Notas em Matemática Aplicada e-ISSN 2236-5915

Volume 74, 2014

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2016

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.9), as figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
http://www.sbmac.org.br/p_notas.php

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2016

POLINÔMIOS QUE SATISFAZEM UMA RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA DE TRÊS TERMOS

Alagacone Sri Ranga
ranga@ibilce.unesp.br

Cleonice Fátima Bracciali
cleonice@ibilce.unesp.br

Eliana Xavier Linhares de Andrade
eliana@ibilce.unesp.br

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Campus de São José do Rio Preto - SP

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

São Carlos - SP, Brasil
2016

Coordenação Editorial: Elbert Einstein Nehrer Macau

Coordenação Editorial da Série: Rosana Sueli da Motta Jafelice

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Catalogação elaborada pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

Sri Ranga, Alagacone
Polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de três termos / Alagacone Sri Ranga, Cleonice Fátima Bracciali, Eliana Xavier Linhares de Andrade. Ed. rev. - São Carlos, SP : SBMAC, 2016.
x, 125 p.: il.; 21.5 cm. (Notas em Matemática Aplicada, vol. 74)

e-ISBN 978-85-8215-060-3

1. Polinômios 2. Relação de Recorrência 3. Fórmulas de Quadratura
I. Sri Ranga, Alagacone II. Bracciali, Cleonice F.
III. Andrade, Eliana X. L. . IV. Título. V. Série

CDD - 51

À minha família, Neusa, Natália e Ruben.
A. Sri Ranga

Ao meu marido Sérgio.
C. F. Bracciali

Às minhas filhas Milena, Vanessa e Cíntia.
E. X. L. de Andrade

Dedico

Conteúdo

Prefácio

Os polinômios ortogonais têm vasta aplicação em todos os tipos de problemas da Matemática Pura e Ciências Aplicadas e sempre despertaram o interesse de famosos matemáticos dos últimos séculos. Esses polinômios são ferramentas essenciais para a solução de vários problemas e vêm contribuindo nos estudos relacionados a equações diferenciais, frações contínuas, estabilidade numérica, teoria da aproximação, processamento de sinais, etc. É muito bem conhecido que uma sequência de polinômios ortogonais na reta real, denotada por $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, satisfaz a uma relação de recorrência de três termos da forma

$$P_{n+1}(t) = (t - b_{n+1})\, P_n(t) - a_{n+1}\, P_{n-1}(t),\ \ n \geq 0,$$

com $P_{-1}(t) = 0$ e $P_0(t) = 1$, onde $b_n, a_n \in \mathbb{R}$, para $n \geq 1$.

Esses polinômios possuem inúmeras propriedades interessantes que fazem com que sejam aplicados em diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, seus zeros são reais, simples e pertencem ao intervalo de ortogonalidade. Em particular, seus zeros são os nós das famosas Regras de Quadratura Gaussianas, que têm máximo grau de precisão algébrico.

No presente texto, nosso objetivo é apresentar propriedades e aplicações de sequências de polinômios que satisfazem a uma relação de recorrência de três termos da forma

$$R_{n+1}(z) = (z - \beta_{n+1})\, R_n(z) - \alpha_{n+1}\, z\, R_{n-1}(z),\ \ n \geq 0, \tag{1}$$

com $R_{-1}(z) = 0$ e $R_0(z) = 1$, onde $\beta_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{C}$, para $n \geq 1$.

Observe que a relação de recorrência (1) difere da dos polinômios ortogonais na reta real pela variável z que multiplica o último termo.

Entre as sequências de polinômios geradas pela relação de recorrência (1), destacam-se os polinômios que satisfazem certos tipos de ortogonalidade, tanto na reta real como no círculo unitário como, por exemplo, os polinômios L-ortogonais e os polinômios para-ortogonais.

Quando os coeficientes β_n e α_{n+1}, $n \geq 1$, satisfazem certas condições, pode-se garantir que os polinômios R_n, dados por (1), têm todos os zeros reais e simples ou todos os zeros complexos pertencentes ao círculo unitário ou, ainda, pertencentes a um círculo de raio $\beta > 0$.

Se tomarmos $\beta_n > 0$ e $\alpha_{n+1} > 0$, $n \geq 1$, os polinômios R_n são reais e seus zeros são reais e simples. Este caso será tratado no Capítulo 2.

Para $\beta_n \neq 0$ e $\alpha_{n+1} \neq 0$, $n \geq 1$, várias propriedades interessantes dos polinômios, definidos por (1) serão mostradas neste texto como, por exemplo, a de que dois polinômios consecutivos, R_n e R_{n+1}, não possuem zeros em comum. Além disso, os zeros de R_n são os autovalores da matriz de Hessenberg inferior, dada por

$$\begin{pmatrix} \eta_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \alpha_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \eta_n \end{pmatrix},$$

onde $\eta_m = \alpha_m + \beta_m$, $m = 1, 2, \ldots, n$, com $\alpha_1 = 0$.

Para o caso complexo, é interessante utilizar sequências de polinômios $\{\tilde{R}_n\}_{n=0}^{\infty}$ que satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos

$$\tilde{R}_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]\,\tilde{R}_n(z) - 4\,d_{n+1}\,z\,\tilde{R}_{n-1}(z),\ \ n \geq 1, \qquad (2)$$

com $\tilde{R}_0(z) = 1$ e $\tilde{R}_1(z) = (1+ic_1)z+(1-ic_1)$, onde $c_n \in \mathbb{R}$ para $n \geq 1$, e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada positiva. O valor 4 foi adicionado por conveniência ao último termo da relação de recorrência acima.

As relações (1) e (2) são equivalentes, pois se tomarmos

$$R_n(z) = \frac{\tilde{R}_n(z)}{\prod_{j=1}^{n}(1 + ic_j)},$$

então

$$R_{n+1}(z) = (z - \beta_{n+1})\,R_n(z) - \alpha_{n+1}\,z\,R_{n-1}(z),$$

onde

$$\beta_n = -\frac{1 - ic_n}{1 + ic_n} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{4d_{n+1}}{(1 + ic_n)(1 + ic_{n+1})}.$$

Note que se $c_n = 0$ para todo n, então (2) torna-se (1) com $\beta_n = -1$, isto é,

$$\tilde{R}_{n+1}(z) = (z + 1)\,\tilde{R}_n(z) - 4\,d_{n+1}\,z\,\tilde{R}_{n-1}(z),\ \ n \geq 0, \qquad (3)$$

Este caso será tratado no Capítulo 3.

Como no caso dos polinômios ortogonais, uma das importantes aplicações dos polinômios $R_n(z)$ é a construção de fórmulas de quadraturas de máximo grau de precisão algébrico e esse tópico também será abordado no Capítulo 4. Outra aplicação a ser apresentada é o uso desses polinômios no problema de análise de frequência.

São José do Rio Preto, fevereiro de 2014.

A. Sri Ranga
Cleonice F. Bracciali
Eliana X.L. de Andrade

Capítulo 1

Preliminares

Antes de iniciar os estudos das propriedades dos polinômios que satisfazem à relação de recorrência de três termos (1), apresentaremos vários tópicos que serão necessários para o entendimento do texto, como, por exemplo, frações contínuas, sequências encadeadas positivas, polinômios ortogonais na reta real e polinômios ortogonais no círculo unitário. Também acrescentamos várias propriedades e resultados para tornar o texto mais completo para o leitor interessado em aprofundar seus conhecimentos nesses assuntos, mas que não são necessários para a compreensão dos capítulos posteriores.

1.1 Integral de Riemann-Stieltjes

Uma expressão da forma

$$\int_a^b f(x)d\psi(x)$$

é conhecida como integral de Stieltjes ou, mais especificamente, como a integral de Stieltjes da função f sob a função ψ. A função ψ, que é real e não decrescente, pode ser considerada como sendo definida na reta real. Porém, consideramos que os pontos de aumento de ψ estão todos contidos no intervalo fechado $[a, b]$.

Na linguagem da teoria da medida, a função ψ induz uma medida no intervalo $[a, b]$ e, assim, ψ também é chamada de medida ou medida positiva no intervalo $[a, b]$.

A seguir, faremos um breve relato dos conceitos necessários para a definição da integral de Riemann-Stieltjes, que representa o limite de certas somas conhecidas por somas de Riemann-Stieltjes. Para algumas referências a respeito, citamos [7, 23, 37].

Definição 1.1. *Chamamos de ponto de aumento da medida ψ qualquer ponto ξ tal que $\psi(\xi + \epsilon) - \psi(\xi - \epsilon) > 0$ para todo $\epsilon > 0$. Em particular, o conjunto de pontos*

$$\mathfrak{S}(\psi) = \{\xi \,|\, \psi(\xi + \epsilon) - \psi(\xi - \epsilon) > 0, \quad \text{para todo} \;\; \epsilon > 0\}$$

é chamado de suporte de ψ.

Como todos os pontos de aumento de ψ estão contidos dentro do intervalo $[a, b]$, o menor intervalo fechado $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ que contém o suporte é tal que $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subseteq [a, b]$.

Definição 1.2. *Dada o intervalo* $[a,b]$*, uma partição de* $[a,b]$ *é um conjunto de pontos* $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$*, tal que*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Dada uma função real f definida e limitada em $[a,b]$, sejam

$$M_j = \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) \qquad \text{e} \qquad m_j = \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

A soma superior de Riemann-Stieltjes de f sob a medida ψ e com relação à partição Δ é dada por

$$U(\Delta, f, \psi) = \sum_{j=1}^{n} (\psi(x_j) - \psi(x_{j-1}))M_j,$$

e a soma inferior por

$$L(\Delta, f, \psi) = \sum_{j=1}^{n} (\psi(x_j) - \psi(x_{j-1}))m_j.$$

É fácil verificar que

$$(\psi(b) - \psi(a))m \leq L(\Delta, f, \psi) \leq U(\Delta, f, \psi) \leq (\psi(b) - \psi(a))M,$$

onde $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

Uma partição $\tilde{\Delta}$ é um refinamento da partição Δ se $\Delta \subset \tilde{\Delta}$. Podemos verificar que se $\tilde{\Delta}$ é um refinamento da Δ, então

$$L(\Delta, f, \psi) \leq L(\tilde{\Delta}, f, \psi) \leq U(\tilde{\Delta}, f, \psi) \leq U(\Delta, f, \psi).$$

Denotando por $\mathfrak{D}[a,b]$ o conjunto de todas as partições de $[a,b]$, agora temos os requisitos necessários para definir a integral de Riemann-Stieltjes da função f sob a medida ψ.

Definição 1.3. *Sejam* f *uma função real e limitada definida em* $[a,b]$ *e* $\mathfrak{D}[a,b]$ *o conjunto de todas as partição de* $[a,b]$*. Se*

$$\sup_{\Delta\in\mathfrak{D}[a,b]} L(\Delta, f, \psi) = I = \inf_{\Delta\in\mathfrak{D}[a,b]} U(\Delta, f, \psi),$$

dizemos que f *é integrável em relação à medida* ψ *no sentido Riemann-Stieltjes e o valor* I *da integral é denotado por* $\int_a^b f(x)d\psi(x)$*.*

Se $\psi_1(x) = \psi(x) + C$, para alguma constante C, então

$$\int_a^b f(x)d\psi(x) = \int_a^b f(x)d\psi_1(x)$$

e, portanto, dizemos que as medidas ψ e ψ_1 são substancialmente iguais.

Dois casos particulares em que a integral de Riemann-Stieltjes existe são:

- A função f é contínua em $[a,b]$. Neste caso, se $f(x) \geq 0$ para $x \in \mathfrak{S}(\psi)$, então $\int_a^b f(x)d\psi(x) \geq 0$. A integral $\int_a^b f(x)d\psi(x)$ é estritamente positiva se $f(x) > 0$ pelo menos em um ponto x no suporte $\mathfrak{S}(\psi)$.

- A função f é monotônica em $[a,b]$ e ψ é contínua e estritamente crescente em $[a,b]$.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de integrais de Riemann-Stieltjes.

Exemplo 1.1. Se $\psi(x) = x$ ou, ainda, $\psi(x) = x + \kappa$, para alguma constante κ, a integral de Riemann-Stieltjes é idêntica à integral de Riemann

$$\int_a^b f(x)d\psi(x) = \int_a^b f(x)dx.$$

Exemplo 1.2. Seja ψ contínua e derivável em (a, b) e seja $w(x) = \psi'(x)$. Então, pelo Teorema do Valor Médio (veja, por exemplo, [7]),

$$\psi(x_k) - \psi(x_{k-1}) = w(x_k^*)(x_k - x_{k-1}),$$

onde x_k^* é um ponto em (x_{k-1}, x_k). A função w é chamada de função peso da integral. Pela definição de integral de Riemann, temos

$$\int_a^b f(x)d\psi(x) = \int_a^b f(x)w(x)dx.$$

Exemplo 1.3. Seja ψ uma função escada com saltos nos pontos $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & a \leq x \leq \xi_1, \\ \lambda_1, & \xi_1 < x \leq \xi_2, \\ \lambda_1 + \lambda_2, & \xi_2 < x \leq \xi_3, \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n, & \xi_n < x \leq b, \end{cases}$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ são números positivos arbitrários. Somente os intervalos $[x_{k-1}, x_k)$ que contém um ponto de salto podem contribuir para a soma $S(\Delta, f, \psi)$. Para $||\Delta|| < min(\xi_k - \xi_{k-1})$, a soma fica reduzida a

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^*)\lambda_k,$$

onde $|\xi_k^* - \xi_k| \leq ||\Delta||$. Se f é contínua, temos $f(\xi_k^*) \to f(\xi_k)$ quando $||\Delta|| \to 0$ e, assim,

$$\int_a^b f(x)d\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\lambda_k.$$

Observamos que, para intervalos infinitos, a definição da integral de Riemann-Stieltjes como, por exemplo, $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)d\psi(x)$, depende da existência do limite

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)d\psi(b; x),$$

onde $\psi(b; x) = \psi(x)$ para $0 \leq x \leq b$ e $\psi(b; x) = \psi(b)$ para $x \geq b$.

Definição 1.4. *Os valores*

$$\mu_k = \int_a^b x^k d\psi(x), \quad para \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{1.1.1}$$

são chamados de momentos da medida ψ.

Quando o intervalo $[a, b]$ é limitado, os momentos definidos por (1.1.1) sempre existem. Caso seja infinito, nem sempre existem.

Quando $\mu_0 = 1$, a medida é chamada de medida de probabilidade.

Definição 1.5. *Se os momentos μ_k existem para $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, então dizemos que ψ é uma medida forte em (a, b).*

Se ψ é uma medida positiva em um intervalo $[-b, b]$, $b > 0$, tal que vale a propriedade

$$d\psi(x) = -d\psi(-x), \quad x \in [-b, b], \tag{1.1.2}$$

então ψ é denominada medida simétrica.

Definição 1.6. *Dada uma sequência de números reais $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, definimos determinante de Hankel de ordem $n + 1$ por*

$$H_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \quad n \geq 0. \tag{1.1.3}$$

Para uma sequência de números reais $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, definimos determinante generalizados de Hankel de ordem $n + 1$ por

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m+n} & \mu_{m+n+1} & \cdots & \mu_{m+2n} \end{vmatrix}, \quad m, n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0. \tag{1.1.4}$$

Observe que $H_n^{(0)} = H_n$.

1.2 Frações contínuas

Apresentamos, aqui, apenas alguns conceitos básicos sobre frações contínuas que serão necessários posteriormente. Para estudos mais aprofundados sobre frações contínuas no sentido de teoria dos números e de teoria analítica, citamos os livros [1, 13, 29, 35, 49] como referências.

Uma fração contínua é uma expressão da forma

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \ddots}}} \tag{1.2.5}$$

onde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são sequências arbitrárias de números complexos (ou funções complexas). Uma fração contínua pode ser finita ou infinita.

Algumas notações simplificadas para (1.2.5) são encontradas na literatura, como, por exemplo,

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} {}_{+} \frac{a_2}{b_2} {}_{+} \cdots {}_{+} \frac{a_n}{b_n} {}_{+} \cdots$$

e

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} + \cdots .$$

Consideremos a sequência $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ construída da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} C_0 &= b_0 \\ C_1 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} \\ C_2 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2} \\ &\vdots \\ C_n &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \cdots \frac{a_n}{+ b_n} \qquad (1.2.6) \\ &\vdots \end{aligned}$$

C_n, que é uma fração contínua finita, é chamado de n-ésimo convergente (ou aproximante) da fração contínua (1.2.5).

Por se tratar de frações, é possível que certos convergentes sejam indefinidos. Por exemplo, C_2 não tem sentido se $b_1 b_2 = -a_2$. Contudo, se quisermos ainda considerar a correspondente fração contínua, fazemos uso da definição abaixo.

Definição 1.7. *Dizemos que a fração contínua* (1.2.5) *converge para o valor* K *(finito) se no máximo um número finito de* C_n *é indefinido e*

$$\lim_{n\to\infty} C_n = K.$$

Caso contrário, dizemos que a fração contínua diverge.

Se a fração contínua converge para K, escrevemos

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \cdots = K.$$

Da relação (1.2.6), podemos escrever $C_n = \dfrac{A_n}{B_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, onde

$$\begin{array}{ll} A_0 = b_0, & B_0 = 1, \\ A_1 = b_0 b_1 + a_1, & B_1 = b_1, \\ A_2 = b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2, & B_2 = b_1 b_2 + a_2, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \end{array}$$

Notemos, por exemplo, que $A_2 = b_2 A_1 + a_2 A_0$ e $B_2 = b_2 B_1 + a_2 B_0$. Desse modo, obtemos o resultado a seguir, facilmente demonstrável usando-se o princípio da indução matemática.

Teorema 1.1. *Sejam as sequências* $\{A_n\}$ *e* $\{B_n\}$ *tais que, para* $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} A_n &= b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \\ B_n &= b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \end{aligned} \qquad (1.2.7)$$

com $A_{-1} = 1$, $A_0 = b_0$, $B_{-1} = 0$, $B_0 = 1$ *e* $b_n \neq 0$ *para* $n \geq 1$. *Então, o* n*-ésimo convergente* C_n, *dado por* (1.2.6), *satisfaz* $C_n = \dfrac{A_n}{B_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Segundo Chihara [13], as fórmulas dadas por (1.2.7) são conhecidas por fórmulas de Wallis, onde A_n é chamado o n-ésimo numerador parcial e B_n é o n-ésimo denominador parcial da fração contínua.

Se multiplicarmos a primeira fórmula de Wallis (1.2.7) por B_{n-1} e a segunda por A_{n-1}, e subtrairmos uma da outra, obtemos

$$A_nB_{n-1} - B_nA_{n-1} = -a_n(A_{n-1}B_{n-2} - B_{n-1}A_{n-2}).$$

Daí,

$$A_nB_{n-1} - B_nA_{n-1} = (-1)^{n+1}a_1a_2...a_n, \quad n \geq 1.$$

Essa relação é conhecida como fórmula do determinante (veja Wall [49, p.15]).

Além disso,

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1}a_1a_2...a_n}{B_{n-1}B_n},$$

o que nos fornece

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}a_1a_2...a_k}{B_{k-1}B_k}, \tag{1.2.8}$$

desde que $b_k \neq 0$ e $B_k \neq 0$ para $1 \leq k \leq n$. A soma (1.2.8) é a n-ésima soma parcial da série $b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}a_1a_2...a_k}{B_{k-1}B_k}$, conhecida por série de Euler-Minding.

1.3 Sequências encadeadas positivas

Apresentamos, aqui, a definição e algumas propriedades de sequências encadeadas, bem como suas relações com polinômios ortogonais. Para um estudo mais detalhado recomendamos o texto de Chihara [13].

Definição 1.8. *Uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada positiva se existe uma sequência $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que*

$$\begin{array}{lll} (i) & 0 \leq g_0 < 1\,, \quad 0 < g_n < 1\,, & n \geq 1\,, \\ (ii) & a_n = (1-g_{n-1})g_n\,, & n = 1,2,3,\ldots\,. \end{array} \tag{1.3.9}$$

$\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ é chamada de sequência de parâmetros para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e g_0 é o parâmetro inicial.

Exemplo 1.4. A sequência constante $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$ é uma sequência encadeada com uma sequência de parâmetros $\{g_n\} = \left\{\frac{n}{2(n+1)}\right\}$. Além disso, a sequência $\{h_n\} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ também é uma sequência de parâmetros para $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Exemplo 1.5. A sequência constante $\{a_n\} = \{a\}$, com $0 < a \leq \frac{1}{4}$, é uma sequência encadeada com sequências de parâmetros

$$\{g_n\} = \left\{\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right\} \quad \text{e} \quad \{h_n\} = \left\{\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right\}.$$

Deixamos a verificação desses exemplos para o leitor no Exercício 1.1.

Teorema 1.2. *Sejam $\{a_n\}$ uma sequência encadeada e $\{g_k\}$ e $\{h_k\}$ sequências de parâmetros para $\{a_n\}$. Então, $g_k < h_k$ para $k \geq 1$ se, e somente se, $g_0 < h_0$.*

Teorema 1.3. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência encadeada. Se $\{a_n\}$ tem uma sequência de parâmetros $\{g_k\}$ tal que $g_0 > 0$, então, para cada h_0 satisfazendo $0 \leq h_0 < g_0$, existe uma correspondente sequência de parâmetros $\{h_k\}$.*

Deixamos a demonstração dos dois últimos resultados como exercício (Exercícios 1.2 e 1.3).

O Teorema 1.3 mostra que, se o parâmetro inicial de uma sequência de parâmetros for positivo, sempre existe uma outra sequência de parâmetros para a sequência encadeada. Além disso, toda sequência encadeada possui uma sequência de parâmetros $\{m_k\}$ tal que $m_0 = 0$ e, pelo Teorema 1.2, temos que $m_n < g_n$ para qualquer outra sequência de parâmetros $\{g_k\}$.

Definição 1.9. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência encadeada. Uma sequência de parâmetros $\{m_k\}$ é chamada sequência minimal de parâmetros se $m_0 = 0$.*

Exemplo 1.6. A sequência encadeada $\{a_n\} = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$ tem sequência minimal de parâmetros $\{m_n\} = \left\{\dfrac{n}{2(n+1)}\right\}$.

Caso a sequência minimal de parâmetros seja a única sequência de parâmetros para $\{a_n\}$, dizemos que $\{a_n\}$ determina seus parâmetros unicamente ou que $\{a_n\}$ é unicamente determinada.

Definição 1.10. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência encadeada. Uma sequência de parâmetros $\{M_k\}$ é chamada sequência maximal de parâmetros se, para qualquer outra sequência de parâmetros $\{g_k\}$, $M_k > g_k$, $k \geq 0$.*

Teorema 1.4. *Uma sequência de parâmentros $\{g_n\}$ é a sequência maximal para uma sequência encadeada $\{a_n\}$ se, e somente se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_n}{(1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_n)} = \infty.$$

O Teorema 1.4, atribuído a H.S. Wall (veja [13] e [49]), fornece uma maneira prática para verificar se uma sequência de parâmetros é maximal.

Exemplo 1.7. Considere novamente a sequência encadeada $\{a_n\} = \{a\}$, com $0 < a \leq \dfrac{1}{4}$. Vimos que

$$\{g_n\} = \left\{\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right\} \quad \text{e} \quad \{h_n\} = \left\{\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right\},$$

são sequências de parâmetros. O Teorema 1.4 garante que a sequência de parâmetros $\{g_n\}$ é a sequência maximal. A comprovação desse fato é deixada para o leitor (Exercício 1.4).

Teorema 1.5. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência encadeada. Se $a_n = a \leq \frac{1}{4}$, $n \geq 1$, então*

$$M_n = \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2} \quad e \quad \lim_{n\mapsto\infty} m_n = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}.$$

Além disso, $0 < m_n < m_{n+1}$, $n \geq 1$.

Teorema 1.6. *Sejam $\{b_n\}$ uma sequência encadeada com sequência de parâmetros $\{h_k\}$ e $\{a_n\}$ uma outra sequência encadeada com sequência minimal de parâmetros $\{m_k\}$ e maximal $\{M_k\}$. Se*

$$a_n \leq b_n, \quad para \quad n \geq 1,$$

então,

$$m_k \leq h_k \leq M_k, \quad para \quad k \geq 0.$$

Para observar outras sequências encadeadas positivas, vamos utilizar a notação

$$a_{k,n} = a_{n+k} \quad \text{e} \quad g_{k,n} = g_{n+k}, \quad k \geq 1.$$

Teorema 1.7. *Seja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência encadeada positiva com sequência de parâmetros $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$. Então,*

(i) *$\{a_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada com sequência de parâmetros $\{g_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$, onde $a_{1,n} = a_{n+1}$ e $g_{1,n} = g_{n+1}$.*

(ii) *Se $\{\hat{m}_n\}_{n=0}^{\infty}$ denota a sequência minimal de parâmetros para $\{a_{1,n}\}$, então $\hat{m}_n < m_{1,n}$, para $n \geq 0$ e $m_{1,n} = m_{n+1}$.*

(iii) *$\{M_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$ é sequência maximal de parâmetros para $\{a_{1,n}\}$, onde $M_{1,n} = M_{n+1}$.*

As demonstrações desses resultados encontram-se em Chihara [13].

O Teorema 1.7 garante que se $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ é uma sequência encadeada, então $\{a_2, a_3, a_4, \ldots\}$ também é sequência encadeada, bem como $\{a_3, a_4, a_5, \ldots\}$, etc... .

Por outro lado, se $\{a_2, a_3, a_4, \ldots\}$ é sequência encadeada não unicamente determinada, podemos encontrar $a_1 > 0$ tal que $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ é uma sequência encadeada positiva. Veja o próximo resultado.

Teorema 1.8. *Seja $\{a_2, a_3, a_4, \ldots\}$ uma sequência encadeada positiva e não unicamente determinada, cuja sequência maximal de parâmetros é $\{M_1, M_2, M_3, \ldots\}$, ou seja, $M_1 \neq 0$. Então, tomando $a_1 = \lambda M_1$, com $0 < \lambda \leq 1$, a sequência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ também é uma sequência encadeada.*

Demonstração: Da definição de sequência encadeada, temos

$$\begin{aligned} a_2 &= (1-M_1)M_2, \\ a_3 &= (1-M_2)M_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Seja $M_0 = 1 - \lambda$. Então, $0 \leq M_0 < 1$ e, assim, podemos escrever também

$$a_1 = (1-M_0)M_1,$$

o que conclui a demonstração do resultado. ∎

Exemplo 1.8. Seja $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$, cuja sequência maximal de parâmetros é $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

• Escolhendo $\lambda = 1$, temos $M_0 = 1 - \lambda = 0$, ou seja, a sequência encadeada

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

tem como sequência maximal de parâmetros

$$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right\}.$$

Isto significa que a sequência maximal de parâmetros é igual à sequência minimal de parâmetros, ou seja, sequência encadeada determinada unicamente.

• Escolhendo $\lambda = \frac{1}{2}$, temos $M_0 = 1 - \lambda = \frac{1}{2}$, ou seja, encontramos a mesma sequência encadeada

$$\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots\right\}.$$

1.4 Polinômios ortogonais na reta real

Entre os polinômios associados a relações de recorrência de três termos estão os polinômios ortogonais. As aplicações de tais polinômios às ciências aplicadas são muitas e novas aplicações surgem a todo momento (Gautschi [20]).

Nesta seção, apresentamos alguns dos principais resultados sobre polinômios ortogonais na reta real. Suas demonstrações podem ser encontradas nos textos clássicos de Chihara [13] e Szegő [48]. Para um texto mais recente, veja o livro de Ismael [24]. Para um texto em português, veja Andrade e outros [2].

Definição 1.11. *Dada uma medida positiva ϕ em (a, b) (como na Definição 1.4) definimos o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$ da seguinte forma:*

$$\langle f, g \rangle_\phi = \int_a^b f(x)g(x)d\phi(x),$$

onde f e g são funções contínuas no intervalo (a, b).

Definição 1.12. *Uma sequência de polinômios $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, com P_n de grau exatamente n, é chamada sequência de polinômios ortogonais com relação à medida ϕ no intervalo (a, b) se*

$$\langle P_n, P_m \rangle_\phi = \int_a^b P_n(x)P_m(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \rho_n > 0, & \text{se } n = m. \end{cases} \quad (1.4.10)$$

Usando o delta de Kronecker $\delta_{m,n}$, definido como $\delta_{m,n} = 1$, para $m = n$, e $\delta_{m,n} = 0$, para $m \neq n$, podemos escrever a definição anterior como

$$\langle P_m, P_n \rangle_\phi = \int_a^b P_m(x)P_n(x)d\phi(x) = \rho_n \delta_{m,n}. \quad (1.4.11)$$

Se $\rho_n = 1$, então a sequência é chamada de sequência de polinômios ortonormais.

Em termos de seus coeficientes, denotaremos os polinômios P_n por

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} x^j, \quad \text{com } a_{n,n} \neq 0.$$

Como $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios e P_n é de grau exatamente n, então $P_0, P_1, \ldots, P_n$ formam uma base para o espaço dos polinômios de grau n, $\mathbb{P}_n$ (Exercício 1.5).

Os polinômios ortogonais podem ser definidos de diferentes maneiras (Exercício 1.6). Podemos dizer, equivalentemente, que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação a ϕ em (a, b) se

$$\langle P_n, \pi\rangle_\phi = \int_a^b P_n(x)\pi(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \forall \,\text{polinômio}\, \pi \text{ de grau} \leq n-1, \\ \hat{\rho}_n \neq 0, & \forall \,\text{polinômio}\, \pi \text{ de grau } n, \end{cases}$$

ou, se

$$\langle x^m, P_n\rangle_\phi = \int_a^b x^m P_n(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 0, 1, ..., n-1, \\ \tilde{\rho}_n \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases} \tag{1.4.12}$$

Sejam $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ duas sequências de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação à medida ϕ. Então,

$$T_j(x) = c_j P_j(x), \quad j = 0, 1, \ldots,$$

onde c_j é uma constante que depende apenas de j (Exercício 1.7).

Com esse resultado, podemos observar que a unicidade da sequência de polinômios ortogonais com relação a uma medida ϕ vale se for imposta alguma condição de normalização, por exemplo, que são polinômios mônicos, isto é, $a_{n,n} = 1$.

Em Chihara [13] encontramos o resultado a seguir.

Teorema 1.9. *Com os momentos μ_k, $k = 0, 1, \ldots,$ definidos por* (1.1.1)*, os determinantes de Hankel H_n, definidos por* (1.1.3)*, são positivos.*

Deixamos a demonstração desse resultado a cargo do leitor (Exercício 1.8).

Dada uma medida positiva ϕ, o Teorema 1.9 garante a existência da sequência de polinômios ortogonais pois, como os determinantes de Hankel são não nulos e $a_{n,n} \neq 0$, utilizando as equações (1.4.12) para $m = 0, 1, \ldots, n-1, n$ e escrevendo P_n em termos de seus coeficientes, obtemos o sistema de equações lineares

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{n,0}\mu_0 & + & a_{n,1}\mu_1 & + & \ldots & + & a_{n,n}\mu_n & = & 0 \\ a_{n,0}\mu_1 & + & a_{n,1}\mu_2 & + & \ldots & + & a_{n,n}\mu_{n+1} & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,0}\mu_n & + & a_{n,1}\mu_{n+1} & + & \ldots & + & a_{n,n}\mu_{1n} & = & \tilde{\rho}_n \end{array} \right. .$$

Substituindo a última equação desse sistema por $a_{n,0} + a_{n,1}x + \cdots + a_{n,n}x^n = P_n(x)$ e resolvendo o sistema resultante pela regra de Cramer, segue que

$$P_n(x) = \frac{a_{n,n}}{H_n} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \ldots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \ldots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix}.$$

1.4.1 Propriedades dos polinômios ortogonais

Polinômios ortogonais satisfazem a muitas propriedades interessantes e, por isso, são largamente utilizados. Uma delas é que seus zeros são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b).

Como dissemos anteriormente, os polinômios ortogonais satisfazem a uma relação de recorrência de três termos como a dada no teorema a seguir.

Teorema 1.10.

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{1.4.13}$$

com as condições iniciais $P_0(x) = 1$ *e* $P_1(x) = \gamma_1 x - \beta_1$*, onde* $\beta_n,\ \gamma_n,\ \alpha_{n+1} \in \mathbb{R},\ n \geq 1,$ *e*

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1}\frac{\langle xP_n, P_n\rangle_\phi}{\langle P_n, P_n\rangle_\phi}, \quad n \geq 0,$$

e

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\frac{\langle P_n, P_n\rangle_\phi}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle_\phi},\ n \geq 1.$$

Observe que $\gamma_n \neq 0$, $n \geq 1$, e $\alpha_n \neq 0$, $n \geq 2$. A demonstração desse resultado fica a cargo do leitor no Exercício 1.9.

Uma importante consequência do teorema anterior é o resultado a seguir (Exercício 1.10).

Teorema 1.11 (Identidade de Christoffel-Darboux)**.** *Seja* $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ *uma sequência de polinômios ortonormais. Então, eles satisfazem à seguinte identidade:*

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(y) = \frac{1}{\gamma_{n+1}}\frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x - y}. \tag{1.4.14}$$

Se somarmos e subtrairmos $p_{n+1}(x)p_n(x)$ ao numerador do segundo membro da Identidade de Christoffel-Darboux (1.4.14), obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(y) = \frac{1}{\gamma_{n+1}}\frac{p_n(x)(p_{n+1}(x) - p_{n+1}(y)) - p_{n+1}(x)(p_n(x) - p_n(y))}{x - y}.$$

Fazendo $y \longrightarrow x$ em ambos os membros da igualdade anterior, concluímos que

$$\sum_{k=0}^{n} (p_k(x))^2 = \frac{1}{\gamma_{n+1}}\left[p_n(x)\,(p_{n+1}(x))' - p_{n+1}(x)\,(p_n(x))'\right] > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.4.15}$$

Com a propriedade (1.4.15) é possível mostrar a propriedade de entrelaçamento dos zeros dos polinômios ortogonais (Exercício 1.11), ou seja, se $x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n}$ são os n zeros do polinômio ortogonal P_n em ordem crescente e $x_{n-1,1} < x_{n-1,2} < \cdots < x_{n-1,n-1}$ são os $n-1$ zeros de P_{n-1}, também em ordem crescente, então

$$x_{n,k} < x_{n-1,k} < x_{n,k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Definição 1.13. *Dada uma sequência de polinômios ortogonais* $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$*, definimos polinômio associado a* P_n *por*

$$Q_n(x) = \int_a^b \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x}d\phi(t), \quad n \geq 0. \tag{1.4.16}$$

Os polinômios Q_n são polinômios de grau exatamente $n-1$ para $n \geq 1$ (Exercício 1.12).

Os polinômios associados Q_n satisfazem à mesma relação de recorrência dos polinômios ortogonais P_n, mas com condições iniciais $Q_0(x) = 0$ e $Q_1(x) = \gamma_1 \mu_0$.

Esses polinômios são bastante utilizados no cálculo dos pesos das fórmulas de quadratura gaussianas (veja Seção 4.1).

Sem perda de generalidade, a partir de agora consideraremos os polinômios ortogonais P_n na forma mônica, ou seja, com coeficiente do termo de maior grau igual a 1. Nesse caso, os polinômios P_n e Q_n satisfazem, respectivamente, às seguintes relações de recorrência:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= (x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \\ Q_{n+1}(x) &= (x - \beta_{n+1})Q_n(x) - \alpha_{n+1}Q_{n-1}(x), \end{aligned} \quad n \geq 1, \tag{1.4.17}$$

com $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x - \beta_1$, $Q_0(x) = 0$ e $Q_1(x) = \mu_0$, onde

$$\beta_{n+1} = \frac{\langle xP_n, P_n\rangle_\phi}{\langle P_n, P_n\rangle_\phi}, \ n \geq 0, \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{\langle P_n, P_n\rangle_\phi}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle_\phi}, \ n \geq 1. \tag{1.4.18}$$

Observe que $\alpha_n > 0$ para $n \geq 2$.

Como $\alpha_{n+1} = \dfrac{\rho_n}{\rho_{n-1}}$, podemos escrever

$$\rho_n = \langle P_n, P_n\rangle_\phi = \alpha_{n+1}\rho_{n-1} = \alpha_{n+1}\alpha_n \cdots \alpha_2\mu_0, \quad n \geq 1,$$

com $\rho_0 = \mu_0$.

Utilizando as fórmulas de recorrência (1.4.17) para os polinômios P_n e Q_n, podemos mostrar que (Exercício 1.14)

$$P_{n+1}(x)Q_n(x) - P_n(x)Q_{n+1}(x) = -\alpha_{n+1} \cdots \alpha_3\alpha_2\mu_0 \neq 0.$$

Com esse resultado, é fácil mostrar que entre dois zeros consecutivos do polinômio P_n existe um único zero do polinômio Q_n, ou seja,

$$x_{n,k} < y_{n,k} < x_{n,k+1}, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1,$$

lembrando que $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \cdots, n$, são os zeros de P_n em ordem crescente e $y_{n,k}$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$, os zeros de Q_n, também em ordem crescente (Exercício 1.15).

Se considerarmos a sequência de polinômios ortonormais $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, com $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{a}_{n,k}x^k$, como $\langle p_n, p_n\rangle_\phi = 1$, a relação de recorrência (1.4.13) para os polinômios ortonormais, torna-se

$$p_{n+1}(x) = (\hat{\gamma}_{n+1}x - \hat{\beta}_{n+1})p_n(x) - \hat{\alpha}_{n+1}p_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{1.4.19}$$

onde $p_0(x) = 1$, $p_{-1}(x) = 0$, $\hat{\alpha}_{n+1}$, $\hat{\beta}_n$, $\hat{\gamma}_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, e

$$\hat{\gamma}_{n+1} = \frac{\hat{a}_{n+1,n+1}}{\hat{a}_{n,n}}, \quad \hat{\beta}_{n+1} = \hat{\gamma}_{n+1}\langle xp_n, p_n\rangle_\phi, \quad \hat{\alpha}_{n+1} = \frac{\hat{\gamma}_{n+1}}{\hat{\gamma}_n}.$$

Usando o fato de que os polinômios ortonormais p_n podem ser obtidos dos polinômios mônicos P_n fazendo-se $p_n(x) = \hat{a}_{n,n}P_n(x)$, sua relação de recorrência pode ser escrita como

$$xp_n(x) = \sqrt{\alpha_{n+1}}\, p_{n-1}(x) + \beta_{n+1}p_n(x) + \sqrt{\alpha_{n+2}}\, p_{n+1}(x), \quad n \geq 0.$$

Fazendo $n = 0, 1, 2, \dots, m-1$, obtemos

$$x \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_{m-2}(x) \\ p_{m-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \sqrt{\alpha_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{\alpha_2} & \beta_2 & \sqrt{\alpha_3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_3} & \beta_3 & \sqrt{\alpha_4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{m-1} & \sqrt{\alpha_m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\alpha_m} & \beta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_{m-2}(x) \\ p_{m-1}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{\hat{\alpha}_{m+1}} p_m(x) \end{pmatrix}.$$

Substituindo x por $x_{m,k}$, zero do polinômio p_m, o sistema de equações lineares torna-se

$$x_{m,k} \mathbf{u}_{m,k} = \mathbf{J}_m \mathbf{u}_{m,k}, \quad k = 1, 2, ..., m,$$

onde

$$\mathbf{J}_m = \begin{pmatrix} \beta_1 & \sqrt{\alpha_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{\alpha_2} & \beta_2 & \sqrt{\alpha_3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_3} & \beta_3 & \sqrt{\alpha_4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{m-1} & \sqrt{\alpha_m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\alpha_m} & \beta_m \end{pmatrix}, \tag{1.4.20}$$

que é conhecida por matriz de Jacobi. Portanto, os zeros $x_{m,k}$ dos polinômios ortogonais são os autovalores da matriz $\mathbf{J}_m$.

