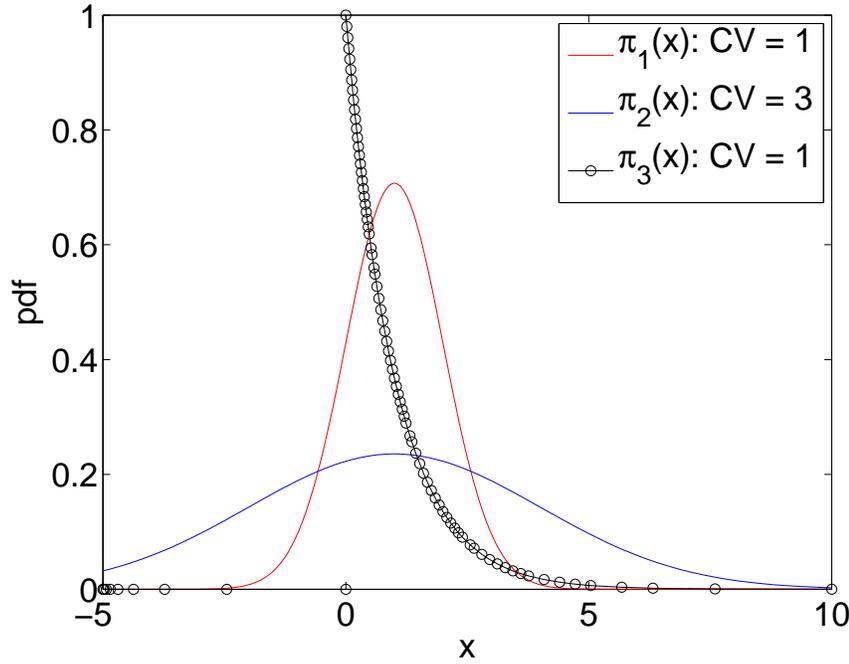


Figura 2.1: Três pdfs e seus respectivos CV.  $X_1 \sim \mathcal{N}(1, 1)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{N}(1, 3^2)$  e  $X_3 \sim Weibull(k = 1, \lambda = 1)$ .

As distribuições de  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  foram escolhidas de forma que  $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \mathbb{E}[X_3] = 1$  e que  $\sigma_{X_1} = \sigma_{X_3} = 1$  e  $\sigma_{X_2} = 3$ . A Fig.(2.1) apresenta a função densidade de probabilidade (pdf) destas três variáveis aleatórias assim como seus respectivos CVs. A Fig.(2.2) apresenta 200 realizações obtidas a partir das três pdfs em questão. Por fim, sugere-se que o leitor analise as Fig.(2.1) e (2.2) simultaneamente e procure correlacionar informações presentes nas duas figuras, tais como o suporte das pdfs, o intervalo no qual as realizações se encontram e os CVs.

A análise isolada dos coeficientes de variação de uma variável aleatória nos fornece uma medida do nível de dispersão desta variável como vimos nas Fig.(2.1) e (2.2). Entretanto, para fins de projeto, a análise relativa entre coeficientes de variação é capaz de nos trazer ainda mais informações. Em princípio, a ideia consiste em avaliar a razão entre o  $CV_z$  da resposta fornecida por um modelo  $Z = g(Y)$  e o  $CV_y$  da variável de projeto de entrada  $Y$ , ou seja

$$\frac{CV_{saída}}{CV_{entrada}} = \frac{CV_z}{CV_y} \quad (2.8.21)$$

Por fim, objetivando-se avaliar o impacto da incerteza de um conjunto de entradas/parâmetros de projeto  $\{Y_1, \dots, Y_p\}$  na resposta do modelo  $Z = g(Y_1, \dots, Y_p)$ , a equipe de engenharia poderia, por exemplo, num estágio inicial, avaliar o impacto isolado de cada parâmetro a partir da análise dos quocientes  $\left\{ \frac{CV_z}{CV_{y_1}}, \dots, \frac{CV_z}{CV_{y_p}} \right\}$ .

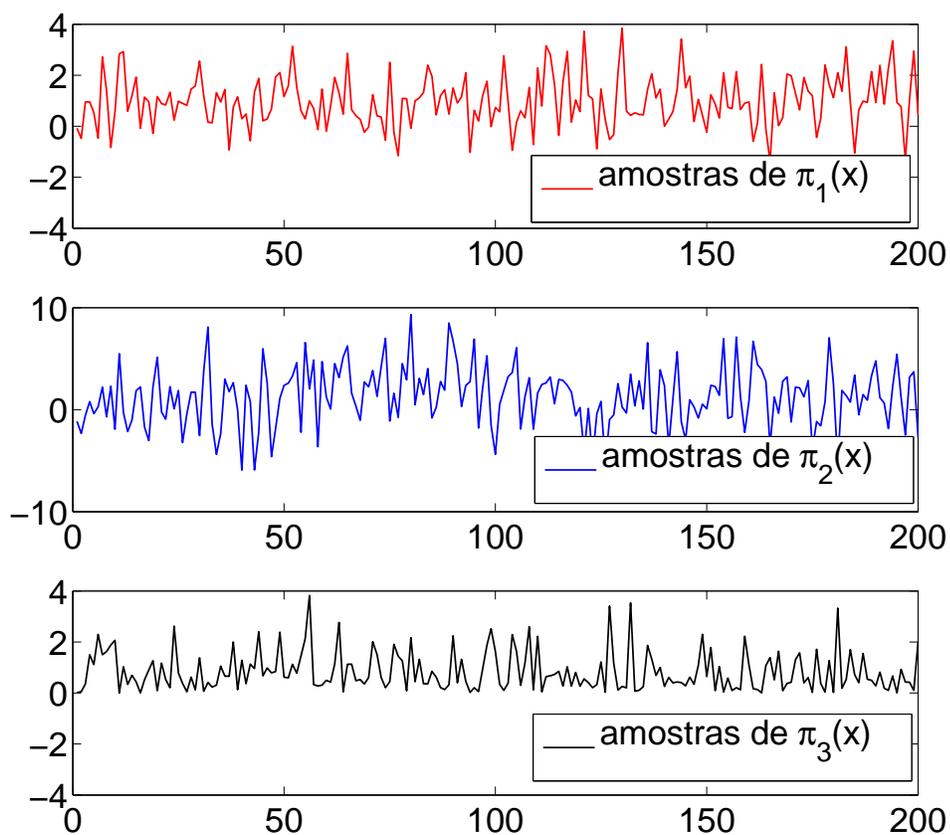


Figura 2.2: Realizações obtidas a partir de  $\pi_1(x) \sim \mathcal{N}(1, 1)$ ,  $\pi_2(x) \sim \mathcal{N}(1, 3^2)$  e  $\pi_3(x) \sim Weibull(k = 1, \lambda = 1)$ . Para cada uma das 200 amostras (eixo das abscissas) corresponde uma realização da variável aleatória (eixo das ordenadas).

## 2.9 Histograma

Uma forma de visualizar as amostras de uma variável aleatória é a partir de um histograma; função *hist* do Matlab<sup>®</sup>. Para construir um histograma define-se intervalos igualmente espaçados, sem sobreposições, no domínio da variável aleatória. Depois, contabiliza-se as observações que foram obtidas para cada um desses intervalos. O histograma também é conhecido como diagrama de frequências, pois mede a frequência das observações em cada intervalo.

Por exemplo, seja  $X \sim \mathcal{N}(10, 2)$ . No Matlab<sup>®</sup> pode-se utilizar as seguintes linhas de comando para gerar o histograma da variável aleatória  $X$ :

```
close all;
X=normrnd(10,2,1000,1);
hist(X)
```

O resultado é mostrado na figura (2.3a). Observe como a forma do histograma se aproxima da curva Normal. Entretanto, o histograma não está normalizado, ou seja, a integral no domínio da variável aleatória não vale um. Também é possível modificar o número de intervalos no domínio através das linhas de comando:

```
close all;
X=normrnd(10,2,1000,1);
hist(X,100)
```

Veja figura (2.3b).

## 2.10 Quantil e percentil

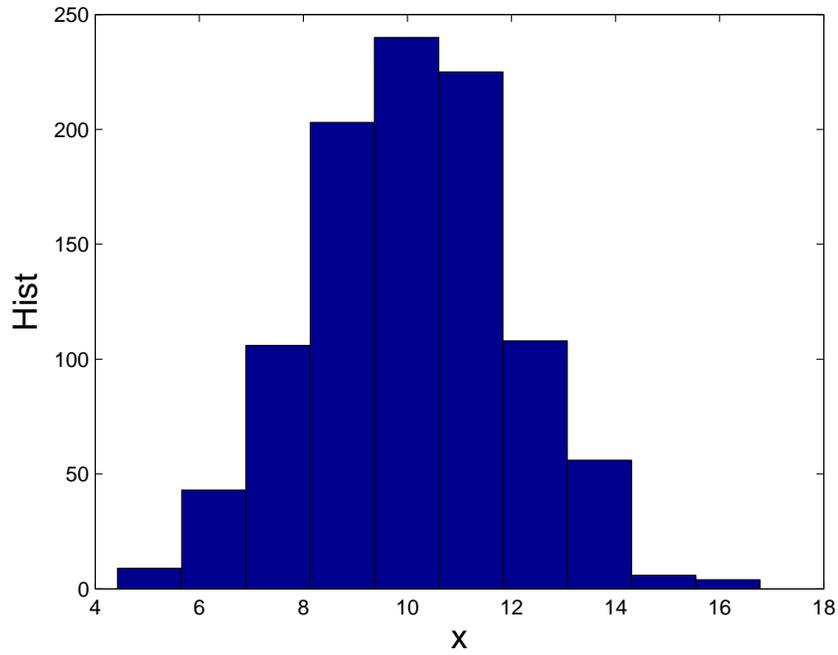
Quantis são pontos determinados no domínio da variável aleatória que dividem um conjunto de observações em grupos de mesmo tamanho. Q-quantis são valores que particionam um conjunto finito em Q subconjuntos de aproximadamente mesmo tamanho. Em alguns casos o valor do quantil pode não ser determinado unicamente.

Os 100-quantis são chamados de percentis. Por exemplo, considere  $X \sim \mathcal{N}(10, 2)$ . No Matlab<sup>®</sup> pode-se gerar uma amostra com 1000 observações dessa variável aleatória utilizando as linhas de comando:

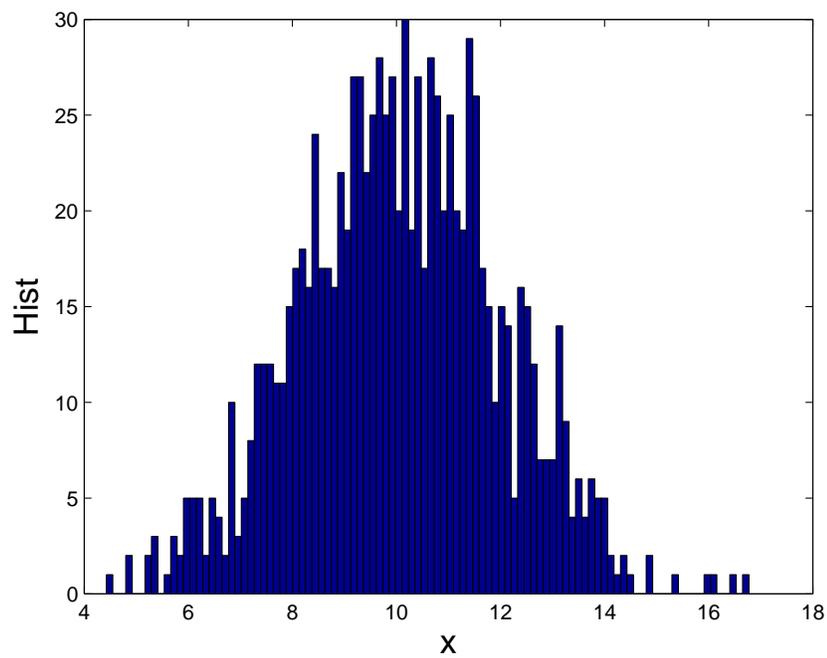
```
X=normrnd(10,2,1000,1);
prctile(X,1)
```

as quais retornam 5.51 (ponto abaixo do qual se tem apenas 1% das amostras), e o comando *prctile(X,99)* retorna 14.18 (ponto abaixo do qual se tem 99% das amostras). Ou seja, 98% das observações estão dentro do intervalo [5.51, 14.18].

Os percentis são usados para construir o envelope probabilístico de uma função aleatória (ver exemplos dos capítulos 4 e 5).



(a)



(b)

Figura 2.3: Histogramas de 1000 observações de  $X \sim \mathcal{N}(10, 2)$ . (a) domínio dividido em 10 intervalos e (b) domínio dividido em 100 intervalos.

## 2.11 Nomenclatura

Nos próximos capítulos algumas aplicações serão analisadas com o objetivo de apresentar, de forma gradativa, os conceitos básicos de quantificação de incertezas e identificação. Desta forma, objetivando-se uniformizar a apresentação nos capítulos seguintes, adotou-se a seguinte nomenclatura ao longo do texto:

- $x$ : letra minúscula simples denota um valor escalar.
- $X$ : letra maiúscula simples denota uma variável aleatória escalar, ou seja  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$
- $\mathbf{X}$ : letra maiúscula em negrito denota um vetor de variáveis aleatórias, ou seja,  $\mathbf{X} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^N$
- $[\mathbf{X}]$ : letra maiúscula em negrito e entre colchetes denota uma matriz de variáveis aleatórias, ou seja,  $[\mathbf{X}] : \Omega \mapsto \mathbb{R}^{N \times M}$

Caso exista alguma exceção que será aplicada a um dado problema, a mesma será introduzida ao longo do texto.

## Exercícios

*Exercício 1:* trace o gráfico da função densidade de probabilidade de uma variável aleatória Uniforme,  $\pi(x) = 1$  para  $x \in [1, 2]$  e  $\pi(x) = 0$  caso  $x$  não esteja nesse intervalo. Calcule a função cumulativa e trace o gráfico.

*Exercício 2:* considere as funções de densidade de probabilidade mostradas na figura (2.4), e (a) escreva as expressões de  $f_{X_1}$ ,  $f_{X_2}$  e  $f_{X_3}$ , (b) calcule a média e a variância das variáveis aleatórias.

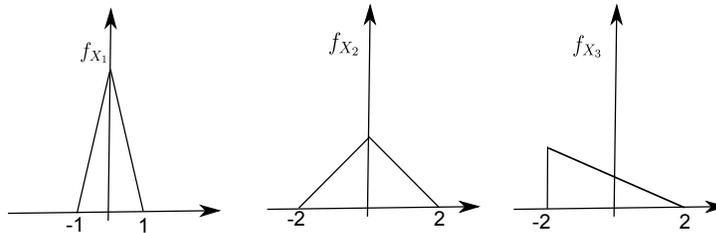


Figura 2.4: Funções densidade de probabilidade triangulares.

*Exercício 3:* gere  $N$  realizações de uma variável aleatória  $Z \sim \mathcal{N}(\mu_z, \sigma_z^2)$  utilizando o comando `randn` no Matlab<sup>©</sup>. Calcule o valor esperado e a variância de  $Z$  utilizando os comandos `mean` e `var`. Analise os resultados avaliando os valores  $\frac{\bar{z}}{\mu_z}$  e  $\frac{S_z^2}{\sigma_z^2}$ . Repita o processo com o mesmo valor de  $N$  e compare com o resultado anterior.

*Exercício 4:* gere  $N$  realizações de uma variável aleatória  $Z \sim \mathcal{N}(\mu_z, \sigma_z^2)$  utilizando o comando `randn` no Matlab<sup>©</sup>. Obtenha o histograma a partir do conjunto de  $N$  realizações utilizando o comando `hist` no Matlab<sup>©</sup>. Refaça a análise com outro conjunto de  $N$  realizações e compare os histogramas. Considere, por exemplo,

*análises com  $N = 10$ ,  $N = 100$ ,  $N = 1000$ . Compare o resultado obtido com a curva analítica da função densidade de probabilidade. Dica: normalize o resultado do histograma para poder fazer a comparação.*

*Exercício 5: gere 1000 realizações da variável aleatória  $Z \sim \mathcal{N}(10, 4)$  utilizando o comando `normrnd` no Matlab<sup>©</sup>. Calcule o 1º e o 99º percentil usando a função `prctile`. Calcule novamente os percentis a variável aleatória  $Z \sim \mathcal{N}(10, 1)$ .*

## Capítulo 3

# Problema Estático

Neste capítulo será considerada a análise de um sistema elástico trabalhando em regime estático. Em regimes de operação para os quais a hipótese de linearidade é válida, a relação entre o deslocamento  $d$  do componente quando o mesmo está sujeito a uma força aplicada  $f$  é dada pela Eq. (3.0.1).

$$f = k d, \quad (3.0.1)$$

sendo  $k$  a rigidez do componente.

Estruturas de modelo da forma mostrada na Eq. (3.0.1) descrevem tanto a relação entre o deslocamento de uma mola e a força aplicada à mesma, quanto a relação entre o deslocamento e a força em corpos sujeitos, por exemplo, à tração pura.

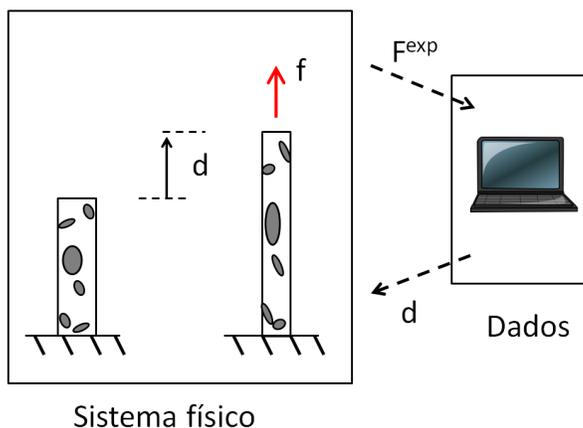


Figura 3.1: Ensaio do componente mecânico  $\mathcal{B}$ .

Considere um ensaio mecânico como o representado, de forma ilustrativa, na figura (3.1). Suponha que, após as devidas análises, verifica-se que um modelo da forma da Eq. (3.0.1) descreve de forma acurada o comportamento mecânico do componente mecânico  $\mathcal{B}$ . Adicionalmente, do ponto de vista da instrumentação do ensaio mecânico, existe a possibilidade de: (i) prescrever um histórico de deslocamentos  $\{d(t_1), \dots, d(t_N)\}$  e (ii) medir a força de reação do corpo  $\mathcal{B}$ , aqui denominada por  $\{F^{exp}(t_1), \dots, F^{exp}(t_N)\}$ .

Vale ressaltar o fato de que todos os processos de observação têm como saída uma variável incerta. A incerteza está associada aos procedimentos de medição, técnicas de processamento, efeitos do ambiente, efeitos de contorno etc. Desta forma, com o intuito de modelar estes efeitos, considere que a relação entre a força medida  $F^{exp}$  e o deslocamento prescrito  $d$  possa ser representada pelo modelo de observação com erro aditivo dado pela Eq. (3.0.2)

$$F^{exp} = k d + \nu, \quad (3.0.2)$$

na qual  $\nu$  é uma variável aleatória que descreve os erros de medição. Em particular, considera-se que  $\nu$  é uma variável aleatória com distribuição normal, média nula e com variância  $\sigma_\nu^2$ , ou seja,  $\nu \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\nu^2)$ .

É importante registrar que esse modelo probabilístico proposto para o ruído de medição servirá apenas para gerar um conjunto de dados  $F^{exp}$  que será usado na identificação do parâmetro do modelo. A estratégia de identificação aplicada neste capítulo é determinística, pois o procedimento para a estimação de  $k$  não envolve esse modelo probabilístico (ver seção 1.3).

Do ponto de vista da implementação de códigos computacionais que demandem o uso de uma variável aleatória  $X$ , estes podem ser construídos fazendo-se uso de funções equivalentes a geradores de números aleatórios. Por exemplo, a plataforma Matlab<sup>®</sup> possui funções para gerar números aleatórios com distribuição normal e distribuição uniforme, entre outras. Desta forma, um conjunto de realizações  $\{X^{(1)}, X^{(2)}, \dots\}$  da variável aleatória  $X$  pode ser gerado dentro dos códigos computacionais a partir destes geradores de números aleatórios. Sugere-se, por exemplo, que o leitor leia o *help* das funções *randn* e *rand* no Matlab<sup>®</sup> e verifique as características e detalhes destas funções.

A figura (3.2) apresenta quatro realizações por experimento da força  $F^{exp}$  geradas a partir do modelo mostrado na Eq. (3.0.2). Repare que o código utilizado para gerar os dados do experimento 1 e do experimento 2 é o mesmo; veja código 3.1 do Anexo A.1. Entretanto, os pontos denominados experimentais são diferentes nos dois gráficos gerados, como pode ser observado na figura.

Ainda com relação ao ensaio mecânico apresentado na figura (3.1), uma situação bastante corriqueira é aquela na qual a equipe de engenharia busca informações acerca da rigidez  $k$  do componente. Esta busca pode se dar porque o componente  $\mathcal{B}$  foi fabricado com um material com propriedades que não estão tabeladas, ou até mesmo porque o material possui certo nível de heterogeneidade e, desta forma, busca-se estimar um valor de rigidez  $k$  equivalente, por exemplo.

Primeiramente, o valor do parâmetro da rigidez  $k$  será estimado a partir do conjunto de dados  $\{d(t_1), \dots, d(t_N)\}$  e  $\{F^{exp}(t_1), \dots, F^{exp}(t_N)\}$  usando o método dos mínimos quadrados. Essa estratégia é determinística e o estimador que será obtido é pontual (ver seção 1.3). Para tal, considere a organização dos dados na forma vetorial como mostrado na Eq. (3.0.3)

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} k = \begin{bmatrix} F_1^{exp} \\ F_2^{exp} \\ \vdots \\ F_N^{exp} \end{bmatrix}, \quad (3.0.3)$$

onde adotou-se a notação simplificada  $F^{exp}(t_r) = F_r^{exp}$  e  $d(t_r) = d_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, N$ . A Eq. (3.0.3) pode ainda ser reescrita como segue

$$[A]k = \mathbf{F}^{exp}, \quad (3.0.4)$$

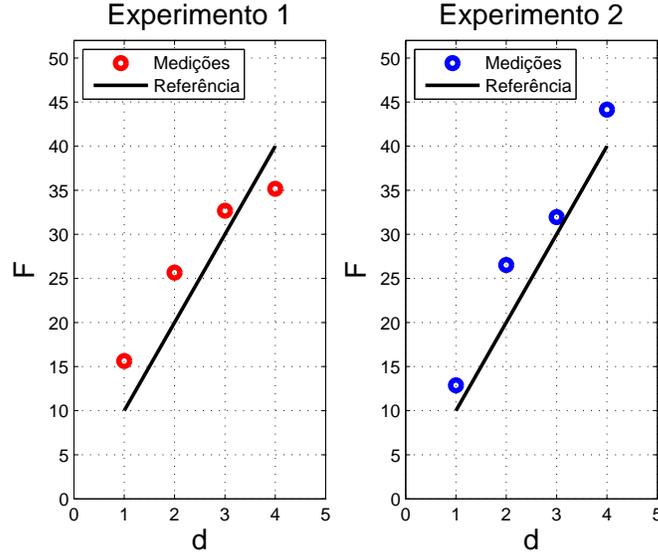


Figura 3.2: Modelo de referência com quatro pontos experimentais para a força.

onde

$$[A] = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}^{exp} = \begin{bmatrix} F_1^{exp} \\ F_2^{exp} \\ \vdots \\ F_N^{exp} \end{bmatrix}. \quad (3.0.5)$$

Optou-se por usar a notação matricial  $[A]$  para considerar o caso mais genérico, em que mais de um parâmetro deve ser estimado e  $[A]$  tem mais do que uma coluna. O sistema linear apresentado na Eq. (3.0.4) pode ser resolvido através do método dos mínimos quadrados como segue

$$\hat{k} = ([A]^T[A])^{-1}[A]^T \mathbf{F}^{exp}, \quad (3.0.6)$$

na qual adota-se a convenção  $\hat{k}$  para denotar a estimativa do parâmetro  $k$ . Repare que o valor estimado da rigidez  $\hat{k}$  depende da observação do conjunto de dados experimentais  $\mathbf{F}^{exp}$ . Cada conjunto de dados experimentais origina um valor estimado diferente. A expectativa é que, para um número suficiente grande de dados experimentais, o valor do parâmetro estimado tenha pouca variação. Os testes numéricos vão ajudar a verificar essa expectativa.