Se ϕ é uma medida simétrica em $(-b, b)$, então valem as seguintes propriedades (ver Chihara [13]):

- $\mu_{2n+1} = 0, \quad n = 0, 1, \dots;$
- $\beta_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots;$
- $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad n = 0, 1, \dots;$
- $x_{n,k} = -x_{n,n-k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$

Consideremos, agora, o problema inverso, ou seja, dados polinômios definidos por uma relação de recorrência de três termos do tipo (1.4.17), é possível encontrar uma medida positiva ψ com relação à qual esses polinômios são ortogonais? O famoso Teorema de Favard (veja [13, Teorema 4.4]) responde esta questão.

Teorema 1.12 (Teorema de Favard)**.** *Sejam $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ sequências de números complexos arbitrários e seja $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios definida pela fórmula de recorrência*

$$Q_n(x) = (x - \beta_n) Q_{n-1}(x) - \alpha_n Q_{n-2}(x), \quad n \geq 1,$$

com $Q_{-1}(x) = 0$ e $Q_0(x) = 1$. Então, existe uma medida ϕ tal que

$$\int_a^b d\phi(x) = \alpha_1 \quad \text{e} \quad \int_a^b Q_m(x)Q_n(x)d\phi(x) = 0 \quad \textit{para} \quad m \neq n.$$

ϕ é quase-definida e $\{Q_n(x)\}$ é a correspondente sequência de polinômios ortogonais mônicos se, e somente se, $\alpha_n \neq 0$, enquanto que ϕ é definida positiva se, e somente se, os coeficientes β_n são reais e $\alpha_n > 0$ para $n \geq 1$.

1.4.2 Polinômios ortogonais clássicos

Segundo Chihara, os polinômios de Hermite, Laguerre e Jacobi (incluindo os casos especiais de Legendre, Gegenbauer e Chebyshev) são conhecidos como polinômios ortogonais clássicos. Eles são exemplos de polinômios ortogonais mais conhecidos e estudados.

- **Polinômios de Jacobi**

Os polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$, com $\alpha, \beta > -1$, são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à medida $d\phi(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$ e podem ser dados pela fórmula de Rodrigues

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

Cálculos diretos, usando a fórmula de Rodrigues, mostram que o coeficiente do termo de maior grau do polinômio $P_n^{(\alpha,\beta)}$ é dado por

$$a_{n,n}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$

A sequência de polinômios de Jacobi na forma mônica, ou seja, $\left\{\dfrac{P_n^{(\alpha,\beta)}}{a_{n,n}^{(\alpha,\beta)}}\right\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz à seguinte relação de recorrência de três termos

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) &= \left(x - \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)}\right)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &\quad - \frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta-1)}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

com $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$ e $P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = x - \dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+2}$.

Na forma mônica, eles também satisfazem à relação diferencial $\dfrac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = nP_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$. Além disso,

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)}\rangle_\phi = \frac{2^{2n+\alpha+\beta+1}n!\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}, \tag{1.4.21}$$

onde Γ é a conhecida função Gama definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt, \quad \text{para} \quad Re(x) > 0.$$

Note que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ e, se $x \in \mathbb{N}$, então $\Gamma(x+1) = x!$. Para mais estudos sobre a função Gama recomendamos os textos [6, 33, 48].

• **Polinômios de Gegenbauer**

Quando $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$, os polinômios de Jacobi são conhecidos por polinômios de Gegenbauer ou polinômios ultraesféricos. Esses polinômios são, então, ortogonais em $(-1, 1)$ com relação à medida $d\phi(x) = (1 - x^2)^{\lambda - 1/2}dx$, $\lambda > -1/2$, e denotados por $G_n^{(\lambda)}$. A relação de recorrência de três termos para esses polinômios na forma mônica é dada por

$$G_{n+1}^{(\lambda)}(x) = xG_n^{(\lambda)}(x) - \frac{n(2\lambda + n - 1)}{4(\lambda + n)(\lambda + n - 1)}G_{n-1}^{(\lambda)}(x), \quad n \geq 1, \tag{1.4.22}$$

com $G_0^{(\lambda)}(x) = 1$ e $G_1^{(\lambda)}(x) = x$.

• **Polinômios de Legendre**

Os polinômios de Legendre, P_n, são um caso especial dos polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = 0$. Assim, são ortogonais com relação à medida $d\phi(x) = dx$ no intervalo $(-1, 1)$.

A relação de recorrência de três termos para os polinômios de Legendre na forma mônica é

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \frac{n^2}{(2n + 1)(2n - 1)}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$.

Além disso, fazendo $\alpha = \beta = 0$ em (1.4.21), obtemos

$$\rho_n = \langle P_n, P_n \rangle_\phi = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n + 1)!(2n)!}.$$

• **Polinômios de Chebyshev**

Os polinômios de Chebyshev de primeira espécie, T_n, são ortogonais com relação à medida $d\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx$ no intervalo $(-1, 1)$ e podem ser dados por

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in (-1, 1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ . \tag{1.4.23}$$

Tomando $x = \cos(\theta)$, com $\theta \in (0, \pi)$, podemos escrever $T_n(x) = \cos(n\theta)$, $n \geq 0$, e, usando relações trigonométricas, facilmente mostra-se que

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$. Utilizando indução finita em n, encontramos que o coeficiente do termo de maior grau do polinômio T_n, $n \geq 1$, é 2^{n-1}. Além disso, esses polinômios satisfazem

$$\langle T_n, T_m \rangle_\phi = \int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{se } m = n \neq 0, \\ \pi, & \text{se } m = n = 0. \end{cases}$$

• **Polinômios de Laguerre**

Os polinômios de Laguerre, $L_n^{(\alpha)}$, são ortogonais com relação à medida $d\phi(x) = x^\alpha e^{-x}dx$, $\alpha > -1$, no intervalo $[0, \infty)$ e podem ser dados pela fórmula de Rodrigues

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}[x^\alpha e^{-x}].$$

Cálculos diretos mostram que, nessa forma, os polinômios $L_n^{(\alpha)}$ são mônicos.

Esses polinômios satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = [x - (2n + \alpha + 1)]L_n^{(\alpha)}(x) - n(n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1,$$

com $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $L_1^{(\alpha)}(x) = x - (\alpha + 1)$.

Temos, ainda, que $\rho_n = \langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle_\phi = \Gamma(n + \alpha + 1)n!$ e $\dfrac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x) = nL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$.

• **Polinômios de Hermite**

Os polinômios de Hermite, H_n, são ortogonais no intervalo $(-\infty, \infty)$ com relação à medida $d\phi(x) = e^{-x^2}dx$ e dados explicitamente pela expressão

$$H_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m n! x^{n-2m}}{4^m m!(n-2m)!},$$

onde $\lfloor z \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a z. Também podem ser dados pela fórmula de Rodrigues

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}].$$

Essas fórmulas apresentam os polinômios de Hermite na forma mônica. A relação de recorrência satisfeita por esses polinômios é

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - \frac{n}{2}H_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $H_0(x) = 1$ e $H_1(x) = x$.

Além disso, $\rho_n = \langle H_n, H_n \rangle_\phi = \dfrac{\sqrt{\pi}n!}{2^n}$ e $\dfrac{d}{dx}H_n(x) = nH_{n-1}(x)$.

1.4.3 Sequências encadeadas positivas e polinômios ortogonais

Seja $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais mônicos com relação a ϕ no intervalo (a, b).

Consideremos a sequência $\{a_n(x)\}$ definida por

$$a_n(x) = \frac{\alpha_{n+1}}{(\beta_n - x)(\beta_{n+1} - x)}, \quad n \geq 1, \tag{1.4.24}$$

onde β_n e α_{n+1}, $n \geq 1$, são os coeficientes da correspondente relação de recorrência (1.4.17).

Seja $x \notin (a,b)$ tal que $\{a_n(x)\}$ é a sequência encadeada dada por (1.4.24). Então, a correspondente sequência minimal de parâmetros $\{m_k(x)\}$ é dada por

$$m_k(x) = 1 - \frac{P_{k+1}(x)}{(x-\beta_{k+1})P_k(x)}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \; . \tag{1.4.25}$$

De fato, dividindo a relação de recorrência de três termos (1.4.17) por P_n, com $x \notin (a,b)$, obtemos

$$\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = (x-\beta_{n+1}) - \alpha_{n+1}\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)}.$$

Então,

$$\alpha_{n+1} = \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)}\left((x-\beta_{n+1}) - \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}\right)$$

e, ainda,

$$\frac{\alpha_{n+1}}{(x-\beta_n)(x-\beta_{n+1})} = \frac{P_n(x)}{(x-\beta_n)P_{n-1}(x)}\left(1 - \frac{P_{n+1}(x)}{(x-\beta_{n+1})P_n(x)}\right).$$

Portanto, de (1.4.24),

$$a_n(x) = \frac{P_n(x)}{(x-\beta_n)P_{n-1}(x)}\left(1 - \frac{P_{n+1}(x)}{(x-\beta_{n+1})P_n(x)}\right), \quad n \geq 1.$$

Fazendo

$$m_n(x) = 1 - \frac{P_{n+1}(x)}{(x-\beta_{n+1})P_n(x)},$$

obtemos

$$1 - m_{n-1}(x) = \frac{P_n(x)}{(x-\beta_n)P_{n-1}(x)}.$$

Daí,

$$a_n(x) = (1 - m_{n-1}(x))m_n(x), \quad n \geq 1,$$

onde $m_n(x)$ é dado exatamente por (1.4.25).

Portanto, a sequência $\{a_n(x)\}$ é uma sequência encadeada, cuja sequência minimal de parâmetros é $\{m_k(x)\}$, pois $m_0(x) = 0$.

Observação: Pela definição de sequência encadeada e para $x \notin (a,b)$, temos

$$1 - m_n(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(x-\beta_{n+1})P_n(x)}, \quad n \geq 0.$$

Como $m_0(x) = 0$ e $0 < m_k(x) < 1$, $k \geq 1$, então $0 < 1 - m_n(x) < 1$, $n \geq 1$. Logo,

$$0 < \frac{P_{n+1}(x)}{(x-\beta_{n+1})P_n(x)} < 1, \quad n \geq 1.$$

Podemos ainda escrever $m_n(x)$ da seguinte forma:

$$m_n(x) = 1 - \frac{P_{n+1}(x)}{(x-\beta_{n+1})P_n(x)} = \frac{(x-\beta_{n+1})P_n(x) - P_{n+1}(x)}{(x-\beta_{n+1})P_n(x)}.$$

Da relação de recorrência de três termos para os polinômios P_n, obtemos $m_0(x) = 0$ e

$$m_n(x) = \frac{\alpha_{n+1}P_{n-1}(x)}{(x-\beta_{n+1})P_n(x)}, \quad n \geq 1, \quad x \notin (a,b).$$

Exemplo 1.9. Consideremos os coeficientes da relação de recorrência (1.4.22) dos polinômios de Gegenbauer, que são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$, ou seja,

$$\beta_n^{(\lambda)} = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^{(\lambda)} = \frac{n(2\lambda + n - 1)}{4(\lambda + n)(\lambda + n - 1)}, \quad n \geq 1,$$

com $\lambda > -1/2$.

Tomando $x \notin (-1, 1)$, por exemplo $x = 1$, temos

$$a_n(1) = \frac{\alpha_{n+1}^{(\lambda)}}{(\beta_n^{(\lambda)} - 1)(\beta_{n+1}^{(\lambda)} - 1)} = \alpha_{n+1}^{(\lambda)}, \quad n \geq 1.$$

Portanto, a sequência $\{\alpha_{n+1}^{(\lambda)}\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada positiva com sequência minimal de parâmetros $\{m_n^{(\lambda)}\}_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$m_n^{(\lambda)} = m_n(1) = 1 - \frac{G_{n+1}^{(\lambda)}(1)}{G_n^{(\lambda)}(1)}, \quad n \geq 0.$$

Usando o princípio da indução finita é possível mostrar que

$$G_{n+1}^{(\lambda)}(1) = \frac{2\lambda + n}{2(\lambda + n)} G_n^{(\lambda)}(1), \quad n \geq 0, \tag{1.4.26}$$

com $G_0^{(\lambda)}(1) = 1$ (Exercício 1.17).

De (1.4.26), vemos que

$$m_n^{(\lambda)} = 1 - \frac{G_{n+1}^{(\lambda)}(1)}{G_n^{(\lambda)}(1)} = 1 - \frac{2\lambda + n}{2(\lambda + n)} = \frac{n}{2(\lambda + n)}, \quad n \geq 0.$$

Portanto,

$$\alpha_{n+1}^{(\lambda)} = \frac{n(2\lambda + n - 1)}{4(\lambda + n)(\lambda + n - 1)} = (1 - m_{n-1}^{(\lambda)}) m_n^{(\lambda)}, \quad n \geq 1.$$

1.5 Polinômios ortogonais no círculo unitário

Os polinômios para-ortogonais são polinômios que, sob certas condições, satisfazem a uma relação de recorrência da forma (1). Como esses polinômios estão associados aos polinômios ortogonais no círculo unitário, faremos, nesta seção, um breve estudo sobre eles, utilizando as referências [27] e [39]. Também conhecidos como polinômios de Szegő, em homenagem a G. Szegő que os introduziu na primeira metade do século XX, os polinômios ortogonais no círculo unitário não satisfazem a uma relação de recorrência da forma (1).

Consideremos ψ uma medida positiva no círculo unitário

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

ou seja, $\psi(e^{i\theta})$, definida em $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é uma função real, limitada e não decrescente, com infinitos pontos de aumento em $\mathcal{C}$, onde os momentos (trigonométricos) são dados por

$$\mu_m = \int_{\mathcal{C}} z^{-m} \, d\psi(z), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{1.5.27}$$

Em alguns trabalhos sobre o assunto, os momentos trigonométricos são, equivalentemente, definidos por $\mu_m = \int_{\mathcal{C}} z^{-m}\, d\psi(z) = \int_0^{2\pi} e^{-im\theta}\, d\psi(e^{i\theta})$.

Observe que

$$\overline{\mu}_{-n} = \int_0^{2\pi} \overline{e^{in\theta}}\, d\psi(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\, d\psi(e^{i\theta}) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \ . \tag{1.5.28}$$

A medida $\psi(e^{i\theta})$ induz uma outra medida $\widetilde{\psi}(\theta)$, com suporte em $[0, 2\pi]$, que chamaremos, simplesmente, de $\psi(\theta)$ e esta será a notação que adotaremos neste texto.

De posse da medida ψ, definimos o seguinte funcional linear

$$\mathcal{L}\left[z^m\right] = \int_{\mathcal{C}} z^m\, d\psi(z) = \mu_{-m}. \tag{1.5.29}$$

Como o suporte da medida ψ é infinito, isto é, o número de pontos de aumento de ψ em $[0, 2\pi]$ é infinito (veja Definição 1.1), para qualquer $f(e^{i\theta}) \geq 0$, $f(e^{i\theta}) \not\equiv 0$ e contínua no suporte de ψ, temos

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, d\psi(\theta) > 0.$$

Em particular, se f é um polinômio, então

$$\mathcal{L}[\,|f|^2\,] = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{f(e^{i\theta})}\, d\psi(\theta) > 0.$$

Assim, utilizando $\mathcal{L}$, definimos o produto interno

$$\langle f, g\rangle = \mathcal{L}[f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}] = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\, d\psi(\theta). \tag{1.5.30}$$

Note que, para $f(z) = \sum_{j=p}^{q} c_j z^j$, com $p \leq q \in \mathbb{Z}$ e $c_j \in \mathbb{C}$, usando (1.5.29), temos

$$\mathcal{L}\left[f\right] = \mathcal{L}\left[\sum_{j=p}^{q} c_j z^j\right] = \sum_{j=p}^{q} c_j \mu_{-j}. \tag{1.5.31}$$

Correspondente à sequência de momentos $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, podemos definir a seguinte matriz, conhecida como matriz de Toeplitz:

$$T_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \ .$$

O determinante da matriz T_n é conhecido como determinante de Toeplitz e é definido por

$$\Delta_{-1} = 1 \quad \text{e} \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}, \quad n \geq 0. \tag{1.5.32}$$

Definição 1.14. *Dizemos que um funcional linear $\mathcal{L}$, onde $\mu_m = \mathcal{L}[z^{-m}]$, é positivo-definido se*

$$\Delta_n > 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

e quase-definido se

$$\Delta_n \neq 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Do produto interno (1.5.29) e de (1.5.30), vemos que, para todo polinômio de grau n, $n \geq 0$, $\pi(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$, com $c_j \in \mathbb{C}$ e $c_n \neq 0$, a norma $||\pi||$ é dada por

$$||\pi|| = \left(\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \overline{c}_k c_j \mu_{k-j} \right)^{1/2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} 0 < ||\pi||^2 = \langle \pi, \pi \rangle = \mathcal{L}\left[\overline{\pi(z)}\pi(z)\right] &= \mathcal{L}\left[\overline{\sum_{k=0}^{n} c_k z^k} \sum_{j=0}^{n} c_j z^j\right] \\ &= \mathcal{L}\left[\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \overline{c}_k c_j z^{j-k}\right] = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \overline{c}_k c_j \mu_{k-j}. \end{aligned}$$

Escrevendo $||\pi||^2$ na forma matricial, temos

$$\begin{aligned} ||\pi||^2 \quad = \quad & \begin{pmatrix} \overline{c}_0 & \overline{c}_1 & \overline{c}_2 & \cdots & \overline{c}_n \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \mu_{-2} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \mu_2 & \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} > 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \overline{c}_0 & \overline{c}_1 & \cdots & \overline{c}_n \end{pmatrix} T_n \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} > 0.$$

Disto, concluímos que T_n é positiva-definida e, então, $\Delta_n > 0$ para $n \geq 0$. Assim, $\mathcal{L}$ é um funcional linear positivo-definido.

Definição 1.15. *Uma sequência $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ de números complexos é hermitiana se, para $n = 0, 1, 2, \ldots,$ $\mu_n = \overline{\mu}_{-n}$ e é hermitiana positiva-definida se $\Delta_n > 0,\ n \geq 0$.*

De (1.5.28), observamos que, dada uma medida positiva no círculo unitário, a sequência de momentos $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ definidos por (1.5.27) forma uma sequência hermitiana positiva-definida. Além disso, a matriz T_n é hermitiana, isto é, $T_n = \overline{T}_n^t = T_n^H$.

Agora, podemos definir os polinômios ortogonais com relação a $\mathcal{L}$, ou seja, os polinômios ortogonais no círculo unitário.

Definição 1.16. *Dado um funcional linear $\mathcal{L}$ positivo-definido (quase-definido), ou seja, se $\Delta_n > 0$ ($\Delta_n \neq 0$), uma sequência de polinômios $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, onde S_n é mônico de grau exatamente n, é chamada de sequência de polinômios ortogonais com relação a $\mathcal{L}$, se*

$$\langle S_n, S_m\rangle = \mathcal{L}\left[S_n(z)\overline{S_m(z)}\right] = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad m \neq n, \\ \kappa_n^2 \neq 0, & \text{se} \quad m = n. \end{cases} \tag{1.5.33}$$

Neste texto, vamos considerar apenas os polinômios S_n mônicos, isto é, com os coeficientes dos termos de maior grau iguais a 1.

Como no caso dos polinômios ortogonais na reta real, também prova-se que, para todo polinômio π_m de grau $m \leq n$,

$$\langle S_n, \pi_m\rangle = \mathcal{L}\left[S_n(z)\overline{\pi_m(z)}\right] = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad m < n, \\ \hat{\kappa}_n \neq 0, & \text{se} \quad m = n. \end{cases} \tag{1.5.34}$$

Deixamos a demonstração desse fato para o leitor (Exercício 1.19).

Escrevendo, para $n \geq 0$,

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_{k,n} z^k, \quad c_{k,n} \in \mathbb{C}, \quad c_{n,n} = 1,$$

e usando (1.5.34) para $n \geq 0$ e $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, obtemos

$$\langle S_n, z^m\rangle = \mathcal{L}\left[S_n(z)\frac{1}{z^m}\right] = \sum_{k=0}^{n} c_{k,n}\mu_{m-k} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad m < n, \\ \tilde{\kappa}_n \neq 0, & \text{se} \quad m = n. \end{cases} \tag{1.5.35}$$

Note que (1.5.33) e (1.5.35) são definições equivalentes para os polinômios de Szegő (veja Exercício 1.20).

Fazendo $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ em (1.5.35), obtemos o sistema de equações lineares

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_1 & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{0,n} \\ c_{1,n} \\ \vdots \\ c_{n-1,n} \\ c_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{\kappa}_n \end{pmatrix}. \tag{1.5.36}$$

Calculando $c_{n,n}$ pela regra de Cramer, temos

$$1 = c_{n,n} = \frac{\tilde{\kappa}_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\kappa}_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Logo,

$$\langle S_n, z^m\rangle = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad m = 0, 1, \ldots, n-1, \\ \Delta_n/\Delta_{n-1}, & \text{se} \quad m = n. \end{cases} \tag{1.5.37}$$

Substituindo a última linha do sistema (1.5.36) por $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_{k,n} z^k$, obtemos o novo sistema linear

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{0,n} \\ c_{1,n} \\ \vdots \\ c_{n-1,n} \\ c_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ S_n(z) \end{pmatrix}.$$

Calculando $c_{n,n}$ pelo mesmo método anterior, podemos escrever o polinômio S_n da seguinte forma:

$$S_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}. \tag{1.5.38}$$

A relação (1.5.38) mostra a existência e unicidade dos polinômios de Szegő na forma mônica, pois $\Delta_{n-1} \neq 0$, e também é uma forma de se construir esses polinômios.

Polinômios Recíprocos

Os polinômios recíprocos têm um papel importante na teoria de polinômios ortogonais no círculo unitário.

Definição 1.17. *Se q_n é um polinômio de grau no máximo n, então o seu polinômio recíproco é definido por*

$$q_n^*(z) = z^n\,\overline{q_n(1/\overline{z})}.$$

Escrevendo $q_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, obtemos

$$q_n^*(z) = z^n \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k (1/\overline{z}^k)} = z^n \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k (1/z^k) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k z^{n-k}.$$

Usando a notação $\overline{q}_n$, que é o polinômio obtido de q_n conjugando-se apenas os coeficientes, podemos então escrever

$$q_n^*(z) = z^n \overline{q}_n(1/z).$$

Note que $(q_n^*)^* = q_n$. Com essa notação e como no círculo unitário $\overline{z} = 1/z$, podemos escrever

$$\langle S_n, S_m \rangle = \mathcal{L}\left[S_n(z)\overline{S_m(z)}\right] = \mathcal{L}\left[S_n(z)\overline{S}_m(\overline{z})\right] = \mathcal{L}\left[S_n(z)\overline{S}_m(1/z)\right].$$

Utilizando a forma (1.5.38) para S_n, temos o polinômio recíproco de S_n dado por

$$S_n^*(z) = z^n \overline{S_n\left(1/\overline{z}\right)} = \frac{z^n}{\overline{\Delta}_{n-1}} \begin{vmatrix} \overline{\mu}_0 & \overline{\mu}_{-1} & \cdots & \overline{\mu}_{-n} \\ \overline{\mu}_1 & \overline{\mu}_0 & \cdots & \overline{\mu}_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\mu}_{n-1} & \overline{\mu}_{n-2} & \cdots & \overline{\mu}_{-1} \\ 1 & 1/z & \cdots & 1/z^n \end{vmatrix}.$$

Lembrando que $\Delta_n > 0$ e que $\mu_n = \overline{\mu}_{-n}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, então

$$S_n^*(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_1 \\ z^n & z^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}. \tag{1.5.39}$$

Usando as definições de polinômio recíproco e do funcional (1.5.29), e como $|z| = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle S_n^*, z^m\rangle &= \left\langle z^n\overline{S_n(1/\overline{z})},\ z^m\right\rangle = \mathcal{L}\left[z^n\overline{S_n(1/\overline{z})}\ \overline{z}^m\right] = \mathcal{L}\left[z^n\overline{S_n(z)}\frac{1}{z^m}\right]\\ &= \mathcal{L}\left[z^{n-m}\ \overline{S_n(z)}\right] = \langle z^{n-m}, S_n\rangle.\end{aligned}$$

Logo, para $n > m$,

$$\langle S_n^*, z^m\rangle = \begin{cases}\Delta_n/\Delta_{n-1}, & \text{se} \quad m = 0,\\ 0, & \text{se} \quad m = 1, 2, \ldots, n.\end{cases} \tag{1.5.40}$$

Como $S_m(z) = z^m + \sum_{k=0}^{m-1} c_{k,m}z^k$, então

$$\begin{aligned}\langle S_n, S_m\rangle &= \left\langle S_n,\ z^m + \sum_{k=0}^{m-1} c_{k,m}z^k\right\rangle\\ &= \langle S_n, z^m\rangle + \sum_{k=0}^{m-1} c_{k,m}\langle S_n, z^k\rangle = \langle S_n, z^m\rangle, \quad m = 0, 1, \ldots, n.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle S_n, S_m\rangle = \begin{cases}0, & \text{se} \quad m = 0, 1, \ldots, n-1,\\ \Delta_n/\Delta_{n-1}, & \text{se} \quad m = n.\end{cases}$$

Consideremos, agora, números α_n definidos por

$$\overline{\alpha}_n = -S_{n+1}(0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ . \tag{1.5.41}$$

Os coeficientes α_n são chamados coeficientes de reflexão e serão extremamente úteis neste estudo. Segundo Simon [39, 40], há pelo menos quatro diferentes denominações para os coeficientes de reflexão α_n: coeficientes de Verblunsky, coeficientes de Schur, coeficientes de Szegő e coeficientes de Geronimus. Para a explicação sobre cada um desses termos veja [39], pag. 10.

De (1.5.38), obtemos

$$S_{n+1}(0) = \frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix}\mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} & \mu_{-n-1}\\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} & \mu_{-2}\\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1}\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}. \tag{1.5.42}$$

Logo,

$$\overline{\alpha}_n = \frac{(-1)^n}{\Delta_n}\begin{vmatrix}\mu_{-1} & \mu_{-2} & \cdots & \mu_{-n} & \mu_{-n-1}\\ \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \mu_{n-2} & \mu_{n-3} & \cdots & \mu_{-1} & \mu_{-2}\\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1}\end{vmatrix}. \tag{1.5.43}$$

Podemos, então, demonstrar o importante resultado a seguir.

Teorema 1.13. *Os polinômios mônicos de Szegő satisfazem às seguintes relações para* $n \geq 1$,

$$S_n^*(z) = S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1} z S_{n-1}(z), \tag{1.5.44}$$

$$S_n(z) = (1 - |\alpha_{n-1}|^2) z S_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1} S_n^*(z), \tag{1.5.45}$$

com as condições iniciais $S_0(z) = 1$ *e* $S_0^*(z) = 1$.

Demonstração: De (1.5.30), segue que

$$\langle zf, z^n \rangle = \mathcal{L}\left[z f(z) \overline{z}^n \right].$$

Mas, como $|z| = 1$, ou seja, $\overline{z} = 1/z$,

$$\langle zf, z^n \rangle = \mathcal{L}\left[z f(z) \frac{1}{z^n} \right] = \mathcal{L}\left[f(z) \frac{1}{z^{n-1}} \right] = \mathcal{L}\left[f(z) \overline{z}^{n-1} \right].$$

Novamente de (1.5.30), obtemos

$$\langle zf, z^n \rangle = \langle f, z^{n-1} \rangle. \tag{1.5.46}$$

Para $n \geq 1$, seja

$$A_n(z) = S_n^*(z) - \gamma_n z S_{n-1}(z) - S_{n-1}^*(z), \quad \text{com } \gamma_n = -\frac{\langle S_{n-1}^*, z^n \rangle}{\langle z S_{n-1}, z^n \rangle}. \tag{1.5.47}$$

Os coeficientes γ_n estão bem definidos, pois de (1.5.46)

$$\langle z S_{n-1}, z^n \rangle = \langle S_{n-1}, z^{n-1} \rangle = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

De $S_n^*(0) = S_{n-1}^*(0) = 1$, pois S_n é um polinômio mônico, segue que $A_n(0) = 0$ e isto significa que o polinômio A_n não possui termo independente. Portanto,

$$A_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k.$$

Como A_n não tem termo independente,

$$A_n^*(z) = z^n \overline{A_n(1/\overline{z})} \in \mathbb{P}_{n-1}, \; n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{1.5.48}$$

Logo, A_n^* pode ser escrito da forma

$$A_n^*(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k S_k(z). \tag{1.5.49}$$

De (1.5.48) e (1.5.49), para $n \geq 1$ obtemos

$$\begin{aligned} A_n(z) &= z^n \overline{A_n^*(1/\overline{z})} = \sum_{k=0}^{n-1} z^n \overline{b}_k \overline{S_k(1/\overline{z})} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} \overline{b}_k z^k \overline{S_k(1/\overline{z})} = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{b}_k z^{n-k} S_k^*(z). \end{aligned} \tag{1.5.50}$$

A escolha de γ_n assegura que $\langle A_n, z^n\rangle = 0$, pois, de (1.5.47),

$$\langle A_n, z^n\rangle = \langle S_n^*, z^n\rangle + \frac{\langle S_{n-1}^*, z^n\rangle}{\langle zS_{n-1}, z^n\rangle}\langle zS_{n-1}, z^n\rangle - \langle S_{n-1}^*, z^n\rangle = 0.$$

Dessa equação, da definição de $\langle \cdot, \cdot\rangle$ e de (1.5.50), obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \langle A_n, z^n\rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{b}_k \langle z^{n-k} S_k^*, z^n\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{b}_k \mathcal{L}\left[z^{n-k} S_k^*(z)\frac{1}{z^n}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{b}_k \mathcal{L}\left[S_k^*(z)\frac{1}{z^k}\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{b}_k \langle S_k^*, z^k\rangle = \overline{b}_0 \mu_0. \end{aligned}$$

Como $\mu_0 = \Delta_0 \neq 0$, concluímos que $b_0 = 0$. Mas,

$$\begin{aligned} \langle A_n, z^{n-1}\rangle &= \langle S_n^*, z^{n-1}\rangle - \gamma_n\langle zS_{n-1}, z^{n-1}\rangle - \langle S_{n-1}^*, z^{n-1}\rangle \\ &= -\gamma_n \mathcal{L}\left[zS_{n-1}(z)\frac{1}{z^{n-1}}\right] = -\gamma_n \mathcal{L}\left[S_{n-1}(z)\frac{1}{z^{n-2}}\right] \\ &= -\gamma_n \langle S_{n-1}, z^{n-2}\rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 = \langle A_n, z^{n-1}\rangle &= \sum_{k=1}^{n-1} \overline{b}_k \langle z^{n-k} S_k^*, z^{n-1}\rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \overline{b}_k \mathcal{L}\left[z^{n-k} S_k^*(z)\frac{1}{z^{n-1}}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \overline{b}_k \langle S_k^*, z^{k-1}\rangle = \overline{b}_1\langle S_1^*, 1\rangle, \end{aligned}$$

ou seja, $b_1 = 0$. Continuando da mesma forma, obtemos $b_2 = b_3 = \cdots = b_{n-1} = 0$. Logo, $A_n(z) \equiv 0$ e, de (1.5.47),

$$S_n^*(z) = \gamma_n z S_{n-1}(z) + S_{n-1}^*(z). \tag{1.5.51}$$

Comparando os coeficientes de z^n em (1.5.51), concluímos que

$$\gamma_n = \overline{S}_n(0) = -\alpha_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Logo,

$$S_n^*(z) = S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1} z S_{n-1}(z),$$

como em (1.5.44).

Definindo

$$C_n(z) = S_n(z) + \overline{\alpha}_{n-1} S_n^*(z) - \gamma_n z S_{n-1}(z), \text{ agora com } \gamma_n = \frac{\langle S_n, z^n\rangle}{\langle zS_{n-1}, z^n\rangle},$$

e procedendo de maneira completamente análoga à anterior, encontramos (veja Exercício 1.21)

$$S_n(z) = (1 - |\alpha_{n-1}|^2) z S_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1} S_n^*(z),$$

concluindo, assim, a demonstração de (1.5.45). ∎

Se substituirmos S_n^*, dada pela equação (1.5.44), em (1.5.45), obtemos

$$S_n(z) = (1 - |\alpha_{n-1}|^2) z S_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1}[S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1} z S_{n-1}(z)],$$

ou seja,

$$S_n(z) = z S_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1}\, S_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1. \tag{1.5.52}$$

Pelas relações de recorrência, podemos ver que os polinômios mônicos de Szegő são completamente determinados pelos coeficientes de reflexão α_n. Esses coeficientes podem ser calculados por (1.5.43) ou pelo método dado no próximo teorema, onde também mostramos que $|\alpha_n| < 1$.

Teorema 1.14. *Sejam $\mathcal{L}$ um funcional linear definido positivo, Δ_n o determinante de Toeplitz* (1.5.32) *e $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ a sequência definida por* (1.5.41). *Então, para $n \geq 1$,*

$$\overline{\alpha}_{n-1} = \frac{\langle z S_{n-1}, 1 \rangle}{\langle S_{n-1}^*, 1 \rangle}, \tag{1.5.53}$$

$$1 - |\alpha_{n-1}|^2 = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2} > 0. \tag{1.5.54}$$

<u>Demonstração</u>: Fazendo o produto escalar $\langle S_n, 1 \rangle$, por (1.5.52) obtemos

$$\langle S_n, 1 \rangle = \langle z S_{n-1}, 1 \rangle - \overline{\alpha}_{n-1} \langle S_{n-1}^*, 1 \rangle, \quad n \geq 1.$$

Como $\langle S_n, 1 \rangle = 0$, chegamos ao resultado (1.5.53).

Finalmente, para mostrar (1.5.54), usamos a relação de ortogonalidade (1.5.37) e a relação de recorrência (1.5.45) e obtemos

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \langle S_n, z^n \rangle = (1 - |\alpha_{n-1}|^2) \langle z S_{n-1}, z^n \rangle - \overline{\alpha}_{n-1} \langle S_n^*, z^n \rangle.$$

Logo,

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = (1 - |\alpha_{n-1}|^2) \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}.$$

Como estamos trabalhando com funcional definido positivo, então $\Delta_n > 0$ para $n \geq 0$, concluindo, assim, a demonstração do teorema. ∎

Da relação (1.5.54), observamos que

$$|\alpha_n| < 1, \quad \text{para } n \geq 0.$$

Esta é uma importante característica dos polinômios de Szegő.

Quando $\mathcal{L}$ é um funcional linear positivo-definido, é possível mostrar que os zeros dos polinômios de Szegő S_n estão todos no disco unitário aberto $|z| < 1$. No texto de Simon [39], encontramos 7 diferentes maneiras de se demonstrar esse resultado. Abaixo apresentamos uma delas.

Teorema 1.15. *Os zeros do polinômio de Szegő S_n, $n \geq 1$, estão todos no disco unitário aberto $|z| < 1$.*

Demonstração: Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_n$ os zeros do polinômio de Szegő S_n, $n \geq 1$. Logo, podemos escrever

$$S_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n).$$

Sem perda de generalidade, escolhemos um zero de S_n, por exemplo, z_1. Seja π o polinômio de grau $n-1$ dado por

$$\pi(z) = \frac{S_n(z)}{z - z_1} = (z - z_2)\cdots(z - z_n).$$

Assim, $S_n(z) = (z - z_1)\pi(z) = z\pi(z) - z_1\pi(z)$ e, portanto,

$$S_n(z) + z_1\pi(z) = z\pi(z).$$

Logo, $\|S_n + z_1\pi\|^2 = \|z\pi\|^2$, isto é,

$$\langle S_n, S_n\rangle + \langle S_n, z_1\pi\rangle + \langle z_1\pi, S_n\rangle + \langle z_1\pi, z_1\pi\rangle = \langle z\pi, z\pi\rangle.$$

Daí, obtemos

$$\|S_n\|^2 + \langle S_n, z_1\pi\rangle + \langle z_1\pi, S_n\rangle + \|z_1\pi\|^2 = \|z\pi\|^2.$$

Como, por (1.5.34), $\langle S_n, z_1\pi\rangle = 0$ e

$$\|z\pi\|^2 = \langle z\pi, z\pi\rangle = \mathcal{L}\left[z\pi.\overline{z\pi}\right] = \mathcal{L}\left[\pi\overline{\pi}\right] = \|\pi\|^2,$$

pois $|z| = 1$ em $\mathcal{C}$. Então,

$$\|S_n\|^2 + \|z_1\pi\|^2 = \|\pi\|^2.$$

Logo,

$$\|S_n\|^2 = \left(1 - |z_1|^2\right)\|\pi\|^2 > 0$$

e, portanto, $1 - |z_1|^2 > 0$, ou seja, $|z_1|^2 < 1$.

Assim, para qualquer zero de S_n, $|z_k|^2 < 1$, $k = 1, 2, ..., n$. ■

1.5.1 Polinômios para-ortogonais

Passaremos, agora, ao estudo dos polinômios para-ortogonais. Em [27], os autores Jones, Njåstad e Thron consideraram o estudo desses polinômios na forma

$$S_n(z) + wS_n^*(z),$$

para $w \in \mathbb{C}$ e $|w| = 1$. Uma propriedade importante desses polinômios é que seus zeros são simples e estão no círculo unitário $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Vamos utilizar, aqui, uma medida ψ no círculo unitário, definida em (1.5.27), em lugar do tratamento mais abrangente, via funcional de momento, dado pelos autores em [27].

Assim, consideraremos a sequência de polinômios de Szegő, $\{S_n\}$, com relação à uma medida ψ definida no círculo unitário, isto é,

$$\langle S_n, S_m\rangle = \int_{\mathcal{C}} S_n(z)\overline{S_m(z)}d\psi(z) = 0, \quad \text{se} \quad n \neq m\,,$$

lembrando que

$$\langle P, Q\rangle = \int_{\mathcal{C}} P(z)\overline{Q(z)}d\psi(z)\,.$$

Definição 1.18. *Uma sequência* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida* ψ *se, para* $n \geq 1$, X_n *é um polinômio de grau* n *que satisfaz*

$$\begin{array}{rcl} \langle X_n, 1\rangle & \neq & 0, \\ \langle X_n, z^m\rangle & = & 0 \quad , \quad m = 1, 2, \ldots, n-1\,, \\ \langle X_n, z^n\rangle & \neq & 0\,. \end{array} \tag{1.5.55}$$

Esses polinômios são chamados de para-ortogonais, pois, diferentemente dos polinômios ortogonais, satisfazem $\langle X_n, 1\rangle \neq 0$.

Observe que $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{S_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ não são sequências de polinômios para-ortogonais com respeito a ψ.

Uma classe interessante de polinômios é conhecida como polinômios κ-invariantes.

Definição 1.19. *Para* $\kappa \in \mathbb{C}$, $\kappa \neq 0$, *um polinômio* X *é* κ*-invariante se*

$$X^*(z) = \kappa X(z)\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

A sequência $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *é* $\{\kappa_n\}_{n=1}^{\infty}$*-invariante se, para cada* n, X_n *é* κ_n*-invariante.*

Podemos obter sequências $\{\kappa_n\}_{n=1}^{\infty}$-invariantes de polinômios para-ortogonais tomando funções da forma

$$S_n(w_n, z) = S_n(z) + w_n S_n^*(z)\,, \quad z, w_n \in \mathbb{C}\,,\ n = 1, 2, \ldots\,. \tag{1.5.56}$$

Note que $S_n(w_n, z)$ satisfaz à definição de polinômios para-ortogonais com relação à medida ψ (Exercício 1.22).

O próximo resultado, veja [27], fornece uma caracterização dos polinômios para-ortogonais κ-invariantes e garante que toda sequência de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida ψ é obtida a partir da expressão (1.5.56). Observe que

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n+s}[S_n(z) + w_n S_n^*(z)]d\psi(z) = 0, \quad s = 1, 2, ..., n-1. \tag{1.5.57}$$

Teorema 1.16. *Seja* $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ *uma sequência de polinômios de Szegő com relação a uma dada medida* ψ.