As figuras 3.3 e 3.4 apresentam resultados da identificação do parâmetro de rigidez  $k$  para cenários contendo  $N = 4$  pontos de medição e  $N = 20$  pontos de medição, respectivamente. Veja código 3.2 do Anexo A.1.

Destaca-se neste ponto o fato de que, neste problema, o aumento do número de pontos medidos de 4 para 20 levou a uma estimativa da rigidez  $\hat{k}$  capaz de gerar uma resposta do modelo mais próxima da resposta de referência.

Os autores sugerem que o leitor utilize o código 3.2 do Anexo A.1 para avaliar a estimativa da rigidez  $\hat{k}$  variando-se o número de pontos  $N$  e o nível de ruído nos dados. O leitor deve estar atento ao fato de que, mesmo quando se fixa  $N = N'$  e  $\sigma_\nu = \sigma'_\nu$ , em cada nova simulação os componentes do vetor  $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_1, \dots, \nu_N\}^T$

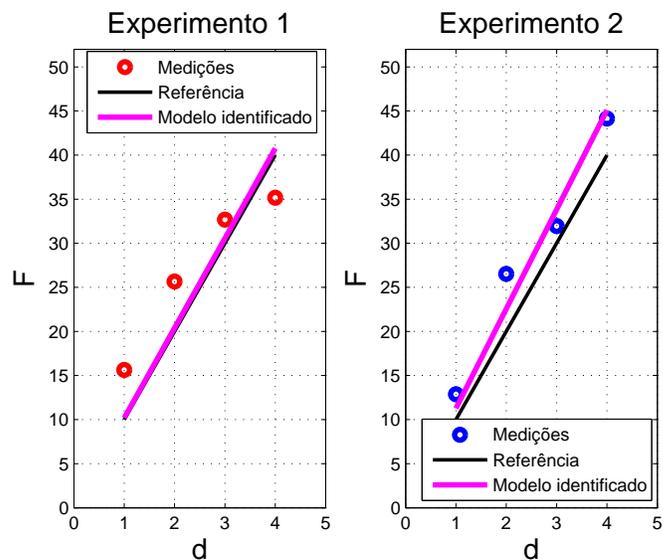


Figura 3.3: Modelo de referência com 4 pontos experimentais para a força, junto com o resultado do modelo calibrado.

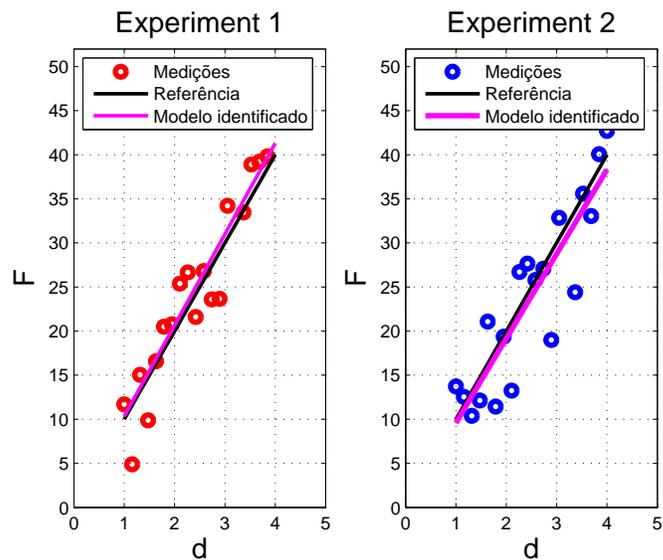


Figura 3.4: Modelo de referência com vinte pontos experimentais para a força, junto com o resultado do modelo calibrado.

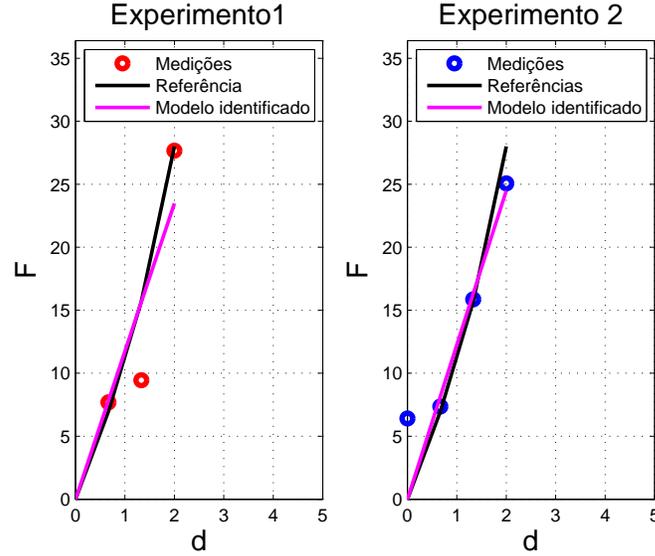


Figura 3.5: Modelo não-linear com quatro pontos experimentais para a força, junto com o resultado do modelo linear calibrado.

assumem valores distintos e, conseqüentemente, os componentes de  $\mathbf{F}^{exp}$  também vão mudar de um experimento para outro.

Usualmente o modelo escolhido para descrever o comportamento de um sistema em análise não é capaz de reproduzir perfeitamente os fenômenos observados. Considere, por exemplo, que a relação observada entre o deslocamento  $d$  do corpo  $\mathcal{B}$  e a força  $f$  seja dada por uma relação não-linear  $h : d \mapsto f$ , ou seja

$$f = h(d; k_1, \dots, k_{NP}) \tag{3.0.7}$$

na qual os parâmetros  $\{k_1, \dots, k_{NP}\}$  são parâmetros necessários para descrever o comportamento físico do sistema. O que aconteceria, por exemplo, se o comportamento mecânico do sistema  $\mathcal{B}$  fosse representado adotando-se um modelo linear (ou linearizado) equivalente com estrutura dada por  $f = k_{eq} d$ ? Ainda, o que pode-se dizer a respeito de estimativas  $\hat{k}_{eq}$  desta rigidez equivalente? A seguir é apresentado um exemplo no qual o modelo utilizado não descreve de forma acurada o comportamento físico do sistema.

Considere uma situação para a qual a relação entre o deslocamento  $d$  do componente  $\mathcal{B}$  e a sua força de reação  $f$  seja descrita de forma acurada por um modelo cúbico como apresentada na Eq. (3.0.8)

$$f = h(d; k_1, k_2) = k_2 d + k_1 d^3, \tag{3.0.8}$$

na qual  $k_1$  e  $k_2$  são parâmetros de rigidez. Entretanto, suponha que a equipe de engenharia optasse por adotar um modelo preditivo linear para descrever o comportamento mecânico de  $\mathcal{B}$ . Ou seja, a formulação apresentada nas Eqs. (3.0.3 a 3.0.6) serão utilizadas. Isto é, do ponto de vista prático, busca-se uma estimativa para a rigidez equivalente  $k_{eq}$  do modelo adotado  $f = k_{eq} d$ .

As figuras (3.5) e (3.6) apresentam realizações para cenários contendo  $N=4$  e  $N=20$  pontos de medição, respectivamente. Veja código 3.3 do Anexo A.1.

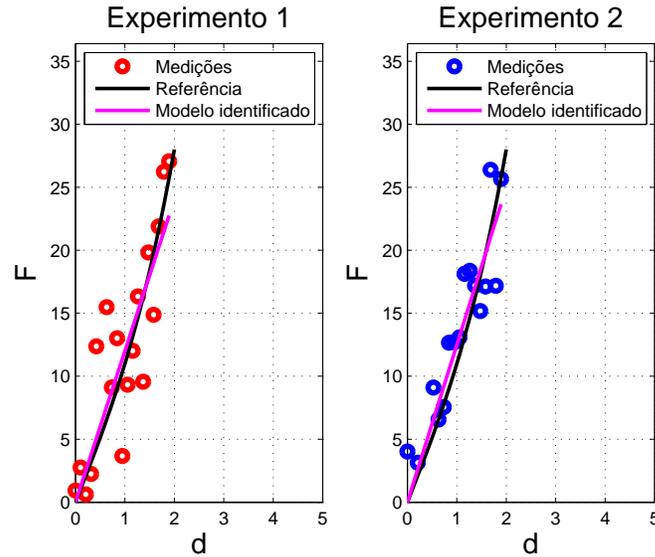


Figura 3.6: Modelo de referência com vinte pontos experimentais para a força, junto com o resultado do modelo linear calibrado.

Os resultados da identificação indicam uma boa aproximação entre a resposta medida e a resposta fornecida pelo modelo. Note que, para esta análise em particular, o regime de operação do sistema  $\mathcal{B}$  ( $d \leq 2$ ) permitiu a adoção de um modelo linear equivalente sem maiores prejuízos referentes à acurácia das predições. Entretanto, o domínio de aplicação do modelo linear equivalente fica dependente do regime de operação do sistema  $\mathcal{B}$ . Ou seja, a validade das predições fornecidas pelo modelo equivalente pode cair para situações de operação nas quais o deslocamento  $d$  não se encontra dentro da faixa indicada nas figuras (3.5) e (3.6).

Considere, por exemplo, os mesmos procedimentos para a estimação da rigidez equivalente  $k_{eq}$  agora com um cenário no qual o deslocamento  $d \in [0, 4]$ . As figuras (3.7) e (3.8) apresentam os resultados da identificação para  $N=4$  e  $N=20$  pontos de medição, respectivamente. Nas figuras (3.7) e (3.8) verifica-se que, para o intervalo  $0 \leq d \leq 4$ , existe um certo nível de discrepância entre as predições fornecidas pelo modelo equivalente e os dados experimentais. Diante deste cenário, a equipe de engenharia deve tomar uma decisão a respeito dos procedimentos futuros, tais como a adoção de uma nova estrutura de modelo e refazer as análises ou até mesmo considerar que as discrepâncias observadas estão dentro de uma faixa considerada como aceitável para fins da aplicação de interesse. Independente da escolha, o comportamento não linear de  $\mathcal{B}$  não poderá ser ignorado dependendo das condições de operação do componente.

## Exercícios

*Exercício 1: execute algumas vezes o código 3.2 do Anexo A.1 variando o número de pontos  $N$  e o desvio padrão da medição. Avalie a variação dos resultados obtidos, dependendo da amostra de força sorteada.*

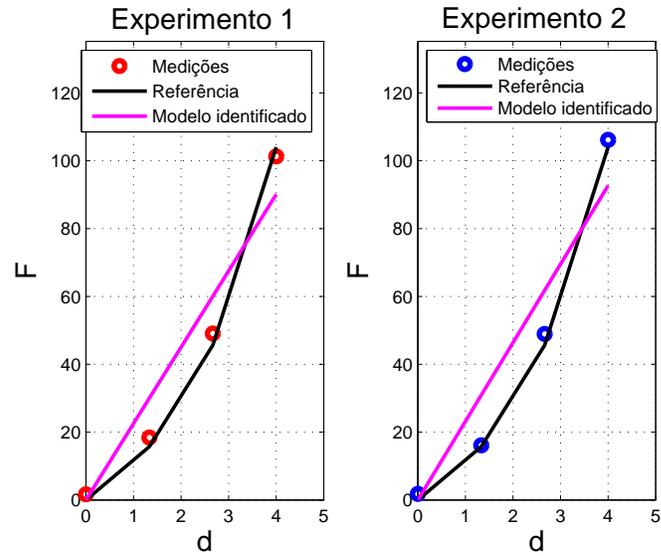


Figura 3.7: Modelo de referência com quatro pontos experimentais para a força, junto com o resultado do modelo linear calibrado.

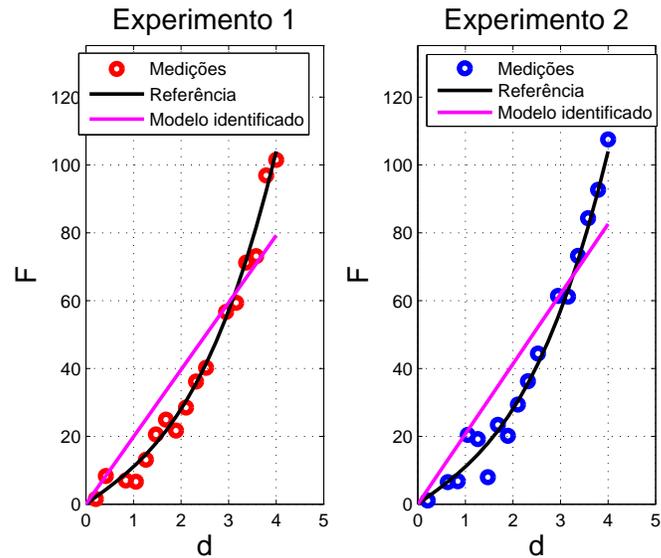


Figura 3.8: Modelo de referência com vinte pontos experimentais para a força, junto com o resultado do modelo linear calibrado.

*Exercício 2: execute algumas vezes o código 3.3 do Anexo A.1 com o número de pontos  $N = 10$ . Calcule o erro médio quadrático entre a previsão do modelo linear e os experimentos simulados a partir da relação não linear. Verifique como esse erro aumenta na medida em que o domínio de  $d$  aumenta.*

*Exercício 3: execute 10 vezes o código 3.2 do Anexo A.1 com o número de pontos  $N = 3$  e guarde os 10 resultados estimados para a rigidez. Calcule a variância dessa amostragem da rigidez. Refaça esse cálculo com  $N = 10$ .*

## Capítulo 4

# Problema Dinâmico

Neste capítulo serão consideradas análises de propagação de incertezas e identificação a partir de um modelo dinâmico. Considere, por exemplo, o componente mecânico  $\mathcal{B}$  representado de forma ilustrativa na figura (4.1). Adicionalmente, suponha que, a partir da avaliação das condições de operação de  $\mathcal{B}$ , a equipe de engenharia conclua que a adoção de um modelo discreto com 1 GDL seja razoável para as análises de projeto. Desta forma, a equação de movimento do sistema  $\mathcal{B}$  é dada como segue

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t), \quad (4.0.1)$$

sendo  $m$  a massa,  $c$  o coeficiente de amortecimento,  $k$  a rigidez do sistema, e  $f$  a força de excitação.

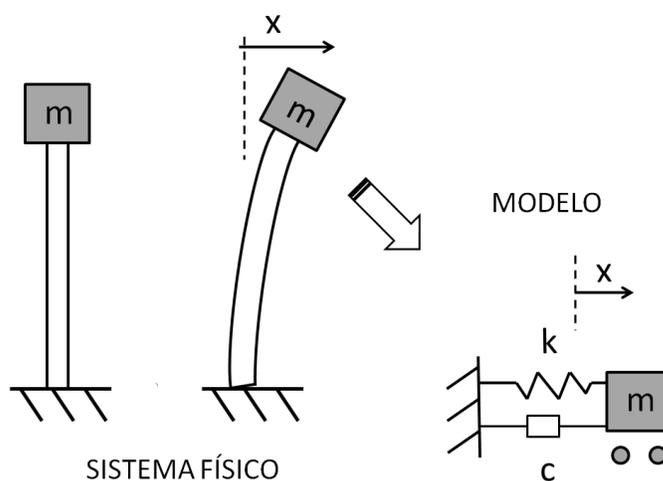


Figura 4.1: Sistema mecânico dinâmico.

A seguir serão apresentadas análises utilizando-se dados do comportamento do sistema no domínio do tempo e no domínio da frequência.

## 4.1 Análise no domínio da frequência

As análises no domínio da frequência serão feitas utilizando-se a Função de Resposta em Frequência (FRF) do sistema. Aplicando a transformada de Fourier na Eq. (4.0.1), obtém-se

$$(-\omega^2 m + \omega c j + k) \tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega), \quad (4.1.2)$$

sendo  $j = \sqrt{-1}$  e  $\tilde{x}(\omega)$  a notação adotada para a transformada de Fourier da função  $x(t)$ . A FRF do sistema  $h(\omega)$  é obtida a partir da razão entre a transformada de Fourier da saída do sistema  $\tilde{x}(\omega)$  e da transformada de Fourier da entrada do sistema  $\tilde{f}(\omega)$ , ou seja

$$h(\omega) = \frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} = (-\omega^2 m + \omega c j + k)^{-1} = \frac{1}{m} [(\omega_n^2 - \omega^2) + 2\zeta \omega_n \omega j]^{-1}, \quad (4.1.3)$$

sendo  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  a frequência natural do sistema não amortecido e  $\zeta = c/(2m\omega_n)$  o fator de amortecimento modal do sistema.

Primeiramente será investigado o efeito de incertezas no parâmetro  $\zeta$  na resposta do sistema. Desta forma,  $\zeta$  será modelado como uma variável aleatória  $\Xi$ . Como consequência, o deslocamento do sistema, para um dado instante  $t = t_s$  retorna uma variável aleatória  $X(t_s, \zeta)$ . Ademais, dada a definição da FRF do sistema, esta também retorna, para cada frequência  $\omega = \omega_r$ , uma variável aleatória  $H(\omega_r, \zeta)$ . Com relação à FRF, de forma geral, tem-se que:

$$H(\omega, \Xi) = \frac{\tilde{X}(\omega, \Xi)}{\tilde{f}(\omega)} = \frac{1}{m} [(\omega_n^2 - \omega^2) + 2\Xi \omega_n \omega j]^{-1}. \quad (4.1.4)$$

Observe que a Eq. (4.1.4) representa o modelo probabilístico completo do sistema. Entretanto, diante do interesse de se determinar, por exemplo, o valor médio ou a variância de  $H(\omega_r)$ , faz-se necessário levantar informações acerca do parâmetro incerto  $\Xi$ . A seguir considerar-se-á uma distribuição para  $\Xi$  e será feita a análise do impacto da incerteza no coeficiente de amortecimento modal  $\zeta$  sobre a FRF do sistema mostrado na figura (4.1). Veja código 4.1 do Anexo A.2. Esse código principal usa o código secundário 4.2 para calcular a FRF.

A Fig. 4.2 apresenta  $N_{mc} = 400$  realizações de Monte Carlo para a FRF  $H(\omega, \Xi)$  na qual o fator de amortecimento modal foi modelado como sendo uma variável aleatória com distribuição uniforme, mais precisamente  $\Xi \sim UNIF(0.05, 0.20)$ . A curva vermelha mostra o resultado fornecido pelo modelo para o menor valor do fator de amortecimento ( $\zeta = 0.05$ ) e a curva verde o resultado para o maior ( $\zeta = 0.20$ ). A Fig. 4.3 mostra o valor esperado de  $|H(\omega, \Xi)|$  e o envelope de probabilidade de 98%, estes últimos sendo uma forma mais compacta de apresentar o resultado do conjunto de 400 realizações. A construção do envelope de probabilidade é feita a partir do cálculo dos percentis da amostra de  $X(t)$  (ver seção 2.10).

Objetivando-se mensurar, de forma resumida, o impacto da incerteza de uma variável de projeto  $Y$  na resposta fornecida por um modelo  $Z = g(Y)$ , a equipe de engenharia deve escolher uma métrica adequada. Por exemplo, uma alternativa interessante pode ser a utilização de análises envolvendo o coeficiente de variação das variáveis aleatórias envolvidas. Veja a definição do coeficiente de variação no capítulo 2.

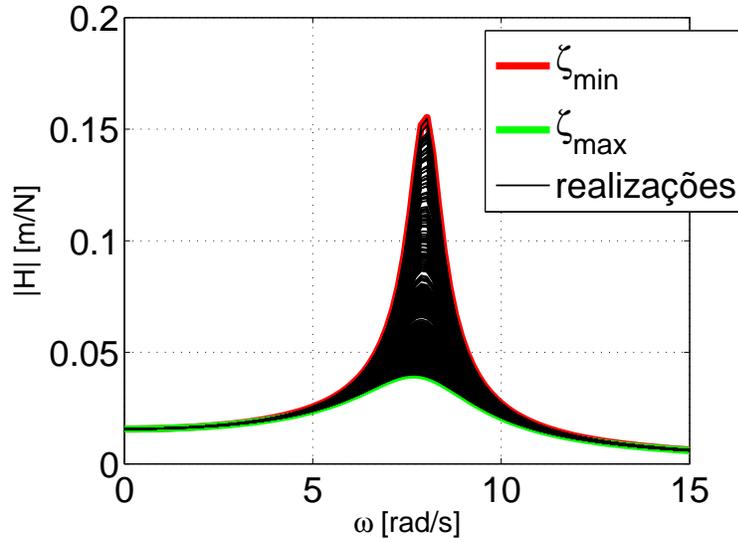


Figura 4.2: FRF aleatória, considerando incerteza no fator de amortecimento modal  $\Xi \sim UNIF(0.05, 0.20)$ .

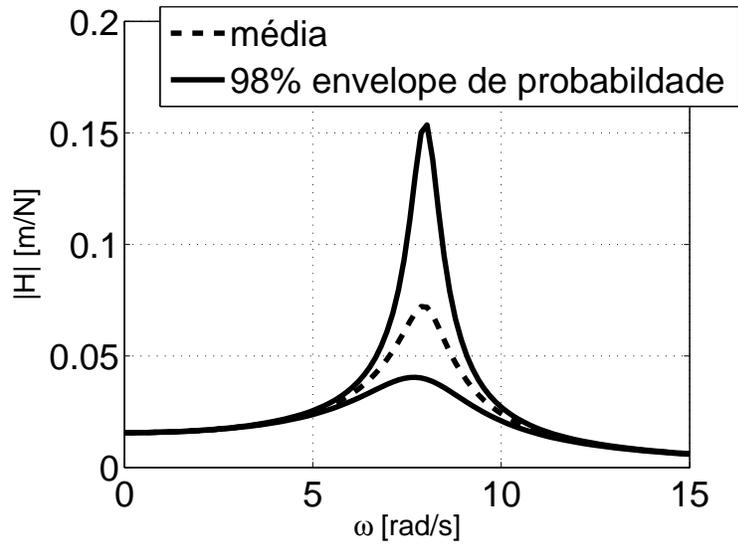


Figura 4.3: FRF aleatória, considerando incerteza no fator de amortecimento modal  $\Xi \sim UNIF(0.05, 0.20)$ .

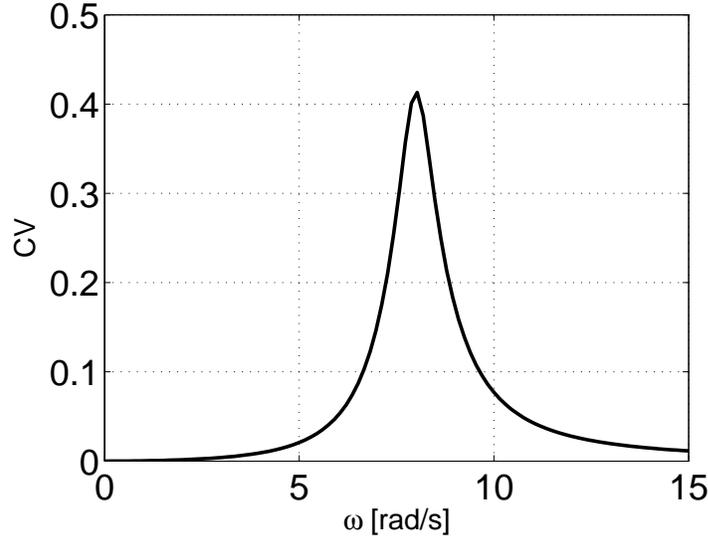


Figura 4.4: Coeficiente de variação da resposta, considerando incerteza no fator de amortecimento modal  $\Xi \sim UNIF(0.05, 0.20)$  e com  $CV_\zeta = 0.35$ .

No caso do problema em questão, dada a escolha feita para a distribuição do fator de amortecimento modal como sendo  $\Xi \sim UNIF(\zeta_{min}, \zeta_{max})$ , tem-se que  $CV_\zeta$  possui solução analítica dada como segue

$$CV_\zeta = \frac{2}{\sqrt{12}} \frac{(\zeta_{max} - \zeta_{min})}{(\zeta_{min} + \zeta_{max})}. \quad (4.1.5)$$

e, para a distribuição escolhida, tem-se que  $CV_\zeta = 0.35$ . Por fim, considere, a seguir, as análises das realizações da FRF do sistema apresentado na Fig.(4.1).