(i) Se $c_n, w_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$, *com* $c_n \neq 0$ *e* $|w_n| = 1$, *e se* $\kappa_n = \overline{c}_n \dfrac{\overline{w}_n}{c_n}$, *então* $\{c_n S_n(w_n, z)\}_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência* $\{\kappa_n\}_{n=1}^{\infty}$*-invariante de polinômios para-ortogonais com respeito a* ψ *e* $|\kappa_n| = 1$, $n \geq 1$.

(ii) Se $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma sequência de polinômios para-ortogonais com respeito a* ψ, *então, para* $n \geq 1$,

$$X_n(z) = c_n S_n(w_n, z)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,, \tag{1.5.58}$$

onde

$$c_n = \frac{\langle X_n, S_n\rangle}{\langle S_n, S_n\rangle} - d_n \frac{\langle S_n^*, S_n\rangle}{\langle S_n, S_n\rangle} \neq 0 \ \text{ e } \ w_n = \frac{d_n}{c_n}\,, \tag{1.5.59}$$

com

$$d_n = \frac{\langle X_n, 1\rangle}{\langle S_n^*, 1\rangle} \neq 0\,. \tag{1.5.60}$$

Para cada $n \geq 1$, *se* X_n *é também* κ_n*-invariante, então*

$$|w_n| = 1,\ \kappa_n = \frac{\overline{c}_n \overline{w}_n}{c_n} \ \text{ e } \ |\kappa_n| = 1\,. \tag{1.5.61}$$

Demonstração: (i) Sabemos que $S_n^*(0) = 1$ e, assim,

$$S_n(w_n, z) = S_n(z) + w_n S_n^*(z) = (z^n + \cdots - \overline{\alpha}_{n-1}) + w_n(-\alpha_{n-1} z^n + \cdots + 1)\,.$$

Logo,

$$S_n(w_n, z) = (1 - w_n \alpha_{n-1}) z^n + \ldots + (w_n - \overline{\alpha}_{n-1})\,,$$

onde $\overline{\alpha}_{n-1} = -S_n(0)$.

Pela equação (1.5.54), $|\alpha_{n-1}| < 1$. Assim, concluímos que o grau de $S_n(w_n, z)$ é n e, além disso, $S_n(w_n, 0) \neq 0$. Da definição de polinômio recíproco e da expressão (1.5.56), temos

$$\begin{aligned}
(c_n S_n(w_n, z))^* &= \overline{c}_n (S_n^*(z) + \overline{w}_n S_n(z)) \\
&= \overline{c}_n \overline{w}_n (S_n(z) + w_n S_n^*(z)) \\
&= \kappa_n c_n S_n(w_n, z)\,,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\{c_n S_n(w_n, z)\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência $\{\kappa_n\}_{n=1}^{\infty}$-invariante para todo $z \in \mathbb{C}$ e $n \geq 1$.

A para-ortogonalidade segue imediatamente da relação

$$\langle S_n(w_n, z), z^k \rangle = \langle S_n, z^k \rangle + w_n \langle S_n^*, z^k \rangle$$

e das propriedades de ortogonalidade dos polinômios S_n e S_n^*, pois

$$\begin{aligned}
\langle S_n(w_n, z), z^k \rangle &= 0\,,\ 1 \leq k \leq n-1\,, \\
\langle S_n(w_n, z), 1 \rangle &= w_n \langle S_n^*, 1 \rangle \neq 0\,, \\
\langle S_n(w_n, z), z^n \rangle &= \langle S_n, z^n \rangle \neq 0\,.
\end{aligned}$$

(ii) Seja $T_n(z) = X_n(z) - c_n S_n(z) - d_n S_n^*(z)$, $n \geq 1$. Então, das definições de c_n e d_n, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle T_n, S_n \rangle &= \langle X_n - c_n S_n - d_n S_n^*, S_n \rangle \\
&= \langle X_n, S_n \rangle - c_n \langle S_n, S_n \rangle - d_n \langle S_n^*, S_n \rangle \\
&= \langle X_n, S_n \rangle - \langle X_n, S_n \rangle + d_n \langle S_n^*, S_n \rangle - d_n \langle S_n^*, S_n \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Além disso, das relações de ortogonalidade dos polinômios de Szegő,

$$\begin{aligned}
\langle T_n, S_0 \rangle &= \langle X_n - c_n S_n - d_n S_n^*, S_0 \rangle \\
&= \langle X_n, S_0 \rangle - c_n \langle S_n, S_0 \rangle - d_n \langle S_n^*, S_0 \rangle \\
&= \langle X_n, S_0 \rangle - \frac{\langle X_n, 1 \rangle}{\langle S_n^*, 1 \rangle} \langle S_n^*, S_0 \rangle = 0\,.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\langle T_n, S_n \rangle = \langle T_n, S_0 \rangle = 0\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{1.5.62}$$

Vamos mostrar, agora, que $T_n \equiv 0$ para $n \geq 1$.

Para $n \geq 1$, podemos expressar T_n da forma

$$T_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k S_k(z), \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

Da igualdade anterior e de (1.5.62), para $n \geq 1$ obtemos

$$0 = \langle T_n, S_0 \rangle = a_0 \langle S_0, S_0 \rangle \Rightarrow a_0 = 0.$$

Analogamente,

$$0 = \langle T_n, S_n \rangle = a_n \langle S_n, S_n \rangle \Rightarrow a_n = 0.$$

Em particular, $T_1(z) = 0$.

Para $n \geq 2$, como X_n é para-ortogonal, temos

$$0 = \langle T_n, z \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n-1} a_k S_k(z), z \right\rangle = a_1 \langle S_1, z \rangle \Rightarrow a_1 = 0.$$

Continuando dessa maneira, teremos $a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = 0$. Assim, para $n \geq 1$, $T_n \equiv 0$ e

$$X_n(z) = c_n S_n(z) + d_n S_n^*(z), \quad n = 1, 2, \dots. \tag{1.5.63}$$

Se $c_n = 0$, então, por (1.5.63) e (1.5.55), temos

$$d_n \langle S_n^*, z^n \rangle = \langle X_n, z^n \rangle \neq 0$$

o que contradiz o fato de S_n^* ser ortogonal e, assim, $c_n \neq 0$.

Analogamente, se $d_n = 0$, novamente por (1.5.63) e (1.5.55), temos

$$c_n \langle S_n, 1 \rangle = \langle X_n, 1 \rangle \neq 0,$$

o que contradiz a ortogonalidade de S_n. Logo, $d_n \neq 0$.

Para todo $n \geq 1$, podemos, então, escrever

$$X_n(z) = c_n \left(S_n(z) + \frac{d_n}{c_n} S_n^*(z) \right) = c_n S_n(w_n, z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad w_n = \frac{d_n}{c_n}.$$

Agora, suponhamos que, para algum $n \geq 1$, X_n é κ_n-invariante. Então, $X_n^*(z) = \kappa_n X_n(z)$ e, assim, (1.5.63) e $X_n^*(z) = \overline{c}_n S_n^*(z) + \overline{d}_n S_n(z)$ implicam que

$$(\overline{d}_n - \kappa_n c_n) S_n(z) + (\overline{c}_n - \kappa_n d_n) S_n^*(z) = 0.$$

Como S_n e S_n^* são linearmente independentes, concluímos que

$$\kappa_n = \frac{\overline{d}_n}{c_n} \quad \text{e} \quad \kappa_n = \frac{\overline{c}_n}{d_n}.$$

Isto significa que $|c_n| = |d_n|$, concluindo a demonstração das condições (1.5.61). ■

Representação de polinômios para-ortogonais

Vimos que os polinômios

$$S_n(w_n, z) = S_n(z) + w_n S_n^*(z), \quad \text{com} \quad |w_n| = 1, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.5.64}$$

são polinômios para-ortogonais. Podemos representá-los de uma outra forma. Da equação (1.5.52), isto é, de

$$S_n(z) = zS_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1} S_{n-1}^*(z), \tag{1.5.65}$$

obtemos

$$S_n^*(z) = S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1} z S_{n-1}(z). \tag{1.5.66}$$

Substituindo as equações (1.5.65) e (1.5.66) em (1.5.64), temos

$$\begin{aligned} S_n(w_n, z) &= zS_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1} S_{n-1}^*(z) + w_n \left[S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1} z S_{n-1}(z) \right] \\ &= (1 - w_n \alpha_{n-1}) z S_{n-1}(z) + (w_n - \overline{\alpha}_{n-1}) S_{n-1}^*(z) \\ &= (1 - w_n \alpha_{n-1}) \left[z S_{n-1}(z) + \frac{w_n - \overline{\alpha}_{n-1}}{1 - w_n \alpha_{n-1}} S_{n-1}^*(z) \right]. \end{aligned} \tag{1.5.67}$$

Denotando $\tau_n = \dfrac{w_n - \overline{\alpha}_{n-1}}{1 - w_n \alpha_{n-1}}$ observamos, que como $|w_n| = 1$,

$$\tau_n = \frac{w_n (1 - \overline{w}_n \overline{\alpha}_{n-1})}{1 - w_n \alpha_{n-1}},$$

então $|\tau_n| = 1$. Assim, tomando o polinômio em (1.5.67) na forma mônica, obtemos

$$S_n(\tau_n, z) = zS_{n-1}(z) + \tau_n S_{n-1}^*(z), \quad \text{com} \quad |\tau_n| = 1, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.5.68}$$

que também representam polinômios para-ortogonais.

Zeros dos polinômios para-ortogonais

Os zeros dos polinômios para-ortogonais possuem uma propriedade que será bastante interessante e é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 1.17. *Seja $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência $\{\kappa_n\}_{n=1}^{\infty}$-invariante de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida positiva ψ. Então, para cada $n \geq 1$, os n zeros de X_n são simples e estão no círculo unitário.*

Demonstração: Para $n \geq 1$, podemos escrever

$$X_n(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n\,, \;\; c_n \neq 0\,, \;\; c_k \in \mathbb{C}\,, \;\; k = 0, 1, \ldots, n.$$

Logo, por hipótese,

$$X_n^*(z) = \overline{c}_0 z^n + \overline{c}_1 z^{n-1} + \ldots + \overline{c}_n = \kappa_n X_n(z)\,, \;\; \kappa_n \neq 0\,.$$

Observe que

$$c_0 = X_n(0) = \kappa_n^{-1} X_n^*(0) = \frac{\overline{c}_n}{\kappa_n} \neq 0\,.$$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ os zeros de multiplicidade ímpar de X_n em $\mathcal{C}$, contadas as suas multiplicidades. Se esses zeros não existem, então $p = 0$, caso contrário, $1 \leq p \leq n$. Para demonstrar o teorema é suficiente mostrar que $p = n$.

Se β é um zero de X_n que não está em $\mathcal{C}$, então, como X_n é κ_n-invariante, $1/\overline{\beta}$ é um zero de X_n e $1/\overline{\beta}$ também não está em $\mathcal{C}$. Assim, os zeros de X_n que não pertencem a $\mathcal{C}$ ocorrem em pares $(\beta, 1/\overline{\beta})$.

Se β é um zero de X_n em $\mathcal{C}$, então $\beta = 1/\overline{\beta}$. Existe, assim, um número par de zeros de X_n em $\mathcal{C}$ mas que não estão no conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$. Segue, então, que os zeros de X_n que não estão em $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$ ocorrem em pares $(\beta, 1/\overline{\beta})$. Denotemos todos os zeros que ocorrem em pares $(\beta, 1/\overline{\beta})$ pelos $2q$ números

$$\beta_1, \frac{1}{\overline{\beta}_1}, \beta_2, \frac{1}{\overline{\beta}_2}, \ldots, \beta_q, \frac{1}{\overline{\beta}_q},$$

que podem estar em $\mathcal{C}$ ou não. Se não existem tais zeros, tomaremos $q = 0$. Claramente $p + 2q = n$. Como $X_n(0) \neq 0$, temos que $\beta_j \neq 0$ para $j = 1, 2, \ldots, q$.

Consideremos os polinômios

$$\begin{aligned}
A(z) &= \begin{cases} (z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_p)\,, & \text{se} \quad p \geq 1\,, \\ 1\,, & \text{se} \quad p = 0\,, \end{cases} \\
B(z) &= \begin{cases} (z-\beta_1)\ldots(z-\beta_q)\,, & \text{se} \quad q \geq 1\,, \\ 1\,, & \text{se} \quad q = 0\,, \end{cases} \\
C(z) &= z^q A(z)\,.
\end{aligned}$$

Note que

$$X_n(z) = A(z)B(z)\left(z - \frac{1}{\overline{\beta}_1}\right)\ldots\left(z - \frac{1}{\overline{\beta}_q}\right).$$

Suponha $p < n$ e, assim, $q \geq 1$. Então, de (1.5.30) e das expressões anteriores para X_n e C, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle X_n, C\rangle &= \int_{\mathcal{C}} X_n(z)\overline{C(z)}d\psi(z) \\
&= \int_{\mathcal{C}} A(z)B(z)\left(z - \frac{1}{\overline{\beta}_1}\right)\ldots\left(z - \frac{1}{\overline{\beta}_q}\right)\overline{A(z)}\frac{1}{z^q}d\psi(z) \\
&= \int_{\mathcal{C}} A(z)B(z)\overline{A(z)}(-1)^q\frac{(1-\overline{\beta}_1 z)\ldots(1-\overline{\beta}_q z)}{\overline{\beta}_1\ldots\overline{\beta}_q z^q}d\psi(z) \\
&= \frac{(-1)^q}{\overline{\beta}_1\ldots\overline{\beta}_q}\int_{\mathcal{C}} A(z)B(z)\overline{A(z)B(z)}d\psi(z) \\
&= \frac{(-1)^q}{\beta_1\ldots\beta_q}\langle AB, AB\rangle \neq 0\,.
\end{aligned}$$

Como C é um polinômio de grau $p+q$ e $\langle X_n, C\rangle \neq 0$, as condições de para-ortogonalidade implicam que o grau de C é n. Como tomamos $q \geq 1$, isto é impossível, pois o grau de C é igual a $p+q$ que é menor do que $p+2q = n$. Portanto, $q = 0$ e $p = n$. ■

Como os zeros dos polinômios para-ortogonais estão no círculo unitário, eles são utilizados para construir fórmulas de quadratura no círculo unitário (veja Capítulo 4).

1.6 Exercícios

Exercício 1.1. Verifique que

a) a sequência constante $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ é uma sequência encadeada, com a sequência de parâmetros $\{g_n\} = \left\{\frac{n}{2(n+1)}\right\}$, e também com a sequência de parâmetros $\{h_n\} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b) a sequência constante $\{a_n\} = \{a\}$, com $0 < a \leq \frac{1}{4}$ é uma sequência encadeada com as sequências de parâmetros

$$\{g_n\} = \left\{\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right\} \quad \text{e} \quad \{h_n\} = \left\{\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right\}.$$

Exercício 1.2. Demonstre o Teorema 1.2: Se $\{a_n\}$ é uma sequência encadeada e $\{g_k\}$ e $\{h_k\}$ são sequências de parâmetros para $\{a_n\}$, então $g_k < h_k$ *para* $k \geq 1$ *se, e somente se,* $g_0 < h_0$.

Exercício 1.3. Demonstre o Teorema 1.3: Se $\{a_n\}$ é uma sequência encadeada e tem uma sequência de parâmetros $\{g_k\}$ tal que $g_0 > 0$, então, para cada h_0 satisfazendo $0 \leq h_0 < g_0$, existe uma correspondente sequência de parâmetros $\{h_k\}$.

Exercício 1.4. Mostre que $\{M_n\} = \left\{\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right\}$ é a sequência maximal para a sequência encadeada $\{a_n\} = \{a\}$, com $0 < a \leq \frac{1}{4}$.

Exercício 1.5. Mostre que se $P_0, P_1, \ldots, P_n$ são polinômios de grau n e ortogonais entre si, então eles formam uma base para o espaço dos polinômios de grau no máximo n, $\mathbb{P}_n$.

Exercício 1.6. Sejam $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios, com P_n de grau exatamente n, e ϕ uma medida positiva em (a,b). Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

a) $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação a ϕ em (a,b), ou seja,

$$\langle P_n, P_m\rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & se\ n \neq m, \\ \rho_n \neq 0, & se\ n = m. \end{cases}$$

$$b) \quad \langle P_n, \pi\rangle = \int_a^b P_n(x)\pi(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \forall\,\text{polinômio}\,\pi\,\text{de grau} \leq n-1, \\ \hat{\rho}_n \neq 0, & \forall\,\text{polinômio}\,\pi\,\text{de grau}\ n, \end{cases}$$

$$c) \quad \langle x^m, P_n\rangle = \int_a^b x^m P_n(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & se\ m < n, \\ \tilde{\rho}_n \neq 0, & se\ m = n. \end{cases}$$

Exercício 1.7. Sejam $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ duas sequências de polinômios ortogonais no intervalo (a,b) com relação à medida ϕ. Então,

$$R_j(x) = c_j P_j(x), \quad j = 0, 1, \ldots,$$

onde c_j é uma constante que depende apenas de j.

Exercício 1.8. Mostre que se os momentos μ_k, $k = 0, 1, \ldots$, definidos por (1.1.1) existem, então os determinantes de Hankel, H_n, definidos por (1.1.3), são diferentes de zero.

Exercício 1.9. Demonstre o Teorema 1.10.

Exercício 1.10. Demonstre a Identidade de Christoffel-Darboux (1.4.14).

Exercício 1.11. Sejam $x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n}$ e $x_{n-1,1} < x_{n-1,2} < \cdots < x_{n-1,n-1}$ os zeros dos polinômios ortogonais P_n e P_{n-1}, respectivamente, dados em ordem crescente. Então,

$$x_{n,k} < x_{n-1,k} < x_{n,k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Exercício 1.12. Mostre que, para $n \geq 1$, os polinômios Q_n, definidos por (1.4.16), são polinômios de grau exatamente $n-1$.

Exercício 1.13. Demonstre que os polinômios associados aos ortogonais satisfazem à mesma relação de recorrência dos polinômios ortogonais mônicos, ou seja,

$$Q_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})Q_n(x) - \alpha_{n+1}Q_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $Q_0(x) = 0$ e $Q_1(x) = \mu_0$.

Exercício 1.14. Sejam $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ sequências de polinômios ortogonais e associados aos ortogonais, respectivamente. Mostre que

$$P_{n+1}(x)Q_n(x) - P_n(x)Q_{n+1}(x) = -\alpha_{n+1} \cdots \alpha_3\alpha_2\mu_0 \neq 0.$$

Exercício 1.15. Mostre que entre dois zeros consecutivos do polinômio P_n existe um único zero do polinômio Q_n, ou seja,

$$x_{n,k} < y_{n,k} < x_{n,k+1}, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1,$$

onde $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \cdots, n$, são os zeros do polinômio P_n e $y_{n,k}$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$, os de Q_n, dados em ordem crescente.

Exercício 1.16. Mostre que se ϕ é uma medida simétrica em $(-b, b)$, então valem as seguintes propriedades:

- $\mu_{2n+1} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots;$
- $\beta_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots;$
- $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad n = 0, 1, \ldots;$
- $x_{n,k} = -x_{n,n-k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$

Exercício 1.17. Mostre que os polinômios de Gegenbauer, $G_n^{(\lambda)}$, definidos em (1.4.22) satisfazem

$$G_{n+1}^{(\lambda)}(1) = \frac{2\lambda + n}{2(\lambda + n)} G_n^{(\lambda)}(1), \quad n \geq 0,$$

com $G_0^{(\lambda)}(1) = 1$.

Exercício 1.18. Encontre sequências encadeadas positivas utilizando as relações (1.4.24), (1.4.25) e os polinômios ortogonais clássicos.

Exercício 1.19. Mostre que os polinômios S_n definidos por (1.5.33) satisfazem também à (1.5.34).

Exercício 1.20. Mostre que a definição (1.5.35) é equivalente à (1.5.33).

Exercício 1.21. Considere

$$C_n(z) = S_n(z) + \overline{\alpha}_{n-1} S_n^*(z) - \gamma_n z S_{n-1}(z), \quad \text{com} \quad \gamma_n = \frac{\langle S_n, z^n \rangle}{\langle z S_{n-1}, z^n \rangle}$$

e demonstre a equação (1.5.45), ou seja,

$$S_n(z) = (1 - |\alpha_{n-1}|^2) z S_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1} S_n^*(z).$$

Exercício 1.22. Mostre que

$$S_n(w_n, z) = S_n(z) + w_n S_n^*(z)\,, \quad z, w_n \in \mathbb{C}\,, n = 1, 2, \ldots\,.$$

satisfaz à definição de polinômios para-ortogonais com relação à medida ψ.

Capítulo 2

Polinômios L-Ortogonais na Reta Real

Estudos feitos por Jones, Thron e outros [26, 30] sobre problemas fortes de momento deram origem aos polinômios de Laurent ortogonais. O problema forte de momento pode ser expresso da seguinte forma: dada uma sequência $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de números reais, em que condições existe uma medida positiva ψ tal que $\mu_n = \displaystyle\int_a^b t^n d\psi(t)$ para $n = \ldots, 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$?

Neste capítulo, apresentaremos a definição e algumas propriedades dos polinômios de Laurent ortogonais (veja [14, 26, 30] para mais detalhes) para depois passarmos ao estudo dos polinômios L-ortogonais (Sri Ranga [41]) que, por possuírem muitas propriedades semelhantes às dos polinômios ortogonais na reta real, são, algumas vezes, chamados de polinômios similares aos ortogonais. Esses últimos polinômios satisfazem a uma relação de recorrência de três termos do tipo (1), objetivo do presente texto.

2.1 Polinômios de Laurent ortogonais

Lembremos que, para um par de números inteiros (p, q), $p \leq q$, $\Lambda_{p,q}$ é o espaço das funções definidas por

$$R(z) = \sum_{k=p}^{q} r_k z^k, \quad z \in \mathbb{C} \;\text{ e }\; r_k \in \mathbb{C},\; k = p, \ldots, q.$$

Essas funções são conhecidas por polinômios de Laurent ou, simplesmente, L-polinômios. O espaço de todos os L-polinômios será denotado por Λ, o espaço dos polinômios por $\mathbb{P}$ e o espaço dos polinômios de grau no máximo n por $\mathbb{P}_n$. Note que $\mathbb{P}_n = \Lambda_{0,n}$.

Em especial, para $n \in \mathbb{N}$, denotaremos

$$\begin{aligned} \Lambda_{2n} &= \{R \in \Lambda_{-n,n} : r_n \neq 0\} \\ \Lambda_{2n+1} &= \{R \in \Lambda_{-n-1,n} : r_{-n-1} \neq 0\}. \end{aligned}$$

Não é difícil verificar que, para todo polinômio $R \in \Lambda$, existe um único $i \in \mathbb{N}$ tal que $R \in \Lambda_i$ (Exercício 2.1).

Dizemos que um L-polinômio R é de *L-grau* m se $R \in \Lambda_m$ para $m \in \mathbb{N}$.

Se $R \in \Lambda_{2n}$, então o coeficiente do termo em t^n é chamado *coeficiente principal* e o coeficiente da potência t^{-n} é chamado *coeficiente secundário*. Se $R \in \Lambda_{2n+1}$, então o coeficiente do termo em t^n é chamado *coeficiente secundário* e o coeficiente da potência t^{-n-1} é chamado *coeficiente principal*. O coeficiente principal é sempre não nulo e não há restrições para o coeficiente secundário. Um L-polinômio é chamado *mônico* se o coeficiente principal for igual a 1.

Consideremos uma medida forte em (a, b), $0 \leq a < b \leq \infty$, e os momentos dados por

$$\mu_m^\psi = \int_a^b t^m d\psi(t), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \,. \tag{2.1.1}$$

Os determinantes de Hankel $H_n^{(m)}$, definidos por (1.1.4), são positivos para $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n > 0$ (Exercício 2.2).

Definição 2.1. *Uma sequência* $\{R_n\}_{n=0}^\infty$ *é chamada sequência de polinômios de Laurent ortogonais com relação à medida* ψ *em* (a, b) *se*

i) $R_n \in \Lambda_n, \;\; n \in \mathbb{N}$,

ii) $\displaystyle\int_a^b R_n(t) R_m(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \textit{se} \quad m \neq n, \\ k_n \neq 0, & \textit{se} \quad m = n. \end{cases}$

Vamos considerar os polinômios de Laurent na forma mônica, ou seja,

$$R_{2n}(t) \;=\; \sum_{j=-n}^{n} r_{2n,j}\, t^j, \;\text{com}\; r_{2n,n} = 1, \tag{2.1.2}$$

$$R_{2n+1}(t) \;=\; \sum_{j=-n-1}^{n} r_{2n+1,j}\, t^j, \;\text{com}\; r_{2n+1,-n-1} = 1. \tag{2.1.3}$$

Analogamente ao caso dos polinômios ortogonais, é possível mostrar que se $\{R_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de L-polinômios tal que R_n é de L-grau n para todo $n \in \mathbb{N}$, então as seguintes afirmações são equivalentes (Exercício 2.3):

a) $\{R_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios de Laurent ortogonais;

b) $\displaystyle\int_a^b R(t) R_n(t) d\psi(t) \begin{cases} = 0, & \text{para todo polinômio } R \text{ de L-grau} \leq n-1, \\ \neq 0, & \text{se } R \text{ tem L-grau } n; \end{cases}$

c) $\displaystyle\int_a^b t^m R_{2n}(t) d\psi(t) = \sum_{j=-n}^{n} r_{2n,j}\, \mu_{j+m}^\psi \begin{cases} = 0, & \text{se} \;\; -n \leq m \leq n-1, \\ \neq 0, & \text{se} \;\; m = n; \end{cases}$

$$\int_a^b t^m R_{2n+1}(t) d\psi(t) = \sum_{j=-n-1}^{n} r_{2n+1,j}\, \mu_{j+m}^\psi \begin{cases} = 0, & \text{se} \;\; -n \leq m \leq n, \\ \neq 0, & \text{se} \;\; m = -n-1. \end{cases}$$

Utilizando o item $c)$ com $m = -n, -n+1, \dots, n-1$ e procedendo de maneira similar ao que foi feito para o caso dos polinômios ortogonais, chegamos a um sistema de equações lineares. Pela regra de Cramer, obtemos

$$R_{2n}(t) = \frac{1}{H_{2n}^{(-2n)}} \begin{vmatrix} \mu_{-2n}^\psi & \mu_{-2n+1}^\psi & \cdots & \mu_{-1}^\psi & \mu_0^\psi \\ \mu_{-2n+1}^\psi & \mu_{-2n+2}^\psi & \cdots & \mu_0^\psi & \mu_1^\psi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-1}^\psi & \mu_0^\psi & \cdots & \mu_{2n-2}^\psi & \mu_{2n-1}^\psi \\ t^{-n} & t^{-n+1} & \cdots & t^{n-1} & t^n \end{vmatrix}. \tag{2.1.4}$$

Analogamente, fazendo $m = -n, -n+1, \ldots, n$ e usando a regra de Cramer, obtemos

$$R_{2n+1}(t) = \frac{1}{H_{2n+1}^{(-2n)}} \begin{vmatrix} t^{-n-1} & t^{-n} & \ldots & t^{n-1} & t^{n} \\ \mu_{-2n-1}^{\psi} & \mu_{-2n}^{\psi} & \ldots & \mu_{-1}^{\psi} & \mu_{0}^{\psi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-2}^{\psi} & \mu_{-1}^{\psi} & \ldots & \mu_{2n-2}^{\psi} & \mu_{2n-1}^{\psi} \\ \mu_{-1}^{\psi} & \mu_{0}^{\psi} & \ldots & \mu_{2n-1}^{\psi} & \mu_{2n}^{\psi} \end{vmatrix}. \tag{2.1.5}$$

Assim, como $H_n^{(m)} > 0$, mostra-se a existência dos polinômios de Laurent ortogonais.

Vale ressaltar que os polinômios de Laurent ortogonais não satisfazem a uma relação de recorrência de três termos.

2.2 Polinômios L-ortogonais

Iniciaremos, agora, o estudo dos polinômios L-ortogonais dados em [41] e que denotaremos por B_n.

Definição 2.2. *Seja ψ uma medida forte em (a, b), $0 \leq a < b \leq \infty$. Dizemos que uma sequência de polinômios $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$, onde B_n é um polinômio mônico de grau exatamente n, é uma sequência de polinômios L-ortogonais com relação a $d\psi$ no intervalo (a, b) se*

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & se \;\; 0 \leq s \leq n-1, \\ \rho_n > 0, & se \;\; s = n. \end{cases} \tag{2.2.6}$$

Equivalentemente, pode-se escrever (2.2.6) como

$$\int_a^b t^{k} B_n(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } \; k = -1, -2, \ldots, -n+1, -n, \\ \rho_n > 0, & \text{para } \; k = 0. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

A existência dos polinômios L-ortogonais B_n também depende dos determinantes de Hankel. Assim, escrevendo B_n em termos de seus coeficientes, ou seja,

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} t^k, \;\; \text{com } b_{n,n} = 1, \tag{2.2.8}$$

obtemos

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \mu_{-n+s+k}^{\psi} = \begin{cases} 0, & \text{se } \; s = 0, 1, \ldots, n-1, \\ \rho_n > 0, & \text{se } \; s = n. \end{cases} \tag{2.2.9}$$

Fazendo $s = 0, 1, \ldots, n-1$ em (2.2.9), obtemos um sistema linear. Acrescentando (2.2.8) como a última linha desse sistema e utilizando a regra de Cramer, podemos escrever B_n da seguinte forma

$$B_n(t) = \frac{1}{H_n^{(-n)}} \begin{vmatrix} \mu_{-n}^{\psi} & \mu_{-n+1}^{\psi} & \cdots & \mu_{-1}^{\psi} & \mu_{0}^{\psi} \\ \mu_{-n+1}^{\psi} & \mu_{-n+2}^{\psi} & \cdots & \mu_{0}^{\psi} & \mu_{1}^{\psi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-1}^{\psi} & \mu_{0}^{\psi} & \ldots & \mu_{n-2}^{\psi} & \mu_{n-1}^{\psi} \\ 1 & t & \ldots & t^{n-1} & t^{n} \end{vmatrix}. \tag{2.2.10}$$

Além disso, se substituirmos a última linha do sistema anterior pela equação obtida quando fazemos $s = n$ em (2.2.9), e o resolvermos pela regra de Cramer, podemos escrever ρ_n como

$$\rho_n = \frac{H_{n+1}^{(-n)}}{H_n^{(-n)}}. \tag{2.2.11}$$

Se tomarmos $t = 0$ na relação (2.2.10), o termo independente de B_n torna-se

$$b_{n,0} = B_n(0) = (-1)^n \frac{H_n^{(-n+1)}}{H_n^{(-n)}} \neq 0. \tag{2.2.12}$$

Logo, $t = 0$ não é zero de B_n, $n \geq 1$.

Considerando $s = -1$ na integral em (2.2.6), vamos definir

$$\eta_n = \int_a^b t^{-n-1} B_n(t) d\psi(t). \tag{2.2.13}$$

Logo, de (2.1.1) e (2.2.8), obtemos

$$\eta_n = b_{n,n}\mu_{-1}^{\psi} + b_{n,n-1}\mu_{-2}^{\psi} + \ldots + b_{n,1}\mu_{-n}^{\psi} + b_{n,0}\mu_{-n-1}^{\psi}.$$

Fazendo $s = -1, 0, 1, \ldots, n-1$ na integral em (2.2.6) e aplicando a Regra de Cramer, obtemos

$$B_n(0) = \eta_n \frac{H_n^{(-n+1)}}{H_{n+1}^{-(n+1)}}.$$

Utilizando a equação (2.2.12), obtemos

$$\eta_n = (-1)^n \frac{H_{n+1}^{-(n+1)}}{H_n^{(-n)}}. \tag{2.2.14}$$

Relação entre os polinômios de Laurent ortogonais e os L-ortogonais

Da relação (2.2.10), obtemos

$$B_{2n}(t) = \frac{1}{H_{2n}^{(-2n)}} \begin{vmatrix} \mu_{-2n}^{\psi} & \mu_{-2n+1}^{\psi} & \cdots & \mu_{-1}^{\psi} & \mu_0^{\psi} \\ \mu_{-2n+1}^{\psi} & \mu_{-2n+2}^{\psi} & \cdots & \mu_0^{\psi} & \mu_1^{\psi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-1}^{\psi} & \mu_0^{\psi} & \cdots & \mu_{2n-2}^{\psi} & \mu_{2n-1}^{\psi} \\ 1 & t & \cdots & t^{2n-1} & t^{2n} \end{vmatrix}.$$

Dividindo a relação anterior por t^n e comparando com (2.1.4), concluímos que

$$\frac{B_{2n}(t)}{t^n} = R_{2n}(t).$$

Novamente de (2.2.10), obtemos

$$B_{2n+1}(t) = \frac{1}{H_{2n+1}^{(-2n-1)}} \begin{vmatrix} \mu_{-2n-1}^{\psi} & \mu_{-2n}^{\psi} & \cdots & \mu_{-1}^{\psi} & \mu_0^{\psi} \\ \mu_{-2n}^{\psi} & \mu_{-2n+1}^{\psi} & \cdots & \mu_0^{\psi} & \mu_1^{\psi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-1^{\psi}} & \mu_0^{\psi} & \cdots & \mu_{2n-1}^{\psi} & \mu_{2n}^{\psi} \\ 1 & t & \cdots & t^{2n} & t^{2n+1} \end{vmatrix}.$$

Dividindo a relação anterior por t^{n+1} e comparando com (2.1.5), obtemos

$$\frac{B_{2n+1}(t)}{t^{n+1}} = -\frac{H_{2n+1}^{(-2n)}}{H_{2n+1}^{(-2n-1)}} R_{2n+1}(t) = b_{2n+1} R_{2n+1}(t),$$

pois $b_{2n+1} = -\dfrac{H_{2n+1}^{(-2n)}}{H_{2n+1}^{(-2n-1)}}$. Logo,

$$\frac{B_{2n+1}(t)}{t^{n+1} B_{2n+1}(0)} = R_{2n+1}(t).$$

2.2.1 Polinômios associados aos L-ortogonais

Analogamente aos polinômios ortogonais, podemos definir os polinômios associados aos L-ortogonais.

Definição 2.3. *Os polinômios C_n, associados aos polinômios B_n, são definidos por*

$$C_n(t) = \int_a^b \frac{B_n(z) - B_n(t)}{z - t} d\psi(z). \tag{2.2.15}$$

Teorema 2.1. *O polinômio associado C_n tem grau $n-1$, $n \geq 1$.*

<u>Demonstração</u>: Seja $B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} t^k$. Assim,

$$B_n(z) - B_n(t) = b_{n,n}(z^n - t^n) + b_{n,n-1}(z^{n-1} - t^{n-1}) + \cdots + b_{n,1}(z - t) = \sum_{k=1}^{n} b_{n,k}(z^k - t^k).$$

Substituindo na equação (2.2.15), desenvolvendo-a e substituindo a definição de momento, obtemos

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} b_{n,k}(\mu_{k-1}^{\psi} + \mu_{k-2}^{\psi} t + \ldots + \mu_1^{\psi} t^{k-2} + \mu_0^{\psi} t^{k-1}).$$

Desenvolvendo o somatório, encontramos

$$C_n(t) = b_{n,n}\mu_0^{\psi} t^{n-1} + (b_{n,n}\mu_1^{\psi} + b_{n,n-1}\mu_0^{\psi}) t^{n-2} + \ldots + b_{n,1}\mu_0^{\psi}.$$

Portanto, C_n tem grau $n-1$. ■

Além da equação (2.2.15), os polinômios C_n também podem ser dados pelo teorema a seguir.

Teorema 2.2. *Os polinômios C_n satisfazem*

$$C_n(t) = \int_a^b z^{-m} \frac{t^m B_n(z) - z^m B_n(t)}{z - t} d\psi(z), \quad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.2.16}$$

<u>Demonstração</u>: Para $m = 0$ é imediato. De (2.2.15), temos

$$C_n(t) = \int_a^b z^{-m} \frac{z^m B_n(z) - z^m B_n(t)}{z - t} d\psi(z).$$

Somando-se e subtraindo-se o termo $t^m B_n(z)$, obtemos

$$C_n(t) = \int_a^b z^{-m} \frac{t^m B_n(z) - z^m B_n(t)}{z-t} d\psi(z) + \int_a^b z^{-m} B_n(z) \frac{z^m - t^m}{z-t} d\psi(z).$$

Como

$$\frac{z^m - t^m}{z-t} = \sum_{k=0}^{m-1} z^k t^{m-1-k},$$

então

$$C_n(t) = \int_a^b z^{-m} \frac{t^m B_n(z) - z^m B_n(t)}{z-t} d\psi(z) + \sum_{k=0}^{m-1} t^{m-1-k} \int_a^b z^{k-m} B_n(z) d\psi(z).$$

Mas,

$$\int_a^b z^{k-m} B_n(z) d\psi(z) = 0, \text{ para } m = 1, \ldots, n, \text{ e } k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Portanto,

$$C_n(t) = \int_a^b z^{-m} \frac{t^m B_n(z) - z^m B_n(t)}{z-t} d\psi(z), \text{ para } 0 \leq m \leq n.$$

■

Os polinômios C_n também são utilizados para o cálculo dos pesos de certas fórmulas de quadratura que veremos mais adiante na Seção 4.1.2.

2.2.2 Relação de recorrência de três termos

Primeiramente, apresentamos o seguinte resultado sobre o conjunto de polinômios $\{t^{n-j} B_j\}_{j=0}^n$ (veja [5]).

Lema 2.1. *Para $n \geq 1$, o conjunto de polinômios $\{t^{n-j} B_j\}_{j=0}^n$ é linearmente independente.*

<u>Demonstração</u>: Observe que os polinômios $t^{n-j} B_j$, $j = 0, 1, ..., n$, são polinômios mônicos de grau n. Tomemos uma combinação linear nula desses polinômios, isto é,

$$\sum_{j=0}^n \gamma_j t^{n-j} B_j(t) = \gamma_0 t^n B_0(t) + \gamma_1 t^{n-1} B_1(t) + \cdots + \gamma_n B_n(t) = 0.$$

Multiplicando ambos os lados por t^{s-n} e integrando com respeito a ψ no intervalo (a, b), obtemos

$$\sum_{j=0}^n \gamma_j \int_a^b t^{s-j} B_j(t) d\psi(t) = 0. \tag{2.2.17}$$

De (2.2.6), sabemos que

$$\int_a^b t^{-j+s} B_j(t) d\psi(t) = 0, \quad \text{para } s = 0, 1, ..., j-1.$$

Fazendo $s = 0, 1, ..., n$ em (2.2.17), obtemos o sistema triangular inferior de equações lineares

$$\sum_{j=0}^{s} \gamma_j \int_a^b t^{-j+s} B_j(t) d\psi(t) = 0, \quad \text{para } s = 0, 1, ..., n.$$

Como $\rho_s = \int_a^b B_s(t) d\psi(t) \neq 0$, então $\gamma_s = 0$, $s = 0, 1, ..., n$, o que demonstra o resultado. ■

Mostramos, agora, que os polinômios B_n e e os associados C_n satisfazem a relações de recorrência de três termos da forma (1), com $\beta_n > 0$ e $\alpha_{n+1} > 0$, $n \geq 1$.