A Fig. 4.4 mostra o coeficiente de variação da FRF na banda  $[0, 15]$  rad/s. Note que apenas em uma estreita banda de frequência,  $[7.7, 8.3]$  rad/s, há uma amplificação da incerteza, ou seja, a incerteza da resposta é maior do que a incerteza do fator de amortecimento modal  $\zeta$ . Do ponto de vista do comportamento mecânico do sistema observa-se que, a partir das Fig.(4.2) e (4.3), o mesmo opera em regime aproximadamente quase estático no intervalo  $\omega \in [0, 4]$  rad/s e, desta forma, o fator de amortecimento deve ter pouca influência na sua resposta dinâmica. Este fato pode ser comprovado na Fig.4.4 a qual mostra que o CV da FRF é menor do que 1% na banda de frequência  $[0, 4]$  rad/s ao passo que o CV de  $\Xi$  é 35%. A razão entre o CV da FRF para qualquer frequência  $\omega \in [0, 4]$  rad/s e o CV de  $\Xi$  é menor ou igual a 0.029.

Agora considere o interesse na análise da FRF avaliada em uma dada frequência  $\omega'$ . Considere, por exemplo,  $\omega' = 7.4$  rad/s nas FRFs apresentadas nas Fig.(4.2) e (4.3). Diante do conjunto das realizações  $\{H(\omega', \zeta^{(1)}), \dots, H(\omega', \zeta^{(N_{mc})})\}$ , a equipe de engenharia pode optar tanto por uma análise através das estatísticas apresentadas nas Eq.(2.7.18) e (2.7.19), por exemplo, ou optar por uma estratégia de análise que forneça *informações aproximadas* acerca da distribuição da variável aleatória  $H(\omega', \Xi)$ . Neste contexto, uma possibilidade é a análise do histograma do valor absoluto das realizações  $\{|H(\omega', \zeta^{(1)})|, \dots, |H(\omega', \zeta^{(N_{mc})})|\}$ .

A Fig. 4.5 mostra o histograma da FRF em  $\omega' = 7.4$  rad/s. Repare que o

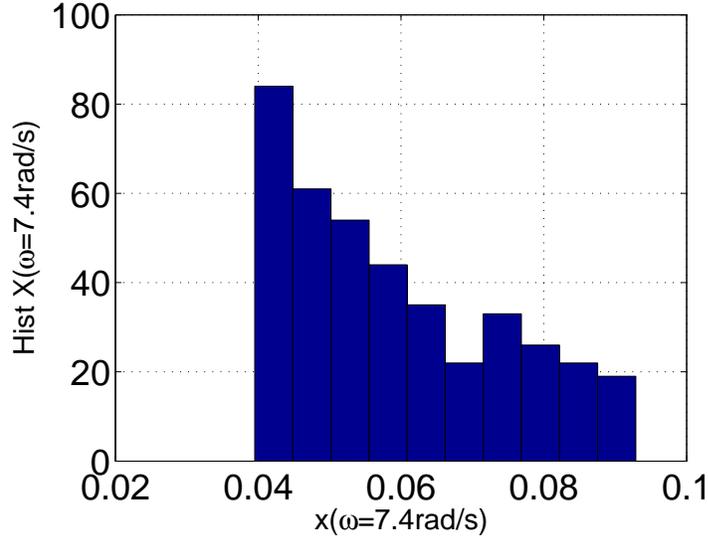


Figura 4.5: Histograma da FRF em  $\omega = 7.4$  rad/s, considerando incerteza no fator de amortecimento modal  $\Xi \sim UNIF(0.05, 0.20)$ .

suporte do histograma apresentado na Fig.(4.5) deve representar as informações presentes na Fig.(4.2) em  $\omega' = 7.4$  rad/s. Com relação à transformação da variável aleatória de entrada  $\Xi$  para a variável aleatória de saída  $H(\omega', \Xi)$ , ressalta-se que esta é não linear. Note que o histograma da FRF em  $\omega' = 7.4$  rad/s é assimétrico, ao contrário da distribuição da variável aleatória de entrada  $\Xi$ , a qual é simétrica e uniforme.

Um tópico importante nos processos de construção de modelos em engenharia estrutural é a descrição dos mecanismos de dissipação do sistema. Em particular, destaca-se o interesse na identificação dos parâmetros de modelos utilizados na descrição de amortecimento. Existem diversas técnicas populares para se identificar o fator de amortecimento de um sistema mecânico tais como apresentadas no livro texto de Ewins [14] e também técnicas para identificação de amortecimento viscoso como apresentadas no artigo de revisão de Phani e Woodhouse [28]. Mas essas técnicas estão fora do escopo deste livro,

Considere o interesse de se obter estimativas do parâmetro  $\zeta$  (taxa de amortecimento) do sistema apresentado na Eq.(4.0.1) a partir de medições da FRF do sistema, aqui denominadas  $\{H^{exp}(\omega_1), \dots, H^{exp}(\omega_{N_e})\}$ . O conjunto de frequências  $\{\omega_1, \dots, \omega_{N_e}\}$  está associado à resolução em frequência do equipamento utilizado para a medição. Veja código 4.3 no Anexo A.2. Esse código principal usa os códigos secundários 4.2 (para calcular a FRF) e 4.4 (para calcular o erro entre a previsão numérica e a resposta experimental).

As análises de identificação do parâmetro  $\zeta$  serão feitas utilizando-se dados sintéticos. Desta forma, aqui será utilizada uma estratégia análoga a que foi utilizada no Capítulo (3) para a geração dos dados denominados experimentais. Dado um valor específico do fator de amortecimento modal  $\zeta$ , a relação entre a resposta do sistema  $H(\zeta, \omega_r)$  e a resposta denominada experimental foi obtida aqui a partir da relação:

$$H^{exp}(\omega_r) = H(\zeta, \omega_r)(1 + 0.15\nu_r), \quad (4.1.6)$$

sendo  $\nu_r \sim N(0, 1)$ . Note que a Eq.(4.1.6) não representa, de forma fidedigna, as incertezas associadas aos dados experimentais para FRF. As estimativas de FRFs são obtidas a partir do processamento dos sinais de força e de deslocamento medidos no laboratório/campo [14].

Registra-se novamente que esse modelo probabilístico proposto para o ruído de medição servirá apenas para gerar um conjunto de dados  $\{H^{exp}(\omega_1), \dots, H^{exp}(\omega_{N_e})\}$  que será usado na identificação do parâmetro do modelo. A estratégia de identificação é determinística, pois o procedimento para a estimação de  $k$  não envolve esse modelo probabilístico (ver seção 1.3).

Com relação à identificação de  $\zeta$ , esta busca é formulada como um problema de otimização dado como segue:

$$\hat{\zeta} = \operatorname{argmin}_{\zeta \in \mathcal{D}} \sum_{r=1}^{N_e} (|H^{exp}(\omega_r)| - |H(\zeta, \omega_r)|)^2, \quad (4.1.7)$$

sendo  $\mathcal{D}$  o conjunto de busca viável para o parâmetro  $\zeta$ . A minimização da função apresentada na Eq.(4.1.7) pode ser feita utilizando-se diferentes abordagens. Em particular, no presente problema utilizou-se o método de Levenberg-Marquardt [25]. A função *lsqnonlin* do Matlab<sup>©</sup> foi utilizada para tal fim.

A Fig. 4.6 mostra a FRF para o sistema de referência, o sistema estimado e os dados sintéticos usados na identificação. Os dados sintéticos foram gerados considerando-se  $\zeta^{ref} = 0.125$  e obteve-se  $\hat{\zeta} = 0.137$ , diferença de aproximadamente 10%. Repare que o número de pontos experimentais observados na Fig. 4.6 é pequeno,  $N_e=10$ . A Fig. 4.7 mostra a FRF para o sistema de referência, o sistema estimado e dados sintéticos usados na identificação, considerando-se, desta vez, um conjunto com  $N_e = 100$  pontos experimentais. Obteve-se, então,  $\hat{\zeta} = 0.1252$ , o que leva a uma diferença percentual entre  $\zeta^{ref}$  e  $\hat{\zeta}$  de aproximadamente 0.2%.

Do ponto de vista de análise de projeto, poderia dizer-se que ambos os modelos identificados e apresentados nas Fig.(4.6) e (4.7) seriam aceitos pela equipe de Engenharia. Entretanto, faz-se necessário destacar dois pontos neste momento. O primeiro ponto refere-se às características dinâmicas do sistema descrito pela Eq.(4.0.1), o qual apresenta apenas um modo de vibração. Na prática, quase todos os sistemas de interesse serão modelados utilizando-se vários graus de liberdade, o que leva a FRFs contendo vários picos de ressonância e vales de antirressonância. O segundo ponto refere-se à estrutura do modelo preditivo  $H(\zeta, \omega_r)$  utilizado no problema de minimização em (4.1.7). Neste caso, a estrutura do modelo preditivo é a mesma do modelo utilizado para gerar os dados sintéticos  $H^{exp}(\omega_r)$ . Entretanto, na prática, a equipe de Engenharia sempre vai se deparar com o fato de que o modelo preditivo escolhido para a identificação não será capaz de reproduzir exatamente o sistema físico analisado. Com relação ao primeiro ponto, o capítulo 5 apresentará análises de identificação envolvendo um sistema com vários graus de liberdade. Com relação ao segundo ponto, a seguir será apresentada uma análise preliminar de identificação do parâmetro de amortecimento modal  $\zeta$  diante de incertezas no modelo preditivo.

Considere a situação para a qual os dados sintéticos são gerados utilizando-se  $\zeta^{ref} = 0.125$  e  $\omega_n^{ref} = 8$  rad/s e que a equipe de engenharia escolha um modelo preditivo que supõe que  $\omega_n$  é conhecido *a priori* e é adotado como sendo  $\omega_n = 7.2$  rad/s. Ora, diante de um cenário no qual existe um erro no modelo utilizado no processo de estimação, pode acontecer das curvas estimadas e os dados sintéticos ficarem, de certa forma, deslocadas. Ademais, os parâmetros a serem estimados irão carregar, provavelmente, o efeito do erro de modelagem através de estimativas

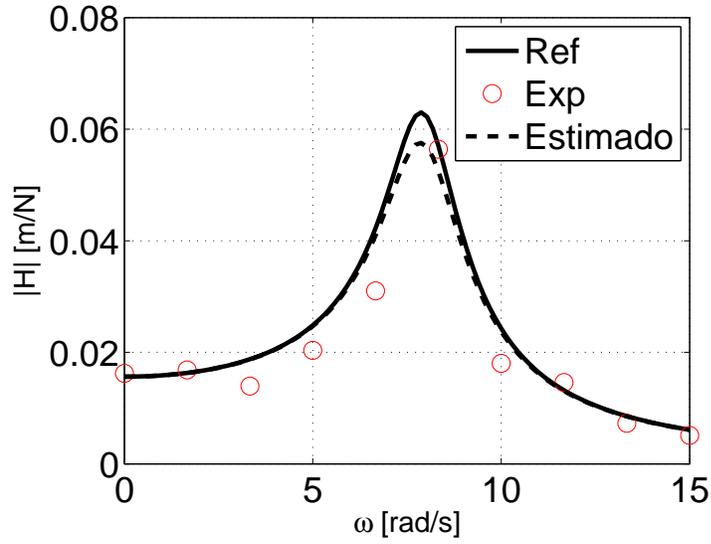


Figura 4.6: FRF - sistema de referência, sistema estimado e dados sintéticos (10 pontos) usados na identificação.

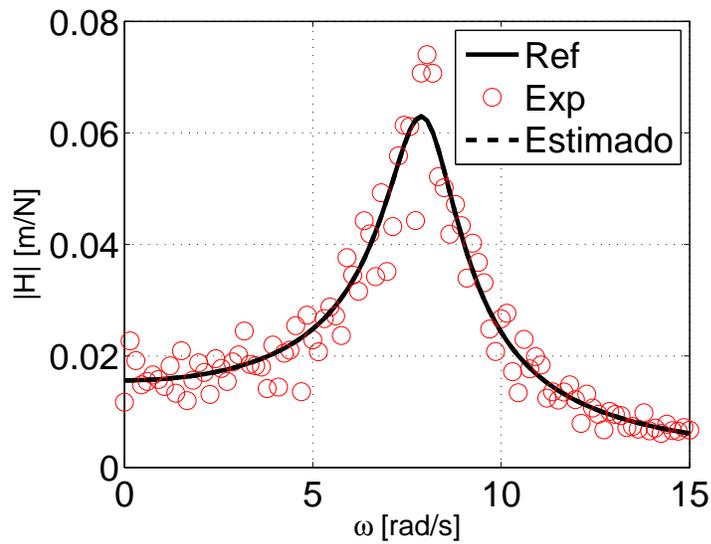


Figura 4.7: FRF - sistema de referência, sistema estimado e dados sintéticos (100 pontos) usados na identificação.

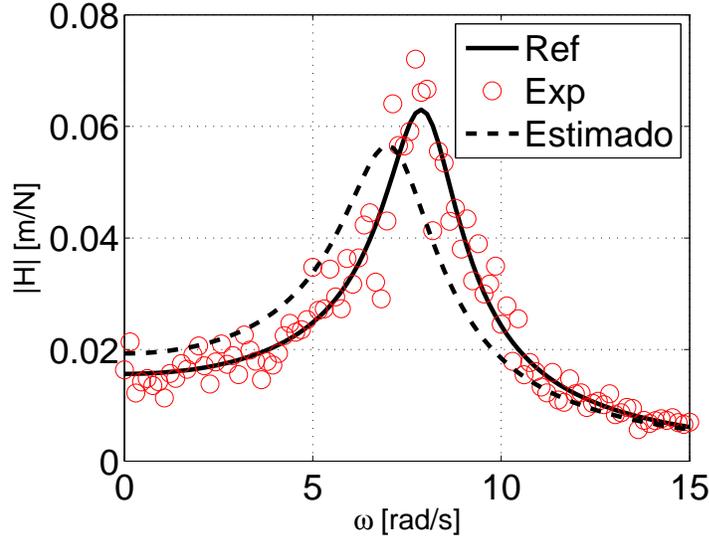


Figura 4.8: FRF - sistema de referência ( $\omega_n = 8$  rad/s), sistema estimado ( $\omega_n = 7.2$  rad/s) e dados sintéticos (100 pontos) usados na identificação.

tendenciosas (*bias*). A Fig. 4.8 mostra o resultado da identificação para o caso em questão com  $N_e=100$  pontos. Note como as curvas de referência e estimadas estão deslocadas. Ademais, como mencionado anteriormente, para compensar o erro do modelo, a estimativa fornecida pelo problema de otimização foi  $\hat{\zeta} = 0.1733$ , uma estimativa tendenciosa e com um erro percentual de aproximadamente 40%.

Do ponto de vista da equipe de Engenharia, a Fig. 4.8 deveria ser analisada com intuito de se verificar a viabilidade de se adotar o modelo calibrado. Nesse caso simples, caso a equipe avalie como inaceitável o nível de discrepância entre a FRF do modelo calibrado e os dados experimentais, deve-se então buscar alternativas que possibilitem a obtenção de um novo modelo calibrado. Por exemplo, neste caso, para melhorar a correlação entre a curva estimada e os dados sintéticos, basta incluir  $\omega_n$  no problema de identificação e reiniciar o processo de otimização como apresentado na Eq. (4.1.8)

$$\{\hat{\zeta}, \hat{\omega}_n\}^T = \operatorname{argmin}_{\zeta, \omega_n \in \mathcal{D}} \sum_{r=1}^{N_e} (|H^{exp}(\omega_r)| - |H(\zeta, \omega_n, \omega_r)|)^2, \quad (4.1.8)$$

Em situações mais complexas, o usuário deverá avaliar a necessidade de: (1) incluir outros parâmetros no problema de identificação, (2) considerar o uso de uma estrutura de modelo mais sofisticada, (3) revisar o projeto de experimentos, etc. [2].

## 4.2 Análise no domínio do tempo

Nessa seção serão abordados os problemas de propagação de incertezas e identificação do sistema apresentado na Eq. (4.0.1) através de análises no domínio do tempo. Para tal, considere a situação de vibração livre para qual a Eq. (4.0.1) é reescrita aqui sem o termo de forçamento:

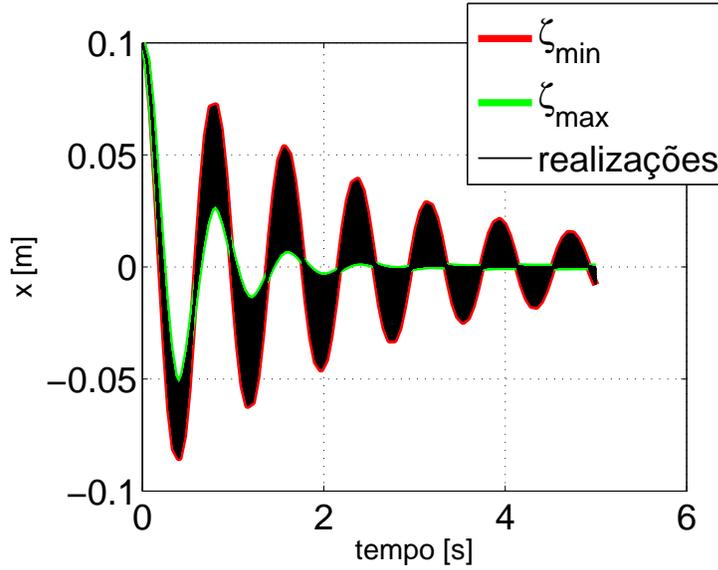


Figura 4.9: Resposta no tempo aleatória, considerando incerteza no fator de amortecimento modal  $\Xi \sim UNIF(0.05, 0.20)$ .

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad (4.2.9)$$

para a qual considera-se as condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = 0$ . Conforme feito na seção anterior, primeiramente apenas  $\zeta$  será modelado como uma variável aleatória  $\Xi$ . Como consequência a resposta no domínio do tempo será aleatória e dada como segue:

$$X(t) = x_0 \times \exp(-\Xi \omega_n t) \times \left( \cos(\omega_d t) + \Xi \frac{\omega_n}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right). \quad (4.2.10)$$

sendo  $\omega_d$  a frequência amortecida do sistema, dada por  $\omega_d = \sqrt{(1 - \zeta^2)} \omega_n$ .

A Fig. 4.9 mostra 400 realizações de Monte Carlo para a resposta no tempo aleatória para as quais o fator de amortecimento modal foi modelado como uma variável aleatória com distribuição uniforme, a saber,  $\Xi \sim UNIF(0.05, 0.20)$ . A curva vermelha mostra o resultado para o menor valor do fator de amortecimento e a curva verde o resultado para o maior. A Fig. 4.10 mostra o valor esperado e o envelope de probabilidade de 98%, uma forma mais compacta de apresentar o resultado das realizações. Veja código 4.5 no Anexo A.2. Esse código principal usa o código secundário 4.6 (para calcular a resposta no tempo).

Primeiramente considere a análise dos coeficientes de variação das variáveis aleatórias de entrada e saída. A Fig. 4.11 mostra o coeficiente de variação da resposta no tempo para cada instante, onde  $CV_\zeta = 0.35$ . Note que para certos instantes o valor do CV da resposta explode. Isso acontece porque a média da resposta no tempo nesses instantes se aproxima de zero. Portanto, esses instantes devem ser descartados da análise. Detalhando o CV da resposta no tempo, a Fig.4.12 mostra duas regiões para as quais a média da resposta não passa pelo valor zero. Observe-se que, neste caso, o CV aumenta com o tempo, saindo de um patamar de 30% no intervalo [2.2, 2.5]s para um patamar de 60% no intervalo [4.6, 4.8]s.

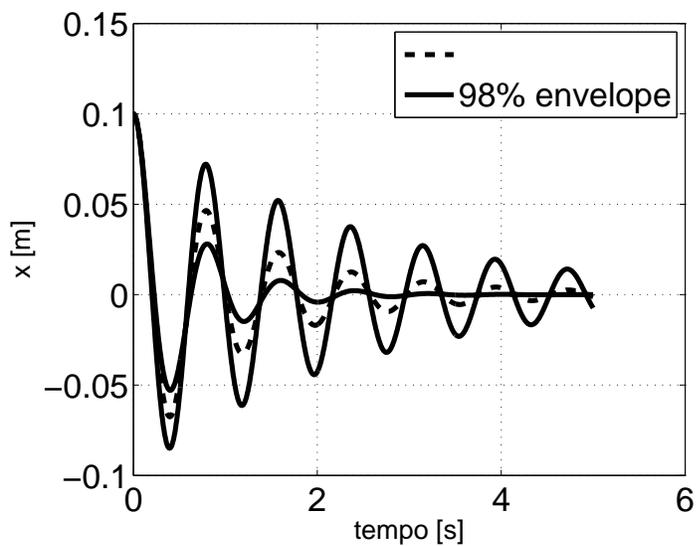


Figura 4.10: Resposta no tempo aleatória, considerando incerteza no fator de amortecimento modal  $\Xi \sim UNIF(0.05, 0.20)$ .

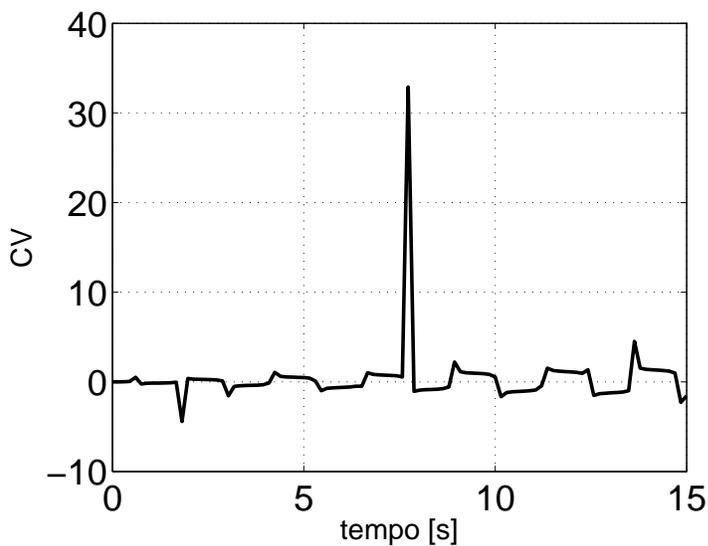


Figura 4.11: Coeficiente de variação da resposta, considerando incerteza no fator de amortecimento modal  $\Xi \sim UNIF(0.05, 0.20)$ .

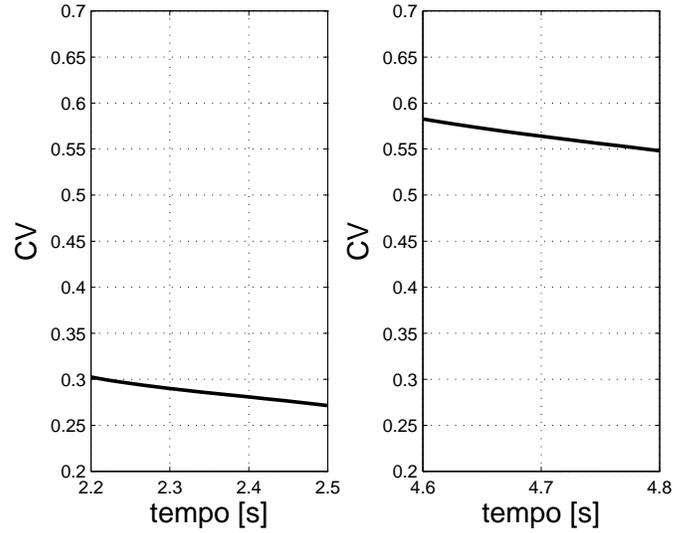


Figura 4.12: Zoom do coeficiente de variação da resposta para duas regiões distintas, considerando incerteza no fator de amortecimento modal  $\Xi \sim UNIF(0.05, 0.20)$ .

Retornando ao problema de estimação do parâmetro  $\zeta$  (taxa de amortecimento) a partir de um problema de minimização, onde se busca minimizar a distância entre a resposta temporal do modelo numérico e os dados experimentais. Aqui, uma vez mais, será feito o uso de dados sintéticos os quais são gerados a partir do modelo apresentado na Eq. (4.2.11) a seguir:

$$x^{exp}(t_r) = x(\zeta, t_r) + 0.01\nu_r; , \quad (4.2.11)$$

sendo  $\nu_r \sim N(0, 1)$ . Com relação à estimativa do fator de amortecimento modal  $\hat{\zeta}$ , a mesma é obtida a partir da solução do problema de otimização formulado na Eq. (4.2.12):

$$\hat{\zeta} = \operatorname{argmin}_{\zeta \in \mathcal{D}} \sum_{r=1}^{N_e} (x^{exp}(t_r) - x(\zeta, t_r))^2, \quad (4.2.12)$$

na qual  $N_e$  define o número de pontos experimentais considerados e  $\mathcal{D}$  é um conjunto de busca viável que deve ser definido pelo usuário a partir de restrições da física do problema assim como a partir de experiências prévias.