Teorema 2.3. *Os polinômios B_n e C_n satisfazem às seguintes relações de recorrência de três termos, para $n \geq 1$,*

$$B_{n+1}(t) = (t - \beta_{n+1}) B_n(t) - \alpha_{n+1}\, t\, B_{n-1}(t), \tag{2.2.18}$$

$$C_{n+1}(t) = (t - \beta_{n+1}) C_n(t) - \alpha_{n+1}\, t\, C_{n-1}(t), \tag{2.2.19}$$

com $B_0(t) = 1, B_1(t) = t - \beta_1, C_0(t) = 0, C_1(t) = \mu_0^\psi$ e

$$\beta_1 = \frac{\mu_0^\psi}{\mu_{-1}^\psi}, \qquad \alpha_{n+1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}, \qquad \beta_{n+1} = -\alpha_{n+1} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n}. \tag{2.2.20}$$

Demonstração: Se B_n, para $n \geq 0$, são polinômios mônicos de grau n, o polinômio $B_{n+1}(t) - tB_n(t)$ também é um polinômio de grau no máximo n em t. Assim, pelo Lema 2.1 podemos escrever

$$B_{n+1}(t) - tB_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j t^{n-j} B_j(t). \tag{2.2.21}$$

Multiplicando ambos os membros da última igualdade por t^k e integrando em (a, b) com relação a ψ, obtemos

$$\int_a^b t^k B_{n+1}(t) d\psi(t) - \int_a^b t^{k+1} B_n(t) d\psi(t) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \int_a^b t^{n-j+k} B_j(t) d\psi(t). \tag{2.2.22}$$

• Fazendo $k = -n$ em (2.2.22), obtemos

$$\int_a^b t^{-n} B_{n+1}(t) d\psi(t) - \int_a^b t^{-n+1} B_n(t) d\psi(t) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \int_a^b t^{-j} B_j(t) d\psi(t).$$

Usando (2.2.7), temos $0 = \gamma_0 \rho_0$ e, como $\rho_0 > 0$, então

$$\gamma_0 = 0.$$

• Fazendo $k = -n + 1$ em (2.2.22) e, como $\gamma_0 = 0$, obtemos

$$\int_a^b t^{-n+1} B_{n+1}(t) d\psi(t) - \int_a^b t^{-n+2} B_n(t) d\psi(t) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \int_a^b t^{-j+1} B_j(t) d\psi(t).$$

De (2.2.7), temos $0 = \gamma_1 \rho_1$ e, como $\rho_1 > 0$, então

$$\gamma_1 = 0.$$

- Analogamente, fazendo $k = -n+2, -n+3, \ldots, -2$ em (2.2.22), concluímos que

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \cdots = \gamma_{n-2} = 0.$$

Substituindo $\gamma_j = 0$, para $j = 0, 1, ..., n-2$, em (2.2.21), obtemos

$$B_{n+1}(t) - tB_n(t) = \gamma_n B_n(t) + \gamma_{n-1} t B_{n-1}(t),$$

ou seja, os polinômios $\{B_n(t)\}$ satisfazem a uma relação de recorrência de três termos.

Para determinar o valor de γ_{n-1}, fazemos $k = -1$ em (2.2.22), ou seja,

$$\int_a^b t^{-1} B_{n+1}(t) d\psi(t) - \int_a^b B_n(t) d\psi(t) = \gamma_n \int_a^b t^{-1} B_n(t) d\psi(t) + \gamma_{n-1} \int_a^b B_{n-1}(t) d\psi(t).$$

Logo,

$$-\int_a^b B_n(t) d\psi(t) = \gamma_{n-1} \int_a^b B_{n-1}(t) d\psi(t),$$

ou seja,

$$\gamma_{n-1} = -\frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}.$$

Finalmente, o valor de γ_n é obtido fazendo-se $k = -(n+1)$ em (2.2.22). Assim,

$$\begin{aligned} \int_a^b t^{-(n+1)} B_{n+1}(t) d\psi(t) &- \int_a^b t^{-n} B_n(t) d\psi(t) \\ &= \gamma_n \int_a^b t^{-n-1} B_n(t) d\psi(t) + \gamma_{n-1} \int_a^b t^{-n} B_{n-1}(t) d\psi(t). \end{aligned}$$

Logo,

$$0 = \gamma_n \eta_n + \gamma_{n-1} \eta_{n-1}$$

e, então,

$$\gamma_n = -\gamma_{n-1} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n}.$$

Denotando, para $n \geq 1$,

$$\alpha_{n+1} = -\gamma_{n-1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} \quad \text{e} \quad \beta_{n+1} = -\alpha_{n+1} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n},$$

obtemos (2.2.18).

As condições iniciais $B_0(t) = 1$ e $B_1(t) = t - \beta_1$ seguem do fato de B_n ser mônico e usando

$$0 = \int_a^b t^{-1} B_1(t) d\psi(t) = \int_a^b t^{-1} (t - \beta_1) \, d\psi(t) = \mu_0^{\psi} - \beta_1 \mu_{-1}^{\psi}.$$

Provemos, agora, a relação (2.2.19). Usando a relação de recorrência de três termos (2.2.18), obtemos

$$\begin{aligned} B_{n+1}(z) - B_{n+1}(t) &= (z - \beta_{n+1}) B_n(z) - \alpha_{n+1} z B_{n-1}(z) \\ &\quad -(t - \beta_{n+1}) B_n(t) + \alpha_{n+1} t B_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $tB_n(z)$ e $\alpha_{n+1}tB_{n-1}(z)$ no segundo membro da relação anterior, temos

$$\begin{aligned} B_{n+1}(z) - B_{n+1}(t) &= (t-\beta_{n+1})(B_n(z)-B_n(t)) - \alpha_{n+1}t(B_{n-1}(z)-B_{n-1}(t)) \\ &\quad +(z-t)(B_n(z)-\alpha_{n+1}B_{n-1}(z)). \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da última igualdade por $(z-t)$ e integrando em (a,b) com relação a ψ, obtemos

$$C_{n+1}(t) = (t-\beta_{n+1})C_n(t) - \alpha_{n+1}tC_{n-1}(t) + \rho_n - \alpha_{n+1}\rho_{n-1}.$$

Como $\alpha_{n+1} = \dfrac{\rho_n}{\rho_{n-1}}$, obtemos o resultado procurado. ■

Das relações (2.2.11) e (2.2.14), pode-se mostrar facilmente que os coeficientes α_{n+1} e β_{n+1}, $n \geq 0$, também podem ser dados por (Exercício 2.4)

$$\alpha_{n+1} = \frac{H_{n+1}^{(-n)}H_{n-1}^{(-(n-1))}}{H_n^{(-n)}H_n^{(-(n-1))}} \qquad \text{e} \qquad \beta_{n+1} = \frac{H_{n+1}^{(-n)}H_n^{(-n)}}{H_n^{(-(n-1))}H_{n+1}^{(-(n+1))}}.$$

2.2.3 Zeros dos polinômios L-ortogonais na reta real

Como dissemos no prefácio deste texto, uma propriedades interessante dos polinômios que satisfazem à relação de recorrência de três termos (1) com $\beta_n > 0$ e $\alpha_{n+1} > 0$, $n \geq 1$, é que seus zeros são reais e simples. Veremos, agora, a prova deste resultado.

Teorema 2.4. *Os zeros dos polinômios B_n, $n \geq 1$, são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a,b).*

Demonstração: Mostremos que B_n possui pelo menos um zero em (a,b), $0 \leq a < b \leq \infty$. Suponhamos que B_n não tenha zeros em (a,b). Então, B_n não muda de sinal em (a,b), ou seja, $B_n(t) > 0$ ou $B_n(t) < 0$, $t \in (a,b)$.

Mas, por definição,

$$\int_a^b t^{-n}B_n(t)d\psi(t) = 0. \tag{2.2.23}$$

Por outro lado, como $t^{-n} > 0$ e B_n não muda de sinal em (a,b), temos

$$\int_a^b t^{-n}B_n(t)d\psi(t) \neq 0. \tag{2.2.24}$$

De (2.2.23) e (2.2.24) chegamos a uma contradição. Portanto, B_n muda de sinal pelo menos uma vez em (a,b). Vamos supor, agora, que B_n muda de sinal r vezes em (a,b), $r < n$.

Sejam $t_{n,1}, t_{n,2}, \ldots, t_{n,r}$ os pontos onde B_n muda de sinal. Claramente, $t_{n,1}$, $t_{n,2}, \ldots, t_{n,r}$ são zeros de multiplicidade ímpar de B_n em (a,b). Logo,

$$(t-t_{n,1})(t-t_{n,2})\ldots(t-t_{n,r}) = \sum_{j=0}^{r} a_j t^j$$

é um polinômio mônico de grau r. Como $j = 0,\ldots,r$ e $r < n$,

$$\sum_{j=0}^{r} a_j \int_a^b t^{-n+j}B_n(t)d\psi(t) = 0. \tag{2.2.25}$$

Mas, $B_n(t)\sum_{j=0}^{r} a_j t^j$ é um polinômio cujos zeros têm multiplicidade par em (a, b) ou são complexos. Assim, não muda de sinal em (a, b) e, portanto,

$$\sum_{j=0}^{r} a_j \int_a^b t^{-n+j} B_n(t) d\psi(t) \neq 0. \tag{2.2.26}$$

De (2.2.25) e (2.2.26), temos um absurdo. Logo, B_n muda de sinal $r \geq n$ vezes em (a, b). Como B_n é um polinômio de grau n, $r = n$. Portanto, B_n tem todos os seus zeros simples e em (a, b). ∎

Consideramos, neste texto, os zeros de B_n ordenados em ordem crescente, isto é,

$$a < t_{n,1} < t_{n,2} < \cdots < t_{n,n} < b.$$

Vamos mostrar mais algumas propriedades sobre os zeros dos polinômios B_n e C_n. Para isto, precisamos de alguns resultados.

Como consequência das relações de recorrência (2.2.18) e (2.2.19), podemos enunciar o resultado a seguir.

Teorema 2.5. *Os polinômios B_n e C_n satisfazem à seguinte relação:*

$$C_n(t)B_{n-1}(t) - C_{n-1}(t)B_n(t) = \alpha_n\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_2\mu_0^{\psi}t^{n-1},\ n \geq 2. \tag{2.2.27}$$

Além disso, o polinômio G_n, definido por

$$G_n(t) = B_n'(t)B_{n-1}(t) - B_{n-1}'(t)B_n(t),\ \ n \geq 1, \tag{2.2.28}$$

satisfaz

$$G_{n+1}(t) = [B_n(t)]^2 + \alpha_{n+1}\beta_n[B_{n-1}(t)]^2 + \alpha_{n+1}\alpha_n t^2 G_{n-1}(t),\ n \geq 1. \tag{2.2.29}$$

Demonstração: Mostremos a relação (2.2.27). Temos, do Teorema 2.3, que

$$\begin{aligned} C_n(t)B_{n-1}(t) - C_{n-1}(t)B_n(t) &= [(t-\beta_n)C_{n-1}(t) - \alpha_n t C_{n-2}(t)]B_{n-1}(t) \\ &\quad - C_{n-1}(t)[(t-\beta_n)B_{n-1}(t) - \alpha_n t B_{n-2}(t)] \\ &= \alpha_n\, t\,[C_{n-1}(t)B_{n-2}(t) - C_{n-2}(t)B_{n-1}(t)]. \end{aligned}$$

Observe que obtivemos uma equação de diferenças. Logo,

$$\begin{aligned} C_n(t)B_{n-1}(t) - C_{n-1}(t)B_n(t) &= \alpha_n\, t\,[\alpha_{n-1}t(C_{n-2}(t)B_{n-3}(t) - C_{n-3}(t)B_{n-2}(t))] \\ &\ \ \vdots \\ &= \alpha_n t \alpha_{n-1} t[\ldots(\alpha_2 t(C_1(t)B_0(t) - C_0(t)B_1(t)))]. \end{aligned}$$

Como $C_0(t) = 0,\ C_1(t) = \mu_0,\ B_0(t) = 1$ e $B_1(t) = t - \beta_1$, chegamos a

$$C_n(t)B_{n-1}(t) - C_{n-1}(t)B_n(t) = \alpha_n\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_2\mu_0 t^{n-1},\ n \geq 2.$$

Demonstremos (2.2.29). De (2.2.28) e da relação de recorrência de três termos, obtemos

$$\begin{aligned} G_n(t) &= [(t-\beta_n)B_{n-1}(t) - \alpha_n t B_{n-2}(t)]' B_{n-1}(t) \\ &\quad - B_{n-1}'(t)[(t-\beta_n)B_{n-1}(t) - \alpha_n t B_{n-2}(t)]. \end{aligned}$$

Calculando as derivadas, teremos

$$G_n(t) = B_{n-1}^2(t) - \alpha_n B_{n-2}(t) B_{n-1}(t) + \alpha_n t G_{n-1}(t).$$

Logo,

$$G_{n+1}(t) = B_n^2(t) - \alpha_{n+1} B_{n-1}(t) B_n(t) + \alpha_{n+1} t G_n(t).$$

Como $B_n(t) = (t - \beta_n) B_{n-1}(t) - \alpha_n t B_{n-2}(t)$, obtemos

$$G_{n+1}(t) = B_n^2(t) + \alpha_{n+1}\beta_n [B_{n-1}^2(t) + \alpha_{n+1}\alpha_n t^2 G_{n-1}(t).$$

■

Usando a relação (2.2.29), obtemos

$$G_{2n+1}(t) = B_{2n}^2(t) + \alpha_{2n+1}\beta_{2n} B_{2n-1}^2(t) + \alpha_{2n+1}\alpha_{2n} t^2 G_{2n-1}(t). \qquad (2.2.30)$$

Mas,

$$G_{2n-1}(t) = B_{2n-2}^2(t) + \alpha_{2n-1}\beta_{2n-2} B_{2n-3}^2(t) + \alpha_{2n-1}\alpha_{2n-2} t^2 G_{2n-3}(t)$$

e

$$G_{2n-3}(t) = B_{2n-4}^2(t)^2 + \alpha_{2n-3}\beta_{2n-4} B_{2n-5}^2(t) + \alpha_{2n-3}\alpha_{2n-4} t^2 G_{2n-5}(t).$$

Continuando com o mesmo raciocínio e substituindo em (2.2.30), concluímos que

$$\begin{aligned} G_{2n+1}(t) \quad = \quad & B_{2n}^2(t) + \alpha_{2n+1}\beta_{2n} B_{2n-1}^2(t) + \alpha_{2n+1}\alpha_{2n} t^2 B_{2n-2}^2(t) \\ & + \alpha_{2n+1}\alpha_{2n}\alpha_{2n-1}\beta_{2n-2} t^2 B_{2n-3}^2(t) + \cdots \\ & + \alpha_{2n+1}\alpha_{2n}\alpha_{2n-1}\ldots\alpha_4\alpha_3\beta_2 t^{2n-2} B_1^2(t) \\ & + \alpha_{2n+1}\alpha_{2n}\alpha_{2n-1}\ldots\alpha_3\alpha_2 t^{2n} B_0^2(t). \end{aligned} \qquad (2.2.31)$$

De modo análogo encontramos

$$\begin{aligned} G_{2n}(t) \quad = \quad & B_{2n-1}^2(t) + \alpha_{2n}\beta_{2n-1} B_{2n-2}^2(t) + \alpha_{2n}\alpha_{2n-1} t^2 B_{2n-3}^2(t) \\ & + \alpha_{2n}\alpha_{2n-1}\alpha_{2n-2}\beta_{2n-3} t^2 B_{2n-4}^2(t) + \cdots \\ & + \alpha_{2n}\alpha_{2n-1}\alpha_{2n-2}\ldots\alpha_4\alpha_3 t^{2n-2} B_1^2(t) \\ & + \alpha_{2n}\alpha_{2n-1}\alpha_{2n-2}\ldots\alpha_3\alpha_2\beta_1 t^{2n-2} B_0^2(t). \end{aligned} \qquad (2.2.32)$$

Estamos, agora, em condições de demonstrar o resultado a seguir.

Teorema 2.6. *Se $t_{n,k}$ é um zero do polinômio B_n, para $n \geq 1$, então ele é diferente dos zeros de C_n e dos zeros de B_{n-1}.*

Demonstração: Temos, por hipótese, que $t_{n,k}$ é um zero de B_n. Assim, da equação (2.2.27),

$$C_n(t_{n,k}) B_{n-1}(t_{n,k}) = \alpha_n \alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \ldots \alpha_2 \, \mu_0^{\psi} \, t_{n,k}^{n-1} \neq 0.$$

pois $t_{n,k} > 0$, para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Como $C_n(t_{n,k}) B_{n-1}(t_{n,k})$ não se anula, $t_{n,k}$ não é um zero do polinômio B_{n-1} e nem de C_n. ■

Além disso, pode-se mostrar que

Teorema 2.7. *Para $n \geq 2$, entre dois zeros consecutivos do polinômio B_{n-1} existe um zero de B_n.*

Demonstração: Seja $t_{n-1,k},\ k = 1, 2, \ldots, n-1$, os zeros de B_{n-1}. Logo, por (2.2.31) e (2.2.32), $G_n(t_{n-1,k}) > 0$ e, então,

$$B'_{n-1}(t_{n-1,k}) \neq 0, \quad para \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Sejam $t_{n-1,j}$ e $t_{n-1,j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, n-2$, dois zeros consecutivos de B_{n-1}. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $B'_{n-1}(t_{n-1,j}) > 0$. Então, $B'_{n-1}(t_{n-1,j+1}) < 0$. Assim, de (2.2.28), $B_n(t_{n-1,j}) < 0$ e $B_n(t_{n-1,j+1}) > 0$.

Como B_n é uma função contínua, existe $\tilde{t}$ entre $t_{n-1,j}$ e $t_{n-1,j+1}$ tal que $B_n(\tilde{t}) = 0$ e o resultado do teorema segue imediatamente. ■

Facilmente, podemos também obter o resultado sobre os zeros de dois polinômios de graus consecutivos, B_n e B_{n+1}.

Teorema 2.8. *Para $n \geq 1$, dois polinômios de graus consecutivos B_n e B_{n+1} não possuem zeros em comum.*

Demonstração: Suponhamos que existe z tal que $B_1(z) = B_2(z) = 0$, então $\alpha_2 z = 0$. Como $z = 0$ não é zero de B_n, $n \geq 1$, isto é uma contradição. Assim $B_1(z)$ e $B_2(z)$ não possuem zeros em comum.

Agora, seja $n \geq 2$ e suponhamos que B_{n-1} e B_n não possuem zeros em comum. Se $B_n(z) = 0$, então $B_{n-1}(z) \neq 0$ e, de (2.2.18),

$$B_{n+1}(z) = -\alpha_{n+1} z B_{n-1}(z) \neq 0.$$

Isto significa que B_n e B_{n+1} não têm zeros em comum. Assim, por indução matemática, mostra-se o resultado do teorema. ■

Fazendo $m = 1, 2, \ldots, n-1$ em (2.2.18), mostra-se facilmente que

$$B_n(t) = \begin{vmatrix} t-\beta_1 & -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -t & t-\beta_2 & -\alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -t & t-\beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t-\beta_{n-1} & -\alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -t & t-\beta_n \end{vmatrix}, \quad n \geq 1. \qquad (2.2.33)$$

Deixamos para o leitor a demonstração deste fato no Exercício 2.6.

Usando a relação de recorrência (2.2.18) novamente, vamos mostrar que os zeros dos polinômios B_n são os autovalores de uma matriz de Hessenberg inferior. Veja, por exemplo, [38].

Teorema 2.9. *Os zeros dos polinômios B_n são os autovalores da matriz de Hessenberg inferior*

$$\begin{pmatrix} \eta_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \alpha_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \eta_n \end{pmatrix},$$

onde $\eta_m = \alpha_m + \beta_m$, $m = 1, 2, \ldots, n$, e $\alpha_1 = 0$.

Demonstração: De (2.2.33), $B_n(t) = det(t\mathbf{A}_n - \mathbf{B}_n)$, onde

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} \beta_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}.$$

Observe que, como $\mathbf{A}_n$ é não-singular, podemos então escrever

$$B_n(t) = det(\mathbf{A}_n)\ det(t\mathbf{I} - \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{B}_n).$$

Como $det(\mathbf{A}_n) = 1$ e

$$\mathbf{A}_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

vemos que B_n é o polinômio característico mônico da matriz de Hessenberg inferior $\mathbf{H}_n = \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{B}_n$. Isto completa a prova do teorema. ■

Agora apresentaremos alguns exemplos de polinômios L-ortogonais que foram obtidos em [42].

Exemplo 2.1. Considere a medida forte definida no intervalo (a, b),

$$d\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}}\,dt,$$

com $0 < a < b < \infty$. Os coeficientes da relação de recorrência de três termos (2.2.18) são dados por

$$\alpha_2 = 2\alpha, \quad \alpha_{n+1} = \alpha \quad \text{e} \quad \beta_n = \beta, \quad n \geq 1,$$

com

$$\beta = \sqrt{ab}, \quad \alpha = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{4}.$$

A Figura 2.1 mostra o gráfico dos polinômios L-ortogonais de graus 5 e 6, respectivamente, com $a = 1$ e $b = 4$.

Exemplo 2.2. Considere a medida forte definida no intervalo $(0, \infty)$,

$$d\psi(t) = t^{-1/2}e^{-(t+a/t)/2}\,dt,$$

com $0 < a < \infty$. Para esta medida, os coeficientes da relação de recorrência de três termos (2.2.18) são dados por

$$\alpha_{n+1} = n \quad \text{e} \quad \beta_n = \sqrt{a}, \quad n \geq 1.$$

A Figura 2.2 mostra o gráfico dos polinômios L-ortogonais de graus 4 e 5, respectivamente, com $a = 9$.

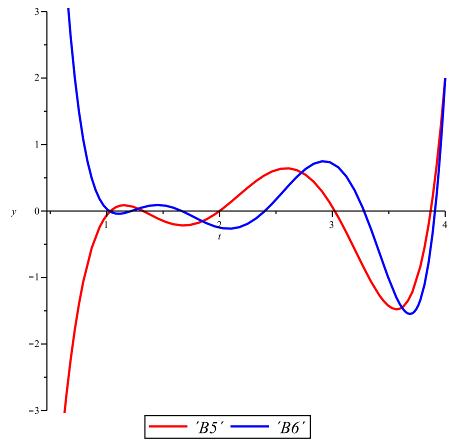

Figura 2.1: Gráfico do polinômios B_5 e B_6 do Exemplo 2.1, com $a = 1$ e $b = 4$.

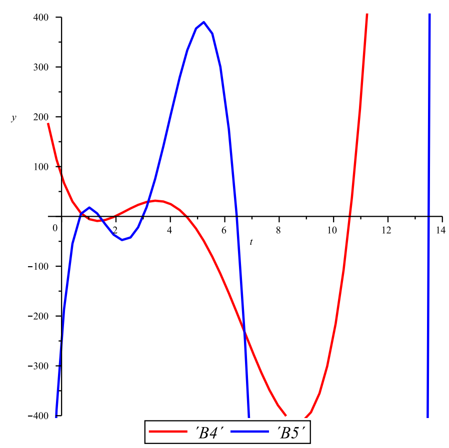

Figura 2.2: Gráfico do polinômios B_4 e B_5 do Exemplo 2.2, com $a = 9$.

Exemplo 2.3. Considere a medida log-normal definida no intervalo $(0, \infty)$,

$$d\psi(t) = \frac{\sqrt{q}}{2\lambda\sqrt{\pi}} e^{-(ln(t)/(2\lambda))^2}\, dt,$$

onde $0 < q < 1$, e $q = e^{-2\lambda^2}$. Para esta medida, os coeficientes da relação de recorrência de três termos (2.2.18) são dados por

$$\alpha_{n+1} = q^{-n-1/2}(1 - q^n) \quad \text{e} \quad \beta_n = q^{-1/2}, \quad n \geq 1.$$

2.2.4 Relações entre polinômios ortogonais e L-ortogonais

Em Sri Ranga [42], encontramos estudos sobre certas medidas fortes ψ definidas em (a,b), $0 \leq a < b \leq \infty$, que satisfazem à seguinte propriedade

$$\frac{d\psi(t)}{\sqrt{t}} = -\frac{d\psi(\beta^2/t)}{\sqrt{\beta^2/t}}, \quad t \in (a,b), \tag{2.2.34}$$

onde $\beta = \sqrt{ab}$.

Entre outros resultados, foi mostrado que, para os momentos μ_n^{ψ} associados a ψ e para os polinômios L-ortogonais B_n^{ψ}, que satisfazem

$$B_{n+1}^{\psi}(t) = (t - \beta_{n+1}^{\psi})B_n^{\psi}(t) - \alpha_{n+1}^{\psi}\, t\, B_{n-1}^{\psi}(t), \quad n \geq 1,$$

com $B_0^{\psi}(t) = 1$ e $B_1^{\psi}(t) = t - \beta_1^{\psi}$, valem as seguintes propriedades:

- $\mu_n^{\psi} = \beta^{2n+1}\mu_{-n-1}^{\psi}, \quad n \geq 0,$
- $B_n^{\psi}(t) = \dfrac{t^n B_n^{\psi}(\beta^2/t)}{B_n^{\psi}(0)} \quad n \geq 1,$
- $\beta_n^{\psi} = \beta, \quad n \geq 1,$
- $t_{n,k} = \beta^2/t_{n,n-k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$ onde $a < t_{n,1} < t_{n,2} < \cdots < t_{n,n} < b$ são os zeros do polinômio B_n^{ψ}.

Sri Ranga, em [43], considerou a função

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(\sqrt{t} - \beta/\sqrt{t}), \quad t \in (0, \infty), \tag{2.2.35}$$

que representa uma transformação do intervalo $(0,\infty)$ no intervalo $(-\infty,\infty)$, cuja inversa é dada por

$$t(x) = (\sqrt{\alpha x^2 + \beta} + \sqrt{\alpha}x)^2, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Nesse mesmo trabalho foi mostrado que, se para uma medida forte ψ definida em (a,b), $0 \leq a < b \leq \infty$, vale

$$d\psi(t) = A\frac{t}{t+\beta}d\phi(x(t)), \tag{2.2.36}$$

então ψ possui a propriedade (2.2.34) se, e somente se, ϕ é uma medida simétrica em $[-d,d]$, ou seja, $d\phi(x) = -d\phi(-x)$. Aqui, A é uma constante adequada e $d = x(b) = (b-\beta)/(2\sqrt{\alpha b})$.

Com essa propriedade é possível demonstrar a seguinte relação entre os polinômios L-ortogonais B_n^{ψ} associados a ψ e os polinômios ortogonais P_n^{ϕ} associados a ϕ:

$$B_n^{\psi}(t) = (2\sqrt{\alpha t})^n P_n^{\phi}(x(t)). \tag{2.2.37}$$

Além disso, os coeficientes α_{n+1}^{ϕ} da relação de recorrência de P_n^{ϕ} e os coeficientes α_{n+1}^{ψ} da relação de recorrência de B_n^{ψ} satisfazem

$$\alpha_{n+1}^{\psi} = 4\alpha\alpha_{n+1}^{\phi}, \quad n \geq 1. \tag{2.2.38}$$

2.3 Exercícios

Exercício 2.1. Mostre que, para todo polinômio $R \in \Lambda$, existe um único $k \in \mathbb{N}$ tal que $R \in \Lambda_k$.

Exercício 2.2. Mostre que os determinantes de Hankel $H_n^{(m)}$, definidos por (1.1.4), são positivos para $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n > 0$.

Exercício 2.3. Seja $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de L-polinômios, tal que R_n é de L-grau n para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

a) $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios de Laurent ortogonais;

b) $$\int_a^b R(t)R_n(t)d\psi(t) \begin{cases} = 0, & \text{para todo polinômio } R \text{ de L-grau} \leq n-1, \\ \neq 0, & \text{se } R \text{ tem L-grau } n; \end{cases}$$

c) $$\int_a^b t^m R_{2n}(t)d\psi(t) = \sum_{j=-n}^{n} r_{2n,j}\, \mu_{j+m}^{\psi} \begin{cases} = 0, & \text{se } \; -n \leq m \leq n-1, \\ \neq 0, & \text{se } \; m = n; \end{cases}$$

$$\int_a^b t^m R_{2n+1}(t)d\psi(t) = \sum_{j=-n-1}^{n} r_{2n+1,j}\, \mu_{j+m}^{\psi} \begin{cases} = 0, & \text{se } \; -n \leq m \leq n, \\ \neq 0, & \text{se } \; m = -n-1. \end{cases}$$

Exercício 2.4. Usando as relações (2.2.11) e (2.2.14), mostre que os coeficientes α_{n+1} e β_{n+1}, $n \geq 0$, dados em (2.2.20), podem ser escritos como

$$\alpha_{n+1} = \frac{H_{n+1}^{(-n)} H_{n-1}^{(-(n-1))}}{H_n^{(-n)} H_n^{(-(n-1))}} \qquad \text{e} \qquad \beta_{n+1} = \frac{H_{n+1}^{(-n)} H_n^{(-n)}}{H_n^{(-(n-1))} H_{n+1}^{(-(n+1))}}.$$

Exercício 2.5. Mostre que

$$\begin{aligned} G_{2n}(t) \;\; = \;\; & B_{2n-1}^2(t) + \alpha_{2n}\beta_{2n-1}B_{2n-2}^2(t) + \alpha_{2n}\alpha_{2n-1}t^2 B_{2n-3}^2(t) \\ & + \alpha_{2n}\alpha_{2n-1}\alpha_{2n-2}\beta_{2n-3}t^2 B_{2n-4}^2(t) + \cdots + \alpha_{2n}\alpha_{2n-1}\ldots\alpha_3 t^{2n-2} B_1^2(t) \\ & + \alpha_{2n}\alpha_{2n-1}\ldots\alpha_3\alpha_2\beta_1 t^{2n-2} B_0^2(t). \end{aligned}$$

Exercício 2.6. Mostre que

$$B_n(t) = \begin{vmatrix} t-\beta_1 & -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -t & t-\beta_2 & -\alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -t & t-\beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t-\beta_{n-1} & -\alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -t & t-\beta_n \end{vmatrix}.$$

Capítulo 3

Polinômios Para-Ortogonais

Apresentamos aqui propriedades de sequências de polinômios $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ que satisfazem à relação de recorrência de três termos (2), ou seja,

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]\, R_n(z) - 4\, d_{n+1}\, z\, R_{n-1}(z), \; n \geq 1,$$

com $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$, onde $c_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada positiva. Iniciaremos com o caso particular em que $c_n = 0$ para $n \geq 1$, ou seja, os polinômios R_n satisfazem à relação recorrência (3),

$$R_{n+1}(z) = (z + 1)\, R_n(z) - 4\, d_{n+1}\, z\, R_{n-1}(z), \; n \geq 1,$$

com $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = z + 1$.

3.1 Polinômios para-ortogonais reais

Nosso objetivo é obter sequências de polinômios para-ortogonais, definidos na Seção 1.5.1, que satisfaçam a uma relação de recorrência da forma (3). Os resultados aqui apresentados também podem ser encontrados em [10] e [11].

Consideremos o círculo unitário $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Seja ψ uma medida simétrica definida em $\mathcal{C}$, isto é, ψ satisfaz à propriedade de simetria

$$d\psi(1/z) = -d\psi(z)$$

ou, equivalentemente, $\psi(e^{i\theta})$ satisfaz $d\psi(e^{i(2\pi-\theta)}) = -d\psi(e^{i\theta})$, pois $z = e^{i\theta}$, com $0 < \theta < 2\pi$.

É fácil mostrar que, para uma medida simétrica, os momentos trigonométricos

$$\mu_n = \int_{\mathcal{C}} z^{-n}\, d\psi(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

são reais e que $\mu_{-n} = \mu_n$, para $n \geq 1$ (Exercício 3.1).

Lembremos que a sequência de polinômios de Szegő (polinômios ortogonais no círculo unitário), $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, associada a ψ é definida por

$$\int_{\mathcal{C}} S_n(z)\overline{S_m(z)} d\psi(z) = 0, \quad \text{para} \quad n \neq m.$$

De (1.5.43), os coeficientes de reflexão α_n também são reais, ou seja,

$$\alpha_n = -S_{n+1}(0),$$

e, consequentemente, de (1.5.44) e (1.5.45), os polinômios de Szegő associados a ψ são reais.

Consideremos, agora, duas sequências de polinômios para-ortogonais especiais, denotadas por

$$\{S_n(1,z)\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{e} \quad \{S_n(-1,z)\}_{n=0}^{\infty},$$

obtidas de (1.5.56), ou seja, de

$$S_n(w_n,z) = S_n(z) + w_n S_n^*(z)$$

quando escolhemos $w_n = 1$ e $w_n = -1$, respectivamente.

Considerando $z_1, z_2, \ldots, z_n$ os zeros de S_n, observe que, como $S_n(-1,z) = S_n(z) - S_n^*(z)$, temos

$$S_n(-1,z) = (z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n) - (1-zz_1)(1-zz_2)\cdots(1-zz_n).$$

Assim, $S_n(-1,1) = 0$ e, portanto, é divisível por $(z-1)$.

A partir dessas sequências, Delsarte e Genin [17], já em 1986, construíram outras duas sequências de polinômios mônicos, $\{R_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{R_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$, definidas da seguinte forma:

$$R_n^{(1)}(z) = \frac{S_n(1,z)}{1+S_n(0)} = \frac{S_n(z)+S_n^*(z)}{1+S_n(0)}, \quad n \geq 0, \tag{3.1.1}$$

e

$$R_n^{(2)}(z) = \frac{S_{n+1}(-1,z)}{(z-1)(1-S_{n+1}(0))} = \frac{S_{n+1}(z)-S_{n+1}^*(z)}{(z-1)(1-S_{n+1}(0))}, \quad n \geq 0. \tag{3.1.2}$$

Do Teorema 1.17 sabemos que todos os zeros dos polinômios para-ortogonais são simples e estão no círculo unitário. Assim, os zeros dos polinômios $R_n^{(1)}$ e $R_n^{(2)}$ também são simples e estão no círculo unitário.

O próximo resultado mostra que os polinômios de Szegő podem escritos em termos dos polinômios $R_n^{(1)}$ e $R_{n-1}^{(2)}$.

Teorema 3.1. *Os polinômios S_n, $R_n^{(1)}$ e $R_n^{(2)}$ satisfazem à seguinte relação:*

$$2zS_{n-1}(z) = R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z), \quad n \geq 1. \tag{3.1.3}$$

Demonstração: De (3.1.1) e (3.1.2), como $\alpha_{n-1} = -S_n(0)$ é real, temos

$$R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z) = \frac{S_n(z)+S_n^*(z)}{1-\alpha_{n-1}} + \frac{S_n(z)-S_n^*(z)}{1+\alpha_{n-1}},$$

ou seja,

$$R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z) = \frac{2}{1-\alpha_{n-1}^2}\left(S_n(z) + \alpha_{n-1}S_n^*(z)\right).$$

Usando a relação de recorrência (1.5.45), ou seja, usando que

$$S_n(z) = (1-\alpha_{n-1}^2)zS_{n-1}(z) - \alpha_{n-1}S_n^*(z), \quad n \geq 1,$$

chegamos ao resultado desejado. ∎

3.1.1 Relação de recorrência de três termos

Agora demonstraremos o principal resultados desta seção, que os polinômios $R_n^{(1)}$ e $R_n^{(2)}$ satisfazem a uma relação de recorrência de três termos da forma (3).

Teorema 3.2. *Os polinômios mônicos $R_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, satisfazem às relações de recorrência de três termos*

$$R_{n+1}^{(i)}(z) = (z+1)R_n^{(i)}(z) - 4d_{n+1}^{(i)} z R_{n-1}^{(i)}(z), \quad n \geq 1, \tag{3.1.4}$$

com condições iniciais $R_0^{(i)}(z) = 1$ e $R_1^{(i)}(z) = z + 1$. Além disso,

$$d_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{4}(1-\alpha_{n-2})(1+\alpha_{n-1}) \quad e \quad d_{n+1}^{(2)} = \frac{1}{4}(1+\alpha_{n-1})(1-\alpha_n)\,.$$

Demonstração: Considerando os seguintes polinômios para-ortogonais mônicos

$$S_n^{(1)}(z) = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + S_n(0)} \quad \text{e} \quad S_n^{(2)}(z) = \frac{S_n(z) - S_n^*(z)}{1 - S_n(0)}, \tag{3.1.5}$$

de (3.1.1) e (3.1.2) podemos escrever

$$R_n^{(1)}(z) = S_n^{(1)}(z) \quad \text{e} \quad R_n^{(2)}(z) = \frac{S_{n+1}^{(2)}(z)}{z-1}.$$

Assim, precisamos mostrar que, para $n \geq 1$, os polinômios $S_n^{(1)}$ e $S_n^{(2)}$ satisfazem às relações de recorrência

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(1)}(z) &= (z+1)S_n^{(1)}(z) - (1-\alpha_{n-2})(1+\alpha_{n-1})zS_{n-1}^{(1)}(z)\,, \\ S_{n+1}^{(2)}(z) &= (z+1)S_n^{(2)}(z) - (1+\alpha_{n-2})(1-\alpha_{n-1})zS_{n-1}^{(2)}(z)\,, \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

com $\alpha_{-1} = -1$, $S_0^{(1)}(z) = 1$, $S_0^{(2)}(z) = 1$, $S_1^{(1)}(z) = z + 1$ e $S_1^{(2)}(z) = z - 1$.

Primeiramente provemos o resultado para $S_n^{(1)}$. Utilizando as relações de recorrência dos polinômios de Szegő (1.5.52) e (1.5.44), ou seja, usando que

$$\begin{aligned} S_{n+1}(z) &= zS_n(z) - \alpha_n S_n^*(z), \\ S_{n+1}^*(z) &= S_n^*(z) - \alpha_n z S_n(z), \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

para $n \geq 0$, e $\alpha_n = -S_{n+1}(0)$, de (3.1.5) obtemos

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = \frac{zS_n(z) - \alpha_n S_n^*(z) + S_n^*(z) - \alpha_n z S_n(z)}{1-\alpha_n},$$

ou seja,

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = zS_n(z) + S_n^*(z).$$

Escrevendo a expressão anterior como

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = \frac{(1-\alpha_{n-1})\,(zS_n(z) + S_n^*(z))}{1-\alpha_{n-1}},$$

podemos também escrever

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = \frac{(z - \alpha_{n-1}z + 1 - 1)S_n(z)}{1 - \alpha_{n-1}} + \frac{(1 - \alpha_{n-1} + z - z)S_n^*(z)}{1 - \alpha_{n-1}}.$$

Colocando $(z+1)$ em evidência no lado direito da expressão anterior, temos

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = (z+1)\left(\frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 - \alpha_{n-1}}\right) - \frac{(1 + \alpha_{n-1}z)S_n(z) + (\alpha_{n-1} + z)S_n^*(z)}{1 - \alpha_{n-1}}.$$

Utilizando novamente as relações (3.1.7) temos

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(1)}(z) &= (z+1)\left(\frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 - \alpha_{n-1}}\right) - \frac{(1 + \alpha_{n-1}z)[zS_{n-1}(z) - \alpha_{n-1}S_{n-1}^*(z)]}{1 - \alpha_{n-1}} \\ &\quad - \frac{(\alpha_{n-1} + z)[S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1}zS_{n-1}(z)]}{1 - \alpha_{n-1}}. \end{aligned}$$

Colocando $S_{n-1}(z) + S_{n-1}^*(z)$ em evidência obtém-se

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = (z+1)\left(\frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 - \alpha_{n-1}}\right) - (1 - \alpha_{n-1}^2)z\left(\frac{S_{n-1}(z) + S_{n-1}^*(z)}{1 - \alpha_{n-1}}\right).$$

Disso, imediatamente obtém-se

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = (z+1)\left(\frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 - \alpha_{n-1}}\right) - (1-\alpha_{n-2})(1+\alpha_{n-1})z\left(\frac{S_{n-1}(z) + S_{n-1}^*(z)}{1 - \alpha_{n-2}}\right).$$

Da definição de $S_n^{(1)}$ em (3.1.5) chegamos ao resultado desejado, ou seja,

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = (z+1)S_n^{(1)}(z) - (1 - \alpha_{n-2})(1 + \alpha_{n-1})zS_{n-1}^{(1)}(z), \quad n \geq 1.$$

Para as condições iniciais, $n = 0$ e $n = 1$, temos

$$S_0^{(1)}(z) = \frac{S_0(z) + S_0^*(z)}{1 + S_0(0)} = 1$$

e

$$S_1^{(1)}(z) = \frac{S_1(z) + S_1^*(z)}{1 + S_1(0)} = \frac{z(1 - \alpha_0) + (1 - \alpha_0)}{1 - \alpha_0} = z + 1\,.$$

De modo análogo, podemos provar que $S_n^{(2)}$ satisfaz à relação de recorrência (3.1.6) (Exercício 3.2).