A Fig. 4.13 mostra a resposta no tempo para o sistema de referência, o sistema estimado e os dados sintéticos usados na identificação. Usou-se  $\zeta^{ref} = 0.125$  e obteve-se  $\hat{\zeta} = 0.1066$ , o que leva a um erro percentual de aproximadamente 15%. Para resolver o problema descrito pela Eq.(4.2.12) utilizou-se a função *lsqnonlin* do Matlab<sup>©</sup>. Veja código 4.7 no Anexo A.2. Esse código principal usa o código secundário 4.6 (para calcular a resposta no tempo) e 4.8 (para calcular o erro entre a resposta do modelo e os resposta experimental).

Repare que o número de pontos experimentais observados na Fig. 4.13 é pequeno,  $N_e = 16$ . Considere então o mesmo problema mas agora com  $N_e=100$  pontos. A Fig. 4.14 mostra a resposta no tempo para o sistema de referência, o sis-

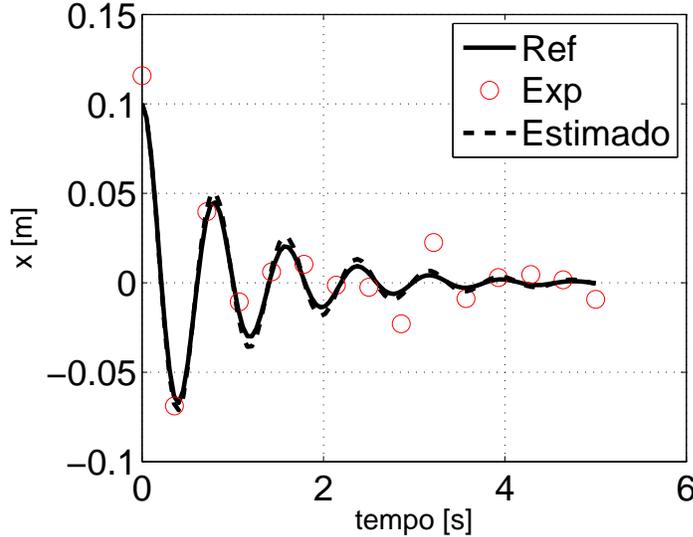


Figura 4.13: Resposta no tempo - sistema de referência, sistema estimado e dados sintéticos (15 pontos) usados na identificação.

tema estimado e os dados sintéticos usados na identificação com  $N_e=100$ . Obteve-se  $\hat{\zeta} = 0.1332$ , ou seja, um erro percentual de aproximadamente 7%.

Neste momento dois pontos merecem destaque. O primeiro ponto é o fato de que o aumento do número de pontos experimentais de  $N_e = 16$  na Fig. 4.13 para  $N_e = 100$  na Fig. 4.14 corresponde a um *aumento da resolução* temporal ou um *aumento da frequência de amostragem* do sinal visto que, em ambas figuras, o intervalo analisado é o mesmo, ou seja,  $[0, 5]$  seg. Com relação à estimativa  $\hat{\zeta}$ , o aumento da resolução temporal possibilitou uma redução do erro percentual de 15 % na Fig. 4.13 para 7% na Fig. 4.14. O segundo ponto de destaque deve-se ao fato de que uma análise detalhada da Fig. 4.14 nos indica que, muito provavelmente, na segunda metade do intervalo de tempo considerado o nível de poluição dos dados experimentais possui, no mínimo, a mesma ordem de magnitude da resposta do sistema. Diante deste cenário, a equipe de engenharia poderia optar por fazer uma *pré-seleção dos dados experimentais a serem considerados no problema de identificação*. Por exemplo, considere o problema da identificação de  $\zeta$  considerando apenas os dados presentes no intervalo  $[0, 2.5]$  s. A Fig. 4.15 apresenta o resultado obtido considerando  $t \in [0, 2.5]$  s. Obteve-se  $\hat{\zeta} = 0.1235$ , um erro percentual de aproximadamente 1%. A tabela 4.1 apresenta um resumo destes resultados. Por fim, o leitor é convidado a analisar os resultados da Tabela 4.1 a partir das óticas: (i) a *mudança do caso I para o caso II demanda disponibilidade de hardware* e (ii) a *mudança do caso II para o caso III demanda uma pré-análise pela equipe de engenharia*.

A Fig. 4.16 apresenta a função erro, dada por  $\sum_r (x^{exp}(t_r) - x(\zeta, t_r))^2$ , utilizada na Eq. (4.2.12). Repare que neste caso o problema de otimização é simples, onde a função erro/custo apresenta apenas uma variável e, adicionalmente, a função é convexa.

Da mesma forma como foi analisado o impacto de erros no modelo na identificação do fator de amortecimento modal  $\zeta$  com dados de FRFs, aqui será apresen-

Caso	Figura	Intervalo (s)	$N_e$	$\hat{\zeta}$	$\frac{ \hat{\zeta} - \zeta^{ref} }{\zeta^{ref}} \times 100 \%$
I	4.13	[0, 5]	16	0.1066	15
II	4.14	[0, 5]	100	0.1332	7
III	4.15	[0, 2.5]	50	0.1235	1

Tabela 4.1: Conjunto de dados observados.

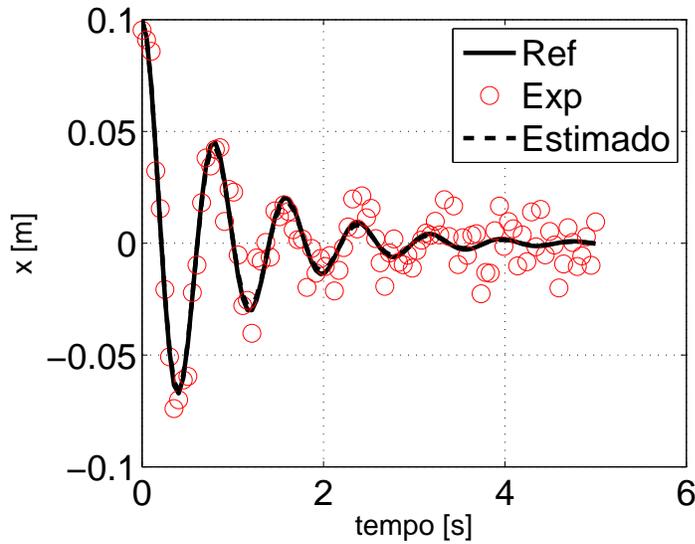


Figura 4.14: Resposta no tempo - sistema de referência, sistema estimado e dados sintéticos (100 pontos) usados na identificação (com erro na posição inicial).

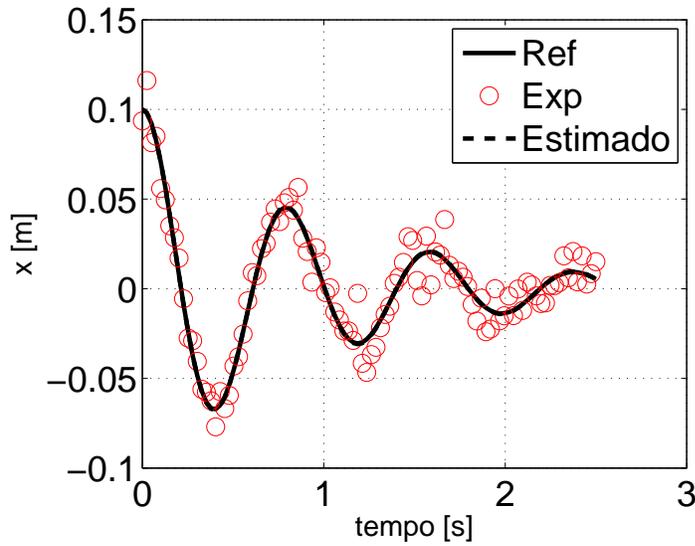


Figura 4.15: Resposta no tempo - sistema de referência, sistema estimado e dados sintéticos (100 pontos) usados na identificação (com erro na posição inicial).

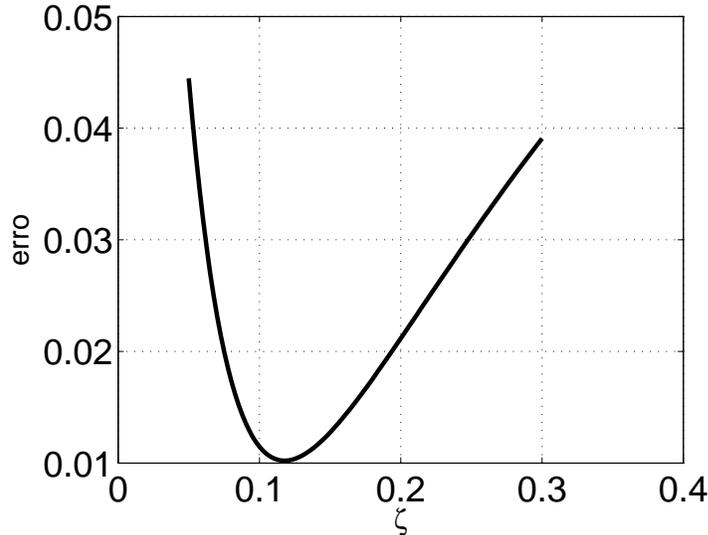


Figura 4.16: Função Erro/Custo em função de  $\zeta$ .

tada uma análise semelhante com dados no domínio do tempo. Para tal, o modelo que gera os dados sintéticos adota  $\zeta^{ref} = 0.125$  e  $x_0^{ref} = 0.10$  m e o modelo preditivo utilizado no processo de identificação supõe que a condição inicial de deslocamento é conhecida e é dada por  $x_0 = 0.15$  m. Veja código 4.7 no Anexo A.2. Esse código principal usa os códigos secundários 4.6 (para calcular a resposta no tempo) e 4.8 (para calcular o erro entre a previsão numérica e a resposta experimental).

A Fig. 4.17 apresenta os resultados deste processo. Note como as curvas de referência e estimadas estão deslocadas, principalmente nos instantes iniciais. Obteve-se  $\hat{\zeta} = 0.1691$ , um erro percentual de aproximadamente 35%. Ou seja, o amortecimento ficou superestimado para compensar as menores amplitudes dos dados experimentais nos instantes iniciais.

Já a Fig. 4.18 mostra o caso para o qual  $x_0 = 0.10$  m para o sistema real e  $x_0 = 0.05$  m para o modelo proposto. Obteve-se  $\hat{\zeta} = 0.0573$ , uma diferença de aproximadamente 54%. Ou seja, o amortecimento ficou subestimado para compensar as maiores amplitudes dos dados experimentais nos instantes iniciais.

## Exercícios

*Exercício 1: execute o código 4.1 (domínio da freq.) do Anexo A.2 considerando (a) apenas  $\omega_n$  incerto, (b) apenas  $\zeta$  incerto e (c) ambos  $\omega_n$  e  $\zeta$  incertos. Calcule os envelopes probabilísticos de 98%, 95% e 90%. Refaça a análise modificando os limites das variáveis aleatórias no código 4.1 ( $ximin, ximax, wxmin, wmax$ ). Modifique o código para considerar uma variável aleatória Gama ao invés de uma variável Uniforme;  $xi = \text{unifrnd}(ximin, ximax)$ ;  $wn = \text{unifrnd}(wnmin, wnmax)$ . OBS. pode-se gerar amostras de uma variável aleatória  $X$  que segue uma distribuição Gama com a função  $\text{gamrnd}(a, b)$  do Matlab<sup>©</sup>, sendo  $a = 1/CV_X^2$  e  $b = E[X] CV_X^2$ .*

*Exercício 2: execute o código 4.3 (identificação no domínio da freq.) do Anexo*

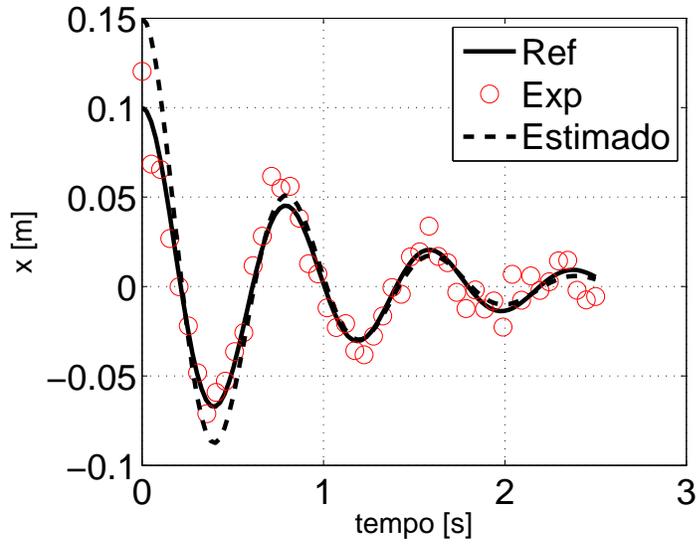


Figura 4.17: Resposta no tempo - sistema de referência, sistema estimado e dados sintéticos (100 pontos) usados na identificação.

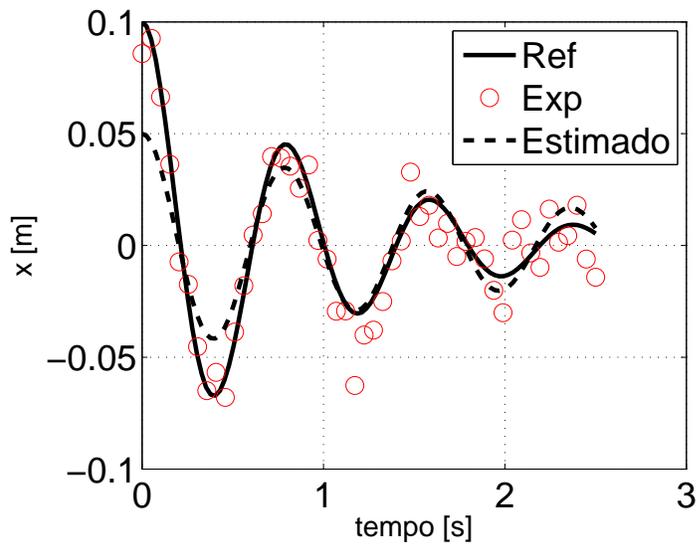


Figura 4.18: Resposta no tempo - sistema de referência, sistema estimado e dados sintéticos (100 pontos) usados na identificação.

*A.2 modificando a banda de frequência da análise ( $wmin, wmax$ ). Modifique o código para identificar simultaneamente  $\omega_n$  e  $\zeta$ .*

*Exercício 3: execute o código 4.5 (domínio da tempo) do Anexo A.2 considerando (a) apenas  $\omega_n$  incerto, (b) apenas  $\zeta$  incerto e (c) ambos  $\omega_n$  e  $\zeta$  incertos. Calcule os envelopes probabilísticos de 98%, 95% e 90%. Refaça a análise modificando os limites das variáveis aleatórias no código 4.5 ( $ximin, ximax, wxmin, wmax$ ). Modifique o código para considerar uma variável aleatória Gama ao invés de uma distribuição Uniforme;  $xi=unifrnd(ximin, ximax)$ ;  $wn=unifrnd(wnmin, wnmax)$ .*

*Exercício 4: execute o código 4.7 (identificação no domínio da tempo) do Anexo A.2 modificando o intervalo de tempo da análise ( $tmax$ ). Modifique o código para identificar simultaneamente  $\omega_n$  e  $\zeta$ .*

## Capítulo 5

# Abordagem Bayesiana

Os problemas de identificação de parâmetros e problemas inversos podem ser formulados a partir do paradigma Bayesiano. Esse paradigma se enquadra na estratégia de identificação estocástica mencionada na seção 1.3. Modelos probabilísticos são considerados, como será visto a seguir. O paradigma Bayesiano parte das seguintes premissas [22, 35]:

- Todas as variáveis incluídas no modelo são modeladas como variáveis aleatórias. Desta forma, dado um vetor de parâmetros de interesse  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ , estes são modelados como variáveis aleatórias da mesma forma que o vetor  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  contendo as observações/medições do sistema.
- O nível de incerteza associado a cada uma das variáveis envolvidas no modelo é descrito a partir de funções de densidade de probabilidade.
- A solução do problema de estimação dos parâmetros passa a ser a atualização da função densidade de probabilidade *priori*, definida para  $\boldsymbol{\theta}$ . A atualização é feita a partir de dados experimentais  $\mathbf{y}$  e da função densidade de probabilidade *priori*. A solução do problema corresponde à função de densidade de probabilidade *posteriori*  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ .

A figura 5.1 apresenta, de forma simplificada, os principais elementos do problema de identificação de parâmetros a partir do paradigma Bayesiano. Considere o processo de construção/calibração de um modelo computacional que será utilizado para descrever o comportamento do sistema físico  $\mathcal{B}$ . Adicionalmente, considere que: (1) temos acesso a um conjunto de medições  $\mathbf{y}$  do sistema e (2) este processo de construção/calibração se dará a partir da identificação do vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$  tal que a resposta preditiva do modelo seja dada por  $\mathbf{y}^m = \mathbf{y}^m(\boldsymbol{\theta})$ .

Dado que o vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$  e os dados medidos  $\mathbf{y}$  são modelados como variáveis aleatórias, a regra de Bayes pode ser utilizada para descrever a relação entre suas pdfs, a saber:

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \frac{\pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})}{\pi(\mathbf{y})}, \quad (5.0.1)$$

onde  $\pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$  é a função de verossimilhança (*likelihood*),  $\pi(\boldsymbol{\theta})$  é a função de densidade de probabilidade *priori* a qual descreve o estado atual de conhecimento a respeito de  $\boldsymbol{\theta}$ . Por fim,  $\pi(\mathbf{y})$  é a função densidade de probabilidade dos dados experimentais. Note que  $\pi(\mathbf{y})$  não passa de uma constante de normalização necessária para que

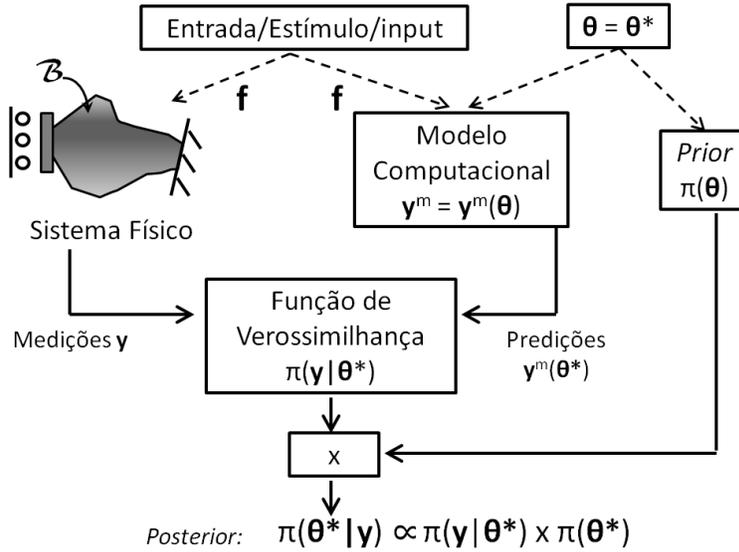


Figura 5.1: Paradigma Bayesiano para identificação de parâmetros.

$\pi(\theta|\mathbf{y})$  seja uma função densidade de probabilidade, cuja integral deve valer um. Mudanças no valor de  $\theta$  não modificam essa constante.

A Eq. (5.0.1) corresponde ao modelo probabilístico completo para a busca por *informações atualizadas* a respeito de  $\theta$  a partir de novas observações  $\mathbf{y}$ . Mais precisamente, da Eq. (5.0.1) e da figura 5.1, diz-se que as informações presentes na *posteriori*  $\pi(\theta|\mathbf{y})$  são obtidas conjugando-se: (1) as medições  $\mathbf{y}$  do sistema físico  $\mathcal{B}$ , (2) a estrutura do modelo adotado para descrever o comportamento de  $\mathcal{B}$ , ou seja, o mapeamento  $\theta \mapsto \mathbf{y}^m(\theta)$  e (3) o estado atual de conhecimento a respeito de  $\theta$  codificado, por sua vez, na *priori*  $\pi(\theta)$ .

Com relação à função de verossimilhança  $\pi(\mathbf{y}|\theta)$ , deve-se ressaltar que esta é uma pdf em  $\mathbf{y}$  dado um valor específico  $\theta = \theta^*$ , ou seja  $\pi(\mathbf{y}^*|\theta) : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$  e  $\int \pi(\mathbf{y}|\theta^*) d\mathbf{y} = 1$ . Entretanto, o leitor deve estar atento ao fato de que, para uma dada observação  $\mathbf{y} = \mathbf{y}^*$ ,  $\pi(\mathbf{y}^*|\theta)$  corresponde a uma função do parâmetro de interesse  $\theta$ , ou seja,  $\pi(\mathbf{y}^*|\theta) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ . Posto isto, a questão principal volta-se para o processo de construção da função de verossimilhança, o qual será apresentado a seguir.

Pode-se obter informações a respeito da mesma fazendo-se uso de um modelo de observação como apresentado a seguir. Considere que a relação entre os dados observados  $\mathbf{y}$  e as predições do modelo  $\mathbf{y}^m(\theta)$  possa ser descrita a partir de um modelo de observação com erro aditivo, a saber:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^m(\theta) + \boldsymbol{\nu}, \quad (5.0.2)$$

sendo  $\boldsymbol{\nu}$  um ruído aditivo, representado por um vetor aleatório. Ora, dado que  $\mathbf{y}$ ,  $\theta$  e  $\boldsymbol{\nu}$  são variáveis aleatórias, as mesmas estão relacionadas a partir de uma pdf conjunta  $\pi(\mathbf{y}, \theta, \boldsymbol{\nu})$  e, desta forma, podemos escrever:

$$\pi(\mathbf{y}|\theta) = \int \pi(\mathbf{y}, \boldsymbol{\nu}|\theta) d\boldsymbol{\nu} = \int \pi(\mathbf{y}|\theta, \boldsymbol{\nu})\pi(\boldsymbol{\nu}|\theta) d\boldsymbol{\nu}, \quad (5.0.3)$$

onde as relações de probabilidade condicional foram utilizadas. Adotando-se a hipótese de que  $\boldsymbol{\nu}$  e  $\boldsymbol{\theta}$  são variáveis aleatórias independentes tem-se que

$$\pi(\boldsymbol{\nu}|\boldsymbol{\theta}) = \pi(\boldsymbol{\nu}). \quad (5.0.4)$$

Se  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*$ , onde  $*$  representa uma realização específica do vetor de parâmetros e  $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^*$ , tem-se que, nesta situação,  $\mathbf{y} = \mathbf{y}^m(\boldsymbol{\theta}^*) + \boldsymbol{\nu}^*$ , implicando em:

$$\pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^*) = \pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\nu}^*) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}^m(\boldsymbol{\theta}^*) - \boldsymbol{\nu}^*). \quad (5.0.5)$$

sendo  $\delta(\cdot)$  a distribuição delta de Dirac para a qual tem-se que  $\int \delta(x - x_0)f(x)dx = f(x_0)$ . Em particular, se  $f(x) = 1$  então  $\int \delta(x - x_0)dx = 1$ . Observe a Eq. (5.0.2) para notar que se  $\boldsymbol{\theta}$  e  $\boldsymbol{\nu}$  são fixos,  $\mathbf{y}$  passa a ser fixo também. A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória  $X$  que tem valor fixo  $x^*$ , é dada pela distribuição delta de Dirac  $\pi(x) = \delta(x - x^*)$ . Nesse caso não existe incerteza no valor de  $x$ .

Desta forma, levando as Eqs. (5.0.4) e (5.0.5) na Eq. (5.0.3) tem-se que :

$$\pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*) = \int \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}^m(\boldsymbol{\theta}^*) - \boldsymbol{\nu})\pi(\boldsymbol{\nu})d\boldsymbol{\nu} = \pi_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\nu})|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{y}-\mathbf{y}^m(\boldsymbol{\theta}^*)} = \pi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y} - \mathbf{y}^m(\boldsymbol{\theta}^*)), \quad (5.0.6)$$

na qual utilizou-se a notação  $\pi_q(z)$  para indicar que a função de densidade de probabilidade  $\pi(q)$  está sendo avaliada no argumento  $z$ , ou seja,  $\pi_q(z) = \pi(q)|_{q=z}$ . A Eq. (5.0.5) destaca o fato de que a função de verossimilhança leva em conta a estrutura dos dados a partir de  $\pi_{\boldsymbol{\nu}}$ , a realização/medição em questão  $\mathbf{y}$  e a estrutura do modelo  $\boldsymbol{\theta} \mapsto \mathbf{y}^m$  avaliada no ponto de interesse  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*$ .

Se, por exemplo,  $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$  é tal que  $\boldsymbol{\nu} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{\boldsymbol{\nu}})$ , tem-se que:

$$\pi(\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \det(\Sigma_{\boldsymbol{\nu}})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^T \Sigma_{\boldsymbol{\nu}}^{-1} \boldsymbol{\nu}\right). \quad (5.0.7)$$

Se, ainda,  $\Sigma_{\boldsymbol{\nu}} = \sigma_{\boldsymbol{\nu}}^2 I_{n \times n}$ , a função de verossimilhança assume a seguinte forma

$$\pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_{\boldsymbol{\nu}}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{y}^m(\boldsymbol{\theta}^*))^T (\mathbf{y} - \mathbf{y}^m(\boldsymbol{\theta}^*))}{\sigma_{\boldsymbol{\nu}}^2}\right), \quad (5.0.8)$$

Com relação a função *priori*  $\pi(\boldsymbol{\theta})$ , esta deve ser construída a partir do conjunto de todas as informações disponíveis a respeito de  $\boldsymbol{\theta}$ . Por exemplo, considere um problema para o qual tem-se interesse na determinação de parâmetros de amortecimento de um modelo com 2 graus de liberdade utilizado para descrever o comportamento dinâmico de um componente mecânico  $\mathcal{B}$ . Adicionalmente, considere que a hipótese de *amortecimento proporcional* é adotada para a construção do modelo de  $\mathcal{B}$ . Neste caso, a caracterização do modelo de amortecimento adotado recai diretamente sobre o fator de amortecimento modal dos dois modos de  $\mathcal{B}$ , ou seja, para o problema de identificação tem-se que  $\boldsymbol{\theta} = \{\zeta_1, \zeta_2\}^T$ . Neste caso, apesar de não ser possível, a princípio, determinar um limite superior para  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$ , sabe-se que, sendo o sistema estável,  $\zeta_1 \geq 0$  e  $\zeta_2 \geq 0$ . Esta informação, do ponto de vista da *priori*  $\pi(\zeta_1, \zeta_2)$ , traduz-se como

$$\pi(\zeta_1, \zeta_2) = \{\pi_1(\zeta_1, \zeta_2) \mid \pi_1(\zeta_1, \zeta_2) = 0; \quad \forall \quad \zeta_1 < 0 \quad \text{ou} \quad \zeta_2 < 0\}. \quad (5.0.9)$$

Ademais, considere que, antes de dar início ao processo de identificação de  $\boldsymbol{\theta} = \{\zeta_1, \zeta_2\}^T$ , a equipe de engenharia observa, a partir das medições  $\mathbf{y}$ , que o sistema

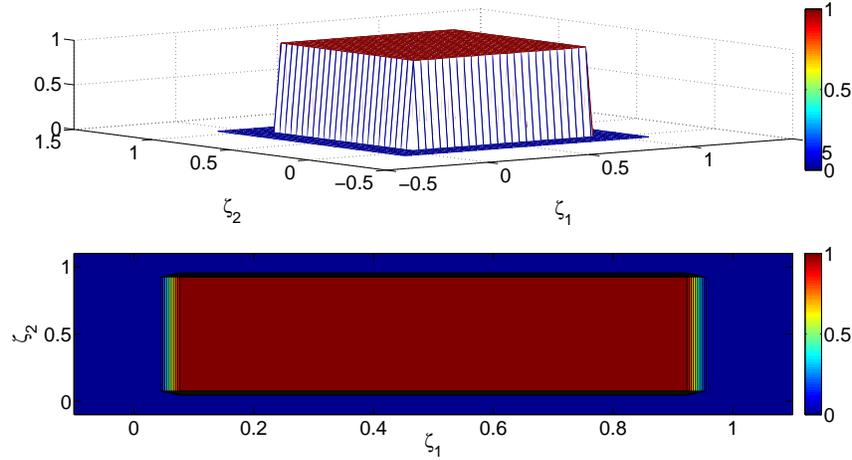


Figura 5.2: *Priori*  $\pi(\boldsymbol{\theta})$  uniforme em  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

é pouco amortecido apresentando, desta forma, um tempo de decaimento que engloba vários ciclos do movimento. Diante deste novo fato a equipe poderia, por exemplo, considerar que valores  $\zeta_1 > 1$  e  $\zeta_2 > 1$  seriam pouco prováveis de serem representativos para o modelo. A incorporação desta informação adicional poderia ser incluída na construção de uma *nova proposta* para a *priori*  $\pi(\zeta_1, \zeta_2) = \pi_2(\zeta_1, \zeta_2)$  como segue:

$$\pi_2(\zeta_1, \zeta_2) = \begin{cases} 0; & (\zeta_1, \zeta_2) \notin [0, 1] \times [0, 1] \\ \bar{\pi}(\zeta_1, \zeta_2); & (\zeta_1, \zeta_2) \in [0, 1] \times [0, 1] \text{ (definida pela equipe)} \end{cases} \quad (5.0.10)$$

na qual  $\bar{\pi}(\zeta_1, \zeta_2)$  deve refletir as expectativas da equipe de engenharia a respeito de  $\boldsymbol{\theta} = \{\zeta_1, \zeta_2\}^T$ . Por exemplo, a figura 5.2 representa uma *priori* uniforme na região  $[0, 1] \times [0, 1]$ , a figura 5.3 representa um *priori* com expectativas maiores para a região central de  $[0, 1] \times [0, 1]$  e, por fim, a figura 5.4 apresenta um *priori* com expectativas maiores para a região  $[0, 0.3] \times [0, 0.3]$ .

Por fim, destaca-se que na construção da *priori*  $\pi(\boldsymbol{\theta})$  pode-se utilizar, por exemplo, informações sobre  $\boldsymbol{\theta}$  obtidas através de (1) análises realizadas por outros grupos de pesquisa, (2) análises prévias realizadas pelo próprio grupo quando outro protótipo experimental estava disponível, (3) análises das informações obtidas de fornecedores/fabricantes, e etc.

A seguir serão apresentado dois problemas nos quais serão explorados os conceitos básicos do paradigma Bayesiano para identificação de parâmetros.

## 5.1 Problema da mola - caso estático

No capítulo (3) foi abordado o problema da identificação da rigidez  $k$  do sistema apresentado na figura 3.1 cujo modelo de observação é reproduzido aqui por conveniência, a saber

$$F^{obs} = k d + \nu, \quad (5.1.11)$$

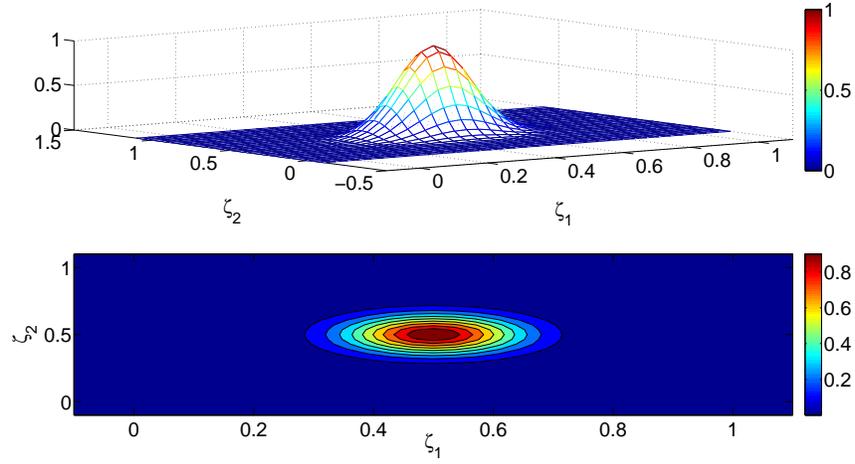


Figura 5.3: *Priori*  $\pi(\theta)$  com expectativas maiores para a região central de  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

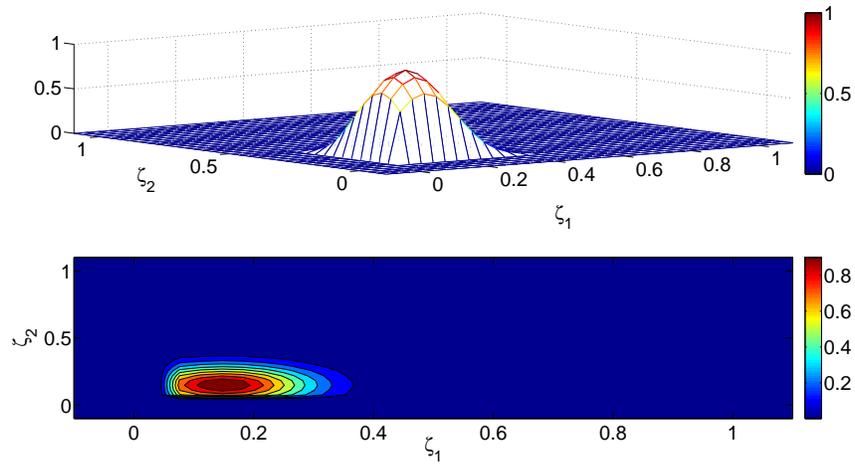


Figura 5.4: *Priori*  $\pi(\theta)$  com expectativas maiores para a região central de  $[0, 0.3] \times [0, 0.3]$ .

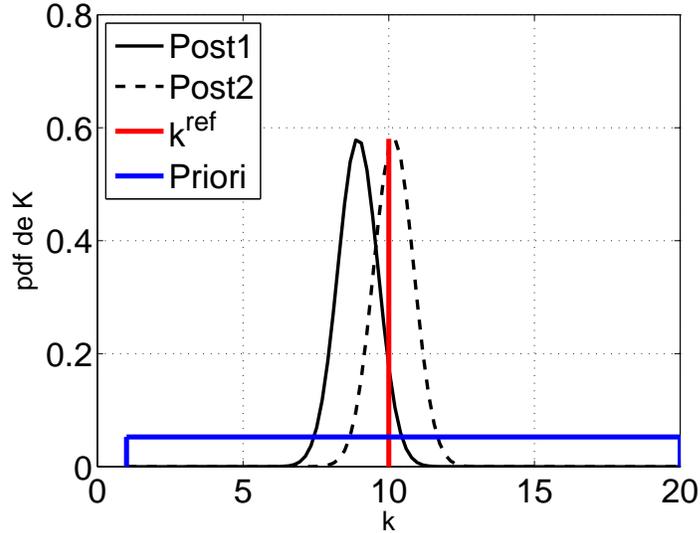


Figura 5.5: Funções de densidade de probabilidade *priori* (azul) e *posteriori* (preta) para dois conjuntos de duas observações, junto com o valor de referência (vermelho) usado para a constante de rigidez.

no qual considera-se que o deslocamento é prescrito  $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  e que tem-se acesso às medições da força  $\{F_1^{obs}, \dots, F_n^{obs}\}$ . Nesta seção, a identificação de  $k$  será feita a partir do paradigma Bayesiano.

Considere, primeiramente, a hipótese de que o erro de medição  $\nu$  é aditivo e que segue uma distribuição Gaussiana  $\nu \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_\nu^2 \mathbb{I}_{n \times n})$ . Neste caso, da Eq. (5.0.8) tem-se que a função de verossimilhança assume a seguinte forma:

$$\pi(\mathbf{y}|k) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\mathbf{F}^{obs} - [A]k)^T (\mathbf{F}^{obs} - [A]k)}{\sigma_\nu^2}\right), \quad (5.1.12)$$

Adicionalmente, considere uma distribuição *priori* Uniforme para a variável aleatória  $K \sim UNIF(1, 20)$ .

Para esta análise considerou-se um valor de referência para a rigidez como  $k^{ref} = 10$  N/m e que dois conjuntos, contendo duas observações  $\{F_1^{obs}, F_2^{obs}\}$  cada, estão disponíveis para a identificação. A análise de dois conjuntos de dados é apenas para verificar como muda o resultado da estimação para conjuntos de dados diferentes. Veja código 5.1 no anexo A.3.

A Fig. 5.5 mostra as pdfs *priori* (azul) e *posteriori* (preta) para os dois conjuntos de duas observações  $\{F_1^{obs}, F_2^{obs}\}$ . O valor de referência usado para a constante de rigidez,  $k^{ref} = 10$  N/m, está em vermelho. Repare que com apenas duas observações é possível aumentar o nível de informação a respeito da constante de rigidez. O leitor é convidado a analisar o suporte e magnitudes da *priori*  $\pi(k)$  e comparar com o suporte e magnitudes das duas pdfs *posteriori*  $\pi(k|\mathbf{F}^{obs})$ . O conjunto de dados observados se encontra na Tab. 5.1.

Para se obter um estimador pontual para a rigidez  $k$  pode-se, por exemplo, considerar o valor médio da pdf a *posteriori* dado por  $\bar{k} = \int k \pi(k|\mathbf{F}^{obs}) dk$  ou, ainda, o estimador de máximo a *posteriori* (MAP),  $\hat{k}_{MAP}$ . O MAP é o valor de  $k$  que gera o máximo valor da pdf a *posteriori*. Note que se a pdf a *posteriori*

$d$	$F_1^{obs}$	$F_2^{obs}$
1	7.0	4.9
4	36.3	42.0

Tabela 5.1: Conjunto de dados observados.

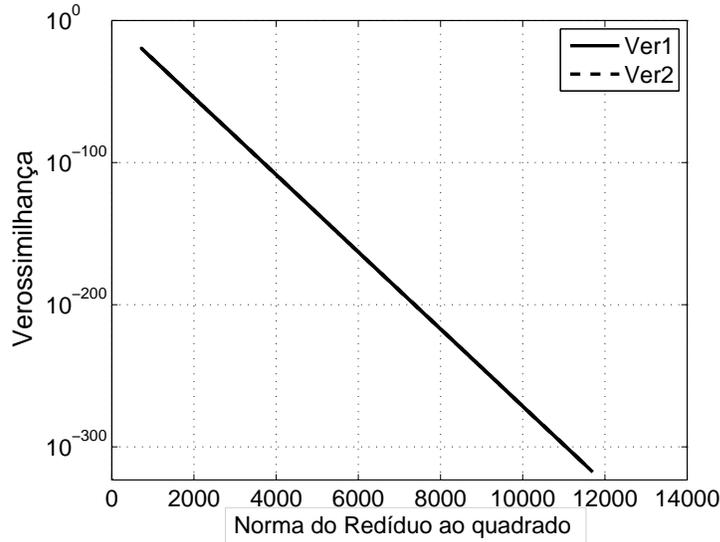


Figura 5.6: Análise de  $\log[\pi(\mathbf{F}^{obs}|k)]$  como função da norma da função resíduo  $\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{F}^{obs} - [A]k\|$ .

for simétrica e unimodal, o valor para esses dois estimadores coincidem. Vale notar também que, para o problema analisado (ruído aditivo Gaussiano e *priori* Uniforme) o estimador MAP terá mesmo valor do estimador de mínimos quadrados, que foi utilizado no Capítulo 3. O estimador MAP é definido da seguinte forma

$$\hat{k}_{MAP} = \arg \max_k \pi(k|\mathbf{y}), \quad (5.1.13)$$

e o estimador de mínimos quadrados da seguinte forma

$$\hat{k}_{MQ} = \arg \min_k \|\mathbf{F}^{obs} - [A]k\|^2 = \arg \min_k \left\{ (\mathbf{F}^{obs} - [A]k)^T (\mathbf{F}^{obs} - [A]k) \right\}. \quad (5.1.14)$$

Note que o resíduo  $\mathbf{r}(k) = \mathbf{F}^{obs} - [A]k$  está presente nos estimadores  $\hat{k}_{MAP}$  e  $\hat{k}_{MQ}$  como apresentado na Eqs. (5.1.12) e (5.1.14), respectivamente. A Fig. 5.6 mostra que quanto menor a norma do resíduo, maior o valor assumido pela função de verossimilhança  $\pi(\mathbf{F}^{obs}|k)$ . Para o caso específico analisado, onde a função de verossimilhança é tal que  $\pi(\mathbf{F}^{obs}|k) \propto \exp\{-\|\mathbf{F}^{obs} - [A]k\|^2/(\sigma_v^2)\}$ , a curva apresentada, em escala log, é uma reta, com valor máximo igual a  $\exp(0) = 1$ .

A Fig. 5.7 mostra a função de verossimilhança  $\pi(\mathbf{F}^{obs}|k)$  e o quadrado da norma do resíduo  $\|\mathbf{r}\|^2 = \|\mathbf{F}^{obs} - [A]k\|^2$  para duas realizações distintas contendo, cada uma, duas observações (linhas contínuas e linhas tracejadas). O valor de referência para a constante a ser identificada está em vermelho. As parábolas convexas mostram a

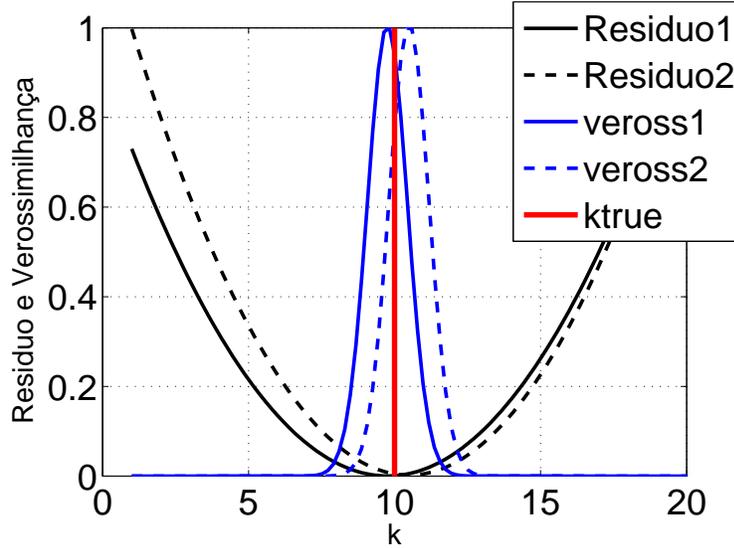


Figura 5.7: Resíduos e funções de verossimilhança para duas realizações contendo duas observações  $\{F_1^{obs}, F_2^{obs}\}$  cada.

variação da norma do resíduo para diferentes valores da rigidez  $k$ , e as funções exponenciais mostram a variação da função de verossimilhança para diferentes valores de  $k$ . Para fins de visualização, as curvas estão normalizadas de forma que o valor máximo de cada uma seja igual a um. Observe que o ponto de mínimo da curva tracejada preta coincide com o máximo da curva tracejada azul, conforme prevê a teoria. O mesmo ocorre para as curvas contínuas preta e azul.

A Fig. 5.8 mostra um resultado semelhante ao analisado na Fig. 5.5, porém, agora, considerando uma função densidade de probabilidade *priori* com um suporte definido em um intervalo menor e que, por sua vez, não inclui o valor de referência da constante a ser identificada ( $k^{ref} = 10$ ). Note que, nesta situação, a função densidade de probabilidade da *posteriori* fica completamente deslocada para a extremidade direita, tentando se aproximar do valor de referência  $k^{ref} = 10$ .

Além de fornecer as distribuições atualizadas dos parâmetros, a estratégia Bayesiana possibilita a realização de análises do impacto da propagação de incertezas dos parâmetros na resposta do sistema. De maneira mais específica, pode-se utilizar a pdf *posteriori*  $\pi(k|\mathbf{F}^{obs})$  para a realização de análises de propagação de incertezas utilizando o modelo preditivo  $F^{mod} = k d$  com uma sequência prescrita de deslocamentos qualquer  $\{d_1, \dots, d_n\}$ . Veja código 5.2 do Anexo A.3. Esse código principal usa o código secundário 5.3 para calcular a função erro.

A título de comparação, consideremos duas análises de propagação de incertezas com o modelo preditivo  $F^{mod} = K d$  para o qual devemos adotar uma pdf para descrever a variável aleatória  $K$ . A primeira análise está baseada na pdf *priori* ( $K \sim \pi(k)$ ) como segue. A Fig. 5.9 apresenta a resposta de referência, os experimentos que serão usados para identificação, o valor médio da resposta estocástica e o envelope probabilístico calculado com a função densidade de probabilidade *priori* com  $K \sim UNIF(1, 20)$ . Vale ressaltar que o envelope probabilístico indica um elevado nível de incertezas na predição do modelo. A segunda análise está baseada na pdf *posteriori* ( $K \sim \pi(k|\mathbf{F}^{obs})$ ) como segue. A Fig. 5.10 apresenta resultado

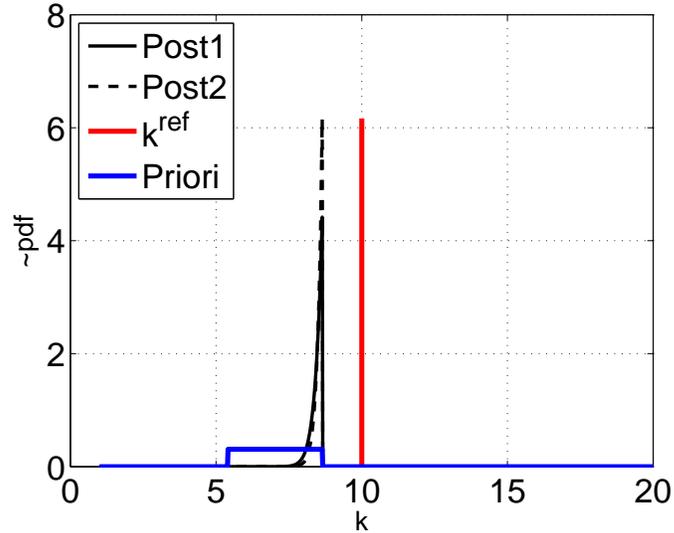


Figura 5.8: Duas funções *posteriori*  $\pi(k|\mathbf{F}^{obs})$  para uma situação na qual o suporte da *priori*  $\pi(k)$  não engloba o valor de referência  $k^{ref} = 10$  (vermelho).

semelhante à Fig. 5.9, porém considerando a função densidade de probabilidade *posteriori* da variável  $K$  para o cálculo da média e do envelope probabilístico da predição do modelo. Destaca-se agora que a região do envelope probabilístico ficou bem mais estreita do que o envelope apresentado na Fig. 5.9. Conseqüentemente, o nível de incertezas das predições do modelo diminuiu quando comparado com as predições obtidas com a *priori*. Por fim, convidamos o leitor a analisar a figura 5.5 em conjunto com as figuras 5.9 e 5.10.

## 5.2 Problema da viga - caso dinâmico

Nesta seção será considerada a análise de uma viga  $\mathcal{B}$  com um contorno livre e com o outro conectado a uma suporte  $\Gamma_{\mathcal{B}}$ . O suporte pode representar uma parede, uma base ou até mesmo o solo. Adicionalmente, considera-se que nas condições de projeto a conexão entre  $\mathcal{B}$  e  $\Gamma_{\mathcal{B}}$  se daria através de um engaste ideal. Entretanto, verifica-se que tal condição não pode ser satisfeita, de maneira satisfatória, em algumas situações. Desta forma, diante de uma situação como esta, a equipe de engenharia pode analisar o componente  $\mathcal{B}$  considerando incertezas na condição de contorno na qual este se acopla ao suporte  $\Gamma_{\mathcal{B}}$ . Esse problema têm diversas motivações práticas. Pode-se citar, por exemplo, a modelagem de torres de turbinas eólicas que estão fixas no solo [1].

A fim de se compatibilizar, na estrutura do modelo, a questão da incerteza no contorno de  $\mathcal{B}$ , considera-se que sua interação com o suporte  $\Gamma_{\mathcal{B}}$  se dá através de uma mola de torção com rigidez  $k_t$  desconhecida. Define-se, portanto, como problema alvo a avaliação do impacto de incertezas na condição de contorno na resposta dinâmica da estrutura e, também, a identificação do parâmetro de rigidez de torção  $k_t$ .