Portanto, para concluir as relações (3.1.4) basta tomarmos

$$4d_{n+1}^{(1)} = (1 - \alpha_{n-2})(1 + \alpha_{n-1}) \quad \text{e} \quad 4d_{n+1}^{(2)} = (1 + \alpha_{n-1})(1 - \alpha_n)\,.$$

■

Os polinômios $R_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, satisfazem a uma propriedade auto-inversiva, ou seja,

$$z^n R_n^{(i)}(1/z) = R_n^{(i)}(z). \tag{3.1.8}$$

Por isso, são chamados de polinômios auto-inversíveis.

De fato, das relações de recorrência (3.1.4), obtemos

$$R_{n+1}^{(i)}(1/z) = \left(\frac{1}{z} + 1\right) R_n^{(i)}(1/z) - 4d_{n+1}^{(i)} \frac{1}{z} R_{n-1}^{(i)}(1/z).$$

Multiplicando ambos os membros por z^{n+1}, temos

$$z^{n+1} R_{n+1}^{(i)}(1/z) = \left(\frac{1}{z} + 1\right) z z^n R_n^{(i)}(1/z) - 4d_{n+1}^{(i)} \frac{1}{z} z^2 z^{n-1} R_{n-1}^{(i)}(1/z),$$

ou seja,

$$z^{n+1} R_{n+1}^{(i)}(1/z) = (z+1) z^n R_n^{(i)}(1/z) - 4d_{n+1}^{(i)} z z^{n-1} R_{n-1}^{(i)}(1/z).$$

Assim, como $z^n R_n^{(i)}(1/z)$ satisfaz à mesma relação de recorrência de três termos que $R_n^{(i)}$ e com as mesmas condições iniciais, então eles são idênticos. ■

Além desses resultados, podemos mostrar que os polinômios $R_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, satisfazem a relações de L-ortogonalidade.

Teorema 3.3. *Os polinômios mônicos $R_n^{(i)}(z)$, $i = 1, 2$, satisfazem às relações de L-ortogonalidade*

$$\int_C z^{-n+s} R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\psi(z) = 0, \qquad 0 \le s \le n-1 \tag{3.1.9}$$

e

$$\int_C z^{-n+s} R_n^{(2)}(z)(z-1) d\psi(z) = 0, \qquad 0 \le s \le n-1. \tag{3.1.10}$$

Demonstração: De (3.1.2) e (1.5.57), temos

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-(n+1)+s} R_n^{(2)}(z)(z-1) d\psi(z) = 0, \quad 1 \le s \le n,$$

que equivale a (3.1.10).

Para mostrar (3.1.9), novamente de (1.5.57) obtemos

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(1)}(z) \frac{z-1}{z-1} d\psi(z) = 0, \qquad 1 \le s \le n-1, \tag{3.1.11}$$

que é equivalente a

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n} P_{n,s}(z) R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\psi(z) = 0, \quad 1 \le s \le n-1, \tag{3.1.12}$$

onde $P_{n,s}(z) = (z-1)z^{s-1}$, $s = 1, 2, \cdots, n-1$.

Mostremos que, se tomarmos $P_{n,n}(z) = z + z^{n-1}$, então a relação (3.1.12) também vale para $s = n$. De (3.1.11),

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\psi(z) = \int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(1)}(z) \frac{1}{z-1} d\psi(z), \quad 1 \le s \le n-1.$$

Substituindo z por $1/z$ no lado direito da expressão anterior, usando a propriedade de simetria da medida e a propriedade auto-inversiva de $R_n^{(1)}$, obtemos

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n} [z^s + z^{n-s}] R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\psi(z) = 0, \quad 1 \le s \le n-1.$$

Assim, $P_{n,n}$ é obtida fazendo $s = 1$ na expressão $z^s + z^{n-s}$.

Podemos verificar que o conjunto de polinômios $P_{n,s}$, $s = 1, 2, \cdots, n$, de grau $\leq n-1$, forma um conjunto linearmente independente. Em particular, para cada monômio z^s, $0 \leq s \leq n-1$, temos uma única combinação linear do tipo $z^s = d_1^{(s)} P_{n,1}(z) + d_2^{(s)} P_{n,2}(z) + \cdots + d_{n-1}^{(s)} P_{n,n-1}(z) + \frac{1}{2} P_{n,n}(z)$. Consequentemente de (3.1.12) segue o resultado (3.1.9). ∎

3.1.2 Polinômios ortogonais e polinômios para-ortogonais reais

Podemos relacionar os polinômios $R_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, definidos por (3.1.1) e (3.1.2), com polinômios ortogonais em $[-1, 1]$ através da transformação

$$x = x(z) = \frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2}), \tag{3.1.13}$$

inicialmente estudada por Delsarte e Genin em [17] (ver, também, Sri Ranga [43]). Note que, como $z = e^{i\theta}$, podemos escrever

$$x = \cos(\theta/2), \quad \text{com} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

A relação (3.1.13) é uma transformação do círculo unitário no intervalo $[-1, 1]$. Utilizando-a é possível relacionar polinômios para-ortogonais no círculo unitário com polinômios ortogonais em $[-1, 1]$. Os resultados a seguir, encontrados em Berti e Sri Ranga [8], serão necessários para descrevê-los.

Primeiramente, consideremos ϕ_1 e ϕ_2 duas medidas simétricas no intervalo $[-1, 1]$ satisfazendo

$$d\phi_2(x) = (1 - x^2) d\phi_1(x). \tag{3.1.14}$$

Vamos utilizar a notação $\{P_n^{\phi_i}\}_{n=0}^{\infty}$ para a sequência de polinômios ortogonais com relação à medida ϕ_i, $i = 1, 2$.

Se conhecermos a sequência de polinômios ortogonais com relação a uma das medidas, por exemplo ϕ_1, podemos obter informações sobre a sequência de polinômios ortogonais com relação à outra medida, ϕ_2.

A fórmula de Christoffel (ver [48, pag. 29]) fornece a seguinte representação para os polinômios $P_n^{\phi_2}$ como combinação dos polinômios $P_n^{\phi_1}$ (Exercício 3.3):

$$(1 - x^2) P_n^{\phi_2}(x) = \frac{-1}{P_n^{\phi_1}(1)} \left\{ P_n^{\phi_1}(1) P_{n+2}^{\phi_1}(x) - P_{n+2}^{\phi_1}(1) P_n^{\phi_1}(x) \right\}. \tag{3.1.15}$$

Para obtermos uma representação para os polinômios $P_n^{\phi_1}$ em termos de $P_n^{\phi_2}$, vamos expressar $P_n^{\phi_1}$ como combinação linear de $P_j^{\phi_2}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. Assim,

$$P_n^{\phi_1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{d}_{n-k} P_{n-k}^{\phi_2}(x).$$

Utilizando a ortogonalidade e a simetria desses polinômios, podemos escrever a expressão anterior como (Exercício 3.4)

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_2}(x) + \tilde{d}_{n-2} P_{n-2}^{\phi_2}(x), \quad n \geq 2, \tag{3.1.16}$$

onde

$$\tilde{d}_{n-2} = \frac{\int_{-1}^{1} P_n^{\phi_1}(x) P_{n-2}^{\phi_2}(x) d\phi_2(x)}{\int_{-1}^{1} (P_{n-2}^{\phi_2}(x))^2 d\phi_2(x)} = -\frac{\int_{-1}^{1} (P_n^{\phi_1}(x))^2 d\phi_1(x)}{\int_{-1}^{1} (P_{n-2}^{\phi_2}(x))^2 d\phi_2(x)}, \quad n \geq 2\,.$$

Obtemos, então, as seguintes relações entre os coeficientes $\tilde{d}_n$, $\alpha_n^{\phi_1}$ e $\alpha_n^{\phi_2}$ (Exercício 3.5):

$$\frac{\tilde{d}_{n-1}}{\tilde{d}_{n-2}} = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_2}}, \quad n \geq 2 \tag{3.1.17}$$

e

$$\tilde{d}_{n-1} - \tilde{d}_{n-2} = \alpha_{n+1}^{\phi_2} - \alpha_{n+1}^{\phi_1}, \quad n \geq 2\,, \tag{3.1.18}$$

com $\tilde{d}_0 = -\dfrac{\alpha_3^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_1^{\phi_2}} = \alpha_2^{\phi_2} - \alpha_2^{\phi_1}$.

Consideremos, agora, a sequência de números reais $\{l_n\}$ definida da seguinte forma:

$$(l_{n+1} - 1) = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_2}}(l_{n-1} - 1)\,, \quad n \geq 2\,, \tag{3.1.19}$$

com $l_0 = 1$, $(l_1 - 1) = -2\alpha_2^{\phi_1}$ e $(l_2 - 1) = \dfrac{-2\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_1^{\phi_2}}$.

Pode-se verificar facilmente (Exercício 3.6) que a sequência $\{l_n\}$ satisfaz às relações

$$\begin{aligned} \frac{(l_{n+1} - 1)}{(l_{n-1} - 1)} &= \frac{\tilde{d}_{n-1}}{\tilde{d}_{n-2}}, \quad n \geq 2, \\ (l_{n+1} - 1)(l_n - 1) &= -4\tilde{d}_{n-1}\,, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Além dessas duas, os elementos da sequência $\{l_n\}$ satisfazem (Exercício 3.7)

$$\frac{(l_{2n+1} - 1)}{2} = -\frac{\alpha_{2n+2}^{\phi_1}\alpha_{2n}^{\phi_1}\ldots\alpha_2^{\phi_1}}{\alpha_{2n}^{\phi_2}\alpha_{2n-2}^{\phi_2}\ldots\alpha_2^{\phi_2}}, \quad \frac{(l_{2n} - 1)}{2} = -\frac{\alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\ldots\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_2}\alpha_{2n-3}^{\phi_2}\ldots\alpha_1^{\phi_2}} \tag{3.1.20}$$

e

$$\frac{(l_{2n-1} + 1)}{2} = \frac{\alpha_{2n-1}^{\phi_2}\alpha_{2n-3}^{\phi_2}\ldots\alpha_1^{\phi_2}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\alpha_{2n-3}^{\phi_1}\ldots\alpha_1^{\phi_1}}, \quad \frac{(l_{2n} + 1)}{2} = \frac{\alpha_{2n}^{\phi_2}\alpha_{2n-2}^{\phi_2}\ldots\alpha_2^{\phi_2}}{\alpha_{2n}^{\phi_1}\alpha_{2n-2}^{\phi_1}\ldots\alpha_2^{\phi_1}}\,. \tag{3.1.21}$$

Agora, se ϕ_1 e ϕ_2 satisfazem (3.1.14), pode-se demonstrar (veja Exercício 3.8) que existe uma sequência de números reais $\{l_n\}$ tal que, para $n \geq 1$,

$$\alpha_{n+1}^{\phi_1} = -\frac{1}{4}(l_n - 1)(l_{n-1} + 1)\,, \quad \alpha_{n+1}^{\phi_2} = -\frac{1}{4}(l_n - 1)(l_{n+1} + 1) \tag{3.1.22}$$

e

$$\tilde{d}_{n-1} = -\frac{1}{4}(l_n - 1)(l_{n+1} - 1)\,, \quad n \geq 1\,, \tag{3.1.23}$$

com $l_0 = 1$ e $l_1 = 1 - 2\alpha_2^{\phi_2}$.

De posse desses resultados, podemos demonstrar o teorema a seguir, que fornece uma relação entre os polinômios $P_n^{\phi_i}$ e $R_n^{(i)}$ $(i = 1, 2)$, ou melhor, uma relação entre as respectivas medidas e, também, entre as respectivas fórmulas de recorrência (veja [10, 51]).

Teorema 3.4. *(i) Seja ψ uma medida positiva no círculo unitário tal que os polinômios de Szegő S_n, $n \geq 0$, são reais. Sejam*

$$4\alpha_{n+1}^{\phi_1} = (1-\alpha_{n-2})(1+\alpha_{n-1}) > 0 \quad e \quad 4\alpha_{n+1}^{\phi_2} = (1+\alpha_{n-1})(1-\alpha_n) > 0, \quad n \geq 1,$$

e as medidas positivas ϕ_1 e ϕ_2 definidas por

$$d\phi_1(x(z)) = -d\psi(z) \;\; e \;\; d\phi_2(x(z)) = -(1-x^2)d\psi(z)\,,$$

com $x(z) = (1/2)(z^{1/2} + z^{-1/2})$, cujos suportes estão contidos em $[-1,1]$. Então, para $i = 1, 2$, as sequências de polinômios $\{P_n^{\phi_i}\}_{n=0}^{\infty}$, definidas por

$$P_n^{\phi_i}(x) = (4z)^{-n/2} R_n^{(i)}(z),\; n \geq 0, \tag{3.1.24}$$

são sequências de polinômios ortogonais mônicos com relação à medida ϕ_i e satisfazem às relações de recorrência

$$P_{n+1}^{\phi_i}(x) = xP_n^{\phi_i}(x) - \alpha_{n+1}^{\phi_i} P_{n-1}^{\phi_i}(x)\,, \quad n \geq 1\,, \tag{3.1.25}$$

com as condições iniciais $P_0^{\phi_i}(x) = 1$, $P_1^{\phi_i}(x) = x$.
(ii) Reciprocamente, sejam ϕ_1 e ϕ_2 duas medidas positivas definidas em $[-1,1]$, tais que $d\phi_2(x) = (1-x^2)d\phi_1(x)$. Suponhamos que os respectivos polinômios ortogonais mônicos $P_n^{\phi_1}$ e $P_n^{\phi_2}$ satisfaçam

$$P_{n+1}^{\phi_i}(x) = xP_n^{\phi_i}(x) - \alpha_{n+1}^{\phi_i} P_{n-1}^{\phi_i}(x)\,, n \geq 1.$$

Então, os coeficientes de reflexão α_n dos polinômios de Szegő S_n, associados à medida positiva $d\psi(z) = -d\phi_1(x(z))$, satisfazem

$$\alpha_{n-1} = -1 + \frac{4\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{1-\alpha_{n-2}} \;\; e \;\; \alpha_n = 1 - \frac{4\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{1+\alpha_{n-1}}\,,\; n \geq 1\,,$$

com $\alpha_{-1} = 1$. Explicitamente, podem ser dados por

$$\alpha_{2n-2} = 1 - 2\frac{\alpha_{2n-1}^{\phi_2}\alpha_{2n-3}^{\phi_2}\ldots\alpha_3^{\phi_2}\alpha_1^{\phi_2}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\alpha_{2n-3}^{\phi_1}\ldots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}} \;\; e \;\; \alpha_{2n-1} = 1 - 2\frac{\alpha_{2n}^{\phi_2}\alpha_{2n-2}^{\phi_2}\ldots\alpha_2^{\phi_2}}{\alpha_{2n}^{\phi_1}\alpha_{2n-2}^{\phi_1}\ldots\alpha_2^{\phi_1}}\,, \;\; n \geq 1\,,$$

com

$$R_n^{(i)}(z) = (4z)^{n/2} P_n^{\phi_i}(x(z)), \quad i = 1, 2.$$

Demonstração: (i) Multiplicando ambos os lados de (3.1.4) por $(4z)^{-(n+1)/2}$, obtemos

$$(4z)^{-(n+1)/2} R_{n+1}^{(i)}(z) = (z+1)(4z)^{-(n+1)/2} R_n^{(i)}(z) - 4\tilde{d}_{n+1}^{(i)} z (4z)^{-(n+1)/2} R_{n-1}^{(i)}(z)\,,$$

com $R_0^{(i)}(z) = 1$ e $(4z)^{-1/2} R_1^{(i)}(z) = (4z)^{-1/2}(z+1)$, para $i = 1, 2$.

Usando o fato de que $(z+1)(4z)^{-1/2} = (1/2)(z^{1/2} + z^{-1/2}) = x(z) = x$ e lembrando que $(4z)^{-n/2} R_n^{(i)}(z) = P_n^{\phi_i}(x)$, obtemos

$$P_{n+1}^{\phi_i}(x) = xP_n^{\phi_i}(x) - \alpha_{n+1}^{\phi_i} P_{n-1}^{\phi_i}(x)\,,$$

com $P_0^{\phi_i}(x) = 1$ e $P_1^{\phi_i}(x) = x$.

Portanto, temos que $P_n^{\phi_i}(x) = (4z)^{-n/2} R_n^{(i)}(z)$ satisfazem às relações de recorrência de três termos (3.1.25).

Observemos, agora, que as sequências $\{g_n^{\phi_1} = (1+\alpha_{n-1})/2\}$ e $\{g_n^{\phi_2} = (1-\alpha_n)/2\}$ satisfazem

$$(1-g_{n-1}^{\phi_1})g_n^{\phi_1} = \left(1-\frac{1}{2}-\frac{\alpha_{n-2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha_{n-1}}{2}\right) = \frac{1}{4}(1-\alpha_{n-2})(1+\alpha_{n-1}) = \alpha_{n+1}^{\phi_1}$$

e

$$(1-g_{n-1}^{\phi_2})g_n^{\phi_2} = \left(1-\frac{1}{2}+\frac{\alpha_{n-1}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha_n}{2}\right) = \frac{1}{4}(1+\alpha_{n-1})(1-\alpha_n) = \alpha_{n+1}^{\phi_2}\,.$$

Assim, concluímos que $\{\alpha_{n+1}^{\phi_1}\}$ e $\{\alpha_{n+1}^{\phi_2}\}$ são sequências encadeadas com sequências de parâmetros dadas, respectivamente, por $\{g_n^{\phi_1}\}$ e $\{g_n^{\phi_2}\}$.

Dessa forma, concluímos que os zeros de $P_n^{\phi_i}$, $i = 1, 2$, estão em $(-1, 1)$ e, pelo Teorema de Favard (Teorema 1.12), formam uma sequência de polinômios ortogonais.

Para obtermos as medidas ϕ_1 e ϕ_2, basta tomarmos $d\phi_1(x) = -d\psi(z)$ e lembrarmos que, para $s = 0, 1, ..., n-1$,

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(2)}(z)(z-1)d\psi(z) &= \int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(2)}(z)\frac{z}{z-1}\frac{z-1}{z}(z-1)d\psi(z) \\ &= \int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(2)}(z)\frac{z}{z-1}d\phi_2(z)\,, \end{aligned}$$

onde

$$d\phi_2(z) = \frac{(z-1)^2}{z}d\psi(z) = -(1-x^2)d\psi(z)\,.$$

Fazendo $l_{2n-1} = -\alpha_{2n-2}$ e $l_{2n} = -\alpha_{2n-1}$ nas equações (3.1.21), obtemos a segunda parte do item (ii).

Para a demonstração da primeira parte em (ii), tomamos $l_n = -\alpha_{n-1}$ em (3.1.22). ■

3.2 Polinômios para-ortogonais complexos

Esta seção será dedicada às propriedades de sequências de polinômios complexos $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$, que satisfazem a uma relação de recorrência de três termos na forma (2), ou seja,

$$R_{n+1}(z) = [(1+ic_{n+1})z + (1-ic_{n+1})]\,R_n(z) - 4d_{n+1}\,z\,R_{n-1}(z),\ n \geq 1,$$

com $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = (1+ic_1)z + (1-ic_1)$, onde $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de números reais e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada positiva.

G. Szegő mostrou que polinômios ortogonais reais no círculo unitário estão associados a polinômios ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ através da transformação $2x = z + z^{-1}$. Delsarte e Genin [17] mostraram como polinômios ortogonais reais no círculo unitário podem ser associados a polinômios ortogonais simétricos em $[-1, 1]$ através da transformação $2x = z^{1/2} + z^{-1/2}$ (veja Seção 3.1.2).

Seja $\psi(z) = \psi(e^{i\theta})$ uma medida de probabilidade no círculo unitário $\mathcal{C} = \{z = e^{i\theta}\colon\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, isto é, $\mu_0 = 1$. Vimos que a sequência de polinômios ortogonais mônicos no círculo unitário $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, com relação à medida ψ, satisfaz

$$\int_{\mathcal{C}} \overline{S_m(z)} S_n(z) d\psi(z) = \int_0^{2\pi} \overline{S_m(e^{i\theta})} S_n(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}) \ = \ \delta_{mn}\kappa_n^2,$$

onde δ_{mn} é o delta de Kronecker.

Denotemos por $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ os polinômios ortonormais no círculo unitário dados por $s_n(z) = S_n(z)/\kappa_n$, $n \geq 0$.

Novamente, vamos considerar os coeficientes de reflexão (coeficientes de Verblunsky) dados por

$$\overline{\alpha}_n = -S_{n+1}(0), \quad n \geq 0, \tag{3.2.26}$$

e, também, as relações de recorrência (1.5.52) e (1.5.45), ou seja,

$$\left.\begin{aligned} S_n(z) &= zS_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1}\, S_{n-1}^*(z), \\ S_n(z) &= (1-|\alpha_{n-1}|^2) z S_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1} S_n^*(z), \end{aligned}\right. \quad n \geq 1, \tag{3.2.27}$$

onde $S_n^*(z) = z^n \overline{S_n(1/\bar{z})}$ e $|\alpha_n| < 1,\ n \geq 0$.

Agora, consideremos $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| = 1$ e

$$\tau_n(w) = \frac{S_n(w)}{S_n^*(w)}, \quad n \geq 0. \tag{3.2.28}$$

A fórmula de Christoffel-Darboux (1.4.14) de ordem $n \geq 0$ associada à sequência $\{S_n\}$ de polinômios de Szegő é dada por

$$K_n(z,\, w) = \sum_{j=0}^{n} \overline{s_j(w)}\, s_j(z) = \frac{\overline{s_{n+1}^*(w)}\, s_{n+1}^*(z) - \overline{s_{n+1}(w)}\, s_{n+1}(z)}{1 - \bar{w}\, z}.$$

Veja, por exemplo, [39, Teorema 2.2.7], onde $K_n(z,\, w)$ são chamados de polinômios núcleo CD.

Consideremos, também, a sequência de polinômios $\{P_n(w;\, z)\}_{n=0}^{\infty}$ na variável z dada por

$$P_n(w;\, z) = \frac{\kappa_{n+1}^2\, \overline{w}}{\overline{S_{n+1}(w)}} \frac{K_n(z,\, w)}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n}, \quad n \geq 0.$$

É fácil verificar que $P_n(w;\, z)$ é um polinômios mônico de grau n em z, que pode ser escrito como

$$P_n(w;\, z) = \frac{1}{z - w} \frac{S_{n+1}(z) - \tau_{n+1}(w) S_{n+1}^*(z)}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n}, \quad n \geq 0. \tag{3.2.29}$$

Deixamos a demonstração desse fato como exercício para o leitor (Exercício 3.9). Chamaremos os polinômios $P_n(w;\, z)$ de polinômios núcleo de grau n em z, no ponto w.

Como $|w| = 1$, então facilmente mostra-se que $|\tau_n(w)| = 1$ para $n \geq 0$. Assim, como em (1.5.56), os polinômios $S_{n+1}(z) - \tau_{n+1}(w) S_{n+1}^*(z)$ são polinômios para-ortogonais associados a S_{n+1}.

Sabemos que $S_{n+1}(z) - \tau_{n+1}(w) S_{n+1}^*(z)$ tem seus $n+1$ zeros no círculo unitário $|z| = 1$. Em particular, w é um de seus zeros. Consequentemente, o polinômio

$P_n(w;\, z)$ tem todos os zeros simples no círculo unitário $|z| = 1$. Entretanto, nenhum zero de $P_n(w;\, z)$ é igual a w (Exercício 3.9).

Vimos, na Seção 3.1 que, para medidas ψ no círculo unitário que satisfazem à simetria $d\psi(1/z) = -d\psi(z)$, os polinômios ortogonais no círculo unitário e os coeficientes de reflexão são reais. Delsarte e Genin [17] consideraram os polinômios para-ortogonais

$$(z-1)R_n(z) = zS_n(z) - S_n^*(z), \quad n \geq 1, \tag{3.2.30}$$

que satisfazem às relações de recorrência da forma

$$R_{n+1}(z) = (z+1)R_n(z) - 4\, d_{n+1} z R_{n-1}(z), \quad n \geq 1,$$

com $R_0(z) = 1$, $R_1(z) = z + 1$ e

$$d_{n+1} = \frac{1}{4}(1 + \alpha_{n-1})(1 - \alpha_n), \quad n \geq 1.$$

Estudaremos, nas próximas seções, como esses resultados podem ser estendidos quando a medida ψ não satisfaz $d\psi(1/z) = -d\psi(z)$ e quando os coeficientes de Verblunsky, dados por (3.2.26), são complexos.

3.2.1 Relação de recorrência de três termos

Apresentaremos, agora, sequências de polinômios complexos $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$, que satisfazem a uma relação de recorrência de três termos da forma (2),

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]\, R_n(z) - 4d_{n+1}\, z\, R_{n-1}(z), \;\; n \geq 1,$$

com $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$, onde $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de números reais e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada positiva.

Em [15] foram obtidos muitos resultados interessantes sobre a generalização dos polinômios $(z-1)R_n(z)$ com coeficientes de Verblunsky complexos, como veremos a seguir.

Primeiramente, de (3.2.27) notamos que, para $\{\tau_n(w)\}$ definidos em (3.2.28), as seguintes relações valem

$$\tau_{n+1}(w) = \frac{w\tau_n(w) - \overline{\alpha}_n}{1 - w\tau_n(w)\alpha_n}, \quad w\tau_n(w) = \frac{\tau_{n+1}(w) + \overline{\alpha}_n}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n}, \quad n \geq 0. \tag{3.2.31}$$

Além disso,

$$[1 - w\tau_n(w)\alpha_n]\,[1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n] = 1 - |\alpha_n|^2, \quad n \geq 0. \tag{3.2.32}$$

Deixamos a demonstração desse fato para o leitor (Exercício 3.10).

Das relações (3.2.31), (3.2.32) e (3.2.27), temos

$$P_n(w;\, z) = \frac{zS_n(z) - w\tau_n(w)S_n^*(z)}{z - w}, \quad n \geq 0, \tag{3.2.33}$$

(veja Exercício 3.11).

Comparando a relação (3.2.33) com (1.5.68), concluímos que

$$(z - w)P_n(w;\, z) = zS_n(z) - w\tau_n(w)S_n^*(z), \quad n \geq 0,$$

são polinômios para-ortogonais. As conexões entre polinômios núcleo CD e polinômios para-ortogonais foram observadas em [22].

Mostraremos, agora, que os polinômios núcleo mônicos $P_n(w;\, z)$ satisfazem à relação de recorrência (1).

Teorema 3.5. *A sequência de polinômios núcleo mônicos* $\{P_n(w;\, z)\}$ *satisfaz à relação de recorrência de três termos*

$$P_{n+1}(w;\, z) = (z + b_{n+1}(w))P_n(w;\, z) - a_{n+1}(w)zP_{n-1}(w;\, z), \quad n \geq 1,$$

com $P_0(w;\, z) = 1$ *e* $P_1(w;\, z) = z + b_1(w)$, *onde*

$$b_n(w) = \frac{\tau_n(w)}{\tau_{n-1}(w)} \quad e \quad a_{n+1}(w) = (1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1})\,(1 - \overline{w\tau_n(w)\alpha_n}\,)\,w, \quad n \geq 1. \tag{3.2.34}$$

Demonstração: Para $n \geq 1$, consideramos o polinômio mônico q_{n+1} de grau $n+1$ dado por

$$q_{n+1}(z) = P_{n+1}(w;\, z) + u_n(1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1})\, z\, P_{n-1}(w;\, z),$$

onde u_n é, por enquanto, uma constante desconhecida. Usando (3.2.29) e (3.2.33), obtemos

$$(z - w)q_{n+1}(z) = \big[zS_{n+1}(z) - w\tau_{n+1}(w)S^*_{n+1}(z)\big] + u_n z\big[S_n(z) - \tau_n(w)S^*_n(z)\big].$$

De (3.2.27), temos

$$\begin{aligned} (z - w)q_{n+1}(z) \quad &= \quad z\big[zS_n(z) - [\tau_n(w)u_n + \overline{\alpha}_n]S^*_n(z)\big] \\ &\quad +[u_n + w\tau_{n+1}(w)\alpha_n]\big[zS_n(z) - \frac{w\tau_{n+1}(w)}{u_n + w\tau_{n+1}(w)\alpha_n}S^*_n(z)\big]. \end{aligned}$$

Escolhendo, agora, $u_n = (1 - \overline{w\tau_n(w)\,\alpha_n}\,)w$, a relação anterior reduz-se a

$$\begin{aligned} (z - w)q_{n+1}(z) \quad &= \quad z\big[zS_n(z) - w\tau_n(w)S^*_n(z)\big] \\ &\quad + \frac{\tau_{n+1}(w)}{\tau_n(w)}\big[zS_n(z) - w\tau_n(w)S^*_n(z)\big]. \end{aligned}$$

Então, $q_{n+1}(z) = (z+b_{n+1}(w))P_n(w;\, z)$, com $b_{n+1}(w) = \dfrac{\tau_{n+1}(w)}{\tau_n(w)}$, o que completa a prova do resultado. ■

Usando (3.2.32), podemos ainda escrever os coeficientes da relação de recorrência $a_n(w)$ e $b_n(w)$, dados em (3.2.34), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} b_n(w) \quad &= \quad \frac{1 - \overline{w\tau_{n-1}(w)\alpha_{n-1}}}{1 - w\tau_{n-1}(w)\alpha_{n-1}}\, w = \frac{1 + \tau_n(w)\,\alpha_{n-1}}{1 + \overline{\overline{\tau_n(w)\alpha_{n-1}}}}\, w, \\ a_{n+1}(w) \quad &= \quad \frac{1 - \overline{w\tau_n(w)\alpha_n}}{1 - w\tau_{n-1}(w)\alpha_{n-1}}\,(1 - |\alpha_{n-1}|^2)w, \qquad n \geq 1. \\ &= \quad \frac{1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1}}{1 + \overline{\overline{\tau_{n+1}(w)\alpha_n}}}\,(1 - |\alpha_n|^2)w, \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

A partir de agora vamos considerar $w = 1$ e, então, considerar apenas os polinômios $\{P_n(1;\, z)\}$, com $\tau_n(1) = \tau_n$, isto é,

$$P_n(1;\, z) = \frac{zS_n(z) - \tau_n(1)S^*_n(z)}{z - 1}, \quad n \geq 0.$$

Do Teorema 3.5, vemos facilmente que os polinômios $\{P_n(1;\, z)\}$ satisfazem

$$P_{n+1}(1;\, z) = (z + b_{n+1})P_n(1;\, z) - a_{n+1} z P_{n-1}(1;\, z), \quad n \geq 1, \tag{3.2.36}$$

onde $P_0(1;\, z) = 1$ e $P_1(1;\, z) = z + b_1$, com

$$b_n = \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} \quad e \quad a_{n+1} = (1 + \tau_n \alpha_{n-1})\,(1 - \overline{\tau}_n \overline{\alpha}_n), \quad n \geq 1,$$

onde $\tau_j = \tau_j(1)$ para $j \geq 0$. De (3.2.35), podemos escrever

$$\left.\begin{aligned} b_n &= \frac{1 - \overline{\tau}_{n-1}\overline{\alpha}_{n-1}}{1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}} = \frac{1 + \tau_n \alpha_{n-1}}{1 + \overline{\tau}_n \overline{\alpha}_{n-1}}, \\ a_{n+1} &= \frac{1 - \overline{\tau}_n \overline{\alpha}_n}{1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}}\,(1 - |\alpha_{n-1}|^2) = \frac{1 + \tau_n \alpha_{n-1}}{1 + \overline{\tau}_{n+1}\overline{\alpha}_n}\,(1 - |\alpha_n|^2), \end{aligned}\right\} \quad n \geq 1. \tag{3.2.37}$$

Agora, consideramos os polinômios R_n de grau n dados por $R_0(z) = P_0(1;\, z)$ e

$$R_n(z) = \frac{\prod_{j=0}^{n-1}\big(1 - \tau_j \alpha_j\big)}{\prod_{j=0}^{n-1}\big(1 - \mathcal{R}e(\tau_j \alpha_j)\big)}\, P_n(1;\, z), \quad n \geq 1.$$

Das propriedades dos polinômios $P_n(w;\, z)$, os polinômios R_n tem n zeros simples em $|z| = 1$ e nenhum desses zeros é igual a 1.

Podemos, então, mostrar que para os polinômios $(z-1)R_n(z)$, dados também por

$$(z-1)R_n(z) = \frac{\prod_{j=0}^{n-1}\big[1 - \tau_j \alpha_j\big]}{\prod_{j=0}^{n-1}\big[1 - \mathcal{R}e(\tau_j \alpha_j)\big]}\Big[z S_n(z) - \tau_n S_n^*(z)\Big], \quad n \geq 0,$$

onde $\tau_n = S_n(1)/S_n^*(1)$, vale o seguinte resultado.

Teorema 3.6. *Os polinômios R_n satisfazem à relação de recorrência de três termos*

$$R_{n+1}(z) = \big[(1 + i c_{n+1})z + (1 - i c_{n+1})\big] R_n(z) - 4\, d_{n+1} z R_{n-1}(z), \tag{3.2.38}$$

com $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$, onde as sequências de números reais $\{c_n\}$ e $\{d_{n+1}\}$ são dadas por

$$\left.\begin{aligned} c_n &= \frac{-\mathcal{I}m(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})}{1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})} = i\,\frac{\tau_n - \tau_{n-1}}{\tau_n + \tau_{n-1}}, \\ d_{n+1} &= \frac{1}{4}\frac{\big(1 - |\tau_{n-1}\alpha_{n-1}|^2\big)\,\big|1 - \tau_n\, \alpha_n\big|^2}{\big(1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})\big)\big(1 - \mathcal{R}e(\tau_n \alpha_n)\big)}, \end{aligned}\right\} \quad n \geq 1.$$

Além disso, $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$, onde $d_{1,n} = d_{n+1}$, $n \geq 1$, é uma sequência encadeada com sequência de parâmetros $\{g_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$g_{1,n} = \frac{1}{2}\frac{\big|1 - \tau_n \alpha_n\big|^2}{\big(1 - \mathcal{R}e(\tau_n \alpha_n)\big)}, \quad n \geq 0.$$

Demonstração: Primeiramente, consideramos os polinômios $\{\tilde{R}_n\}$ dados por $\tilde{R}_0(z) = P_0(1;\, z)$ e

$$\tilde{R}_n(z) = (1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1})(1 - \tau_{n-2}\alpha_{n-2})\cdots(1 - \tau_0 \alpha_0)\, P_n(1;\, z), \quad n \geq 1.$$

Então, de (3.2.36) e (3.2.37) para $n \geq 1$ obtemos

$$\tilde{R}_{n+1}(z) = [(1-\tau_n\alpha_n)z + (1-\overline{\tau}_n\overline{\alpha}_n)]\tilde{R}_n(z) - (1-|\alpha_{n-1}|^2)\,|1-\tau_n\,\alpha_n|^2 z\tilde{R}_{n-1}(z),$$

com $\tilde{R}_1(z) = (1-\tau_0\alpha_0)z + (1-\overline{\tau}_0\overline{\alpha}_0)$.

Como $|\tau_n| = 1$ para $n \geq 0$, observe que $(1-|\alpha_{n-1}|^2) = (1-|\tau_{n-1}\alpha_{n-1}|^2)$, $n \geq 1$.

Cálculos diretos provam a relação de recorrência do teorema se tomarmos $R_0(z) = \tilde{R}_0(z)$ e

$$R_n(z) = \frac{1}{(1-\mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1}))(1-\mathcal{R}e(\tau_{n-2}\alpha_{n-2}))\cdots(1-\mathcal{R}e(\tau_0\alpha_0))}\,\tilde{R}_n(z),\ \ n \geq 1.$$

Finalmente, não é difícil ver que $(1-g_{1,n-1})g_{1,n} = d_{1,n}$ para $n \geq 1$. Além disso, como $|\alpha_n| < 1$ para $n \geq 0$, segue também que $0 < g_{1,n} < 1$ para $n \geq 0$. O que completa a prova do teorema. ■

Os polinômios R_n também satisfazem a L-ortogonalidade com relação à medida ψ definida no Capítulo 2, ou seja,

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n+j} R_n(z)\,(1-z)d\psi(z) = 0, \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

A demonstração é análoga ao caso real, veja (3.1.10) no Teorema 3.3.

Usando (3.2.31) e (3.2.32), os coeficientes c_n, d_n e $g_{1,n}$ no Teorema 3.6 também podem ser dados por

$$c_n = \frac{-\mathcal{I}m(\tau_n\alpha_{n-1})}{1+\mathcal{R}e(\tau_n\alpha_{n-1})} \quad e \quad d_{n+1} = \frac{1}{4}\frac{\left|1+\tau_n\,\alpha_{n-1}\right|^2\left(1-|\tau_{n+1}\alpha_n|^2\right)}{\left(1+\mathcal{R}e(\tau_n\alpha_{n-1})\right)\left(1+\mathcal{R}e(\tau_{n+1}\alpha_n)\right)},$$

para $n \geq 1$, e

$$g_{1,n} = \frac{1}{2}\frac{\left(1-|\tau_{n+1}\alpha_n|^2\right)}{\left(1+\mathcal{R}e(\tau_{n+1}\alpha_n)\right)}, \quad n \geq 0.$$

De (3.2.36) e (3.2.37), observe também que $b_n = \dfrac{1-ic_n}{1+ic_n}$, $n \geq 1$, e

$$\tau_n = b_1 b_2 \cdots b_n = \prod_{j=1}^{n} \frac{1-\overline{\tau}_{j-1}\overline{\alpha}_{j-1}}{1-\tau_{j-1}\alpha_{j-1}} = \prod_{j=1}^{n}\frac{1-ic_j}{1+ic_j}, \quad n \geq 1. \tag{3.2.39}$$

3.2.2 Zeros dos polinômios R_n

Nesta seção, mostraremos que os polinômios R_n, $n \geq 1$, definidos pela relação de recorrência de três termos (2), têm seus n zeros simples e no círculo unitário. Além disso, se denotamos os zeros de R_n por $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, vale o seguinte entrelaçamento:

$$0 < \theta_{n+1,1} < \theta_{n,1} < \theta_{n+1,2} < \cdots < \theta_{n+1,n} < \theta_{n,n} < \theta_{n+1,n+1} < 2\pi, \quad n \geq 1.$$

Vamos considerar novamente a transformação

$$x(z) = \frac{1}{2}\left(z^{1/2} + z^{-1/2}\right), \tag{3.2.40}$$

com $z = e^{i\theta}$, $x \in [-1, 1]$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Desta forma, podemos escrever

$$\begin{array}{rcccl} \frac{1}{2}\left(z^{1/2} + z^{-1/2}\right) & = & cos(\theta/2) & = & x, \\ \frac{1}{2}\left(z^{1/2} - z^{-1/2}\right) & = & i\ sen(\theta/2) & = & i\sqrt{1-x^2}. \end{array}$$

Multiplicando ambos os lados da relação de recorrência (2) por $(4z)^{-(n+1)/2}$, obtemos

$$(4z)^{-(n+1)/2} R_{n+1}(z) = (4z)^{-1/2}[(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})](4z)^{-n/2} R_n(z)$$
$$-4\, d_{n+1}\, z (4z)^{-1} (4z)^{-(n-1)/2} R_{n-1}(z), \ n \geq 1. \quad (3.2.41)$$

Consideremos as funções G_n definidas no intervalo $[-1, 1]$ por

$$G_n(x) = (4z)^{-n/2} R_n(z), \quad n \geq 0. \quad (3.2.42)$$

Veja [18] para maiores informações sobre as funções G_n.

Considerando a transformação (3.2.40), claramente vemos que os zeros da função G_n em $[-1, 1]$ são $x_{n,j} = \cos(\theta_{n,j}/2)$, onde $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Como R_n é um polinômio de grau n, ele tem no máximo n zeros no círculo unitário. Assim a função G_n tem no máximo n zeros no intervalo $[-1, 1]$.