A Fig. 5.11(a) mostra o esquema de uma viga engastada-livre sendo impactada em  $x = L/2$  e contendo um acelerômetro localizado em  $x = L$ , sendo  $L$  o compri-

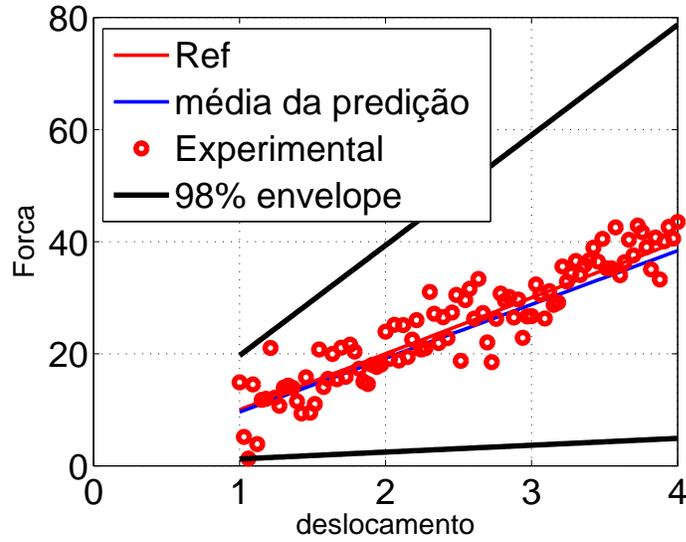


Figura 5.9: Valor médio e envelope probabilístico do modelo preditivo  $F^{mod} = K d$  calculados com a pdf *priori*  $\pi(k)$ .

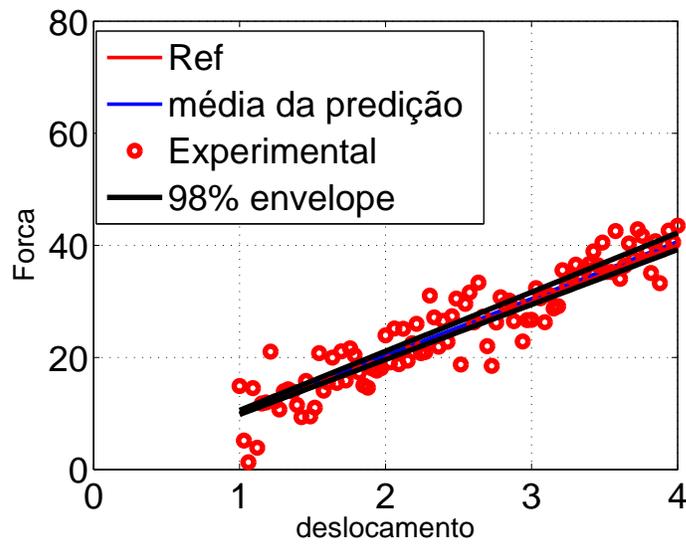


Figura 5.10: Valor médio e envelope probabilístico para o modelo preditivo  $F^{mod} = K d$  calculados com a pdf *posteriori*  $\pi(k|\mathbf{F}^{obs})$ .

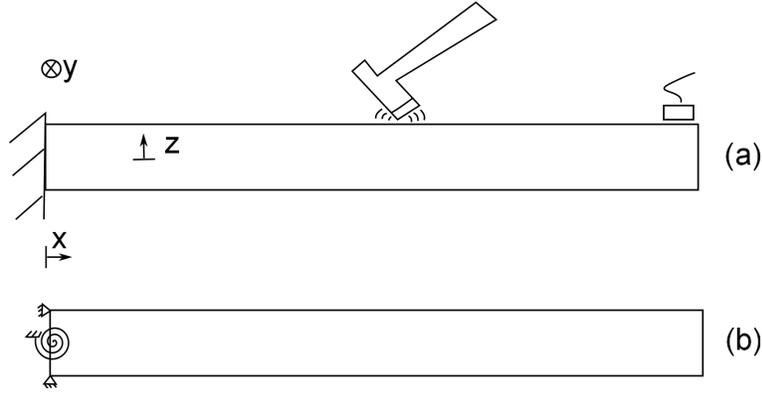


Figura 5.11: (a) Viga engastada-livre sendo impactada em  $x = L/2$  e com sensor de aceleração em  $x = L$ . (b) mola de torção como condição de contorno em  $x = 0$ .

mento da viga  $\mathcal{B}$ . Já a Fig. 5.11(b) mostra uma mola de torção como condição de contorno em  $x = 0$ . Se o valor do coeficiente da mola de torção  $k_t$  for muito alto, os resultados fornecidos pelo modelo serão iguais ao obtidos a partir do modelo de uma viga engastada. Porém, em algumas situações, a condição de engaste perfeito não é observada quando o componente  $\mathcal{B}$  está devidamente instalado para uso. Isso ocorre, por exemplo, devido a folgas nos acoplamentos assim como devido à degradação via ferrugem e corrosão nestes acoplamentos.

Serão consideradas as seguintes equações para descrever o compartimento da viga [40, 29]:

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ G A k_s \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \theta(x,t) \right) \right] = q(x,t), \quad (5.2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E I \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right) + G A k_s \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \theta(x,t) \right) = 0, \quad (5.2.16)$$

onde  $w$  é o deslocamento transversal,  $\theta$  é a rotação em torno do eixo  $y$ ,  $\rho$  é a massa específica do material,  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $G$  é o módulo de cisalhamento do material,  $k_s$  é o coeficiente de cisalhamento,  $I$  é o segundo momento de inércia de área,  $A$  é a área da seção transversal da viga,  $q(x,t)$  é a força por unidade de comprimento

Note que esse modelo de viga permite cisalhamento, e é chamado de modelo de viga de Timoshenko. Entretanto a inércia rotacional não é levada em conta nesse modelo. As equações de movimento são discretizadas pelo método dos elementos finitos [15] e implementadas no Matlab<sup>®</sup>. A montagem das matrizes é feita com o auxílio do programa CALFEM, desenvolvido pela *Lund University*, [http://homepage.usask.ca/~ijm451/finite/fe\\_resources/node236.html](http://homepage.usask.ca/~ijm451/finite/fe_resources/node236.html).

O sistema dinâmico discretizado pode ser escrito da seguinte forma

$$[M]\ddot{\mathbf{u}}(t) + [C]\dot{\mathbf{u}}(t) + [K]\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (5.2.17)$$

sendo  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema, que são, para o nosso caso, definidas positivas. A resposta do sistema é dada pelo vetor  $\mathbf{u}(t)$  e a força de excitação é dada pelo vetor  $\mathbf{f}(t)$ .

As simulações serão feitas com uma viga com as seguintes características:  $L=511 \times 10^{-3}$  m,  $A=9.3 \times 10^{-5}$  m<sup>2</sup>,  $I=7.2 \times 10^{-11}$  m<sup>4</sup>,  $k_s=5/6$ ,  $E=200$  GPa,  $G=80$  GPa,

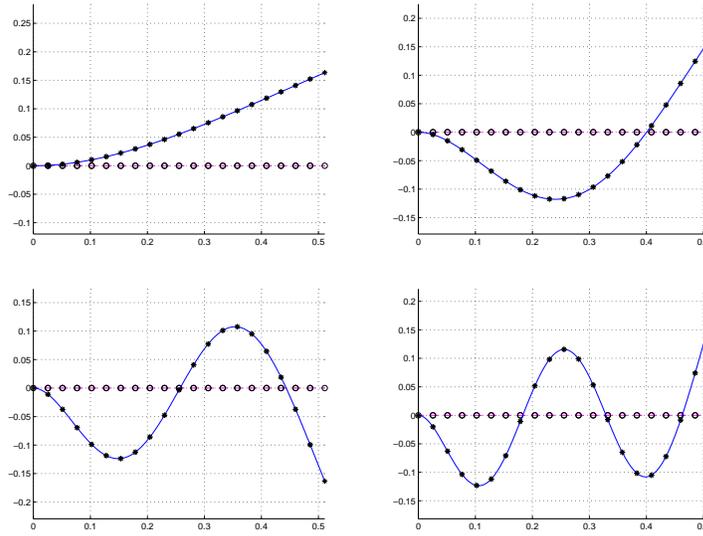


Figura 5.12: Quatro primeiros modos de uma viga engastada-livre. Deslocamento transversal no eixo das ordenadas e posição  $x \in [0, L]$  no eixo das abcissas.

$\rho=7850 \text{ kg/m}^3$ ,  $\alpha = 10$ , e  $\beta = 0$ . Veja código 5.4 do Anexo A.3. Esse código principal usa o código secundário 5.8, para calcular as matrizes elementares, e algumas funções do CALFEM.

O modelo da viga foi construído utilizando-se uma malha uniforme com 20 elementos finitos. Valores de referência para as três primeiras frequências naturais da viga engastada-livre podem ser calculadas, analiticamente, usando o modelo de viga de Euler-Bernoulli, e são dadas por  $\omega_{analit} = \{9.49, 59.49, 167.86\}$  Hz. As três primeiras frequências naturais calculadas pelo programa, para uma viga engastada-livre são  $\{9.49, 59.48, 166.52\}$  Hz. A discrepância entre os resultados indicam valores menores do que um por cento.

Se a condição do engaste for trocada por uma condição onde a rotação é permitida (ver Fig. 5.11), com uma mola torcional com rigidez  $k_t = 1 \times 10^6 \text{ Nm}$ , as três primeiras frequências naturais obtidas são  $\{9.49, 59.48, 166.51\}$  Hz; para as quais as diferenças também são menores do que 1%. Os quatro primeiros modos de vibração são mostrados na Fig. 5.12.

O parâmetro  $k_t$  será modelado pela variável aleatória  $K_t$ . Consideremos, por exemplo, que  $K_t$  segue uma distribuição contínua uniforme com suporte  $[1 \times 10^2 \text{ Nm}, 1 \times 10^3 \text{ Nm}]$ . Veja código 5.5 do Anexo A.3. Esse código principal usa o código secundário 5.6, para calcular as frequências naturais, o código 5.7 para calcular a função erro, o código secundário 5.8, para calcular as matrizes elementares, código 5.9 para calcular a resposta no domínio da frequência, e algumas funções do CALFEM.

A Fig. 5.13 apresenta análises envolvendo 100 simulações de Monte Carlo. A Fig. 5.13 mostra a amplitude da Função Resposta em Frequência do sistema em  $x = L$ . A Fig. 5.14 mostra, para cada frequência, o coeficiente de variação da FRF, onde o coeficiente de variação é dado pelo desvio padrão dividido pela média.

Considerando os dados experimentais obtidos em [30], tem-se que as três primeiras frequências naturais para a viga engastada são  $\omega^{(exp)} = \{9.25, 58.80, 163.75\}$

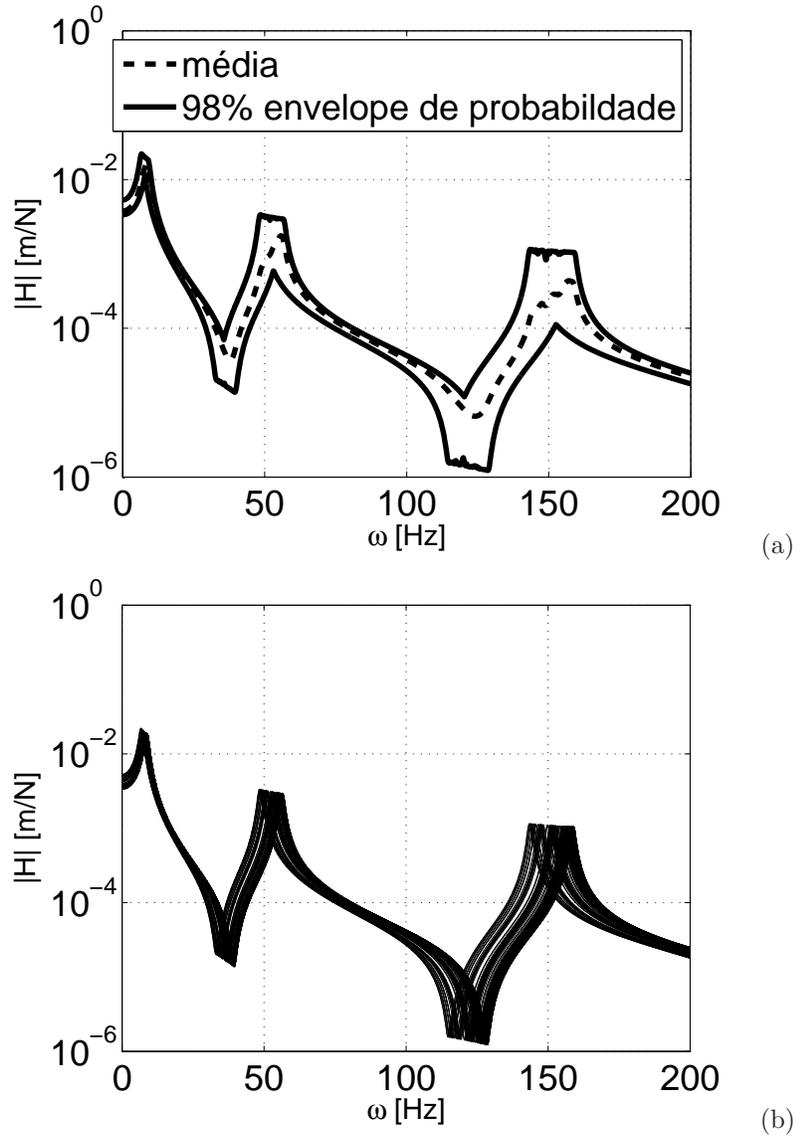


Figura 5.13: Amplitude da Função Resposta em Frequência: (a) média e envelope probabilístico de 98%, e (b) 100 realizações de Monte Carlo.

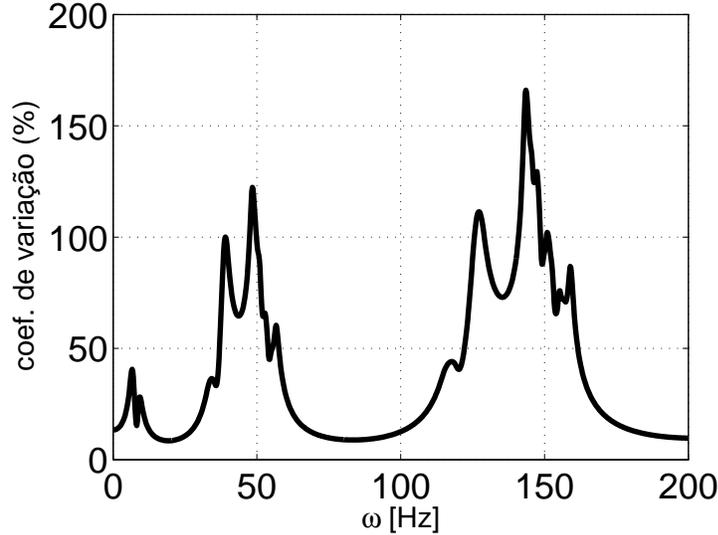


Figura 5.14: Coeficiente de variação da FRF, para cada frequência.

Hz. Primeiramente o parâmetro de rigidez de torção no engaste será identificado usando a estratégia dos mínimos quadrados, onde deseja-se minimizar a função de erro  $\sum_{r=1}^3 (\omega_r^{(exp)} - \omega_r(k_t))^2$ . Usando o algoritmo de otimização de Levenberg-Marquardt obteve-se o valor de  $k_t = 3250 Nm$ . A Fig.5.15(a) mostra a Função Resposta em Frequência para o valor identificado  $k_t = 3250 Nm$ , comparado com a FRF da viga engastada. Observa-se que a diferença fica mais nítida no terceiro pico da curva. Como há apenas um parâmetro para identificar, é possível plotar o erro quadrático diversos valores de  $k_t$ ; ver Fig.5.15(b).

Finalmente, usando a estratégia Bayesiana, considerando uma função densidade de probabilidade *priori* com distribuição Uniforme no intervalo [1500, 10000] Nm, é possível obter a função de densidade de probabilidade *posteriori* atualizada com os dados experimentais, fixando  $\sigma_e = 1$ . A Fig. 5.16 mostra a função densidade de probabilidade *posteriori* junto com a *priori* para a variável aleatória  $K_t$ . O valor obtido pelo estimador MAP coincide com o valor do estimador obtido pelos métodos de mínimos quadrados. Observa-se que foi possível melhorar a informação do parâmetro identificado, mas ainda há muita incerteza, devido ao fato ser considerada apenas uma medição experimental para as três primeiras frequências naturais.

## Exercícios

*Exercício 1: Uma viga esbelta  $\mathcal{B}$ , de comprimento  $L$ , está engastada em  $x = 0$  e está sujeita a uma carga vertical concentrada  $P$  aplicada na posição  $x = a$  e a um momento aplicado  $M_L$  em  $x = L$  como mostrado na Fig.5.17. Adotando-se a hipótese que  $\mathcal{B}$  trabalha em um regime de operação linear com pequenas deformações e pequenos deslocamentos, a deflexão da viga em  $x = L$  é dada por [11]:*

$$\delta = \frac{Pa^2(3L - a) + 3M_L L^2}{6EI} \quad (5.2.18)$$

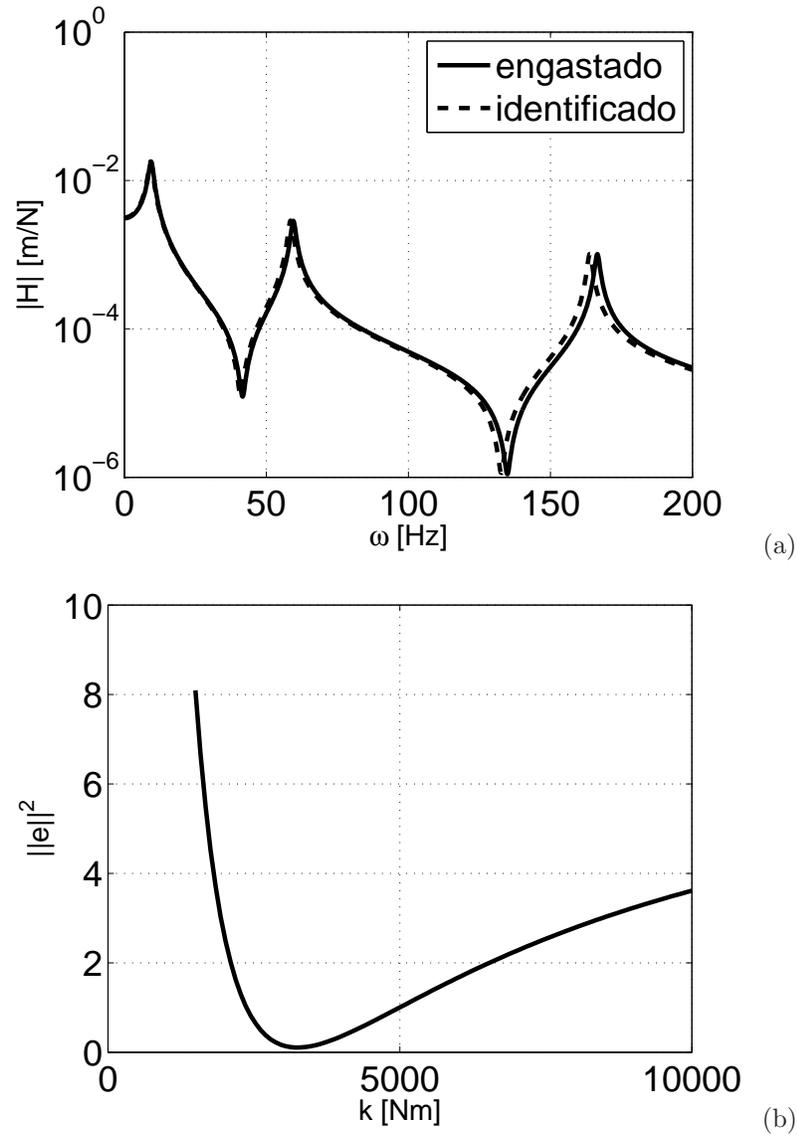


Figura 5.15: (a) Função Resposta em Frequência para o valor identificado  $k_t = 3250 Nm$ , comparado com a FRF da viga engastada, e (b) erro quadrático em função dos valores de  $k_t$ .

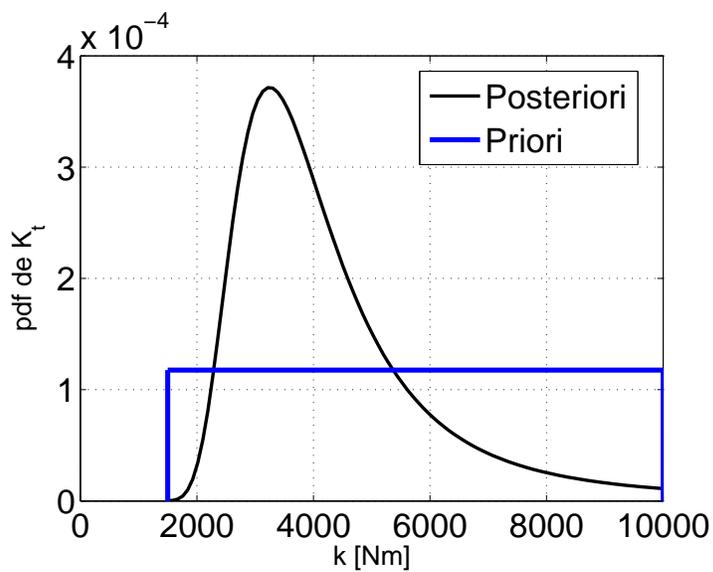


Figura 5.16: Funções densidade de probabilidade prior e *posteriori* para a variável aleatória  $K_t$ .

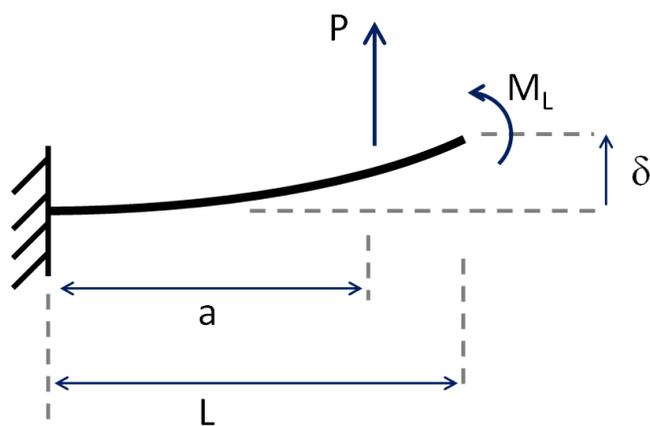


Figura 5.17: Viga esbelta engastada e sujeita à ação da carga concentrada  $P$  e do momento  $M_L$ .

na qual  $E$  corresponde ao módulo de elasticidade de  $\mathcal{B}$ ;  $I = \frac{bh^3}{12}$  corresponde ao momento de inércia de área para o qual  $b$  e  $h$  são a largura e a altura da seção transversal da viga, respectivamente.

Consideremos que a posição  $x = a$  de aplicação da força  $P$ , a altura da viga  $h$ , a espessura da viga  $b$ , o comprimento  $L$  e o módulo de elasticidade  $E$  são parâmetros considerados como incertos devido aos processos de fabricação, montagem de  $\mathcal{B}$  na parede vertical da Fig.5.17 e variabilidade do material.

- Admita valores para as cargas de projeto  $P$  e  $M_L$ ;
- Escolha um conjunto de valores de referência  $\{\bar{a}, \bar{h}, \bar{b}, \bar{L}, \bar{E}\}$  para cada um dos parâmetros modelados como sendo incertos;
- Modele cada um dos parâmetros com uma distribuição de probabilidade uniforme como segue:  $a \sim UNIF(0.95\bar{a}, 1.05\bar{a})$ ,  $h \sim UNIF(0.95\bar{h}, 1.05\bar{h})$ ,  $b \sim UNIF(0.90\bar{b}, 1.10\bar{b})$ ,  $L \sim UNIF(0.98\bar{L}, 1.02\bar{L})$ ,  $E \sim UNIF(0.98\bar{E}, 1.02\bar{E})$ ;
- Utilizando o método de simulação de Monte Carlo, obtenha um conjunto de  $N = 1000$  realizações da deflexão máxima  $\delta$  para as seguintes situações: (1) Considere que apenas um dos parâmetros do conjunto  $\{a, h, b, L, E\}$  é incerto e que os outros são constantes e iguais aos seus respectivos valores de referência  $\{\bar{a}, \bar{h}, \bar{b}, \bar{L}, \bar{E}\}$ ; (2) considere que todos os parâmetros do conjunto  $\{a, h, b, L, E\}$  são modelados como sendo incertos simultaneamente.
- Obtenha o coeficiente de variação  $CV_\delta$  para cada um dos seis cenários analisados.

*Exercício 2:* execute o código 5.2 para diferentes valores de incerteza de  $\nu$ , e diferentes suportes para a distribuição da variável aleatória ligada à rigidez do sistema. Analise o impacto desses parâmetros na resposta do sistema.

*Exercício 3:* execute o código 5.5 para diferentes comprimentos  $L$  e materiais  $E$  e analise o impacto na resposta dinâmica (frequências naturais e modos de vibração). Compare os valores das frequências naturais e a forma dos modos obtidos com expressões analíticas.

*Exercício 4:* execute o código 5.5 para diferentes comprimentos  $L$  e materiais  $E$  e analise o impacto na resposta dinâmica (frequências naturais e modos de vibração). Compare a forma dos modos obtidos com expressões analíticas.

*Exercício 5:* execute o código 5.5 para diferentes suportes para a distribuição da variável aleatória ligada à rigidez do engaste.

*Exercício 6:* execute o código 5.5 os seguintes valores experimentais para as frequências naturais, e analise o impacto na identificação do parâmetro de rigidez ligado ao engaste.  $FreqExp = [9.25]$ ,  $FreqExp = [58.80]$ ,  $FreqExp = [63.75]$ ,  $FreqExp = [9.25 \ 58.80]$ ,  $FreqExp = [9.25 \ 63.75]$ ,  $FreqExp = [58.80 \ 63.75]$ .



## Capítulo 6

# Conclusões

Este livro lida com dois temas complexos e atuais no contexto de análise dinâmica de estruturas: (1) quantificação de incertezas e (2) estimação de parâmetros. Propositadamente, a parte teórica foi restrita a algumas definições essenciais (veja Capítulo 2) e, desta forma, grande foco foi dado aos exemplos computacionais, de caráter simples e fazendo uso do Matlab<sup>®</sup>. A ideia foi introduzir esses dois temas ao leitor interessado de forma bastante simples e direta, permitindo, assim, que ele possa explorar os exemplos usando os códigos disponibilizados no final do livro.

Os autores seguiram a estratégia de modelar as incertezas usando a teoria da probabilidade, e o passo a passo para uma análise completa é discutido no Capítulo 1. Mesmo se restringindo à teoria da probabilidade para modelar as incertezas, existe uma diversidade grande de possibilidades para construir o modelo probabilístico e para quantificar incertezas. Nas Referências deste livro encontram-se livros e artigos que podem ajudar o leitor a tomar diferentes caminhos. Por exemplo, o método de Monte Carlo foi usado como ferramenta para aproximar o modelo estocástico, entretanto, em algumas situações esse método pode não ser muito eficiente. Especialmente, quando há interesse em se obter probabilidades de falhas (probabilidades de eventos raros), variações do método Monte Carlo devem ser consideradas [4, 10, 38].

No Capítulo 3 um problema estático com um grau de liberdade ( $f = k d$ ) foi considerado e no Capítulo 4 um problema dinâmico com um grau de liberdade foi tratado tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Através desses exemplos simples espera-se que o leitor consiga compreender como implementar, computacionalmente, estratégias de estimação de parâmetros e realizar análises de quantificação de incertezas. Vale notar que a dificuldade dos métodos pode aumentar significativamente quando a dimensão do problema (número de variáveis aleatórias e número de parâmetros que se deseja estimar) é grande [36]. Mas os autores pensam que é fundamental um bom domínio desses assuntos em aplicações e problemas mais simples.

No Capítulo 5 a metodologia Bayesiana é introduzida e aplicada para estimar parâmetros de um problema estático com um grau de liberdade e para um problema dinâmico de uma viga. Essa abordagem tem se mostrado muito útil para estimar parâmetros, para atualizar modelos probabilísticos e também para selecionar modelos concorrentes. Um dos métodos que possibilitou a aplicação da estratégia Bayesiana mais amplamente é chamado de MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*). Com esse método é possível amostrar uma distribuição *posteriori* de alta dimensão, sem a necessidade de fazer uma integração em alta dimensão para calcular a constante de

normalização da distribuição *posteriori*. Esse método será explorado futuramente pelos autores.

Finalmente, os autores encorajam que os leitores lhes enviem dúvidas, correções e sugestões sobre esse texto para os seus endereços eletrônicos profissionais, que podem ser obtidos no Portal da Engenharia Mecânica da UFRJ.

# Bibliografia

- [1] ADHIKARI S. and BHATTACHARYA S. Dynamic analysis of wind turbine towers on flexible foundations, *Shock and Vibrations*, v. 19(1), pp. 37-56, 2012.
- [2] ASME, Guide for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics. ASME V&V 10, 2006.
- [3] ASTER R.C., BORCHERS B. and THURBER C.H. Parameter Estimation and Inverse Problems, Academic Press, 2nd Edition, 2013.
- [4] AU S.K. and BECK J.L., Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation, *Probabilistic Engineering Mechanics*, v. 16(4), pp. 263-277, 2001.
- [5] BECK K.J. and ARNOLD V.J., Parameter Estimation in Engineering and Science. John Wiley & Sons, 1977.
- [6] BEER M. FERSON S. and KREINOVICH V. Imprecise probabilities in engineering analyses, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 7(1-2), pp. 4-29, 2013.
- [7] BEN-HAIM Y. Info-Gap Economics: An Operational Introduction. Palgrave Macmillan, 2010.
- [8] CATALDO E. Introdução aos processos estocásticos. *Notas em Matemática Aplicada*, Volume 68, 2012. <http://dx.doi.org/10.5540/001.2012.0068.01>
- [9] CASELLA G. Statistical Inference. Brooks/Cole, 2nd Edition, 2008.
- [10] O'CONNOR P.P. and KLEYNER A. Practical Reliability Engineering. Wiley, 5th Edition, 2012.
- [11] CRANDALL S.H., DAHL N.C. and LARDNER T.J. An introduction to the mechanics of solids. McGrawHill, 2nd Edition, 1978.
- [12] SOUZA DE CURSI J.E. and SAMPAIO R. Modelagem estocástica e quantificação de incertezas. *Notas em Matemática Aplicada*, Volume 66, 2012. <http://dx.doi.org/10.5540/001.2012.0066.01>.
- [13] CURSI E. and SAMPAIO R. Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling with Matlab. ISTE Press, 2015.
- [14] EWINS D.J. Model Testing: Theory, Practice and Application. Wiley-Blacwell, 2nd Edition, 2000.

- [15] FISH J. and BELYTSCHKO T. A First Course in Finite Elements. Wiley, 2nd Edition, 2007.
- [16] FOX C. NICHOLLS G.F. and TAN S.M. An Introduction Inverse Problems. Course Notes, 2010. [http://elec.otago.ac.nz/w/images/1/19/ELEC404\\_Inverse\\_Problems.pdf](http://elec.otago.ac.nz/w/images/1/19/ELEC404_Inverse_Problems.pdf)
- [17] GHANEM R.G. and SPANOS P.D. Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach. Dover Publications, 2012.
- [18] GRIGORIU M. Stochastic Systems: Uncertainty Quantification and Propagation. Springer Series in Reliability Engineering, 2012.
- [19] JAYNES E. Information theory and statistical mechanics, The Physical Review, v. 106(4), pp. 620-630, 1957.
- [20] JAYNES E. Information theory and statistical mechanics II, The Physical Review, v.108, pp. 171-190, 1957.
- [21] JAYNES, E.T. Probability Theory: The Logic of Science: Principles and Elementary Applications. Cambridge University Press, 2003.
- [22] KAIPIO J. and SOMERSALO E. Statistical and Computational Inverse Problems. Springer, 2005.
- [23] KAPUR J.N. Maximum-entropy Models in Science and Engineering. John Wiley & Sons, 1989.
- [24] LE MAITRE O. and KNIO O.M. Spectral Methods for Uncertainty Quantification: With Applications to Computational Fluid Dynamics. Springer (Scientific Computation), 2010.
- [25] NOCEDAL J. and WRIGHT S. Numerical Optimization. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, 2nd Edition, 2006.
- [26] OBERKAMPF W.L. and ROY C.J. Verification and Validation in Scientific Computing. Cambridge University Press, 1st Edition, 2010.
- [27] PAPOULIS, A. and PILLAI S.U. Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGraw-Hill Europe, 4th Edition, 2002.
- [28] PHANI A.S. and WOODHOUSE J. Viscous damping identification in linear vibration, Journal of Sound and Vibration, v. 303, pp. 475-500, 2007.
- [29] REDDY J. An Introduction to the Finite Element Method. McGraw-Hill Education, 3rd Edition, 2005.
- [30] RITTO T.G., SAMPAIO R. and AGUIAR R.R. Uncertain boundary condition Bayesian identification from experimental data: A case study on a cantilever beam, Mechanical Systems and Signal Processing, v. 68-69, pp. 176-188, 2016.
- [31] ROBERT C.P. and CASELLA G. Monte Carlo Statistical Methods. Springer, 2010.
- [32] RUBINSTEIN R.Y. and KROESE D.P. Simulation and the Monte Carlo Method. Wiley-Interscience. 2nd Edition, 2007

- [33] SAMPAIO R. and RITTO T.G. Dinâmica de estruturas flexíveis: análise determinística e estocástica. Apostila, 2008. <https://www.researchgate.net/search.Search.html?type=publication&query=Din%C3%A2mica+de+estruturas+flex%C3%ADveis%3A+an%C3%A1lise+determinística+e+estoc%C3%A1stica>
- [34] SAMPAIO R. and LIMA R.Q. Modelagem estocástica e geração de amostras de variáveis e vetores aleatórios. Notas em Matemática Aplicada, Volume 70, 2012. <http://dx.doi.org/10.5540/001.2012.0070.01>.
- [35] SIVIA D. and SKILLING J. Data Analysis: A Bayesian Tutorial. Oxford University Press, 2nd Edition, 2006.
- [36] SOIZE C. Stochastic Models of Uncertainties in Computational Mechanics. ASCE Society of Civil Engineers (Lecture Notes in Mechanics 2), 2012.
- [37] SHANNON C.E. A mathematical theory of communication, Bell System Technical Journal, v. 27, pp. 379-423 and 623-659, 1948.
- [38] SHUELLER G.I and STIX R. A critical appraisal of methods to determine failure probabilities, Structural Safety, v. 4(4), pp. 239-309, 1987.
- [39] SHUELLER G.I and JENSEN H.A. Computational methods in optimization considering uncertainties - An overview, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 198(1), pp. 2-13, 2008.
- [40] TIMOSHENKO S. Strength of Materials Part 1 and Part 2. Krieger Pub Co, 3rd Edition, 1983.
- [41] ZADEH L.A. Fuzzy sets, Information and Control, v. 8(3), pp. 338-353, 1965.



# Apêndice A

## Anexos

### A.1 Códigos do capítulo 3

Código 3.1

```
% dados
Npontos=4;
d=linspace(1,4,Npontos)'; %displacement
N = length(d);
ktrue= 10; %stiffness
Ftrue=ktrue*d; %force

% gerando dados sinteticos
F1=ktrue*d + normrnd(0,4,N,1);
% gerando dados sinteticos
F2=ktrue*d + normrnd(0,4,N,1);

figure
axes('fontsize',20)
subplot(1,2,1)
plot(d,F1,'or','linewidth',3)
hold on
plot(d,Ftrue,'-k','linewidth',2)
xlabel('d','fontsize',16)
ylabel('F','fontsize',16)
legend('Medições','Referência',2)
axis([0 5 0 1.3*max(Ftrue)])
title('Experimento 1','fontsize',16);
grid on

subplot(1,2,2)
plot(d,F2,'ob','linewidth',3)
hold on
plot(d,Ftrue,'-k','linewidth',2)
xlabel('d','fontsize',16)
```

```

ylabel('F','fontsize',16)
legend('Medições','Referência',2)
axis([0 5 0 1.3*max(Ftrue)])
title('Experimento 2','fontsize',16);
grid on

```

Código 3.2

```

% dados
Npontos=4;
d=linspace(1,4,Npontos)'; %displacement
N = length(d);
ktrue= 10; %stiffness
Ftrue=ktrue*d; %force

% gerando dados sinteticos
F1=ktrue*d + normrnd(0,4,N,1);
% gerando dados sinteticos
F2=ktrue*d + normrnd(0,4,N,1);

%Identificando stiffness k
A = d;
k_id1 = (A'*A)\(A'*F1);
k_id2 = (A'*A)\(A'*F2);
%
figure
axes('fontsize',20)
subplot(1,2,1)
plot(d,F1,'or','linewidth',3)
hold on
plot(d,Ftrue,'-k','linewidth',2)
xlabel('d','fontsize',16)
ylabel('F','fontsize',16)
legend('Medições','True',2)
axis([0 5 0 1.3*max(Ftrue)])
title('Experimento 1','fontsize',16);
grid on
hold on
plot(d,k_id1*d,'-m','linewidth',3)
legend('Medições','Referência','Modelo identificado',2)

subplot(1,2,2)
plot(d,F2,'ob','linewidth',3)
hold on
plot(d,Ftrue,'-k','linewidth',2)
xlabel('d','fontsize',16)
ylabel('F','fontsize',16)

```

```

legend('Medições','Referência',3)
axis([0 5 0 1.3*max(Ftrue)])
title('Experimento 2','fontsize',16);
grid on
hold on
plot(d,k_id2*d,'-m','linewidth',3)
hold on
legend('Medições','Referência','Modelo identificado',2)

```

Código 3.3

```

% dados
Npontos=20;
d=linspace(0,4,Npontos)'; %displacement
N = length(d);
ktrue= 10; %stiffness
kk= 1; %stiffness
Ftrue=ktrue*d + kk*d.^3; %force não linear

% gerando dados sinteticos
F1 = Ftrue + normrnd(0,4,N,1);
% gerando dados sinteticos
F2 = Ftrue + normrnd(0,4,N,1);

figure
axes('fontsize',20)
subplot(1,2,1)
plot(d,F1,'or','linewidth',3)
hold on
plot(d,Ftrue,'-k','linewidth',2)
xlabel('d','fontsize',16)
ylabel('F','fontsize',16)
legend('Medições','True',2)
axis([0 5 0 1.3*max(Ftrue)])
title('Experimento 1','fontsize',16);
grid on

subplot(1,2,2)
plot(d,F2,'ob','linewidth',3)
hold on
plot(d,Ftrue,'-k','linewidth',2)
xlabel('d','fontsize',16)
ylabel('F','fontsize',16)
legend('Medições','True',2)
axis([0 5 0 1.3*max(Ftrue)])
title('Experimento 2','fontsize',16);

```

```

grid on

%Identificando stiffness k
A = d;
k_id1 = (A'*A)\(A'*F1);
k_id2 = (A'*A)\(A'*F2);
%
figure
axes('fontsize',20)
subplot(1,2,1)
plot(d,F1,'or','linewidth',3)
hold on
plot(d,Ftrue,'-k','linewidth',2)
xlabel('d','fontsize',16)
ylabel('F','fontsize',16)
legend('Measurement','True',2)
axis([0 5 0 1.3*max(Ftrue)])
title('Experimento 1','fontsize',16);
grid on
hold on
plot(d,k_id1*d,'-m','linewidth',3)
legend('Medições','Referência','Modelo identificado',2)

subplot(1,2,2)
plot(d,F2,'ob','linewidth',3)
hold on
plot(d,Ftrue,'-k','linewidth',2)
xlabel('d','fontsize',16)
ylabel('F','fontsize',16)
legend('Medições','Verdadeiro',2)
axis([0 5 0 1.3*max(Ftrue)])
title('Experimento 2','fontsize',16);
grid on
hold on
plot(d,k_id2*d,'-m','linewidth',3)
hold on
legend('Medições','Referência','Modelo identificado',2)

```

## A.2 Códigos do capítulo 4

Código 4.1

```

% numero de simulacoes de MC
nsMC=400;
% massa
m=1;

```

```

% range freq
wmin=0;
wmax=15;
Npontos=1000;
freq=linspace(wmin,wmax,Npontos);
% tempo
tmax=5;
tspan=linspace(0,tmax,Npontos);
% cc
x0=.1;
v0=0;

% RODAR XI INCERTO
% RODAR WN INCERTO
% RODAR XI E WN INCERTO

ximin=0.05;
ximax=0.2;
wnmin=7;
wnmax=11;
%var=1/12*(b-a)^2 UNIFORM

disp('CV de xi')
CV=1/sqrt(12)*(ximax-ximin)/(ximin+ximax)*2

disp('CV de wn')
CV=1/sqrt(12)*(wnmax-wnmin)/(wnmin+wnmax)*2

%% Analise no dominio da frecuencia e do tempo
for iMC=1:nSMC

    % parametros incertos
    xi=unifrnd(ximin,ximax);
    %xi=0.125;
    wn=unifrnd(wnmin,wnmax);
    wn=8;

    c=2*xi*wn*m;
    k=wn^2*m;

    [xchapeu]=sub_frf(m,c,k,freq);

    xAle(:,iMC)=xchapeu;

end

if wn==8
    % valores limites
    xi=ximin;

```

```

    wn=8;
    c=2*xi*wn*m;
    k=wn^2*m;
    [xXimin]=sub_frf(m,c,k,freq);

    xi=ximax;
    wn=8;
    c=2*xi*wn*m;
    k=wn^2*m;
    [xXimax]=sub_frf(m,c,k,freq);

    %% Resposta na Freq

    figure
    axes('fontsize',20)
    plot(freq,xXimin,'r','linewidth',4)
    hold on
    plot(freq,xXimax,'g','linewidth',4)
    hold on
    plot(freq,xAle,'k','linewidth',1)
    xlabel('\omega [rad/s]','fontsize',16)
    ylabel('|H| [m/N]','fontsize',16)
    grid on
    legend('\zeta_{min}','\zeta_{max}','realizações')
end

lSUP = prctile(xAle',99);
lINF = prctile(xAle',1);

figure
axes('fontsize',20)
plot(freq,mean(xAle'),'--k','linewidth',3)
hold on
plot(freq,lSUP,'k','linewidth',3)
hold on
plot(freq,lINF,'k','linewidth',3)
xlabel('\omega [rad/s]','fontsize',16)
ylabel('|H| [m/N]','fontsize',16)
legend('média','98% envelope de probabilidade')
grid on

figure
axes('fontsize',20)
plot(freq,sqrt(var(xAle'))./mean(xAle'),'k','linewidth',2)
xlabel('\omega [rad/s]','fontsize',16)
ylabel('CV','fontsize',16)
grid on

figure

```

```

axes('fontsize',20)
hist(xAle(round(Npontos/2),:))
ylabel('Hist X(\omega=7.4rad/s)', 'fontsize',16)
xlabel('x(\omega=7.4rad/s)', 'fontsize',16)
grid on

```

Código 4.2

```

function [xchapeu] =sub_frf(m,c,k,freq)

H = zeros(length(freq),1);
for rr=1:length(freq);
    H(rr) = 1/(-m*freq(rr)*freq(rr) + c*i*freq(rr) + k);
end
xchapeu = abs(H);

```

Código 4.3

```

global xEXP wnTRUE freqExp m k

% massa
m = 1;
% range freq
wmin = 0;
wmax = 15;
Npontos = 100;
freq = linspace(wmin,wmax,Npontos);
Nexp = 100;

% valores de referencia
xiTRUE = 0.125;
wnTRUE = 8;

c=2*xiTRUE*wnTRUE*m;
k=wnTRUE^2*m;

[xchapeu]=sub_frf(m,c,k,freq);

freqExp = linspace(wmin,wmax,Nexp);
[xaux]=sub_frf(m,c,k,freqExp);

xEXP = xaux.*(1+ randn(length(xaux),1)*0.15);

%% Resposta na Freq

```

```

figure
axes('fontsize',20)
plot(freq,xchapeu,'k','linewidth',2.5)
hold on
plot(freqExp,xEXP,'or','MarkerSize',10)
xlabel('\omega [rad/s]','fontsize',16)
ylabel('|H| [m/N]','fontsize',16)
legend('True','Exp')
grid on

xi0=.05;
xiID = lsqnonlin(@sub_error,xi0)

c=2*xiID*wnTRUE*m;
[xID]=sub_frf(m,c,k,freq);

figure
axes('fontsize',20)
plot(freq,xchapeu,'k','linewidth',2.5)
hold on
plot(freqExp,xEXP,'or','MarkerSize',10)
hold on
plot(freq,xID,'--k','linewidth',2.5)
xlabel('\omega [rad/s]','fontsize',16)
ylabel('|H| [m/N]','fontsize',16)
legend('Ref','Exp','Estimado')
grid on

% Erro na referência de wnTRUE
wnTRUE = wnTRUE*0.9;
c=2*xiTRUE*wnTRUE*m;
k=wnTRUE^2*m;

xi0=.05;
xiID = lsqnonlin(@sub_error,xi0)

c=2*xiID*wnTRUE*m;
[xID]=sub_frf(m,c,k,freq);

figure
axes('fontsize',20)
plot(freq,xchapeu,'k','linewidth',2.5)
hold on
plot(freqExp,xEXP,'or','MarkerSize',10)
hold on
plot(freq,xID,'--k','linewidth',2.5)
xlabel('\omega [rad/s]','fontsize',16)
ylabel('|H| [m/N]','fontsize',16)
legend('Ref','Exp','Estimado')

```

```
grid on
```

Código 4.4

```
function e = sub_error(xi)

global xEXP wnTRUE freqExp m k

c=2*xi*wnTRUE*m;
[xaux]=sub_frf(m,c,k,freqExp);

e=norm(xaux-xEXP);
```

Código 4.5

```
% numero de simulacoes de MC
nsMC=200;
% massa
m=1;
% range freq
wmin=0;
wmax=15;
Npontos=100;
freq=linspace(wmin,wmax,Npontos);
% tempo
tmax=5;
tspan=linspace(0,tmax,Npontos);
% cc
x0=.1;
v0=0;

% RODAR XI INCERTO
% RODAR WN INCERTO
% RODAR XI E WN INCERTO

ximin=0.05;
ximax=0.2;
wnmin=7;
wnmax=11;
%var=1/12*(b-a)^2 UNIFORM

disp('CV de xi')
CV=1/sqrt(12)*(ximax-ximin)/(ximin+ximax)*2
```

```

disp('CV de wn')
CV=1/sqrt(12)*(wnmax-wnmin)/(wnmin+wnmax)*2

%% Analise no dominio da frecuencia e do tempo
for iMC=1:nsMC

    % parametros incertos
    xi=unifrnd(ximin,ximax);
    %xi=0.125;
    wn=unifrnd(wnmin,wnmax);
    wn=8;

    [xtime]=sub_time(xi,wn,x0,v0,tspan);

    xAle2(:,iMC)=xtime;

end

%% Resposta no Tempo

    if wn==8
    % valores limites
    xi=ximin;
    wn=8;
    c=2*xi*wn*m;
    k=wn^2*m;
    [xXimin]=sub_time(xi,wn,x0,v0,tspan);

    xi=ximax;
    wn=8;
    c=2*xi*wn*m;
    k=wn^2*m;
    [xXimax]=sub_time(xi,wn,x0,v0,tspan);

    figure
    axes('fontsize',20)
    plot(tspan,xXimin,'r','linewidth',4)
    hold on
    plot(tspan,xXimax,'g','linewidth',4)
    hold on
    plot(tspan,xAle2,'k','linewidth',1)
    xlabel('tempo [s]','fontsize',16)
    ylabel('x [m]','fontsize',16)
    grid on
    legend('\zeta_{min}','\zeta_{max}','realizações')
end

lSUP = prctile(xAle2',99);
lINF = prctile(xAle2',1);

```

```

figure
axes('fontsize',20)
plot(tspan,mean(xAle2'),'--k','linewidth',3)
hold on
plot(tspan,1SUP,'k','linewidth',3)
hold on
plot(tspan,1INF,'k','linewidth',3)
xlabel('tempo [s]','fontsize',16)
ylabel('x [m]','fontsize',16)
legend('media','98% confidence envelope')
grid on

figure
axes('fontsize',20)
plot(freq,sqrt(var(xAle2'))./mean(xAle2'),'k','linewidth',2)
xlabel('tempo [s]','fontsize',16)
ylabel('CV','fontsize',16)
grid on

figure
subplot(1,2,1)
plot(freq,sqrt(var(xAle2'))./mean(xAle2'),'k','linewidth',2)
xlabel('tempo [s]','fontsize',16)
ylabel('CV','fontsize',16)
axis([2.2 2.5 0.2 .7])
grid on

subplot(1,2,2)
plot(freq,sqrt(var(xAle2'))./mean(xAle2'),'k','linewidth',2)
xlabel('tempo [s]','fontsize',16)
ylabel('CV','fontsize',16)
axis([4.6 4.8 0.2 .7])
grid on

[F,XI]=ksdensity(xAle2(round(Npontos/2),:));

figure
axes('fontsize',20)
plot(XI,F,'k','linewidth',3)
xlabel('Magnitude de X','fontsize',16)
ylabel('pdf','fontsize',16)
grid on