De (3.2.41) e (3.2.42), vemos que as funções G_n satisfazem

$$\begin{array}{rcl} G_{n+1}(x) & = & \frac{1}{2} z^{-1/2} \left[(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})\right] G_n(x) - d_{n+1}\, G_{n-1}(x) \\ & = & \frac{1}{2} z^{-1/2} \left[(z + 1) + ic_{n+1}(z - 1)\right] G_n(x) - d_{n+1}\, G_{n-1}(x) \\ & = & \left[\frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2}) + ic_{n+1}\frac{1}{2}(z^{1/2} - z^{-1/2})\right] G_n(x) - d_{n+1}\, G_{n-1}(x) \end{array}$$

para $n \geq 1$ e, então

$$G_{n+1}(x) = \left(x - c_{n+1}\sqrt{1-x^2}\right) G_n(x) - d_{n+1}\, G_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (3.2.43)$$

com as condições iniciais $G_0(x) = 1$ e $G_1(x) = x - c_1\sqrt{1-x^2}$.

Por (3.2.43) verifica-se que as funções G_n são contínuas e deriváveis no intervalo $[-1, 1]$ (Exercício 3.12).

Lema 3.1. *As funções G_n, $n \geq 1$, definidas por* (3.2.42) *têm exatamente n zeros no intervalo* $(-1, 1)$. *Além disso, se $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, são zeros da função G_n ordenados em ordem decrescente, eles satisfazem o entrelaçamento*

$$-1 < x_{n+1,n+1} < x_{n,n} < x_{n+1,n} < \cdots < x_{n+1,2} < x_{n,1} < x_{n+1,1} < 1. \quad (3.2.44)$$

Demonstração: Primeiramente, fazemos $x = 1$ em (3.2.43), ou seja, $G_0(1) = 1$, $G_1(1) = 1$ e

$$G_{n+1}(1) = G_n(1) - d_{n+1}\, G_{n-1}(1).$$

Assim,

$$\frac{G_{n+1}(1)}{G_n(1)} = 1 - d_{n+1}\, \frac{G_{n-1}(1)}{G_n(1)},$$

isolando o coeficientes d_{n+1}, obtemos

$$d_{n+1} = \frac{G_n(1)}{G_{n-1}(1)}\left(1 - \frac{G_{n+1}(1)}{G_n(1)}\right).$$

Como $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada positiva, podemos escrever

$$d_{n+1} = (1 - m_{n-1})m_n, \quad n \geq 1,$$

onde $m_n = 1 - \dfrac{G_{n+1}(1)}{G_n(1)}$. Note que $m_0 = 1 - \dfrac{G_1(1)}{G_0(1)} = 0$. Logo, a sequência $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ é a sequencia minimal de parâmetro para a sequência encadeada $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$. Da definição de sequência de parâmetros, temos $0 < m_n < 1$, ou seja,

$$0 < \frac{G_{n+1}(1)}{G_n(1)} < 1,$$

o que implica que $G_n(1) > 0$, para $n \geq 0$.

Além disso,

$$(-1)^n G_n(-1) = G_n(1) > 0.$$

A demonstração desta última igualdade deixamos a cargo do leitor no Exercício 3.12.

Tomemos, agora, as funções de Christoffel-Darboux, associadas a G_n dadas por

$$W_{n+1}(x) = G'_{n+1}(x)G_n(x) - G'_n(x)G_{n+1}(x), \quad n \geq 0. \tag{3.2.45}$$

Usando (3.2.43), obtemos

$$\begin{aligned} W_{n+1}(x) = &\left[\left(1 + \frac{x\,c_{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\right)G_n(x) + (x - c_{n+1}\sqrt{1-x^2})G'_n(x) - d_{n+1}G'_{n-1}\right]G_n(x) \\ &-G'_n(x)\left[(x - c_{n+1}\sqrt{1-x^2})G_n(x) - d_{n+1}G_{n-1}(x)\right] \\ &= d_{n+1}\left[G'_n(x)G_{n-1}(x) - G'_{n-1}(x)G_n(x)\right] + \left(1 + \frac{x\,c_{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\right)G_n^2(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$W_{n+1}(x) = d_{n+1}W_n(x) + \left(1 + \frac{x\,c_{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\right)G_n^2(x), \quad n \geq 1. \tag{3.2.46}$$

Agora, vamos analisar os zeros da função G_n para $n \geq 1$.

• Fazendo $G_1(x) = x - c_1\sqrt{1-x^2} = 0$, obtemos um zero de G_1 que pertence ao intervalo $(-1, 1)$, isto é,

$$-1 < x_{1,1} = \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} < 1.$$

Note que $G'_1(x) = 1 + \dfrac{x\,c_1}{\sqrt{1-x^2}}$. Logo,

$$G'_1(x_{1,1}) = 1 + \frac{c_1^2}{\sqrt{1+c_1^2}}\frac{1}{\sqrt{1-c_1^2/(1+c_1^2)}} = 1 + c_1^2 > 0.$$

Usando (3.2.45), temos

$$W_1(x_{1,1}) = G_1'(x_{1,1})G_0(x_{1,1}) - G_0'(x_{1,1})G_1(x_{1,1}) = G_1'(x_{1,1}) > 0.$$

De (3.2.46), obtemos

$$W_2(x_{1,1}) = d_2W_1(x_{1,1}) + \left(1 + \frac{x_{1,1}\,c_2}{\sqrt{1-x_{1,1}^2}}\right) G_1^2(x_{1,1}) = d_2W_1(x_{1,1}) > 0.$$

Usando novamente (3.2.45), a expressão anterior pode ser escrita como

$$W_2(x_{1,1}) = G_2'(x_{1,1})G_1(x_{1,1}) - G_1'(x_{1,1})G_2(x_{1,1}) = -G_1'(x_{1,1})G_2(x_{1,1}) > 0.$$

Como $G_1'(x_{1,1}) > 0$, concluímos que $G_2(x_{1,1}) < 0$.

• Agora, consideramos a função G_2. Como G_2 é contínua em $[-1,1]$, $G_2(-1) > 0$, $G_2(x_{1,1}) < 0$, $G_2(1) > 0$ e $-1 < x_{1,1} < 1$. Então, existem pontos $x_{2,1}$ e $x_{2,2}$, zeros de G_2, satisfazendo

$$-1 < x_{2,2} < x_{1,1} < x_{2,1} < 1.$$

Além disso,

$$G_2'(x_{2,2}) < 0 \quad \text{e} \quad G_2'(x_{2,1}) > 0,$$

e, ainda,

$$G_1(x_{2,2}) < 0 \quad \text{e} \quad G_1(x_{2,1}) > 0.$$

Usando (3.2.45), a função W_2, calculada nos zeros de G_2, pode ser dada pela expressão

$$W_2(x_{2,j}) = G_2'(x_{2,j})G_1(x_{2,j}) > 0, \quad \text{para } j = 1, 2.$$

De (3.2.46), obtemos

$$W_3(x_{2,j}) = d_3W_2(x_{2,j}) > 0, \quad \text{para } j = 1, 2.$$

Usando novamente (3.2.45), podemos escrever

$$W_3(x_{2,j}) = -G_2'(x_{2,j})G_3(x_{2,j}) > 0, \quad \text{para} \quad j = 1, 2.$$

Como $G_2'(x_{2,2}) < 0$ e $G_2'(x_{2,1}) > 0$, concluímos que $G_3(x_{2,2}) > 0$ e $G_3(x_{2,1}) < 0$.

• Agora, consideramos a função G_3. Como G_3 é contínua em $[-1,1]$, $G_3(-1) < 0$, $G_3(x_{2,2}) > 0$, $G_3(x_{2,1}) < 0$, $G_3(1) > 0$ e $-1 < x_{2,2} < x_{2,1} < 1$, então existem pontos $x_{3,3}$, $x_{3,2}$ e $x_{3,1}$ que são zeros de G_3 e, satisfazem

$$-1 < x_{3,3} < x_{2,2} < x_{3,2} < x_{2,1} < x_{3,1} < 1.$$

• Procedendo, sucessivamente, para $n = 4, 5, \ldots$, mostra-se que as funções $W_n(x)$ não são necessariamente positivas para $x \in [-1,1]$, mas são positivas nos zeros de G_n, ou seja,

$$W_n(x_{n,j}) > 0, \quad W_{n+1}(x_{n,j}) = d_{n+1}W_n(x_{n,j}) > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

para $n \geq 1$. Além disso,

$$\begin{aligned} W_n(x_{n,j}) &= G_n'(x_{n,j})G_{n-1}(x_{n,j}), \\ W_{n+1}(x_{n,j}) &= -G_n'(x_{n,j})G_{n+1}(x_{n,j}). \end{aligned}$$

Portanto, as funções G_n têm exatamente n zeros no intervalo $(-1,1)$ e eles satisfazem o entrelaçamento dado em (3.2.44). ■

Uma consequência imediata do Lema 3.1 e de (3.2.42) é o esperado resultado sobre os zeros de R_n.

Teorema 3.7. *Os polinômios R_n, $n \geq 1$, definidos pela relação de recorrência de três termos (2), têm seus n zeros simples e em $|z| = 1$. Além disso, se denotarmos os zeros de R_n por $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, vale o seguinte entrelaçamento:*

$$0 < \theta_{n+1,1} < \theta_{n,1} < \theta_{n+1,2} < \cdots < \theta_{n+1,n} < \theta_{n,n} < \theta_{n+1,n+1} < 2\pi, \quad n \geq 1.$$

3.2.3 Polinômios associados aos polinômios R_n

Consideremos, agora, as funções de Christoffel-Darboux, associadas aos polinômios R_n, definidas por

$$V_n(z) = R_n'(z)R_{n-1}(z) - R_{n-1}'(z)R_n(z), \quad n \geq 1. \tag{3.2.47}$$

De (3.2.42),

$$G_n'(x) = (4z)^{-(n-1)/2}\left(2zR_n'(z) - nR_n(z)\right)\frac{1}{z-1}.$$

Assim, obtemos a seguinte relação entre $W_n(x)$ e $V_n(z)$, lembrando que $2x = z^{1/2} + z^{-1/2}$,

$$W_n(x) = \frac{(4z)^{-(n-1)}}{z-1}\left(2zV_n(z) - R_{n-1}(z)R_n(z)\right), \ n \geq 1,$$

e, portanto, vale

$$\frac{z_{n,j}^{-(n-2)}}{z_{n,j}-1}V_n(z_{n,j}) = 2^{2n-3}W_n(x_{n,j}), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad n \geq 1. \tag{3.2.48}$$

Note que a relação entre os zeros de G_n e de R_n é dada por $x_{n,j} = \cos(\theta_{n,j}/2)$, onde $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, ou seja,

$$2x_{n,j} = z_{n,j}^{1/2} + z_{n,j}^{-1/2} = e^{i\theta_{n,j}/2} + e^{-i\theta_{n,j}/2}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Note que, se $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ é sequência encadeada então, pelo Teorema 1.7, $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$, onde $d_{1,n} = d_{n+1}$, $n \geq 1$, também é sequência encadeada. Além disso, se denotarmos por $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ as sequências de parâmetros minimal e maximal de $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, respectivamente, então considerando $M_{1,n} = M_{n+1}$, $n \geq 0$, a sequência $\{M_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$ é a sequência de parâmetros maximal de $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$. Vamos, agora, determinar a sequência de parâmetros minimal.

Da relação de recorrência de três termos para R_n, temos

$$d_{n+1} = \frac{R_n(1)}{2R_{n-1}(1)}\left(1 - \frac{R_{n+1}(1)}{2R_n(1)}\right), \quad n \geq 1.$$

Assim, $\{\hat{m}_n\}_{n=0}^{\infty}$, com

$$\hat{m}_n = 1 - \frac{R_{n+1}(1)}{2R_n(1)}, \quad n \geq 0,$$

é a sequência minimal de parâmetros da sequência encadeada $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$.

Claramente, a sequência $\{m_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$, onde $m_{1,n} = m_{n+1}$, é tal que $\hat{m}_n < m_{1,n}$, $n \geq 0$ (veja Teorema 1.7).

Note que, para a sequência encadeada $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ pode acontecer $M_0 = m_0 = 0$. É importante notar que sempre valem as desigualdades $0 < m_{1,0} \leq M_{1,0} < 1$. Além disso, $m_{1,0} = M_{1,0}$ quando a sequência encadeada $\{d_n\}$ tem uma única sequência de parâmetros.

De uma sequência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=2}^{\infty}$, que não é unicamente determinada, seguindo o Teorema 1.8 podemos definir um valor para d_1 de tal forma que $d_1 \leq M_1$ e $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ seja, também, uma sequência encadeada. Escolhemos, então,

$$d_1 = (1 - M_0)M_1,$$

onde $0 \leq M_0 < 1$.

Consideramos, agora, a seguinte fração contínua finita:

$$\begin{aligned}\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} &= \frac{2d_1}{(1+ic_1)z+(1-ic_1)} - \frac{4d_2z}{(1+ic_2)z+(1-ic_2)} \\ &\quad - \frac{4d_3z}{(1+ic_3)z+(1-ic_3)} - \cdots - \frac{4d_nz}{(1+ic_n)z+(1-ic_n)}.\end{aligned} \tag{3.2.49}$$

Da teoria de frações contínuas (veja por exemplo [1, 29, 35]), os polinômios Q_n e R_n satisfazem

$$R_{n+1}(z) = [(1+ic_{n+1})z + (1-ic_{n+1})]\, R_n(z) - 4d_{n+1}\, z\, R_{n-1}(z), \tag{3.2.50}$$

$$Q_{n+1}(z) = \big[(1+ic_{n+1})z + (1-ic_{n+1})\big]Q_n(z) - 4d_{n+1}\, z\, Q_{n-1}(z), \tag{3.2.51}$$

para $n \geq 1$, com $R_0(z) = 1$, $R_1(z) = (1+ic_1)z + (1-ic_1)$, $Q_0(z) = 0$ e $Q_1(z) = 2d_1 = \delta$.

Os polinômios Q_n são chamados de polinômios associados a R_n. Por conveniência, utilizamos a notação $\delta = 2d_1$ para o numerador do primeiro elemento da fração contínua (3.2.49).

Outra característica importante dos polinômios R_n é que

$$R_n(z) = R_n^*(z), \tag{3.2.52}$$

onde $R_n^*(z) = z^n\overline{R_n(1/\overline{z})}$ é o polinômio recíproco de R_n.

De fato, para $n = 0$, claramente vemos que $R_0^*(z) = 1 = R_0(z)$. Para $n = 1$, temos

$$R_1(z) = (1+ic_1)z + (1-ic_1).$$

Logo,

$$R_1(1/\overline{z}) = (1+ic_1)\frac{1}{\overline{z}} + (1-ic_1)$$

e, assim,

$$\overline{R_1(1/\overline{z})} = (1-ic_1)\frac{1}{z} + (1+ic_1).$$

Multiplicando ambos os membros da expressão anterior por z, obtemos

$$z\,\overline{R_1(1/\overline{z})} = (1-ic_1) + (1+ic_1)z,$$

ou seja,

$$R_1^*(z) = R_1(z).$$

Da relação de recorrência de três termos de R_n, temos

$$R_{n+1}(1/\overline{z}) = [(1 + ic_{n+1})\frac{1}{\overline{z}} + (1 - ic_{n+1})]R_n(1/\overline{z}) - 4d_{n+1}\frac{1}{\overline{z}}R_{n-1}(1/\overline{z}).$$

Conjugando-a, obtemos

$$\overline{R_{n+1}(1/\overline{z})}[(1 - ic_{n+1})\frac{1}{z} + (1 + ic_{n+1})]\overline{R_n(1/\overline{z})} - 4d_{n+1}\frac{1}{z}\overline{R_{n-1}(1/\overline{z})}.$$

Multiplicando ambos os membros por z^{n+1}, temos

$$z^{n+1}\overline{R_{n+1}(1/\overline{z})} = [(1 - ic_{n+1}) + (1 + ic_{n+1})z]z^n\overline{R_n(1/\overline{z})} - 4d_{n+1}z^n\overline{R_{n-1}(1/\overline{z})},$$

ou seja,

$$R_{n+1}^*(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]\, R_n^*(z) - 4d_{n+1}\, z\, R_{n-1}^*(z).$$

Assim, como R_n^* satisfaz à mesma relação de recorrência de três termos de R_n e com as mesmas condições iniciais, então são idênticos e (3.2.52) vale. ■

Se escrevermos r_n como $R_n(z) = \sum_{j=0}^{n} r_{n,j}\, z^j$, então

$$R_n(z) = \sum_{j=0}^{n} r_{n,j}\, z^j = \sum_{j=0}^{n} \overline{r}_{n,n-j}\, z^j = R_n^*(z), \quad n \geq 0,$$

e, em particular, da relação de recorrência para R_n, obtemos

$$r_{0,0} = 1 \quad \text{e} \quad r_{n,n} = \overline{r}_{n,0} = \prod_{k=1}^{n}(1 + ic_k), \quad n \geq 1. \tag{3.2.53}$$

Pela propriedade (3.2.52), R_n são chamados de polinômios auto-inversíveis.

Similarmente, o polinômio de grau $n-1$, Q_n, também satisfaz a uma propriedade auto-inversiva

$$Q_n^*(z) = z^{n-1}\overline{Q_n(1/\overline{z})} = Q_n(z), \quad n \geq 1. \tag{3.2.54}$$

Deixamos a demonstração destes fatos para o leitor no Exercício 3.13.

Escrevendo $Q_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} q_{n,j}\, z^j$, então, da relação de recorrência para Q_n, temos

$$q_{1,0} = \delta \quad \text{e} \quad q_{n,n-1} = \overline{q}_{n,0} = \prod_{k=2}^{n}(1 + ic_k)\delta, \quad n \geq 2.$$

Veremos, agora, o comportamento assintótico da sequência $\{Q_n(1)/R_n(1)\}$. Das fórmulas de recorrência para $\{R_n\}$ e $\{Q_n\}$, junto com a teoria de frações contínuas, mostra-se que, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} &= \frac{d_1|}{|1} - \frac{d_2|}{|1} - \frac{d_3|}{|1} - \cdots - \frac{d_n|}{|1} \\ &= (1 - M_0)\,\frac{M_{1,0}|}{|1} - \frac{(1 - M_{1,0})M_{1,1}|}{|1} - \cdots - \frac{(1 - M_{1,n-2})M_{1,n-1}|}{|1}. \end{aligned}$$

Observemos inicialmente as frações contínuas finitas

$$\frac{\tilde{A}_{n+1}}{\tilde{B}_{n+1}} = 1 - \frac{1|}{|1} - \frac{M_{1,0}|}{|1} - \frac{(1-M_{1,0})M_{1,1}|}{|1} - \cdots - \frac{(1-M_{1,n-2})M_{1,n-1}|}{|1}, \ n \geq 1,$$

$$\frac{\tilde{A}_1}{\tilde{B}_1} = 1 - \frac{1|}{|1} \qquad \text{e} \qquad \frac{\tilde{A}_0}{\tilde{B}_0} = 1,$$

onde $M_{1,-1} = 0$. É fácil verificar que $\tilde{B}_0 = \tilde{B}_1 = 1$, $\tilde{B}_2 = 1 - M_{1,0}$ e, das fórmulas de Wallis (1.2.7)

$$\tilde{B}_{n+1} = (1 - M_{1,0})(1 - M_{1,1}) \cdots (1 - M_{1,n-1}), \quad n \geq 1.$$

Agora, utilizando (1.2.8), temos

$$\frac{\tilde{A}_{n+1}}{\tilde{B}_{n+1}} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{M_{1,0}(1-M_{1,0})M_{1,1}\cdots(1-M_{1,k-2})M_{1,k-1}}{B_k B_{k+1}}, \quad n \geq 1.$$

Logo,

$$\frac{\tilde{A}_{n+1}}{\tilde{B}_{n+1}} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{M_{1,0}(1-M_{1,0})M_{1,1}\cdots(1-M_{1,k-2})M_{1,k-1}}{(1-M_{1,0})^2(1-M_{1,1})^2\cdots(1-M_{1,k-2})^2(1-M_{1,k-1})}. \qquad (3.2.55)$$

Por outro lado, observemos as frações contínuas finitas

$$\frac{\hat{A}_n}{\hat{B}_n} = 1 - \frac{M_{1,0}|}{|1} - \frac{(1-M_{1,0})M_{1,1}|}{|1} - \cdots - \frac{(1-M_{1,n-2})M_{1,n-1}|}{|1}, \ n \geq 2,$$

com $\dfrac{\hat{A}_1}{\hat{B}_1} = 1 - \dfrac{M_{1,0}|}{|1}$. Note que

$$\frac{\tilde{A}_{n+1}}{\tilde{B}_{n+1}} = 1 - \frac{1}{\dfrac{\hat{A}_n}{\hat{B}_n}}$$

e, portanto,

$$\frac{\hat{A}_n}{\hat{B}_n} = \frac{1}{1 - \dfrac{\tilde{A}_{n+1}}{\tilde{B}_{n+1}}}.$$

Usando (3.2.55), obtemos

$$\frac{\hat{A}_n}{\hat{B}_n} = \frac{1}{1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{M_{1,0}M_{1,1}\cdots M_{1,k-1}}{(1-M_{1,0})(1-M_{1,1})\cdots(1-M_{1,k-2})(1-M_{1,k-1})}}.$$

Como, para $n \geq 1$,

$$\frac{Q_n(1)}{R_n(1)} = (1 - M_0)\frac{M_{1,0}|}{|1} - \frac{(1-M_{1,0})M_{1,1}|}{|1} - \cdots - \frac{(1-M_{1,n-2})M_{1,n-1}|}{|1},$$

então

$$\frac{Q_n(1)}{R_n(1)} = (1-M_0)\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{M_{1,0}M_{1,1}\cdots M_{1,k-1}}{(1-M_{1,0})(1-M_{1,1})\cdots(1-M_{1,k-1})}}{1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{M_{1,0}M_{1,1}\cdots M_{1,k-1}}{(1-M_{1,0})(1-M_{1,1})\cdots(1-M_{1,k-1})}}, \quad n \geq 1,$$

onde $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{M_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$ são, respectivamente, as sequências maximais de parâmetros das sequências encadeadas $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$. Usando o Teorema 1.4 (veja também [13, Teorema 6.2]) para sequência maximal, temos o seguinte resultado:

Lema 3.2.

$$(1-M_0)M_1 = d_1 = \frac{Q_1(1)}{R_1(1)} < \frac{Q_2(1)}{R_2(1)} < \cdots < \frac{Q_{n-1}(1)}{R_{n-1}(1)} < \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} < (1-M_0)$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n(1)}{R_n(1)} = 1 - M_0. \tag{3.2.56}$$

Agora, consideremos as funções racionais $Q_n(z)/R_n(z)$ e suas expansões em séries formais.

Primeiramente, definimos as funções U_n por

$$U_n(z) = \begin{vmatrix} Q_n(z) & R_n(z) \\ Q_{n-1}(z) & R_{n-1}(z) \end{vmatrix} = Q_n(z)R_{n-1}(z) - Q_{n-1}(z)R_n(z), \quad n \geq 1.$$

Essas fórmulas são conhecidas como fórmulas do determinante.

Substituindo as relações de recorrência para Q_n e R_n na definição de U_n, encontramos

$$U_n(z) = 4d_n z U_{n-1}(z) = 2^{2n-1}d_1 d_2\cdots d_n z^{n-1}, \quad n \geq 2. \tag{3.2.57}$$

e $U_1(z) = 2d_1$. Deixamos a prova desse fato a cargo do leitor no Exercício 3.14.

Para $n \geq 1$, podemos escrever

$$\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} - \frac{Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)} = \frac{U_n(z)}{R_n(z)R_{n-1}(z)} = \frac{2^{2n-1}d_1d_2\cdots d_n z^{n-1}}{R_n(z)R_{n-1}(z)}. \tag{3.2.58}$$

• A expansão em série de Taylor em torno da origem de uma função racional do tipo $1/p_n(z)$, onde $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}z^k$, com $p_{n,0} \neq 0$, é da forma

$$\frac{1}{p_n(z)} = \frac{1}{p_{n,0}} + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots,$$

onde $b_i, i = 1, 2, \ldots$, não dependem da variável z. Essa expansão pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{p_n(z)} = \frac{1}{p_{n,0}} + O\big(z\big),$$

onde $O\big(z\big)$ significa termos de ordem z ou maiores.

Usando essa notação, podemos escrever

$$\frac{1}{R_n(z)} = \frac{1}{r_{n,0}} + O(z),$$

$$\frac{1}{R_{n-1}(z)} = \frac{1}{r_{n-1,0}} + O(z).$$

Logo, a diferença (3.2.58) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} - \frac{Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)} &= \frac{2^{2n-1} d_1 d_2 \cdots d_n z^{n-1}}{R_n(z) R_{n-1}(z)} \\
&= \frac{2^{2n-1} d_1 d_2 \cdots d_n}{r_{n,0}\, r_{n-1,0}} z^{n-1} + O(z^n) \\
&= \frac{2^{2n-1} d_1 d_2 \cdots d_n}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1 - ic_k) \prod_{k=1}^{n-1}(1 - ic_k)} z^{n-1} + O(z^n).
\end{aligned}$$

Essa última relação mostra que os primeiros $n-1$ termos das expansões em série em torno da origem de $\dfrac{Q_n(z)}{R_n(z)}$ e de $\dfrac{Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)}$ coincidem.

Notemos, ainda, que

$$\begin{aligned}
\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} &= \frac{q_{n,0} + q_{n,1} z + \cdots + q_{n,n-1} z^{n-1}}{R_n(z)} \\
&= \left[q_{n,0} + q_{n,1} z + \cdots + q_{n,n-1} z^{n-1}\right] \left[\frac{1}{r_{n,0}} + O(z)\right] \\
&= \frac{q_{n,0}}{r_{n,0}} + O(z) \\
&= \frac{\delta}{1 - ic_1} + O(z).
\end{aligned}$$

• Analogamente, a expansão em série em torno do infinito de uma função racional do tipo $t_{n-1}(z)/p_n(z)$, onde $p_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} z^k$, com $p_{n,n} \neq 0$, e $t_{n-1}(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t_{n-1,k} z^k$, com $t_{n-1,n-1} \neq 0$, é da forma

$$\frac{t_{n-1}(z)}{p_n(z)} = \frac{t_{n-1,n-1}}{p_{n,n}} \frac{1}{z} + b_{-2} \frac{1}{z^2} + b_{-3} \frac{1}{z^3} + \cdots\ ,$$

onde b_{-i}, $i = 2, 3, \ldots$, não dependem da variável z. Essa expansão pode ser denotada da seguinte forma:

$$\frac{t_{n-1}(z)}{p_n(z)} = \frac{t_{n-1,n-1}}{p_{n,n}} \frac{1}{z} + O\big((1/z)^2\big),$$

onde, neste caso, $O(z^{-n})$ significa termos de ordem z^{-n} ou menores.

Usando esta notação, podemos escrever

$$\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \frac{q_{n-1,n-1}}{r_{n,n}} \frac{1}{z} + O\big((1/z)^2\big),$$

$$\frac{Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)} = \frac{q_{n-2,n-2}}{r_{n-1,n-1}}\frac{1}{z} + O\big((1/z)^2\big).$$

Novamente, a diferença (3.2.58) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} - \frac{Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)} &= \frac{2^{2n-1}d_1d_2\cdots d_n z^{n-1}}{R_n(z)R_{n-1}(z)} \\ &= \frac{2^{2n-1}d_1d_2\cdots d_n}{r_{n,n}\, r_{n-1,n-1}}\frac{1}{z^n} + O\big((1/z)^{n+1}\big) \\ &= \frac{2^{2n-1}d_1d_2\cdots d_n}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+ic_k)\prod_{k=1}^{n-1}(1+ic_k)}\frac{1}{z^n} + O\big((1/z)^{n+1}\big).\end{aligned}$$

Esta última relação mostra que os primeiros $n-1$ termos das expansões em série em torno do infinito, de $\dfrac{Q_n(z)}{R_n(z)}$ e de $\dfrac{Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)}$ coincidem.

Para facilitar a notação, usaremos

$$\gamma_{n-1} = \frac{2^{2n-1}d_1d_2\cdots d_n}{r_{n,n}}, \quad n \geq 1.$$

Mas, de (3.2.53),

$$\gamma_{n-1} = \frac{2^{2n-1}d_1d_2\cdots d_n}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+ic_k)}, \quad n \geq 1.$$

Logo,

$$\gamma_n = \frac{4d_{n+1}\gamma_{n-1}}{1+ic_{n+1}}, \quad n \geq 1,$$

com $\gamma_0 = \nu_0 = \dfrac{2d_1}{1+ic_1}$.

Lembrando que $r_{n,n} = \overline{r}_{n,0}$, $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequencia encadeada positiva e $d_1 > 0$, observamos que

$$\frac{\overline{\gamma}_{n-1}}{\overline{r}_{n-1,n-1}} = \frac{\overline{2^{2n-1}d_1d_2\cdots d_n}}{\overline{r}_{n,n}\overline{r}_{n-1,n-1}} = \frac{2^{2n-1}d_1d_2\cdots d_n}{r_{n,0}r_{n-1,0}}.$$

Podemos, então, escrever

$$\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} - \frac{Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)} = \begin{cases} \dfrac{\overline{\gamma}_{n-1}}{\overline{r}_{n-1,n-1}}\, z^{n-1} + O\big(z^n\big), \\ \dfrac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1,n-1}}\,\dfrac{1}{z^n} + O\big((1/z)^{n+1}\big), \end{cases} \quad n \geq 1. \tag{3.2.59}$$

Portanto, concluímos que existem expansões em séries formais E_0 e E_∞, na origem e no infinito, respectivamente, tais que

$$E_0(z) - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \frac{\overline{\gamma}_n}{\overline{r}_{n,n}}\, z^n + O\big(z^{n+1}\big), \quad n \geq 0, \tag{3.2.60}$$

e

$$E_\infty(z) - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \frac{\gamma_n}{r_{n,n}}\,\frac{1}{z^{n+1}} + O\big((1/z)^{n+2}\big), \quad n \geq 0. \tag{3.2.61}$$

Por conveniência, denotaremos as séries E_0 e E_∞, da seguinte forma:

$$E_0(z) = -\nu_1 - \nu_2 z - \nu_3 z^2 - \nu_4 z^3 - \cdots \; = \; -\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n z^{n-1}$$

e

$$E_\infty(z) = \frac{\nu_0}{z} + \frac{\nu_{-1}}{z^2} + \frac{\nu_{-2}}{z^3} + \frac{\nu_{-3}}{z^4} + \cdots \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{-n+1} z^{-n}.$$

De (3.2.61), substituindo z por $1/\overline{z}$ e conjugando ambos os lados, obtemos

$$\overline{E_\infty(1/\overline{z})} - \frac{\overline{Q_n(1/\overline{z})}}{\overline{R_n(1/\overline{z})}} = \overline{\frac{\gamma_n}{r_{n,n}}\, \overline{z}^{n+1}} + \overline{O\big(\overline{z}^{n+2}\big)}.$$

Multiplicando ambos os lados por $1/z$, temos

$$\frac{1}{z}\overline{E_\infty(1/\overline{z})} - \frac{z^{n-1}\overline{Q_n(1/\overline{z})}}{z^n\overline{R_n(1/\overline{z})}} = \frac{\overline{\gamma}_n}{\overline{r}_{n,n}}\, z^n + O\big(z^{n+1}\big).$$

Como R_n e Q_n são polinômios auto-inversíveis,

$$z^{-1}\overline{E_\infty(1/\overline{z})} - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \frac{\overline{\gamma}_n}{\overline{r}_{n,n}}\, z^n + O\big(z^{n+1}\big), \quad n \geq 0.$$

Comparando este último resultado com (3.2.60), encontramos propriedades de simetria entre as expansões em séries e entre seus coeficientes

$$\begin{aligned} E_0(z) &= z^{-1}\overline{E_\infty(1/\overline{z})} \\ &= z^{-1}\overline{\sum_{n=1}^{\infty} \nu_{-n+1}\overline{z}^n} \\ -\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n z^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\nu}_{-n+1} z^{n-1}, \end{aligned}$$

e, assim,

$$\nu_n = -\overline{\nu}_{-n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots \; . \tag{3.2.62}$$

Agora, veremos uma maneira de se determinar os polinômios R_n a partir dos coeficientes $\nu_n,\ n = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$.

De (3.2.60),

$$R_n(z)E_0(z) - Q_n(z) = R_n(z)\left[\frac{\overline{\gamma}_n}{\overline{r}_{n,n}}\, z^n + O\big(z^{n+1}\big)\right].$$

Escrevendo $R_n(z) = r_{n,0} + r_{n,1}\, z + r_{n,2}\, z^2 + \cdots + r_{n,n}\, z^n$, obtemos

$$R_n(z)E_0(z) - Q_n(z) = \frac{r_{n,0}\, \overline{\gamma}_n}{\overline{r}_{n,n}}\, z^n + O\big(z^{n+1}\big),$$

Com $r_{n,0} = \overline{r}_{n,n}$, então

$$R_n(z)E_0(z) - Q_n(z) = \overline{\gamma}_n\, z^n + O\big(z^{n+1}\big),$$

Comparando os coeficientes dos termos $z^0, z^1, ..., z^{n-1}, z^n$ em ambos os lados da última igualdade, obtemos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{array}{llllllll}
-\nu_1 r_{n,0} & & & & & -q_{n,0} & & = & 0 \\
-\nu_2 r_{n,0} & -\nu_1 r_{n,1} & & & & & -q_{n,1} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\
-\nu_n r_{n,0} & -\nu_{n-1} r_{n,1} & \cdots & -\nu_1 r_{n,n-1} & & & -q_{n,n-1} & = & 0 \\
-\nu_{n+1} r_{n,0} & -\nu_n r_{n,1} & \cdots & -\nu_2 r_{n,n-1} & -\nu_1 r_{n,n} & & & = & \overline{\gamma}_n
\end{array} . \tag{3.2.63}$$

Das n primeiras linhas desse sistema, vemos que

$$q_{n,k} = -\sum_{j=0}^{k} \nu_{k+1-j} r_{n,j}, \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{3.2.64}$$

De (3.2.61),

$$R_n(z)E_\infty(z) - Q_n(z) = R_n(z)\left[\frac{\gamma_n}{r_{n,n}}\frac{1}{z^{n+1}} + O\big((1/z)^{n+2}\big)\right].$$

Escrevendo R_n em termos de seus coeficientes $r_{n,i}, i = 0, 1, \ldots, n$, obtemos

$$R_n(z)E_\infty(z) - Q_n(z) = \frac{r_{n,n}\,\gamma_n}{r_{n,n}}\frac{1}{z} + O\big((1/z)^2\big).$$

Logo,

$$R_n(z)E_\infty(z) - Q_n(z) = \gamma_n \frac{1}{z} + O\big((1/z)^2\big).$$

Comparando os coeficientes dos termos $z^{-1}, z^0, z^1, ..., z^{n-2}, z^{n-1}$ em ambos os lados da equação anterior, obtemos o sistema de equações lineares

$$\begin{array}{lllllll}
\nu_0 r_{n,0} & +\nu_{-1} r_{n,1} & \cdots +\nu_{-n+1} r_{n,n-1} & +\nu_{-n} r_{n,n} & & = & \gamma_n \\
& \nu_0 r_{n,1} & \cdots +\nu_{-n+2} r_{n,n-1} & +\nu_{-n+1} r_{n,n} - q_{n,0} & & = & 0 \\
& \ddots \quad \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\
& & \nu_0 r_{n,n-1} & +\nu_{-1} r_{n,n} & -q_{n,n-2} & = & 0 \\
& & & \nu_0 r_{n,n} & -q_{n,n-1} & = & 0
\end{array} . \tag{3.2.65}$$

Substituindo os valores dos coeficientes $q_{n,k}$, dados em (3.2.64), no sistema (3.2.65) obtemos

$$\left\{\begin{array}{llllll}
\nu_0 r_{n,0} & + \nu_{-1} r_{n,1} & + \nu_{-2} r_{n,2} & \cdots & + \nu_{-n} r_{n,n} & = \gamma_n \\
\nu_1 r_{n,0} & + \nu_0 r_{n,1} & + \nu_{-1} r_{n,2} & \cdots & + \nu_{-n+1} r_{n,n} & = 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\nu_{n-1} r_{n,0} & + \nu_{n-2} r_{n,1} & + \nu_{n-3} r_{n,2} & \cdots & + \nu_{-1} r_{n,n} & = 0 \\
\nu_n r_{n,0} & + \nu_{n-1} r_{n,1} & + \nu_{n-2} r_{n,2} & \cdots & + \nu_0 r_{n,n} & = 0
\end{array}\right. , \tag{3.2.66}$$

que pode ser escrito, na forma matricial, como

$$\begin{pmatrix} \nu_0 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-n} \\ \nu_1 & \nu_0 & \cdots & \nu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_{n-1} & \nu_{n-2} & \cdots & \nu_{-1} \\ \nu_n & \nu_{n-1} & \cdots & \nu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{n,0} \\ r_{n,1} \\ \vdots \\ r_{n,n-2} \\ r_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que o determinante da matriz dos coeficientes é o determinante de Toeplitz (veja (1.5.32)). Verifiquemos que esses determinantes são não nulos. Consideramos

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \nu_0 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-n} \\ \nu_1 & \nu_0 & \cdots & \nu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_{n-1} & \nu_{n-2} & \cdots & \nu_{-1} \\ \nu_n & \nu_{n-1} & \cdots & \nu_0 \end{vmatrix}, \; n = 0, 1, 2, \dots \; .$$

Pelo princípio da regra de Cramer obtemos

$$\begin{vmatrix} \nu_0 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-n} \\ \nu_1 & \nu_0 & \cdots & \nu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_{n-1} & \nu_{n-2} & \cdots & \nu_{-1} \\ \nu_n & \nu_{n-1} & \cdots & \nu_0 \end{vmatrix} r_{n,0} = \gamma_n \begin{vmatrix} \nu_0 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-n-1} \\ \nu_1 & \nu_0 & \cdots & \nu_{-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_{n-1} & \nu_{n-2} & \cdots & \nu_0 \end{vmatrix},$$

temos

$$\Delta_n = \frac{\gamma_n}{r_{n,0}} \Delta_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

com $\Delta_0 = |\nu_0| \neq 0$, pois $\nu_0 = \gamma_0 \neq 0$.

Como $r_{n,0} \neq 0$ e $\gamma_n \neq 0$, por indução concluí-se que $\Delta_n \neq 0$ para $n \geq 0$.

Se substituirmos a primeira linha do sistema (3.2.66) por $R_n(z) = r_{n,0} + r_{n,1}\, z + r_{n,2}\, z^2 + \cdots + r_{n,n}\, z^n$, obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & z & \cdots & z^n \\ \nu_1 & \nu_0 & \cdots & \nu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_{n-1} & \nu_{n-2} & \cdots & \nu_{-1} \\ \nu_n & \nu_{n-1} & \cdots & \nu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{n,0} \\ r_{n,1} \\ \vdots \\ r_{n,n-2} \\ r_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_n(z) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Novamente, aplicando a regra de Cramer, obtemos

$$R_n(z) = r_{n,0} \begin{vmatrix} 1 & z & \cdots & z^n \\ \nu_1 & \nu_0 & \cdots & \nu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_{n-1} & \nu_{n-2} & \cdots & \nu_{-1} \\ \nu_n & \nu_{n-1} & \cdots & \nu_0 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} \nu_0 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-n+1} \\ \nu_1 & \nu_0 & \cdots & \nu_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_{n-2} & \nu_{n-3} & \cdots & \nu_{-1} \\ \nu_{n-1} & \nu_{n-2} & \cdots & \nu_0 \end{vmatrix}.$$

Podemos obter uma relação entre os determinantes de Toeplitz e os determinantes de Hankel, permutando-se as colunas do determinante de Toeplitz, ou seja

$$\begin{vmatrix} \nu_0 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-n} \\ \nu_1 & \nu_0 & \cdots & \nu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_{n-1} & \nu_{n-2} & \cdots & \nu_{-1} \\ \nu_n & \nu_{n-1} & \cdots & \nu_0 \end{vmatrix} = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{vmatrix} \nu_{-n} & \nu_{-n+1} & \cdots & \nu_0 \\ \nu_{-n+1} & \nu_{-n+2} & \cdots & \nu_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_{-1} & \nu_2 & \cdots & \nu_{n-1} \\ \nu_0 & \nu_1 & \cdots & \nu_n \end{vmatrix}.$$

Este último determinante é o determinante de Hankel $H_n^{(-n)}$ (veja (1.1.4)).