```

Código 4.6

```
function [xtime] = sub_time(xi,wn,x0,v0,tspan)
```

```

wd = sqrt(1-xi^2)*wn;

xtime = exp(-xi*wn*tspan).*...
        (x0*(cos(wd*tspan) + xi*wn/wd*sin(wd*tspan)) +...
        v0/wd*sin(wd*tspan));

```

Código 4.7

```

global xEXP wnTRUE tExp x0 v0 m

% massa
m = 1;
% tempo
Npontos=100;
Nexp=100;
tmax=2.5;
tspan=linspace(0,tmax,Npontos);
% cc
x0=.1;
v0=0;

% valores de referencia
xiTRUE = 0.125;
wnTRUE = 8;

c=2*xiTRUE*wnTRUE*m;
k=wnTRUE^2*m;

[xtime]=sub_time(xiTRUE,wnTRUE,x0,v0,tspan);

tExp = linspace(0,tmax,Nexp);
[xaux]=sub_time(xiTRUE,wnTRUE,x0,v0,tExp);

xEXP = xaux + randn(1,length(xaux))*0.01;

%% Resposta no tempo

figure
axes('fontsize',20)
plot(tspan,xtime,'k','linewidth',2)
hold on
plot(tExp,xEXP,'or','MarkerSize',10)
xlabel('tempo [s]','fontsize',16)
ylabel('x [m]','fontsize',16)
legend('True','Exp')
grid on

```

```

xi0=.05;
xiID = lsqnonlin(@sub_error2,xi0)

c=2*xiID*wnTRUE*m;
[xID]=sub_time(xiID,wnTRUE,x0,v0,tspan);

figure
axes('fontsize',20)
plot(tspan,xtime,'k','linewidth',2.5)
hold on
plot(tExp,xEXP,'or','MarkerSize',10)
hold on
plot(tspan,xID,'--k','linewidth',2.5)
xlabel('tempo [s]','fontsize',16)
ylabel('x [m]','fontsize',16)
legend('Ref','Exp','Estimado')
grid on

```

Código 4.8

```

function e = sub_error2(xi)

global xEXP wnTRUE tExp x0 v0 m

c=2*xi*wnTRUE*m;
[xaux]=sub_time(xi,wnTRUE,x0,v0,tExp);

e=norm(xaux-xEXP);

```

### A.3 Códigos do capítulo 5

Código 5.1

```

% dados
Npontos=2;
d=linspace(1,4,Npontos)'; %displacement
N = length(d);
ktrue= 10; %stiffness
Ftrue=ktrue*d; %force

% gerando dados sinteticos
F1=ktrue*d + normrnd(0,4,N,1);
% gerando dados sinteticos

```

```

F2=ktrue*d + normrnd(0,4,N,1);

kmod = linspace(1,20,100);

for jj=1:length(kmod)
    post1(jj) = exp(-norm(F1-kmod(jj)*d)^2/16);
    post2(jj) = exp(-norm(F2-kmod(jj)*d)^2/16);
end

figure
axes('fontsize',20)
plot(kmod,post1/trapz(kmod,post1),'-k','linewidth',2)
hold on
plot(kmod,post2/trapz(kmod,post2),'--k','linewidth',2)
hold on
plot([ktrue ktrue],[0 max(post2/trapz(kmod,post2))],'-r'...
,'linewidth',3)
hold on
plot(kmod,ones(length(kmod),1)*1/(max(kmod)-min(kmod)),'-b'...
,'linewidth',3)
hold on
plot([min(kmod) min(kmod)],[0 1/(max(kmod)-min(kmod))],'-b'...
,'linewidth',3)
hold on
plot([max(kmod) max(kmod)],[0 1/(max(kmod)-min(kmod))],'-b'...
,'linewidth',3)
xlabel('k','fontsize',16)
ylabel('pdf de K','fontsize',16)
legend('Post1','Post2','ktrue','Prior',2)
grid on

for jj=1:length(kmod)
    Likelihood1(jj) = exp(-norm(F1-kmod(jj)*d)^2/16);
    e1(jj) = norm(F1-kmod(jj)*d)^2 ; % norma do residuo
    Likelihood2(jj) = exp(-norm(F2-kmod(jj)*d)^2/16);
    e2(jj) = norm(F2-kmod(jj)*d)^2; % norma do residuo
    % proporcional aa likelihood
end

figure
axes('fontsize',20)
plot(kmod,e1/max(e1),'-k','linewidth',2)
hold on

```

```

plot(kmod,e2/max(e2),'--k','linewidth',2)
hold on
plot(kmod,Likelihood1/max(Likelihood1),'-b','linewidth',2)
hold on
plot(kmod,Likelihood2/max(Likelihood2),'--b','linewidth',2)
hold on
plot([ktrue ktrue],[0 1],'-r','linewidth',3)
xlabel('k','fontsize',16)
ylabel('Residuo e Verossimilhança','fontsize',16)
legend('Residuo1','Residuo2','veross1','veross2','ktrue',1)
grid on

figure
axes('fontsize',20)
semilogy(e1,Likelihood1,'-k','linewidth',2)
hold on
semilogy(e2,Likelihood2,'--k','linewidth',2)
xlabel('Norma do residuo','fontsize',16)
ylabel('Likelihood','fontsize',16)
legend('Like1','Like2',1)
grid on

```

Código 5.2

```

global var_e varpriori d F1 mpriori

% dados
Npontos=100;
%d1=linspace(1,4,Npontos)'; %displacement
%d2=linspace(4.01,1,Npontos)'; %displacement
%d=[d1; d2]; %displacement
d=linspace(1,4,Npontos)';

ktrue= 10; %stiffness
Ftrue=ktrue*d; %force

% gerando dados sinteticos
F1=ktrue*d + normrnd(0,4,Npontos,1);
% gerando dados sinteticos
F2=ktrue*d + normrnd(0,4,Npontos,1);

kmin=1;
kmax=20;
nMC=100;

```

```

% propagacao com prior

for iMC=1:nMC

    kALE=unifrnd(kmin,kmax);
    FALE(:,iMC) = kALE*d;

end

l_INF = prctile(FALE',1);
l_SUP = prctile(FALE',99);

figure
axes('fontsize',20)
plot(d,Ftrue,'-r','linewidth',2)
hold on
plot(d,mean(FALE'),' -b','linewidth',2)
hold on
plot(d,F1,'or','linewidth',3)
hold on
plot(d,l_INF,'-k','linewidth',3)
hold on
plot(d,l_SUP,'-k','linewidth',3)
xlabel('deslocamento','fontsize',16)
ylabel('Forca','fontsize',16)
legend('True','mean prediction','Experiments',...
'98% conf envelope',2)
grid on
axis([0 4 0 80])

var_e = 16; % variancia do erro
mprior = 4 % media da prior
varprior = 16 % variancia da prior

varposterior = inv(d'*inv(var_e)*d + inv(varprior)) % p.208 Aster

mposteriori = lsqnonlin(@sub_error3,mprior)

% propagacao com posteriori
clear KALE FALE l_INF l_SUP
for iMC=1:nMC

    kALE=normrnd(mposteriori,sqrt(varposterior));
    FALE(:,iMC) = kALE*d;

end

l_INF = prctile(FALE',1);
l_SUP = prctile(FALE',99);

```

```

figure
axes('fontsize',20)
plot(d,Ftrue,'-r','linewidth',2)
hold on
plot(d,mean(FALE),'-b','linewidth',2)
hold on
plot(d,F1,'or','linewidth',3)
hold on
plot(d,l_INF,'-k','linewidth',3)
hold on
plot(d,l_SUP,'-k','linewidth',3)
xlabel('deslocamento','fontsize',16)
ylabel('Forca','fontsize',16)
legend('True','mean prediction','Experimental',...
'98% conf envelope',2)
grid on
axis([0 4 0 80])

```

Código 5.3

```

function e = sub_error3(m)

global var_e varpriori d F1 mpriori

e=([var_e^(-.5)*d; varpriori^(-.5)]*m -...
   [var_e^(-.5)*F1; varpriori^(-.5)*mpriori]);

```

Código 5.4

```

%-----
% CALCULO DA RESPOSTA DINAMICA DE UMA VIGA DE TIMOSHENKO
%-----
% REFERENCES
%   G"oran Sandberg 1994-03-08
%   Karl-Gunnar Olsson 1995-09-29
%-----

clear all
close all
clc

% ----- Dados de entrada -----
L=511e-3; % comprimento
b=30.7e-3; % largura
h=3.04e-3; % altura

```

```

%
kt=1e6; % rigidez mola torcional (lado engastado)
%
E=2e11;          % modulo de elasticidade
rho=7850;        % massa especifica
G=80e9;         % modulo de cisalhamento
fatorCis = 5/6;  % fator de cisalhamento (perfil retangular)

%-----
A=b*h;
I=b*h^3/12;
ep=[E A I rho*A G fatorCis];

% ----- topologia -----
Edof=[1  1  2  3  4  5  6
      2  4  5  6  7  8  9
      3  7  8  9 10 11 12
      4 10 11 12 13 14 15
      5 13 14 15 16 17 18
      6 16 17 18 19 20 21
      7 19 20 21 22 23 24
      8 22 23 24 25 26 27
      9 25 26 27 28 29 30
     10 28 29 30 31 32 33
     11 31 32 33 34 35 36
     12 34 35 36 37 38 39
     13 37 38 39 40 41 42
     14 40 41 42 43 44 45
     15 43 44 45 46 47 48
     16 46 47 48 49 50 51
     17 49 50 51 52 53 54
     18 52 53 54 55 56 57
     19 55 56 57 58 59 60
     20 58 59 60 61 62 63];

% ----- lista de coordenadas -----
Le=L/20;
Coord=[0  0; Le 0; 2*Le 0; 3*Le 0; 4*Le 0; 5*Le 0; 6*Le 0; ...
      7*Le 0; 8*Le 0; 9*Le 0; 10*Le 0; 11*Le 0; ...
      12*Le 0; 13*Le 0; 14*Le 0; 15*Le 0; 16*Le 0; 17*Le 0; ...
      18*Le 0; 19*Le 0; 20*Le 0];
% ----- graus de liberdade -----
Dof=[1  2  3; 4  5  6; 7  8  9; 10 11 12; 13 14 15; 16 17 18; ...
     19 20 21; 22 23 24; 25 26 27; 28 29 30; 31 32 33; 34 35 36; ...
     37 38 39; 40 41 42; 43 44 45; 46 47 48; 49 50 51; 52 53 54; ...
     55 56 57; 58 59 60; 61 62 63];
% ----- matrizes elementares e montagem das matrizes globais -

```

```

K=zeros(63);      M=zeros(63);
[Ex,Ey]=coordxtr(Edof,Coord,Dof,2);
for i=1:20
    [k,m,c]=beam2TM(Ex(i,:),Ey(i,:),ep);
    K=assem(Edof(i,:),K,k);  M=assem(Edof(i,:),M,m);
end

% ----- Malha do elemento -----
clf;      eldraw2(Ex,Ey,[1 2 2],Edof);
grid;     title('2-D Frame Structure')

% ----- Problema de autovalor -----

% mola torcional na parte engastada
b=[1 2]';
K(3,3) = K(3,3)+kt;

% engastada
%b=[1 2 3]';
[La,Egv]=eigen(K,M,b);
Freq=sqrt(La)/(2*pi);
Freq(1:6)

%[nd,nd] = size(M);
%M = M(3:nd,3:nd);
%K = K(3:nd,3:nd);
%[Egv2,La2]=eig(K,M);
%sqrt(La2(1,1))/2/pi
%sqrt(La2(2,2))/2/pi
%sqrt(La2(3,3))/2/pi
%sqrt(La2(4,4))/2/pi

% ----- modo 1 a 4 -----

figure,    clf,    grid,    title('The first eigenmode'),
eldraw2(Ex,Ey,[2 3 1]);
Edb=extract(Edof,Egv(:,1));    eldisp2(Ex,Ey,Edb,[1 2 2],.05);
FreqText=num2str(Freq(1));    text(.5,1.75,FreqText);

figure,    clf,    grid,    title('The first eigenmode'),
eldraw2(Ex,Ey,[2 3 1]);
Edb=extract(Edof,Egv(:,2));    eldisp2(Ex,Ey,Edb,[1 2 2],.05);
FreqText=num2str(Freq(2));    text(.5,1.75,FreqText);

figure,    clf,    grid,    title('The first eigenmode'),

```

```

eldraw2(Ex,Ey,[2 3 1]);
Edb=extract(Edof,Egv(:,3));      eldisp2(Ex,Ey,Edb,[1 2 2],.05);
FreqText=num2str(Freq(3));      text(.5,1.75,FreqText);

figure,   clf,   grid,   title('The first eigenmode'),
eldraw2(Ex,Ey,[2 3 1]);
Edb=extract(Edof,Egv(:,4));      eldisp2(Ex,Ey,Edb,[1 2 2],.05);
FreqText=num2str(Freq(4));      text(.5,1.75,FreqText);

return
% teoria Euler-Bernoulli
w1 = 1.875^2*sqrt(E*I/(rho*A*L^4))/2/pi
w2 = 4.694^2*sqrt(E*I/(rho*A*L^4))/2/pi
w3 = 7.885^2*sqrt(E*I/(rho*A*L^4))/2/pi

```

Código 5.5

```

%-----
% VIGA DE TIMOSHENKO COM CONDICAO DE CONTORNO INCERTA
%-----

clear all
close all
clc

% ----- Dados de entrada -----
L=511e-3; % comprimento
b=30.7e-3; % largura
h=3.04e-3; % altura
%
%kt=1e6; % rigidez mola torcional (lado engastado)
%
E=2e11;      % modulo de elasticidade
rho=7850;    % massa especifica
G=80e9;     % modulo de cisalhamento
fatorCis = 5/6; % fator de cisalhamento (perfil retangular)
%
wmin = 0;   %Hz
wmax = 200; %Hz
Npontos = 1000;
freq = linspace(wmin,wmax,Npontos);
%
nsMC=100; % numero de simulacoes de Monte Carlo

```

```

%-----
% rigidez de torcao
kt=1e6;
%
% resposta no dominio da frequencia
[freq,xchapeu]=sub_VigaTimoshenko20(L,b,h,E,rho,G,fatorCis,...
freq,kt);

%-----
figure
axes('fontsize',20)
semilogy(freq,xchapeu(60,:),'k','linewidth',2.5)
xlabel('\omega [rad/s]','fontsize',16)
ylabel('|H| [m/N]','fontsize',16)
grid on

% propagacao de incerteza
for i=1:nsMC
    kt=unifrnd(1e2,1e3);
    [freq,xchapeu]=sub_VigaTimoshenko20(L,b,h,E,rho,G,...
fatorCis,freq,kt);
    Xale(i,:) = xchapeu(60,:);
end

figure
axes('fontsize',20)
semilogy(freq,Xale,'k')
xlabel('\omega [Hz]','fontsize',16)
ylabel('|H| [m/N]','fontsize',16)
grid on

lSUP = prctile(Xale,99);
lINF = prctile(Xale,1);

figure
axes('fontsize',20)
semilogy(freq,mean(Xale),'--k','linewidth',3)
hold on
semilogy(freq,lSUP,'k','linewidth',3)
hold on
semilogy(freq,lINF,'k','linewidth',3)
xlabel('\omega [Hz]','fontsize',16)
ylabel('|H| [m/N]','fontsize',16)
legend('média','98% envelope de probabilidade')
grid on

```

```

figure
axes('fontsize',20)
plot(freq,sqrt(var(Xale))./mean(Xale)*100,'--k','linewidth',3)
xlabel('\omega [Hz]','fontsize',16)
ylabel('coef. de variação (%)','fontsize',16)
grid on

```

Código 5.6

```

function [freq,xchapeu,Freq]=sub_VigaTimoshenko20(L,b,h,E...
,rho,G,fatorCis,freq,kt)

% -----
A=b*h;
I=b*h^3/12;
ep=[E A I rho*A G fatorCis];

% ----- topologia -----
Edof=[1  1  2  3  4  5  6
      2  4  5  6  7  8  9
      3  7  8  9 10 11 12
      4 10 11 12 13 14 15
      5 13 14 15 16 17 18
      6 16 17 18 19 20 21
      7 19 20 21 22 23 24
      8 22 23 24 25 26 27
      9 25 26 27 28 29 30
     10 28 29 30 31 32 33
     11 31 32 33 34 35 36
     12 34 35 36 37 38 39
     13 37 38 39 40 41 42
     14 40 41 42 43 44 45
     15 43 44 45 46 47 48
     16 46 47 48 49 50 51
     17 49 50 51 52 53 54
     18 52 53 54 55 56 57
     19 55 56 57 58 59 60
     20 58 59 60 61 62 63];

% ----- lista de coordenadas -----

```

```

Le=L/20;
Coord=[0 0; Le 0; 2*Le 0; 3*Le 0; 4*Le 0; 5*Le 0; 6*Le...
      0; 7*Le 0; 8*Le 0; 9*Le 0; 10*Le 0; 11*Le 0;...
      12*Le 0; 13*Le 0; 14*Le 0; 15*Le 0; 16*Le 0;...
      17*Le 0; 18*Le 0; 19*Le 0; 20*Le 0];
% ----- graus de liberdade -----
Dof=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9; 10 11 12; 13 14 15; 16 17 18;...
     19 20 21; 22 23 24; 25 26 27; 28 29 30; 31 32 33; 34 35 36;...
     37 38 39; 0 41 42; 43 44 45; 46 47 48; 49 50 51; 52 53 54;...
     55 56 57; 58 59 60; 61 62 63];
% ----- matrizes elementares e montagem das matrizes globais -
K=zeros(63);      M=zeros(63);
[Ex,Ey]=coordxtr(Edof,Coord,Dof,2);
for i=1:20
    [k,m,c]=beam2TM(Ex(i,:),Ey(i,:),ep);
    K=assem(Edof(i,:),K,k);  M=assem(Edof(i,:),M,m);
end

% mola torcional na parte engastada
K(3,3) = K(3,3)+kt;
[nd,nd] = size(M);
% retirando graus de liberdade fixos
M = M(3:nd,3:nd);
K = K(3:nd,3:nd);
%C = 1e-2*M + 1e-4*K;
C = 10*M;

[Egv,La]=eig(K,M);
xi = diag(Egv'*C*Egv)./diag(2*sqrt(La));
w1=sqrt(La(1,1))/2/pi;
w2=sqrt(La(2,2))/2/pi;
w3=sqrt(La(3,3))/2/pi;
w4=sqrt(La(4,4))/2/pi;
Freq = [w1 w2 w3];

F=zeros(nd-2,1);
F(60)=1;
[xchapeu]=sub_frf2(M,C,K,freq,F);

%return
%
% % engastada
% %b=[1 2 3]';
% [La,Egv]=eigen(K,M,b);
% Freq=sqrt(La)/(2*pi);
% Freq(1:6)
%
% % ----- modo 1 a 4 -----
%
```

```

% figure,    clf,    grid,    title('The first eigenmode'),
% eldraw2(Ex,Ey,[2 3 1]);
% Edb=extract(Edof,Egv(:,1));    eldisp2(Ex,Ey,Edb,[1 2 2],.05);
% FreqText=num2str(Freq(1));    text(.5,1.75,FreqText);
%
%
% figure,    clf,    grid,    title('The first eigenmode'),
% eldraw2(Ex,Ey,[2 3 1]);
% Edb=extract(Edof,Egv(:,2));    eldisp2(Ex,Ey,Edb,[1 2 2],.05);
% FreqText=num2str(Freq(2));    text(.5,1.75,FreqText);
%
%
% figure,    clf,    grid,    title('The first eigenmode'),
% eldraw2(Ex,Ey,[2 3 1]);
% Edb=extract(Edof,Egv(:,3));    eldisp2(Ex,Ey,Edb,[1 2 2],.05);
% FreqText=num2str(Freq(3));    text(.5,1.75,FreqText);
%
%
% figure,    clf,    grid,    title('The first eigenmode'),
% eldraw2(Ex,Ey,[2 3 1]);
% Edb=extract(Edof,Egv(:,4));    eldisp2(Ex,Ey,Edb,[1 2 2],.05);
% FreqText=num2str(Freq(4));    text(.5,1.75,FreqText);
%
%
%
%
% % teoria Euler-Bernoulli
% w1 = 1.875^2*sqrt(E*I/(rho*A*L^4))/2/pi
% w2 = 4.694^2*sqrt(E*I/(rho*A*L^4))/2/pi
% w3 = 7.885^2*sqrt(E*I/(rho*A*L^4))/2/pi

```

Código 5.7

```

function e = sub_error4(kt)

global FreqExp L b h E rho G fatorCis freq

[freq,xchapeu,Freq]=sub_VigaTimoshenko20(L,b,h,E,...
rho,G,fatorCis,freq,kt);

e=norm(Freq-FreqExp);

```

Código 5.8

```

function [Ke,Me,fe]=sub_beam2DT(ex,ey,ep,eq)
%      fonction [Ke,Me,fe]=beam2DT(ex,ey,ep,eq)

%-----
%      OBJET : Calcul des matrices de masse et de rigidité d'un EF
%              poutre 2D Timoshenko
%
%      ENTREE: ex = [x1 x2] : coordonnées en x des noeuds 1 et 2
%              ey = [y1 y2] : coordonnées en y des noeuds 1 et 2
%
%              ep = [E G A I ks masslin]
%              E: Module d'Young
%              G: Module de cisaillement
%              A: Aire de la section de la poutre
%              I: Moment d'inertie de la poutre
%              ks: facteur de correction pour le cisaillement
%              masslin: masse linéique de l'élément poutre per
%                      unit length
%
%              eq = [qx qy] : densité linéique de forces
%              extérieures réparties dans les axes locaux
%
%      SORTIE : Ke : matrice de rigidité (6,6)
%              Me : matrice de masse (6,6)
%              fe : force nodale équivalente (6,1)
%-----
%
if nargin==3;
    eq=[0 0];
end
b      =[ex(2)-ex(1)
        ey(2)-ey(1)];
L      = sqrt(b'*b);
n      = b/L;
E      = ep(1);
Gm     = ep(2);
A      = ep(3);
I      = ep(4);
ks     = ep(5);
masslin = ep(6);
%-----
m      = (12/L^2)*(E*I/(Gm*A*ks));

Kle=E/(1+m)*[A*(1+m)/L    0      0      -A*(1+m)/L    0 0;
0      12*I/L^3    6*I/L^2      0      -12*I/L^3    6*I/L^2;
0      6*I/L^2    4*I*(1+m)/4/L    0      -6*I/L^2    2*I*(1-m)/L;
-A*(1+m)/L    0      0      A*(1+m)/L    0      0;
0      -12*I/L^3    -6*I/L^2      0      12*I/L^3    -6*I/L^2;
0      6*I/L^2    2*I*(1-m)/L    0      -6*I/L^2    4*I*(1+m)/L];

```

```

Mle=masslin*L/420*[140  0  0  70  0  0  ;
                   0  156 22*L  0  54 -13*L ;
                   0  22*L 4*L^2  0 13*L -3*L^2 ;
                   70  0  0  140  0  0  ;
                   0  54  13*L  0 156 -22*L ;
                   0 -13*L -3*L^2  0 -22*L  4*L^2];

fle=L*[eq(1)/2 eq(2)/2 eq(2)*L/12 eq(1)/2 eq(2)/2...
      -eq(2)*L/12]';

G = [n(1) n(2) 0  0  0  0;
     -n(2) n(1) 0  0  0  0;
     0  0  1  0  0  0;
     0  0  0  n(1) n(2) 0;
     0  0  0 -n(2) n(1) 0;
     0  0  0  0  0  1];

Ke = G'*Kle*G;
Me = G'*Mle*G;
fe = G'*fle;

return

```

Código 5.9

```

function [xchapeu] =sub_frf2(m,c,k,freq,f)

for rr=1:length(freq);
    Haux = (-m*(freq(rr)*2*pi)*(freq(rr)*2*pi) +...
           c*i*(freq(rr)*2*pi) + k)\f;
    H(:,rr) = Haux;
end
xchapeu = abs(H);

```

Funções usadas do código CALFEM: assem.m, coordxtr.m, eigen.m, pltstyle.m, eldisp2.m e eldraw2.m