Como os coeficientes de R_n são obtidos do sistema (3.2.66), podemos, então, tomar um funcional de momento para o qual os polinômios R_n satisfazem as relações de L-ortogonalidade. Este resultado pode ser escrito da seguintes forma:

Teorema 3.8. *Sejam $\{R_n\}$ e $\{Q_n\}$ sequências de polinômios obtidos da sequência de números reais $\{c_n\}$, da sequência encadeada positiva $\{d_n\}$ e das relações de recorrência de três termos* (3.2.50) *e* (3.2.51). *Então, a função racional Q_n/R_n satisfaz as propriedades de correspondência dadas por* (3.2.60) *e* (3.2.61). *Além disso, se o funcional de momento $\mathcal{N}$ é tal que*

$$\mathcal{N}[\zeta^{-n}] = \nu_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ,$$

então os polinômios R_n satisfazem

$$\mathcal{N}[\zeta^{-n+j} R_n(\zeta)] = \begin{cases} -\overline{\gamma}_n, & j = -1, \\ 0, & j = 0, 1, \dots, n-1, \\ \gamma_n, & j = n \end{cases} \qquad n \geq 1,$$

onde $\quad \gamma_0 = \nu_0 = \dfrac{2d_1}{1 + ic_1} \quad$ *e* $\quad \gamma_n = \dfrac{4d_{n+1}}{(1 + ic_{n+1})}\gamma_{n-1}, \quad n \geq 1.$

3.2.4 Resultado do tipo Favard

É bem conhecido que os polinômios ortogonais no círculo unitário são completamente caracterizados (determinados) em termos dos coeficientes de Verblunsky, α_n, dados em (3.2.26), como podemos ver no próximo teorema (veja, por exemplo, [39, Teorema 1.7.11]), que é um resultado similar ao Teorema de Favard (Teorema 1.12), para polinômios ortogonais na reta real.

Teorema 3.9. *Dada uma sequência de números complexos $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, onde $|\alpha_n| < 1$, $n \geq 0$, então, associada a esta sequência existe um única medida de probabilidade não-trivial, definida no círculo unitário, tal que os polinômios mônicos $\{S_n\}$ gerados por* (3.2.27) *são os respectivos polinômios ortogonais no círculo unitário.*

Uma simples demonstração construtiva deste teorema pode ser encontrada em Erdélyi e outros [19].

Um resultado do tipo Favard para os polinômios R_n, definidos por (2), foi demonstrado no artigo [46], de um dos autores deste livro, Sri Ranga. Para mostrá-lo precisaremos de alguns resultados preliminares.

Consideramos, a partir de agora, que $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada positiva, ou seja, $\{d_1, d_2, d_3, ...\}$ forma uma sequência encadeada positiva.

Dadas as sequências de polinômios $\{R_n\}$ e $\{Q_n\}$, definidas como em (3.2.50) e (3.2.51), consideremos as sequências de polinômios $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ dadas por

$$A_n(z) = R_n(z) - Q_n(z) \quad \text{e} \quad B_n(z) = (z-1)R_n(z), \quad n \geq 0. \tag{3.2.67}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{A_n(z)}{B_n(z)} &= \frac{R_n(z) - Q_n(z)}{(z-1)R_n(z)} \\ &= \frac{1}{z-1} - \frac{Q_n(z)}{(z-1)R_n(z)} \end{aligned}$$

e

$$\frac{A_{n+1}(z)}{B_{n+1}(z)} - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = -\frac{1}{z-1}\left[\frac{Q_{n+1}(z)}{R_{n+1}(z)} - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)}\right], \quad n \geq 0.$$

Portanto, usando (3.2.59), obtemos

$$\frac{A_{n+1}(z)}{B_{n+1}(z)} - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \begin{cases} \dfrac{\overline{\gamma}_n}{\overline{r}_{n,n}}\, z^n + O\big(z^{n+1}\big), \\ -\dfrac{\gamma_n}{r_{n,n}} \dfrac{1}{z^{n+2}} + O\big((1/z)^{n+3}\big), \end{cases} \quad n \geq 0. \tag{3.2.68}$$

De (3.2.68) concluímos que existem expansões em séries F_0 e F_∞ tal que

$$F_0(z) - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \frac{\overline{\gamma}_n}{\overline{r}_{n,n}}\, z^n + O\big(z^{n+1}\big), \quad n \geq 0, \tag{3.2.69}$$

e

$$F_\infty(z) - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = -\frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+2}} + O\big((1/z)^{n+3}\big), \quad n \geq 0. \tag{3.2.70}$$

Denotaremos

$$F_0(z) = -\mu_1 - \mu_2 z - \mu_3 z^2 - \mu_4 z^3 - \dots$$

e

$$F_\infty(z) = \frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_{-1}}{z^2} + \frac{\mu_{-2}}{z^3} + \frac{\mu_{-3}}{z^4} + \dots\ .$$

Como, de (3.2.60),

$$E_0(z) - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \frac{\overline{\gamma}_n}{\overline{r}_{n,n}}\, z^n + O\big(z^{n+1}\big), \quad n \geq 0,$$

então

$$\begin{aligned} \frac{A_n(z)}{B_n(z)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1}\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} \\ &= (1 - z - z^2 - \cdots) - (1 - z - z^2 - \cdots)(-\nu_1 - \nu_2 z - \cdots - \nu_{n+1} z^n) \\ &= -(1+\nu_1) - (1+\nu_1+\nu_2)z - (1+\nu_1+\nu_2+\nu_3)z^2 - \cdots\ , \end{aligned}$$

que, comparado com (3.2.69), produz $\mu_n = 1 + \sum_{j=1}^{n} \nu_j$, para $n \geq 1$.

Analogamente, usando (3.2.61), ou seja,

$$E_\infty(z) - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+1}} + O\big((1/z)^{n+2}\big), \quad n \geq 0,$$

e

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-1/z)} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{A_n(z)}{B_n(z)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1}\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} \\
&= \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right) - \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right)\left(\frac{\nu_0}{z} + \frac{\nu_{-1}}{z^2} + \cdots + \frac{\nu_{-n+1}}{z^n}\right) \\
&= \frac{1}{z} + (1-\nu_0)\frac{1}{z^2} + (1-\nu_0-\nu_{-1})\frac{1}{z^3} + (1-\nu_0-\nu_{-1}-\nu_{-2})\frac{1}{z^4} + \cdots ,
\end{aligned}$$

que, comparado com (3.2.70), produz $\mu_0 = 1$ e $\mu_{-n} = 1 - \sum_{j=1}^{n} \nu_{-j+1}$, para $n \geq 1$.

Portanto, os números μ_k satisfazem

$$\left.\begin{aligned}
\mu_n &= 1 + \sum_{j=1}^{n} \nu_j, \\
\mu_{-n} &= 1 - \sum_{j=1}^{n} \nu_{-j+1},
\end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, 3, \ldots , \tag{3.2.71}$$

com $\mu_0 = 1$. Como $\nu_j = -\overline{\nu}_{-j+1}$, $n \geq 1$, vale também que

$$\mu_n = 1 + \sum_{j=1}^{n} \nu_j = 1 - \sum_{j=1}^{n} \overline{\nu}_{-j+1} = \overline{\mu}_{-n}, \quad n \geq 1.$$

Assim, podemos estabelecer o seguinte teorema (veja [46]).

Teorema 3.10. *Dadas uma sequência de números reais* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *e uma sequência encadeada positiva* $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ *existe uma medida de probabilidade não trivial* μ *no círculo unitário associada a estas sequências. Se* $M_0 > 0$, *onde* $\{M_n\}$ *é a sequência maximal de parâmetros de* $\{d_n\}$, *então* μ *tem um ponto de massa* M_0 *em* $z = 1$. *Seja* $\mathcal{N}$ *o funcional de momento associado com* $\{c_n\}$ *e* $\{d_n\}$ *como dado no Teorema* 3.8. *Então,*

$$\mathcal{N}[\zeta^{-n}] = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n}(1-\zeta)d\mu(\zeta), \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

Demonstração: Se definirmos o funcional de momento $\mathcal{M}$ por

$$\mathcal{M}[\zeta^{-k}] = \mu_k, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots ,$$

então

$$\mathcal{M}[\zeta^{-k}] = 1 - \mathcal{N}\Big[\frac{1-\zeta^{-k}}{1-\zeta}\Big], \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots . \tag{3.2.72}$$

Como $\nu_{-k} = \mu_{-k} - \mu_{-k-1}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, que segue de (3.2.71), os funcionais de momento $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ também satisfazem

$$\mathcal{N}[\zeta^{k}] = \mathcal{M}[\zeta^{k}(1-\zeta)], \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots . \tag{3.2.73}$$

Como $(z-1)R_n(z)$ tem $n+1$ zeros simples no círculo unitário, podemos considerar a decomposição de frações parciais de $A_n(z)/B_n(z)$

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \frac{R_n(z) - Q_n(z)}{(z-1)R_n(z)} = \frac{\lambda_{n,0}}{z-1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{n,j}}{z - z_{n,j}}, \tag{3.2.74}$$

onde $z_{n,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, são os zeros de R_n. Podemos, então, escrever

$$R_n(z) - Q_n(z) = \lambda_{n,0} R_n(z) + (z-1) \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{n,j} R_n(z)}{z - z_{n,j}}.$$

Fazendo $z \to 1$, obtemos $R_n(1) - Q_n(1) = \lambda_{n,0} R_n(1)$ e

$$\lambda_{n,0} = 1 - \frac{Q_n(1)}{R_n(1)}.$$

Do Lema 3.2, temos

$$1 - d_1 = \lambda_{1,0} > \lambda_{2,0} > \cdots > \lambda_{n,0} > \lambda_{n+1,0} > \cdots$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,0} = M_0,$$

onde M_0 é o primeiro parâmetro da sequência maximal de parâmetros da sequência encadeada $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Fazendo $z \to z_{n,k}$, obtemos

$$-Q_n(z_{n,k}) = (z_{n,k} - 1)\lambda_{n,k} R_n'(z_{n,k})$$

e

$$\lambda_{n,k} = \frac{Q_n(z_{n,k})}{(1 - z_{n,k}) R_n'(z_{n,k})}, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Além disso, como podemos escrever

$$\lambda_{n,k} = \frac{1}{(1 - z_{n,k})} \frac{Q_n(z_{n,k}) R_{n-1}(z_{n,k}) - Q_{n-1}(z_{n,k}) R_n(z_{n,k})}{R_n'(z_{n,k})) R_{n-1}(z_{n,k}) - R_{n-1}'(z_{n,k})) R_n(z_{n,k})}, \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

então

$$\lambda_{n,k} = \frac{U_n(z_{n,k})}{(1 - z_{n,k}) V_n(z_{n,k})}, \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

onde V_n e U_n são dados por (3.2.47) e (3.2.57), respectivamente. Temos, então,

$$\begin{aligned} \lambda_{n,k} &= \frac{2^{2n-1} d_1 d_2 \cdots d_n (z_{n,k})^{n-1}}{(1 - z_{n,k}) 2^{2n-3} (z_{n,k})^{n-2} W_n(x_{n,k}) (z_{n,k} - 1)} \\ &= \frac{4 d_1 d_2 \cdots d_n}{W_n(x_{n,k})} \frac{z_{n,k}}{(z_{n,k} - 1)(1 - z_{n,k})} > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

W_n são definidos por (3.2.45) e, com $z_{n,k} = e^{i\theta_{n,k}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, obtemos

$$\frac{z_{n,k}}{(z_{n,k} - 1)(1 - z_{n,k})} = \frac{1}{4 sen^2(\theta_{n,k}/2)}.$$

Lembremos que, pelo Teorema 3.7,

$$0 < \theta_{n,1} < \theta_{n,2} < \cdots < \theta_{n,n-1} < \theta_{n,n} < 2\pi, \quad n \geq 1.$$

Além disso, considerando o limite de $zA_n(z)/B_n(z)$, quando $z \to \infty$, temos também

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_{n,j} = 1.$$

Se as funções escada $\psi_n(e^{i\theta})$, $n \geq 1$, são definidas em $[0, 2\pi]$ por

$$\psi_n(e^{i\theta}) = \begin{cases} 0, & \theta = 0, \\ \lambda_{n,0}, & 0 < \theta \leq \theta_{n,1}, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \lambda_{n,j}, & \theta_{n,k} < \theta \leq \theta_{n,k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \\ 1, & \theta_{n,n} < \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

então, da definição de integral de Riemann-Stieltjes (veja Seção 1.1), como ψ_n é não decrescente, temos

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z - \zeta} \, d\psi_n(\zeta), \quad n \geq 1.$$

Citamos, agora, dois importantes resultados, que serão necessários a seguir. Esses resultados garantem a convergência de sequências $\{\psi_n\}$ de funções não-negativas, não-decrescentes e uniformemente limitadas (veja [27] para mais detalhes).

Teorema 3.11 (Teorema de Seleção de Helly)**.** *Dada uma sequência $\{\psi_n\}$ de funções não-negativas, não-decrescentes e uniformemente limitadas, existe uma subsequência $\{\psi_{n_\nu}\}$ e uma função ϕ nas mesmas condições de ψ_n, para a qual essa subsequência converge.*

Teorema 3.12. *Seja uma sequência $\{\psi_n\}$ de funções não-negativas, não-decrescentes e uniformemente limitadas que converge para uma função ϕ nas mesmas condições de ψ_n. Então,*

$$\lim_{n \mapsto \infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) d\psi_n = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\phi$$

para qualquer função contínua $f(t)$ em $\mathbb{R}$.

Assim, usando o Teorema de Seleção de Helly existe uma subsequência $\{n_j\}$ tal que $\psi_{n_j}(e^{i\theta})$ converge para uma função limitada e não-decrescente, denotada por $\mu(e^{i\theta})$, em $[0, 2\pi]$, ou seja,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z - \zeta} d\mu(\zeta).$$

De (3.2.69) e (3.2.70), como

$$\int_{\mathcal{C}} d\psi_n(\zeta) = 1 \quad \text{e} \quad \int_{\mathcal{C}} \zeta^k d\psi_n(\zeta) = \mu_{-k}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n,$$

também obtemos

$$\int_{\mathcal{C}} d\mu(\zeta) = 1 = \mathcal{M}[1] \quad \text{e} \quad \int_{\mathcal{C}} \zeta^k d\mu(\zeta) = \mu_{-k} = \mathcal{M}[\zeta^k], \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Assim, o fato de μ ser a única medida de probabilidade que satisfaz às relações anteriores, segue de (1.5.43) e do Teorema 3.9.

A medida μ ter um salto de tamanho M_0 em $z = 1$ é também confirmado por $\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,0} = M_0$. ■

3.2.5 Outras propriedades dos polinômios R_n

Com a medida de probabilidade μ, obtida no Teorema 3.10, temos, então, do Teorema 3.8,

$$\mu_k = \int_{\mathcal{C}} \zeta^k d\mu(\zeta) = \mathcal{M}[\zeta^{-k}].$$

Como $\nu_k = \mu_k - \mu_{k-1}$,

$$\begin{aligned} \nu_k &= \int_{\mathcal{C}} (\zeta^{-k} - \zeta^{-(k-1)}) d\mu(\zeta) \\ &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-k}(1-\zeta) d\mu(\zeta), \\ &= \mathcal{N}[\zeta^{-k}], \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ . \end{aligned}$$

Assim, temos uma representação integral para $\mathcal{N}[\zeta^{-n}]$ e, para $n \geq 1$,

$$\mathcal{N}[\zeta^{-n+k} R_n(\zeta)] = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n+k} R_n(\zeta)(1-\zeta) d\mu(\zeta) = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1. \tag{3.2.75}$$

O próximo lema fornece informações sobre os valores das integrais $\int_{\mathcal{C}} R_n(\zeta) d\mu(\zeta)$.

Lema 3.3. *Seja*

$$\widehat{\gamma}_n = \int_{\mathcal{C}} R_n(\zeta) d\mu(\zeta), \ n \geq 0.$$

Então,

$$\widehat{\gamma}_0 = 1 \quad e \quad \widehat{\gamma}_n = 2(1-m_n)\,\widehat{\gamma}_{n-1}, \ n \geq 1, \tag{3.2.76}$$

onde $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ é a sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Demonstração: Primeiramente, fazendo $k = n-1, n-2, \ldots, 0$ em (3.2.75), obtemos

$$\widehat{\gamma}_n = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-k} R_n(\zeta) d\mu(\zeta), \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad n \geq 1. \tag{3.2.77}$$

Facilmente vemos que $\widehat{\gamma}_0 = \int_{\mathcal{C}} d\mu(\zeta) = \mu_0 = 1$ e

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}_1 &= \int_{\mathcal{C}} R_1(\zeta) d\mu(\zeta) \\ &= \int_{\mathcal{C}} (1+ic_1)\zeta + (1-ic_1) d\mu(\zeta) \\ &= (1+ic_1)\mu_{-1} + (1-ic_1). \end{aligned}$$

Além disso, de $\mu_{-1} = 1 - \nu_0$ e $\nu_0 = 2d_1/(1+ic_1)$, concluímos que

$$\widehat{\gamma}_1 = 2(1-d_1) = 2(1-m_1),$$

provando (3.2.76) para $n = 1$.

Agora, da relação de recorrência de três termos (3.2.50), de (3.2.75) e de (3.2.77), temos

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}_{n+1} &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} R_{n+1}(\zeta) d\mu(\zeta) \\
&= \int_{\mathcal{C}} [(1 + ic_{n+1}) + (1 - ic_{n+1})\zeta^{-1}] R_n(\zeta) d\mu(\zeta) - 4d_{n+1} \int_{\mathcal{C}} R_{n-1}(\zeta) d\mu(\zeta) \\
&= (1 + ic_{n+1})\widehat{\gamma}_n + (1 - ic_{n+1})\widehat{\gamma}_n - 4d_{n+1}\widehat{\gamma}_{n-1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\widehat{\gamma}_{n+1} = 2\widehat{\gamma}_n - 4d_{n+1}\widehat{\gamma}_{n-1}. \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
d_{n+1} &= \frac{\widehat{\gamma}_n}{2\widehat{\gamma}_{n-1}} \left(1 - \frac{\widehat{\gamma}_{n+1}}{2\widehat{\gamma}_n}\right), \\
&= \left[1 - \left(1 - \frac{\widehat{\gamma}_n}{2\widehat{\gamma}_{n-1}}\right)\right] \left[1 - \frac{\widehat{\gamma}_{n+1}}{2\widehat{\gamma}_n}\right] \\
&= (1 - g_n) g_{n+1}, \qquad n \geq 1,
\end{aligned}$$

onde $g_n = 1 - \dfrac{\widehat{\gamma}_n}{2\widehat{\gamma}_{n-1}}$. Note que

$$g_1 = 1 - \frac{\widehat{\gamma}_1}{2\widehat{\gamma}_0} = 1 - \frac{2(1 - m_1)}{2} = m_1,$$

e, como $d_{n+1} = (1 - g_n)g_{n+1}$, $n \geq 1$, concluímos que $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ é a sequência de parâmetros da sequência encadeada $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$. Logo,

$$m_n = 1 - \frac{\widehat{\gamma}_n}{2\widehat{\gamma}_{n-1}}$$

e, então,

$$\widehat{\gamma}_n = 2(1 - m_n)\widehat{\gamma}_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

o que completa a demonstração do lema. ■

Como $R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z)$ é um polinômio de grau exatamente n cujo coeficiente do termo de maior grau é $r_{n,n} = \prod_{k=1}^{n}(1 + ic_k)$, uma consequência imediata do Lema 3.3 é o seguinte resultado

Teorema 3.13. *Se a sequência de polinômios mônicos $\{S_n\}$ é tal que*

$$S_0(z) = 1 \quad e \quad S_n(z) = \frac{R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z)}{\prod_{k=1}^{n}(1 + ic_k)}, \quad n \geq 1,$$

então $\{S_n\}$ é a sequência de polinômios ortogonais no círculo unitário com respeito à medida μ.

Demonstração: Para $k = 0, 1, \ldots, n - 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \overline{\zeta^k} S_n(z) d\mu(\zeta) &= \int_{\mathcal{C}} \overline{\zeta^k} \frac{R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z)}{\prod_{k=1}^{n}(1 + ic_k)} d\mu(\zeta) \\
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1 + ic_k)} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-k} \left[R_n(\zeta) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(\zeta)\right] d\mu(\zeta) \\
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1 + ic_k)} \left[\widehat{\gamma}_n - 2(1 - m_n)\widehat{\gamma}_{n-1}\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, o resultado está provado. ∎

Além disso, com a fórmula para $R_n(0)$ dada em (3.2.52), os coeficientes de Verblunsky $\alpha_{n-1} = -\overline{S_n(0)}$, $n \geq 1$, são dados por

$$\alpha_{n-1} = \frac{1 - 2m_n - ic_n}{1 + ic_n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + ic_k}{1 - ic_k}, \quad n \geq 1.$$

3.3 Exercícios

Exercício 3.1. Seja ψ uma medida simétrica no círculo unitário, isto é,

$$d\psi(1/z) = -d\psi(z).$$

Mostre que os momentos μ_n são todos reais e que $\mu_{-n} = \mu_n$, para $n \geq 1$.

Exercício 3.2. Prove que

$$S_n^{(2)}(z) = \frac{S_n(z) - S_n^*(z)}{1 - S_n(0)},$$

definido no Teorema 3.2, satisfaz à relação de recorrência (3.1.6).

Exercício 3.3. Demonstre a relação (3.1.15), isto é, que os polinômios $P_n^{\phi_2}$ podem ser escritos como combinação dos polinômios $P_n^{\phi_1}$ da seguinte forma:

$$(1 - x^2)P_n^{\phi_2}(x) = \frac{-1}{P_n^{\phi_1}(1)} \left\{ P_n^{\phi_1}(1)P_{n+2}^{\phi_1}(x) - P_{n+2}^{\phi_1}(1)P_n^{\phi_1}(x) \right\}.$$

Exercício 3.4. Demonstre a equação (3.1.16), ou seja, demonstre que

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_2}(x) + \tilde{d}_{n-2}P_{n-2}^{\phi_2}(x), \quad n \geq 2,$$

com

$$\tilde{d}_{n-2} = \frac{\int_{-1}^{1} P_n^{\phi_1}(x)P_{n-2}^{\phi_2}(x)d\phi_2(x)}{\int_{-1}^{1}(P_{n-2}^{\phi_2}(x))^2 d\phi_2(x)} = -\frac{\int_{-1}^{1}(P_n^{\phi_1}(x))^2 d\phi_1(x)}{\int_{-1}^{1}(P_{n-2}^{\phi_2}(x))^2 d\phi_2(x)}, \quad n \geq 2.$$

Exercício 3.5. Demonstre as seguintes relações entre os coeficientes $\tilde{d}_n$, $\alpha_n^{\phi_1}$ e $\alpha_n^{\phi_2}$

$$\frac{\tilde{d}_{n-1}}{\tilde{d}_{n-2}} = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_2}}, \quad n \geq 2$$

e

$$\tilde{d}_{n-1} - \tilde{d}_{n-2} = \alpha_{n+1}^{\phi_2} - \alpha_{n+1}^{\phi_1}, \quad n \geq 2,$$

com $\tilde{d}_0 = -\dfrac{\alpha_3^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_1^{\phi_2}} = \alpha_2^{\phi_2} - \alpha_2^{\phi_1}$.

Exercício 3.6. Mostre que a sequência $\{l_n\}$ satisfaz às relações

$$\begin{aligned} \frac{(l_{n+1} - 1)}{(l_{n-1} - 1)} &= \frac{\tilde{d}_{n-1}}{\tilde{d}_{n-2}}, \quad n \geq 2, \\ (l_{n+1} - 1)(l_n - 1) &= -4\tilde{d}_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Sugestão: Use (3.1.19) e, em seguida, indução matemática sobre n.

Exercício 3.7. Demonstre as relações (3.1.20) e (3.1.21), ou seja, demonstre que

$$\frac{(l_{2n+1}-1)}{2} = -\frac{\alpha_{2n+2}^{\phi_1}\alpha_{2n}^{\phi_1}\ldots\alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}}{\alpha_{2n}^{\phi_2}\alpha_{2n-2}^{\phi_2}\ldots\alpha_4^{\phi_2}\alpha_2^{\phi_2}}\,, \quad \frac{(l_{2n}-1)}{2} = -\frac{\alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\ldots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_2}\alpha_{2n-3}^{\phi_2}\ldots\alpha_3^{\phi_2}\alpha_1^{\phi_2}}$$

e

$$\frac{(l_{2n-1}+1)}{2} = \frac{\alpha_{2n-1}^{\phi_2}\alpha_{2n-3}^{\phi_2}\ldots\alpha_1^{\phi_2}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\alpha_{2n-3}^{\phi_1}\ldots\alpha_1^{\phi_1}}\,, \quad \frac{(l_{2n}+1)}{2} = \frac{\alpha_{2n}^{\phi_2}\alpha_{2n-2}^{\phi_2}\ldots\alpha_2^{\phi_2}}{\alpha_{2n}^{\phi_1}\alpha_{2n-2}^{\phi_1}\ldots\alpha_2^{\phi_1}}\,.$$

Exercício 3.8. Se ϕ_1 e ϕ_2 satisfazem (3.1.14), demonstre que existe uma sequência de números reais $\{l_n\}$ tal que, para $n \geq 1$,

$$\alpha_{n+1}^{\phi_1} = -\frac{1}{4}(l_n-1)(l_{n-1}+1)\,, \quad \alpha_{n+1}^{\phi_2} = -\frac{1}{4}(l_n-1)(l_{n+1}+1)$$

e

$$\tilde{d}_{n-1} = -\frac{1}{4}(l_n-1)(l_{n+1}-1)\,, \quad n \geq 1\,,$$

com $l_0 = 1$ e $l_1 = 1 - 2\alpha_2^{\phi_2}$.

Exercício 3.9. a) Mostre que (3.2.29) vale, ou seja,

$$P_n(w;\, z) = \frac{1}{z-w}\frac{S_{n+1}(z) - \tau_{n+1}(w)S_{n+1}^*(z)}{1+\tau_{n+1}(w)\alpha_n}, \quad n \geq 0.$$

b) Mostre que $P_n(w;\, w) \neq 0$.

Exercício 3.10. Mostre que as relações (3.2.31) e (3.2.32) valem.

Exercício 3.11. Mostre que (3.2.33) vale, ou seja,

$$P_n(w;\, z) = \frac{zS_n(z) - w\tau_n(w)S_n^*(z)}{z-w}, \quad n \geq 0.$$

Exercício 3.12. Mostre que a funções G_n, definidas por (3.2.42), são contínuas e deriváveis no intervalo $[-1, 1]$ e que satisfazem

$$(-1)^n G_n(-1) = G_n(1) > 0, \quad n \geq 1.$$

Exercício 3.13. Mostre a relação (3.2.54), ou seja,

$$Q_n^*(z) = z^{n-1}\overline{Q_n(1/\overline{z})} = Q_n(z), \quad n \geq 1,$$

onde Q_n e δ são dados em (3.2.51).

Exercício 3.14. Demonstre a relação (3.2.57), ou seja

$$U_n(z) = 4d_n z U_{n-1}(z) = 2^{2n-1} d_1 d_2 \cdots d_n z^{n-1}, \quad n \geq 2.$$

com $U_1(z) = 2d_1$.

Capítulo 4

Aplicações

4.1 Fórmulas de quadratura

Consideremos a integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Fórmulas de quadratura são fórmulas que aproximam o valor numérico de $I(f)$ através de uma combinação linear de valores conhecidos da função f, ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} W_{n,k} f(x_{n,k}) + E_n(f).$$

Os valores $W_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, são chamados pesos da fórmula de quadratura, $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, os nós e $E_n(f)$ é o erro cometido na aproximação. Os textos [32, 47] são boas referências sobre o assunto.

Para construir fórmulas de quadratura, devemos determinar os valores n, $x_{n,k}$, e $W_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Por exemplo, podemos escolher os nós tais que

$$a \leq x_{n,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,n-1} < x_{n,n} \leq b$$

e os pesos como

$$W_{n,k} = \int_a^b \frac{\pi(x)}{(x - x_{n,k})\pi'(x_{n,k})}\, dx, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.1.1}$$

onde $\pi(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,n})$. Para $k = 1, 2, \ldots, n$, os polinômios

$$\frac{\pi(x)}{(x - x_{n,k})\pi'(x_{n,k})}$$

são os polinômios fundamentais de Lagrange.

Da teoria de interpolação polinomial, obtemos

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} W_{n,k} f(x_{n,k}) + E_n(f), \tag{4.1.2}$$

onde

$$E_n(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \pi(x) f^{(n+1)}(\xi_x) dx, \quad \xi_x \in (x_{n,1}, x_{n,n}). \tag{4.1.3}$$

Definição 4.1. *Fórmulas de quadratura do tipo* (4.1.2)*, cujos pesos são dados por* (4.1.1)*, são chamadas fórmulas de quadratura interpolatórias.*

Definição 4.2. *Dizemos que uma regra de quadratura tem grau de precisão* m*, se* $E_n(f) = 0$ *para todo polinômio* $f \in \mathbb{P}_m$ *e existe um polinômio de grau* $m+1$*,* $\tilde{f}$*, tal que* $E_n(\tilde{f}) \neq 0$.

Teorema 4.1. (ver [32]) *A fórmula de quadratura* (4.1.2) *é interpolatória se, e somente se,* $E_n(f) = 0$ *para todo* $f \in \mathbb{P}_{n-1}$*, ou seja, é exata para todo polinômio de grau menor ou igual a* $n-1$.

Deixamos a demonstração desse teorema a cargo do leitor (Exercício 4.1).

4.1.1 Fórmulas de quadratura gaussianas

Consideremos, agora, fórmulas de quadratura interpolatórias do tipo

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} W_{n,k} f(x_{n,k}) + E_n(f), \tag{4.1.4}$$

cujos nós $x_{n,k}, k = 1, 2, \ldots, n$, são os zeros do polinômio P_n, ortogonal com relação à medida ϕ no intervalo (a, b), e os pesos são dados por

$$W_{n,k} = \int_a^b \frac{P_n(x)}{(x - x_{n,k})P_n'(x_{n,k})} d\phi(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.1.5}$$

Teorema 4.2. (ver [32]) *A fórmula de quadratura interpolatória* (4.1.4)*, com pesos dados por* (4.1.5)*, é exata para polinômios de grau no máximo* $2n-1$*, ou seja,* $E_n(f) = 0$ *para* $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$.

Deixamos a demonstração desse teorema como exercício (Exercício 4.1).

As fórmulas de quadratura com n pontos que têm precisão $2n-1$ são conhecidas como fórmulas de quadratura gaussianas.

Não é difícil mostrar que os pesos $W_{n,k},\ k = 1, 2, \ldots, n$, das fórmulas de quadratura gaussianas são positivos (Exercício 4.2).

Além disso, utilizando os polinômios associados aos ortogonais definidos por (1.4.16), obtemos

$$W_{n,k} = \frac{Q_n(x_{n,k})}{P_n'(x_{n,k})}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.1.6}$$

Como $P_n(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,n})$, podemos escrever $Q_n(x)/P_n(x)$ como

$$\begin{aligned}
\frac{Q_n(x)}{P_n(x)} &= \frac{\lambda_{n,1}}{(x - x_{n,1})} + \frac{\lambda_{n,2}}{(x - x_{n,2})} + \cdots + \frac{\lambda_{n,n}}{(x - x_{n,n})} \\
&= \frac{\lambda_{n,1}(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,n}) + \cdots + \lambda_{n,n}(x - x_{n,1}) \cdots (x - x_{n,n-1})}{(x - x_{n,1}) \cdots (x - x_{n,n})}.
\end{aligned}$$

Para $x = x_{n,k}$, obtemos

$$Q_n(x_{n,k}) = \lambda_{n,k}(x_{n,k} - x_{n,1}) \cdots (x_{n,k} - x_{n,k-1})(x_{n,k} - x_{n,k+1}) \cdots (x_{n,k} - x_{n,n}).$$

Portanto,

$$\lambda_{n,k} = \frac{Q_n(x_{n,k})}{P_n'(x_{n,k})} = W_{n,k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

No. de pontos n	Valores aproximados
3	$3.\underline{15346625333877}$
6	$3.0909\underline{6614867156}$
9	$3.090939\underline{03343554}$
12	$3.090939\underline{60019774}$
15	$3.0909395989\underline{0973}$
18	3.09093959891120
	Valor exato: 3.09093959891120 como 15 algarismos significativos

Tabela 4.1: Aproximações para o valor da integral I_1, dada em (4.1.9), utilizando a fórmula de quadratura de Gauss-Chebyshev (4.1.8) com $n = 3, 6, ..., 18$.

Podemos, então, escrever

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)} \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{W_{n,k}}{x - x_{n,k}}. \tag{4.1.7}$$

Exemplo 4.1. Consideremos a fórmula de quadratura de Gauss-Chebyshev

$$\int_{-1}^{1} f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right) + E_n(f), \tag{4.1.8}$$

com $E_n(f) = 0$ sempre que $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$, onde

$$x_{n,k} = cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

são os zeros do polinômio de Chebyshev de primeira espécie (1.4.23) de grau n. Os pesos

$$W_{n,k} = \frac{\pi}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

podem ser obtidos utilizando (4.1.6). Para mais detalhes, veja [2, 32, 47].

Vamos utilizar esta fórmula para encontrar aproximações para o valor da integral definida

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{sen(x^4) + e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx, \tag{4.1.9}$$

cujo valor, com 15 algarismos significativos, é 3.09093959891120.

A Tabela 4.1 mostra aproximações obtidas através da fórmula de quadratura de Gauss-Chebyshev (4.1.8) com $f(x) = sen(x^4) + e^{-x^2}$ e diferentes números de nós.

4.1.2 Fórmulas de quadratura e os polinômios L-ortogonais

Na referência [42] foram consideradas regras de quadratura da forma

$$\int_a^b f(t)d\psi(t) = \sum_{k=1}^{n} V_{n,k} f(t_{n,k}) + \tilde{E}_n(f), \tag{4.1.10}$$

onde ψ é uma medida forte de Stieltjes em $(a,b) \subset (0,\infty)$.

Essas fórmulas estão associadas ao polinômios L-ortogonais e, também, às fórmulas de quadratura para funções racionais (ver [12] e [21]).

Escolhendo $t_{n,k},\ k = 1,2,\ldots,n$, como os zeros dos polinômios L-ortogonais B_n com relação a ψ em (a,b), vamos determinar os pesos $V_{n,k}$ de forma que a fórmula de quadratura (4.1.10) seja interpolatória.

Seja $F(t) = t^n f(t)$. Construindo o polinômio de interpolação de Lagrange de $F(t)$ sobre os n pontos distintos $t_{n,1}, t_{n,2}, \ldots, t_{n,n}$, obtemos

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n} l_{n,k}(t) F(t_{n,k}) + R_n(t),$$

ou seja,

$$f(t) = t^{-n} \sum_{k=1}^{n} l_{n,k}(t) t_{n,k}^{n} f(t_{n,k}) + t^{-n} R_n(t), \tag{4.1.11}$$

onde os polinômios fundamentais de Lagrange, $l_{n,k}$, são dados por

$$l_{n,k}(t) = \frac{B_n(t)}{(t - t_{n,k}) B_n'(t_{n,k})}.$$

Integrando ambos os membros de (4.1.11) em (a,b) com relação a ψ e comparando com (4.1.10), obtemos

$$V_{n,k} = \frac{t_{n,k}^{n}}{B_n'(t_{n,k})} \int_a^b \frac{t^{-n} B_n(t)}{t - t_{n,k}} d\psi(t), \quad k = 1,2,\ldots,n, \tag{4.1.12}$$

e

$$\tilde{E}_n(f) = \frac{1}{n!} \int_a^b t^{-n} B_n(t) F^{(n)}(\xi_t) d\psi(t), \quad \xi_t \in [t_{n,1}, t_{n,n}]. \tag{4.1.13}$$

Definição 4.3. *Fórmulas de quadratura do tipo* (4.1.10)*, cujos pesos são dados por* (4.1.12)*, são chamadas fórmulas de quadratura L-gaussianas.*

Os pesos da regra de quadratura (4.1.10) são positivos (Exercício 4.2).

Quanto ao grau de precisão dessa regra de quadratura, ela é exata se $t^n f(t) \in \mathbb{P}_{2n-1}$. De fato, se $F(t) = t^n f(t) \in \mathbb{P}_{n-1}$, então $F^{(n)}(t) \equiv 0$. Logo, $\tilde{E}_n(f) = 0$. Suponhamos que $F \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Então, podemos escrever

$$F(t) = B_n(t) q_{n-1}(t) + p_{n-1}(t), \tag{4.1.14}$$

onde q_{n-1} e p_{n-1} são polinômios de grau $n-1$. Observe que $F(t_{n,k}) = p_{n-1}(t_{n,k}), k = 1,2,\ldots,n$. Se escrevermos $q_{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i t^i$, teremos

$$\int_a^b t^{-n} B_n(t) q_{n-1}(t) d\psi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i \int_a^b t^{-n+i} B_n(t) d\psi(t) = 0, \tag{4.1.15}$$

por (2.2.6).

Logo, por (4.1.14),

$$\int_a^b f(t)d\psi(t) = \int_a^b t^{-n}B_n(t)q_{n-1}(t)d\psi(t) + \int_a^b \underbrace{t^{-n}p_{n-1}(t)}_{g(t)}d\psi(t).$$

Como $p_{n-1}(t) = t^n g(t)$ é um polinômio de grau $\leq n-1$, então $\tilde{E}_n(g) = 0$. Assim, de (4.1.15),

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)d\psi(t) &= \int_a^b g(t)d\psi(t) = \sum_{k=1}^{n} V_{n,k}g(t_{n,k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} V_{n,k}t_{n,k}^{-n}p_{n-1}(t_{n,k}) = \sum_{k=1}^{n} V_{n,k}f(t_{n,k}).\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{E}_n(f) = 0$ quando $t^n f(t) \in \mathbb{P}_{2n-1}$.

Consideremos, agora, os polinômios C_n, associados aos L-ortogonais, definidos em (2.2.15). O polinômio interpolador de C_n de grau $n-1$ sobre os n zeros $t_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, de B_n coincide com o polinômio C_n, ou seja, o erro na interpolação é zero. Dessa forma, usando interpolação de Lagrange, temos

$$C_n(t) = B_n(t)\sum_{k=1}^{n} \frac{C_n(t_{n,k})}{(t-t_{n,k})B_n'(t_{n,k})}.$$

Logo,

$$\frac{C_n(t)}{B_n(t)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_n(t_{n,k})}{(t-t_{n,k})B_n'(t_{n,k})} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n,k}}{t-t_{n,k}}.$$

com $\lambda_{n,k} = \dfrac{C_n(t_{n,k})}{B_n'(t_{n,k})}$.

Fazendo $t = t_{n,k}$ em (2.2.16), temos

$$C_n(t_{n,k}) = t_{n,k}^m \int_a^b \frac{z^{-m}B_n(z)}{z-t_{n,k}}d\psi(z), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Como $C_n(t_{n,k}) = \lambda_{n,k}B_n'(t_{n,k})$, substituindo na última relação para $m = n$, obtemos

$$\lambda_{n,k} = \frac{t_{n,k}^n}{B_n'(t_{n,k})}\int_a^b \frac{z^{-n}B_n(z)}{z-t_{n,k}}d\psi(z).$$

De (4.1.12), $\lambda_{n,k} = V_{n,k}$ e, portanto,

$$V_{n,k} = \frac{C_n(t_{n,k})}{B_n'(t_{n,k})}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.1.16}$$

Em [4], considerou-se propriedades dos pesos e dos nós de certas fórmulas de quadratura associados a polinômios L-ortogonais B_n^{ψ}, cuja medida forte ψ, definida em (a, b), com $\beta = \sqrt{ab}$ e $0 \leq a < \beta < b \leq \infty$, satisfaz à propriedade (2.2.34), isto é,

$$\frac{d\psi(t)}{\sqrt{t}} = -\frac{d\psi(\beta^2/t)}{\sqrt{\beta^2/t}}, \quad t \in (a, b). \tag{4.1.17}$$

Lembramos que, neste caso, os polinômios L-ortogonais B_n, com relação à medida forte ψ, satisfazem à relação de recorrência (1) com $\beta_n^\psi = \beta$, ou seja,

$$B_{n+1}^\psi(t) = (t - \beta)B_n^\psi(t) - \alpha_{n+1}^\psi\, t\, B_{n-1}^\psi(t),$$

com $B_0^\psi(t) = 1$ e $B_1^\psi(t) = t - \beta$ (veja Seção 2.2.4).

Nesse mesmo trabalho, considerou-se, também, os polinômios ortogonais P_n^ϕ associados a uma medida simétrica ϕ, a correspondente fórmula de quadratura gaussiana (4.1.4), ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} W_{n,k} f(x_{n,k}) + E_n(f), \tag{4.1.18}$$

onde $E_n(f) = 0$ para $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$, e a transformação definida em (2.2.35) por

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(\sqrt{t} - \beta/\sqrt{t}), \quad t \in (0, \infty)$$

cuja sua inversa é dada por $t(x) = (\sqrt{\alpha x^2 + \beta} + \sqrt{\alpha} x)^2$, $x \in (0, \infty)$.

Na Seção 2.2.4, vimos que a relação

$$d\psi(t) = A\frac{t}{t + \beta} d\phi(x(t)) \tag{4.1.19}$$

vale e ψ satisfaz (4.1.17) se, e somente se, ϕ é uma medida simétrica em $[-d, d]$, onde $d = x(b)$ e

$$B_n^\psi(t) = (2\sqrt{\alpha t})^n P_n^\phi(x(t)). \tag{4.1.20}$$

Em [45], foi demonstrado que, sob as condições anteriores, os pesos e os nós das respectivas fórmulas de quadratura estão relacionados por (Exercício 4.3)

$$t_{n,k} = t(x_{n,k}) \quad \text{e} \quad V_{n,k} = A\frac{t_{n,k}}{t_{n,k} + \beta} W_{n,k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.1.21}$$

Exemplo 4.2. Consideremos novamente a fórmula de quadratura de Gauss-Chebyshev

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k}) + E_n(f),$$

com $E_n(f) = 0$ sempre que $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$, onde $x_{n,k} = cos((2k - 1)\pi/(2n))$, $k = 1, 2, \ldots, n$, são os zeros do polinômio de Chebyshev de primeira espécie (1.4.23) de grau n.

Como $d\phi(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}dx$ é uma medida simétrica no intervalo $(-1, 1)$, de (4.1.19), obtemos

$$d\psi(t) = \frac{A}{2}\frac{1}{\sqrt{b - t}\sqrt{t - a}} dt \quad \text{em } (a, b),$$

onde $a = t(-1) = (\sqrt{\alpha + \beta} - \sqrt{\alpha}x)^2$ e $b = t(1) = (\sqrt{\alpha + \beta} + \sqrt{\alpha}x)^2$, com $a = \beta^2/b$.

Escolhendo, sem perda de generalidade, $A = 2$ e utilizando (4.1.21), obtemos a fórmula de quadratura L-Gaussiana

$$\int_a^b F(t)\frac{1}{\sqrt{b - t}\sqrt{t - a}} dt = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_{n,k}}{t_{n,k} + \beta} F(t_{n,k}) + \tilde{E}_n(f), \tag{4.1.22}$$

No. de pontos n	Valores aproximados Gauss-Chebyshev	Valores aproximados L-Gaussiana
2	3.7342041050	4.2906260754
5	4.3454615803	4.3988623516
10	4.3982577305	4.3988982029
15	4.3988906142	4.3988982029
20	4.3988981130	4.3988982029
25	4.3988982019	4.3988982029
30	4.3988982029	4.3988982029
$g(x) = e^x$ $r = 1$ $\lambda = 1.1$	Valor exato: 4.3988982029 como 11 algarismos significativos	

Tabela 4.2: Aproximações para o valor da integral I_2, dada em (4.1.23), com $r = 1$ e $\lambda = 1.1$, utilizando a quadratura de Gauss-Chebyshev (4.1.8) e a quadratura L-gaussiana (4.1.22).

onde $\tilde{E}_n(f) = 0$ quando $t^n f(t) \in \mathbb{P}_{2n-1}$ e os pesos $t_{n,k}$ são dados por

$$t_{n,n+1-k} = (\beta + \alpha v_k^{(n)}) + \sqrt{(\beta + \alpha v_k^{(n)})^2 - \beta^2} \quad e \quad t_{n,k} = \beta^2 / t_{n,n+1-k},$$

com $v_k^{(n)} = 1 + cos((2k-1)\pi/n)$.

Este exemplo de fórmula de quadratura L-Gaussiana foi apresentado por Sri Ranga em [42].

Exemplo 4.3. Consideremos, agora, a integral

$$I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{g(x)}{(x+\lambda)^r} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \tag{4.1.23}$$

onde g é uma função contínua em $[-1, 1]$, λ é um número real tal que $\lambda > 1$ e r é um número inteiro. Esse exemplo foi dado em [42] e [44] com $|\lambda| > 1$.

Como no Exemplo 4.1, uma escolha natural para aproximar essa integral seria aplicar a quadratura de Gauss-Chebyshev. Porém, quando $r \geq 1$ e λ está próximo de 1, a quadratura de Gauss-Chebyshev apresenta um comportamento de convergência vagaroso, como mostram as Tabelas 4.2 e 4.3

Utilizando uma transformação linear, alteramos a integral I_2 dada em (4.1.23) de modo a podermos aplicar a fórmula de quadratura L-gaussiana (4.1.22) do Exemplo 4.2. Sejam a e b dois números positivos tais que $b > a$. Então, tomando a transformação linear, com $x \in [-1, 1]$ e $t \in [a, b]$,

$$x = x(t) = \frac{2t}{b-a} - \frac{b+a}{b-a},$$

obtemos

$$I_2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^r \int_a^b g\left(\frac{2t}{b-a} - \frac{b+a}{b-a}\right) \frac{1}{t^r} \frac{1}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}} dt.$$

Podemos tomar, por exemplo, $a = \lambda - 1$ e $b = \lambda + 1$. Logo, $b - a = 2$, $b + a = 2\lambda$ e, portanto,

$$I_2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^r \int_a^b g\,(t-\lambda)\, \frac{1}{t^r} \frac{1}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}} dt. \tag{4.1.24}$$

No. de pontos n	Valores aproximados Gauss-Chebyshev	Valores aproximados L-Gaussiana
2	4.412345645	10.089808549
5	7.104198673	10.26854495
10	9.361172196	10.263987847
15	10.034529940	10.263987847
20	10.207529933	10.263987847
30	10.260631961	10.263987847
40	10.263788989	10.263987847
50	10.263976065	10.263987847
60	10.263987149	10.263987847
$g(x) = e^x$ $r = 1$ $\lambda = 1.01$	Valor exato: 10.263987847 como 11 algarismos significativos	

Tabela 4.3: Aproximações para o valor da integral I_2, dada em (4.1.23), com $r = 1$ e $\lambda = 1.01$, utilizando a quadratura de Gauss-Chebyshev (4.1.8) e a quadratura L-gaussiana (4.1.22).

Agora, podemos aplicar a fórmula de quadratura L-gaussiana (4.1.22) a essa integral. Por exemplo, escolhendo $g(x) = e^x$, calculamos aproximações para I_2 pelas fórmulas de quadratura de Gauss-Chebyshev e L-gaussiana.

A Tabela 4.2 mostra que, com $g(x) = e^x$, $r = 1$ e $\lambda = 1.1$, a quadratura L-gaussiana converge para o valor exato com 11 algarismos significativos com $n = 10$ nós, enquanto que a quadratura de Gauss-Chebyshev precisa de cerca de $n = 30$ nós para fornecer a mesma precisão.

Quando diminuímos o valor de λ para 1.01, Tabela 4.3, a quadratura L-gaussiana novamente converge com $n = 10$ pontos, enquanto que no caso da quadratura de Gauss-Chebyshev a convergência se dará para $n > 60$ pontos.

Consideremos, agora, uma medida simétrica ϕ_p definida em $\Omega = [-d, -c] \cup [c, d]$, cujos coeficientes $\alpha_{n+1}^{\phi_p}$ da relação de recorrência dos polinômios ortogonais associados, $P_{n+1}^{\phi_p}$, satisfazem

$$\alpha_2^{\phi_p} = p\lambda_0, \quad \alpha_{2n+1}^{\phi_p} = \lambda_1 \quad \text{e} \quad \alpha_{2n+2}^{\phi_p} = \lambda_0, \quad n \geq 1, \tag{4.1.25}$$

onde $0 < p, \lambda_0, \lambda_1 < \infty$, e seja a medida forte ψ_p definida por

$$d\psi_p(t) = \frac{2t}{t + \beta} d\phi_p(x(t)).$$

Como visto em (2.2.38), os coeficientes das relações de recorrências dos polinômios ortogonais e L-ortogonais associados satisfazem $\alpha_{n+1}^{\psi_p} = 4\alpha\alpha_{n+1}^{\phi_p}$, $n \geq 1$.

Assim, podemos escrever

$$\alpha_2^{\psi_p} = 4\alpha p\lambda_0 = p\alpha_0 \quad \text{e} \quad \alpha_{2n+1}^{\psi_p} = 4\alpha\lambda_1 = \alpha_1, \quad \alpha_{2n+2}^{\psi_p} = 4\alpha\lambda_0 = \alpha_0, \quad n \geq 1.$$

A medida ψ_p é definida em $\tilde{\Omega} = [a, a_1] \cup [b_1, b]$, onde $b = t(d), b_1 = t(c)$ e $ab = a_1 b_1 = \beta^2$.

As quadraturas com número par e com número ímpar de pontos devem ser estudadas separadamente. Para $2n$ pontos, observa-se que

$$\begin{aligned} P_4^{\phi_p}(z) &= [z^2-(\lambda_0+\lambda_1)]P_2^{\phi_p}(z)-\lambda_0\lambda_1 p P_0^{\phi_p}(z), \\ P_{2n+4}^{\phi_p}(z) &= [z^2-(\lambda_0+\lambda_1)]P_{2n+2}^{\phi_p}(z)-\lambda_0\lambda_1 P_{2n}^{\phi_p}(z), \quad n\geq 1, \\ Q_{2n+2}^{\phi_p}(z) &= [z^2-(\lambda_0+\lambda_1)]Q_{2n}^{\phi_p}(z)-\lambda_0\lambda_1 Q_{2n-2}^{\phi_p}(z), \quad n\geq 1, \end{aligned}$$

com $P_0^{\phi_p}(z)=1$, $P_2^{\phi_p}(z)=z^2-p\lambda_0$, $Q_0^{\phi_p}(z)=0$ e $Q_2^{\phi_p}(z)=z$. Além disso,

$$W_{2n,r}=\frac{Q_{2n}^{\phi_p}(x_{2n,r})}{P_{2n}^{\prime\phi_p}(x_{2n,r})}, \quad r=1,2,\ldots,2n.$$

Dessas relações pode-se mostrar o seguinte resultado.

Teorema 4.3. *O nós $x_{2n,r}$ e os pesos $W_{2n,r}$, $r=1,2,...,2n$, da fórmula de quadratura gaussiana com $2n$ pontos*

$$\int_\Omega f(x)d\phi_p(x)=\sum_{r=1}^{2n}W_{2n,r}f(x_{2n,r}), \qquad n\geq 1,$$

satisfazem

$$W_{2n,r}=\frac{p\left[d^2-(x_{2n,r})^2\right]\left[(x_{2n,r})^2-c^2\right]}{2\left\{2n(x_{2n,r})^2R(x_{2n,r})+pS(x_{2n,r})\right\}},$$

desde que $G(x_{2n,r})\neq 0$, onde $G(z)=\sqrt{[z^2-(\lambda_0+\lambda_1)]^2-4\lambda_0\lambda_1}$,

$$R(z)=pA(p)-(p-1)z^2, \qquad S(z)=(\lambda_0-\lambda_1)A(p)-A_1(p)z^2,$$

com

$$A(p)=(p-1)\lambda_0+\lambda_1 \quad \text{e} \quad A_1(p)=(p-1)\lambda_0-\lambda_1.$$

Utilizando o Teorema 4.3 e a transformação (2.2.35), é possível mostrar que:

Teorema 4.4. *Os nós $t_{2n,r}$ e os pesos $V_{2n,r}$, $r=1,2,...,2n$, da fórmula de quadratura L-gaussiana com $2n$ pontos*

$$\int_{\tilde{\Omega}} F(t)d\psi_p(t)=\sum_{r=1}^{2n}V_{2n,r}F(t_{2n,r}), \qquad n\geq 1,$$

satisfazem

$$V_{2n,r}=\frac{t_{2n,r}}{(t_{2n,r}+\beta)}\,\frac{p(b-t_{2n,r})(t_{2n,r}-a)(t_{2n,r}-a_1)(t_{2n,r}-b_1)}{2n\tilde{R}(t_{2n,r})(t_{2n,r}-\beta)^2+p\tilde{S}(t_{2n,r})t_{2n,r}},$$

desde que $G_1(t_{2n,r})\neq 0$, onde $G_1(z)=(z-b)(z-a)(z-a_1)(z-b_1)$,

$$\tilde{R}(z)=p\tilde{A}(p)z-(p-1)(z-\beta)^2, \qquad \tilde{S}(z)=(\alpha_0-\alpha_1)\tilde{A}(p)z-\tilde{A}_1(p)(z-\beta)^2,$$

com

$$\tilde{A}(p)=(p-1)\alpha_0+\alpha_1 \quad \text{e} \quad \tilde{A}_1(p)=(p-1)\alpha_0-\alpha_1.$$

Resultados análogos foram apresentados para fórmulas de quadratura com $2n+1$ pontos, utilizando-se o fato de que

$$\left.\begin{aligned} P^{\phi_p}_{2n+3}(z) &= [z^2-(\lambda_0+\lambda_1)]P^{\phi_p}_{2n+1}(z)-\lambda_0\lambda_1 P^{\phi_p}_{2n-1}(z),\\ Q^{\phi_p}_{2n+3}(z) &= [z^2-(\lambda_0+\lambda_1)]Q^{\phi_p}_{2n+1}(z)-\lambda_0\lambda_1 Q^{\phi_p}_{2n-1}(z), \end{aligned}\right. \quad n\ge 1,$$

com $P^{\phi_p}_1(z)=z$, $P^{\phi_p}_3(z)=z\{z^2-(p\lambda_0+\lambda_1)\}$, $Q^{\phi_p}_1(z)=1$ e $Q^{\phi_p}_3(z)=z^2-\lambda_1$ e

$$W_{2n+1,r}=\frac{Q^{\phi_p}_{2n+1}(x_{2n+1,r})}{P'^{\phi_p}_{2n+1}(x_{2n+1,r})},\quad r=1,2,\ldots,2n+1.$$

Também é possível encontrar fórmulas de quadratura gaussianas associadas a polinômios que são combinações lineares de polinômios ortogonais e quadraturas L-gaussianas associadas a polinômios que são combinações lineares de polinômios L-ortogonais (ver [3]).

Consideremos, novamente, os polinômios ortogonais P_n associados a uma medida simétrica ϕ em $[-d,d]$, os polinômios L-ortogonais B_n associados a uma medida forte ψ e, também, a transformação (2.2.35).

Seja r um número inteiro tal que $0\le r\le \bar{n}=\lfloor n/2\rfloor$, onde $\lfloor n/2\rfloor$ é o menor inteiro maior do que $n/2$. Consideremos os polinômios definidos por

$$\tilde{P}_n(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_r;x)=\sum_{k=0}^{r}\lambda_k P_{n-2k}(x),\quad 0\le r\le \bar{n}, \tag{4.1.26}$$

onde $\lambda_k\in\mathbb{R}$, $\lambda_0\neq 0$. Os polinômios $\tilde{P}_n$ satisfazem (Exercício 4.4)

$$\int_{-d}^{d} x^s\tilde{P}_n(x)d\phi(x)=0,\quad s=0,1,\ldots,n-1-2r.$$

Um polinômio P_n de grau n satisfaz $P_n(x)=(-1)^nP_n(-x)$ se existe um único conjunto de números reais $\lambda_0,\ldots,\lambda_{\bar{n}}$, tal que (Exercício 4.5)

$$P_n(x)=\tilde{P}_n(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{\bar{n}};x). \tag{4.1.27}$$

Se escolhermos os parâmetros $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ de forma que os zeros dos polinômios $\tilde{P}_n$, denotados por $\tilde{x}_{n,j}$, $j=1,2,\ldots,n$, sejam todos reais, distintos e pertencentes ao intervalo $[-d,d]$, pode-se construir fórmulas de quadratura gaussianas dadas por

$$\int_{-d}^{d} f(x)d\phi(x)=\sum_{j=1}^{n}\tilde{W}_{n,j}f(\tilde{x}_{n,j})+E_n(f), \tag{4.1.28}$$

onde $E_n(f)=0$ para $f\in\mathbb{P}_{2n-2r-1}$ (Exercício 4.6).

Definimos, também, os polinômios

$$\tilde{B}_n(\tilde{\lambda}_0,\ldots,\tilde{\lambda}_r;t)=\sum_{k=0}^{r}\tilde{\lambda}_k t^k B_{n-2k}(t), \tag{4.1.29}$$

e a fórmula de quadratura L-gaussiana

$$\int_{\beta^2/b}^{b} F(t)d\psi(t)=\sum_{j=1}^{n}\tilde{V}_{n,j}F(\tilde{t}_{n,j})+\tilde{E}_n(F), \tag{4.1.30}$$

onde $\tilde{t}_{n,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, são os zeros do polinômio $\tilde{B}_n$ e satisfazem $\tilde{E}_n(F) = 0$ para $t^n F(t) \in \mathbb{P}_{2n-2r-1}$.

Os nós e pesos das fórmulas de quadratura (4.1.28) e (4.1.30) satisfazem

$$\begin{array}{lll} \tilde{x}_{n,n+1-k} = -\tilde{x}_{n,k}, & \tilde{W}_{n,n+1-k} = \tilde{W}_{n,k}, & \\ & & k = 1, 2, \ldots, n. \\ \tilde{t}_{n,n+1-k} = \dfrac{\beta^2}{\tilde{t}_{n,k}}, & \dfrac{\tilde{V}_{n,n+1-k}}{\sqrt{\tilde{t}_{n,n+1-k}}} = \dfrac{\tilde{V}_{n,k}}{\sqrt{\tilde{t}_{n,k}}}, & \end{array}$$

Analogamente a (4.1.21), mostra-se que

$$\tilde{t}_{n,k} = t(\tilde{x}_{n,k}) \quad \text{e} \quad \tilde{V}_{n,k} = A\frac{\tilde{t}_{n,k}}{\tilde{t}_{n,k} + \beta}\tilde{W}_{n,k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Sobre as relações entre os polinômios $\tilde{P}_n$ e $\tilde{B}_n$, de (4.1.20) e (4.1.29), obtém-se facilmente que (Exercício 4.7)

$$\tilde{B}_n(\tilde{\lambda}_0, \ldots, \tilde{\lambda}_r; t) = \sum_{k=0}^{r} \tilde{\lambda}_k t^k \left((2\sqrt{\alpha t})^{n-2k} P_{n-2k}(x(t)) \right).$$

Assim, de (4.1.26),

$$\tilde{B}_n(\tilde{\lambda}_0, \ldots, \tilde{\lambda}_r; t) = (2\sqrt{\alpha t})^n \tilde{P}_n(\lambda_0, \ldots, \lambda_r; x(t)) \tag{4.1.31}$$

se, e somente se,

$$\tilde{\lambda}_k = (4\alpha)^k \lambda_k, \quad k = 0, 1, \ldots, r.$$

Reciprocamente, para os valores $\lambda_k = (4\alpha)^{-k}\tilde{\lambda}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, r,$

$$\tilde{P}_n(\lambda_0, \ldots, \lambda_r; x) = \left(2\sqrt{\alpha t(x)}\right)^{-n} \tilde{B}_n(\tilde{\lambda}_0, \ldots, \tilde{\lambda}_r; t(x)).$$

Sob essas condições, pode-se enunciar os resultados a seguir.

Teorema 4.5. *Seja B_n tal que $B_n(t) = t^n B_n(\beta^2/t)/(-\beta)^n$. Então, existe um único conjunto de números reais $\tilde{\lambda}_0, \ldots, \tilde{\lambda}_{\bar{n}}$ tal que $B_n(t) = \tilde{B}_n(\tilde{\lambda}_0, \ldots, \tilde{\lambda}_{\bar{n}}; t)$.*

Teorema 4.6. *Seja $0 \le r \le \bar{n}$. Então, $B_n(t) = t^n B_n(\beta^2/t)/(-\beta)^n$ e*

$$\int_{\beta^2/b}^{b} t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t) = 0, \;\; 0 \le s \le n - 1 - 2r, \tag{4.1.32}$$

se, e somente se,

$$B_n(t) = \tilde{B}_n(\tilde{\lambda}_0, \ldots, \tilde{\lambda}_r; t), \tag{4.1.33}$$

para um único conjunto de números reais $\tilde{\lambda}_0, \ldots, \tilde{\lambda}_r$.

4.1.3 Fórmulas de quadratura no círculo unitário

Faremos, agora, um estudo sobre fórmulas de quadratura no círculo unitário, isto é, fórmulas de quadratura cujos nós pertencem a $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, que foram introduzidas por Jones e outros em [27] e são também conhecidas por fórmulas de quadratura de Szegő.

Consideremos, então, fórmulas de quadratura do tipo

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_{n,m} f(\xi_{n,m}) \,, \tag{4.1.34}$$

onde os nós $\xi_{n,m}$, com $|\xi_{n,m}| = 1$, e os pesos $\lambda_{n,m}$ são tais que a fórmula (4.1.34) é válida para $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$. Fórmulas de quadratura desse tipo são chamadas de fórmulas de quadratura no círculo unitário (ou de Szegő) com n-pontos.

Considere $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios mônicos de Szegő com respeito à medida ψ, definida no círculo unitário e, também, $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de números complexos, não necessariamente distintos, tais que $|w_n| = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Seja $\{S_n(w_n, z)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios para-ortogonais dada por

$$S_n(w_n, z) = S_n(z) + w_n S_n^*(z), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Denotemos por $\xi_{n,m} = \xi_{n,m}(w_n)$, $m = 1, 2, \ldots, n$, os zeros de $S_n(w_n, z)$ que, como já sabemos pelo Teorema 1.17, são simples e pertencem a $\mathcal{C}$.

Podemos construir os polinômios fundamentais de Lagrange $L_{n,m}(w_n, z)$ como

$$L_{n,m}(w_n, z) = \frac{S_n(w_n, z)}{(z - \xi_{n,m}) S_n'(w_n, \xi_{n,m})} \quad 1 \le m \le n \,. \tag{4.1.35}$$

De fato, consideremos os coeficiente de Verblunsky $\alpha_{n-1} = -\overline{S_n(0)}$, que satisfazem $|\alpha_{n-1}| < 1$. Como os polinômios S_n são mônicos e $S_n(0) = -\overline{\alpha}_{n-1}$, então é fácil verificar que $(1 - \alpha_{n-1} w_n)$ é o coeficiente do termo de maior grau de $S_n(w_n, z)$. Assim,

$$S_n(w_n, z) = (1 - \alpha_{n-1} w_n) \prod_{m=1}^{n} (z - \xi_{n,m}) \,. \tag{4.1.36}$$

Calculando $S_n'(w_n, z)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{S_n'(w_n, z)}{(1 - \alpha_{n-1} w_n)} &= \left(\prod_{m=1}^{n} (z - \xi_{n,m}) \right)' = \left[(z - \xi_{n,m}) \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \ne m}}^{n} (z - \xi_{n,k}) \right) \right]' \\ &= \prod_{\substack{k=1 \\ k \ne m}}^{n} (z - \xi_{n,k}) + (z - \xi_{n,m}) \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \ne m}}^{n} (z - \xi_{n,k}) \right)' . \end{aligned}$$

Avaliando essa última expressão em $z = \xi_{n,m}$, temos

$$S_n'(w_n, \xi_{n,m}) = (1 - \alpha_{n-1} w_n) \prod_{\substack{k=1 \\ k \ne m}}^{n} (\xi_{n,m} - \xi_{n,k}) \,, \quad \text{para} \quad 1 \le m \le n \,. \tag{4.1.37}$$

Substituindo (4.1.36) e (4.1.37) na expressão para $L_{n,m}(w_n, z)$, obtemos

$$L_{n,m}(w_n, z) = \frac{S_n(w_n, z)}{(z - \xi_{n,m})S'_n(w_n, \xi_{n,m})} = \frac{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq m}}^{n} (z - \xi_{n,k})}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq m}}^{n} (\xi_{n,m} - \xi_{n,k})}, \quad 1 \leq m \leq n\,.$$

Daí, para $1 \leq m \leq n$, segue que

$$L_{n,m}(w_n, \xi_{n,k}) = \delta_{k,m}\,, \quad 1 \leq k \leq n\,, \tag{4.1.38}$$

onde $\delta_{k,m}$ é o delta de Kronecker. Observe, ainda, que $L_{n,m}(w_n, z) \in \Lambda_{0,n-1} = \mathbb{P}_{n-1}$ e

$$\overline{L}_{n,m}\left(w_n, \frac{1}{z}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{z} - \overline{\xi}_{n,m}\right) \Big/ \overline{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq m}}^{n} (\xi_{n,m} - \xi_{n,k})} \quad \in \Lambda_{-(n-1),0}\,.$$

Definimos, então, os pesos $\lambda_{n,m}$ por

$$\lambda_{n,m} = \lambda_{n,m}(w_n) = \int_0^{2\pi} L_{n,m}(w_n, e^{i\theta})d\psi(e^{i\theta}),\ 1 \leq m \leq n,\ n = 1, 2, \ldots. \tag{4.1.39}$$

O próximo teorema estabelece a fórmula de quadratura de Szegő, fórmula de quadratura no círculo unitário, com n pontos válida para $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$.

Teorema 4.7. *Seja ψ uma medida no círculo unitário. Para $n \geq 1$ e $1 \leq m \leq n$, denotemos por $\xi_{n,m}$ os zeros de $S_n(w_n, z)$ e sejam os pesos $\lambda_{n,m}$ definidos por* (4.1.39). *Então, para $n \geq 1$ e $1 \leq m \leq n$,*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)d\psi(z) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_{n,m} f(\xi_{n,m}) \tag{4.1.40}$$

é válida para toda $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$ e, além disso,

$$\lambda_{n,m} > 0\,, \quad \sum_{m=1}^{n} \lambda_{n,m} = \int_0^{2\pi} d\psi(e^{i\theta}) = \mu_0 > 0\,. \tag{4.1.41}$$

Demonstração: Sejam $n \geq 1$ e $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$ dados. Definimos

$$D(z) = f(z) - \sum_{m=1}^{n} f(\xi_{n,m})L_{n,m}(w_n, z)\,,$$

onde $L_{n,m}(w_n, z)$ é dado por (4.1.35). Então, $D \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$ e, por (4.1.38),

$$D(\xi_{n,k}) = f(\xi_{n,k}) - \sum_{m=1}^{n} f(\xi_{n,m})\delta_{m,k} = 0\,, \ \ 1 \leq k \leq n\,.$$

Claramente, $E(z) = z^{n-1}D(z) \in \Pi_{2n-2}$ e $E(\xi_{n,m}) = 0$ para $1 \leq m \leq n$. Assim, existe um polinômio $S \in \Pi_{n-2}$ tal que $E(z) = S_n(w_n, z)S(z)$ ou, ainda,

$$D(z) = \frac{E(z)}{z^{n-1}} = \frac{S_n(w_n, z)S(z)}{z^{n-1}}\,.$$

Se tomarmos $S(z) = \sum_{m=0}^{n-2} s_m z^m$, então, pela L-ortogonalidade de $\{S_n(w_n,z)\}_{n=0}^{\infty}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} D(z)d\psi(z) &= \int_{\mathcal{C}} \left(S_n(w_n,z) \sum_{m=0}^{n-2} \frac{s_m}{z^{n-m-1}} \right) d\psi(z) \\ &= \sum_{m=0}^{n-2} \langle S_n(w_n,z), \overline{s}_m z^{n-1-m} \rangle = 0.\end{aligned}$$

Da equação (4.1.39), segue que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)d\psi(z) = \int_{\mathcal{C}} \left[D(z) + \sum_{m=1}^{n} f(\xi_{n,m}) L_{n,m}(z,w_n) \right] d\psi(z) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_{n,m} f(\xi_{n,m}) \,,$$

o que mostra que (4.1.40) é válida para toda $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$.

Agora, para mostrar que $\lambda_{n,m} > 0$, tomemos

$$K_{n,m}(w_n,z) = L_{n,m}(w_n,z)\overline{L}_{n,m}(w_n,1/z) - L_{n,m}(w_n,z)\,. \tag{4.1.42}$$

Observe que $L_{n,m}(w_n,z)\overline{L}_{n,m}(w_n,1/z) \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$. Assim, $K_{n,m}(w_n,z) \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$ e, então,

$$K_{n,m}(w_n,\xi_{n,k}) = 0\,, \quad 1 \leq k \leq m\,.$$

Logo, de (4.1.40) para $1 \leq m \leq n$, segue que

$$\int_{\mathcal{C}} K_{n,m}(w_n,z)d\psi(z) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} K_{n,m}(w_n,\xi_{n,k}) = 0\,. \tag{4.1.43}$$

Portanto, de (4.1.39), (4.1.42) e (4.1.43), para $1 \leq m \leq n$,

$$\begin{aligned}\lambda_{n,m} &= \int_{\mathcal{C}} L_{n,m}(w_n,z)d\psi(z) = \int_{\mathcal{C}} L_{n,m}(w_n,z)\overline{L}_{n,m}(w_n,1/z)d\psi(z) \\ &= \langle L_{n,m}(w_n,z), L_{n,m}(w_n,z) \rangle > 0\,, \qquad q \leq m \leq n\,,\end{aligned}$$

ou seja, $\lambda_{n,m} > 0$.

Finalmente, tomando $L(z) = 1$ em (4.1.40), obtém-se

$$\mu_0 = \int_{\mathcal{C}} d\psi(z) = \int_0^{2\pi} d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_{n,m} \;>\; 0\,.$$

■

Relações entre fórmulas de quadratura gassianas e fórmulas de quadratura no círculo unitário

Veremos, agora, algumas relações existentes entre fórmulas de quadratura gaussianas e certas fórmulas de quadratura no círculo unitário. Esses resultados são encontrados em [11].

Sejam ψ uma medida positiva no círculo unitário e ϕ_1 e ϕ_2 medidas simétricas definidas em $(-1,1)$, tais que

$$-d\psi(z) = d\phi_1(x(z)) = \frac{1}{1-x^2(z)} d\phi_2(x(z)),$$

com $x(z)$ como dado em (3.1.13), ou seja, $x = x(z) = \dfrac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2})$.

Lembramos que as sequências de polinômios $\{P_n^{\phi_i}\}_{n=0}^{\infty}$, $i = 1, 2$, ortogonais com relação às medidas ϕ_i, respectivamente, satisfazem

$$P_n^{\phi_i}(x) = (4z)^{-n/2} R_n^{(i)}(z), \; n \geq 0, \; i = 1, 2, \tag{4.1.44}$$

onde $R_n^{(i)}$, $n \geq 0$, são dados por (3.1.1) e (3.1.2), ou seja,

$$R_n^{(1)}(z) = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + S_n(0)} \quad \text{e} \quad R_n^{(2)}(z) = \frac{S_{n+1}(z) - S_{n+1}^*(z)}{(z-1)(1 - S_{n+1}(0))}$$

e S_n são os polinômios de Szegő associados à medida ψ.

Consideremos as fórmulas de quadratura gaussianas, que são exatas para $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$,

$$\int_{-1}^{1} f(x) d\phi_i(x) = \sum_{m=1}^{n} W_{n,m}^{(i)} f(x_{n,m}^{(i)}), \quad i = 1, 2\,, \tag{4.1.45}$$

cujos nós $x_{n,m}^{(i)}$ são os zeros do polinômio ortogonal $P_n^{\phi_i}$ com relação à medida ϕ_i e estão ordenados como segue

$$1 > x_{n,1}^{(i)} > x_{n,2}^{(i)} > \ldots > x_{n,n}^{(i)} > -1\,.$$

Consideremos também as fórmulas de quadratura no círculo unitário que, pelo Teorema 4.7, são exatas para $g \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$,

$$\int_{0}^{2\pi} g(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_{n,m}^{(i)} g(z_{n,m}^{(i)}), \quad i = 1, 2\,, \tag{4.1.46}$$

onde os pesos $\lambda_{n,m}^{(i)}$ são dados por (4.1.39) e os nós $z_{n,m}^{(i)} = e^{-i\theta_{n,m}^{(i)}}$ são organizados da seguinte forma:

$$0 < \theta_{n,1}^{(i)} < \theta_{n,2}^{(i)} < \ldots < \theta_{n,n}^{(i)} \leq 2\pi\,.$$

Aqui, $z_{n,m}^{(1)}$, $m = 1, 2, \ldots, n$, são os zeros dos polinômios para-ortogonais $R_n^{(1)}$, $z_{n+1,m}^{(2)}$, $m = 1, 2, \ldots, n$, os zeros dos polinômios $R_n^{(2)}(\psi, z)$ e $z_{n+1,n+1}^{(2)} = 1$.

Então, da relação (4.1.44), mostra-se que os nós e os pesos dessas fórmulas de quadratura estão relacionados por

$$\begin{aligned} x_{n,m}^{(1)} &= \cos\left(\frac{1}{2}\theta_{n,m}^{(1)}\right), \qquad W_{n,m}^{(1)} = \lambda_{n,m}^{(1)}, \\ x_{n,m}^{(2)} &= \cos\left(\frac{1}{2}\theta_{n+1,m}^{(2)}\right), \qquad W_{n,m}^{(2)} = \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\theta_{n+1,m}^{(2)}\right)\lambda_{n+1,m}^{(2)}, \end{aligned} \tag{4.1.47}$$

para $m = 1, 2, \ldots, n$. Além disso,

$$\lambda_{n+1,n+1}^{(2)} = \mu_0^{\psi} - \sum_{m=1}^{n} \lambda_{n+1,m}^{(2)}\,.$$

No. de pontos n	Valores aproximados
3	2.62234855029054
6	3.13722933701843
9	3.14158399620263
12	3.14159264703117
15	3.14159265358739
18	3.14159265358979
$g(z) = e^z$	Valor exato: π 3.14159265358979

Tabela 4.4: Aproximações para a integral (4.1.52) com $g(z) = e^z$ e vários valores de n.

Exemplo 4.4. Suponhamos que as medidas ϕ_1 e ψ sejam absolutamente contínuas, ou seja, que $\phi_1'(x) = w_1(x)$ e $\psi'(z) = v(z)$. Assim,

$$d\phi_1(x) = w_1(x)dx \quad \text{e} \quad d\psi(z) = v(z)dz.$$

Suponhamos, além disso, que elas satisfaçam à propriedade $d\phi_1(x) = -d\psi(z)$, onde $x = x(z) = (z^{1/2} + z^{-1/2})/2$. É fácil verificar que

$$w_1(x)dx = -v(z)dz.$$

Usando o fato de z pertencer ao círculo unitário $\mathcal{C}$, ou seja, $z = e^{i\theta}$, temos

$$x \;=\; \frac{1}{2}\left(z^{1/2} + z^{-1/2}\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(e^{i\theta/2} + ze^{-i\theta/2}\right) \;=\; cos(\theta/2).$$

Logo,

$$dx \;=\; \frac{1}{4}\left(z^{-1/2} - z^{-3/2}\right)dz \;=\; \frac{1}{4z}\left(z^{1/2} - z^{-1/2}\right)dz \;=\; \frac{1}{4z}2isen(\theta/2)dz$$

ou, ainda,

$$dx = -\frac{1}{2iz}sen(\theta/2)dz.$$

Portanto, podemos escrever

$$w_1(x) \;=\; -v(z)\frac{dz}{dx} \;=\; \frac{2iz}{sen(\theta/2)}v(z)$$

e

$$w_1(x)sen(\theta/2) = 2izv(z)$$

ou, ainda,

$$w_1(x)\sqrt{1-x^2} = 2izv(z). \tag{4.1.48}$$

Assim, as relações entre as fórmulas de quadratura (4.1.45) e (4.1.46) podem ser reescritas, considerando-se $d\phi_1(x) = w_1(x)dx$ e $d\psi(z) = v(z)dz$, da forma a seguir. Consideremos as fórmulas de quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)w_1(x)dx = \sum_{m=1}^{n} W_{n,m}^{(1)} f(x_{n,m}^{(1)}), \tag{4.1.49}$$

No. de pontos n	Valores aproximados
3	$2.09439510239320\, i$
5	$2.03328147692610\, i$
10	$2.00824840790797\, i$
20	$2.00205764828542\, i$
50	$2.00032902469863\, i$
100	$2.00008224907099\, i$
300	$2.00000913855182\, i$
$g(z) = z^{1/2}$	Valor exato: $2i$

Tabela 4.5: Aproximações para a integral (4.1.52) com $g(z) = z^{1/2}$ e vários valores de n.

quando $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$, e

$$\int_{\mathcal{C}} g(z)v(z)dz = \sum_{m=1}^{n} \lambda_{n,m}^{(1)} g(z_{n,m}^{(1)}), \tag{4.1.50}$$

quando $g \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$.

Se a propriedade $w_1(x)\sqrt{1-x^2} = 2izv(z)$ é satisfeita, então, para $m = 1, 2, ..., n$,

$$W_{n,m}^{(1)} = \lambda_{n,m}^{(1)} \quad \text{e} \quad x_{n,m}^{(1)} = cos(\theta_{n,m}^{(1)}/2), \quad \text{com} \quad z_{n,m}^{(1)} = e^{i\theta_{n,m}^{(1)}}. \tag{4.1.51}$$

Como exemplo, vamos considerar

$$w_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Então, do Exemplo 4.1, sabemos que

$$x_{n,m}^{(1)} = cos\left(\frac{(2m-1)\pi}{2n}\right) \quad \text{e} \quad W_{n,m}^{(1)} = \frac{\pi}{n}, \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Logo, de (4.1.48),

$$v(z) = \frac{w_1(x)\sqrt{1-x^2}}{2iz} = \frac{1}{2iz}$$

e, de (4.1.51),

$$\lambda_{n,m}^{(1)} = \frac{\pi}{n} \quad \text{e} \quad \theta_{n,m}^{(1)} = \frac{(2m-1)\pi}{n}, \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Assim, obtemos a conhecida fórmula de quadratura no círculo unitário

$$\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})\frac{1}{2}d\theta = \int_{\mathcal{C}} g(z)\frac{1}{2iz}dz = \sum_{m=1}^{n} \frac{\pi}{n} g(z_{n,m}^{(1)}), \tag{4.1.52}$$

com $z_{n,m}^{(1)} = e^{i\theta_{n,m}^{(1)}}$ e $\theta_{n,m}^{(1)} = \dfrac{(2m-1)\pi}{n}$, que é exata para $g \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$.

Nas Tabelas (4.4) e (4.5) apresentamos, respectivamente, os resultados da aplicação dessa fórmula de quadratura quando $g(z) = e^z$ e $g(z) = z^{1/2}$, definidas para $z = e^{i\theta}$ e $\theta \in (0, 2\pi)$.

4.2 Problema de análise de frequência

Uma aplicação bastante interessante dos polinômios de Szegő está relacionada ao problema de análise de frequência.

Consideremos $x(m)$ uma função dada por

$$x(m) = \gamma_0 e^{im\pi} + \sum_{j=1}^{I} (\gamma_j e^{im\omega_j} + \gamma_{n_0+1-j} e^{im\omega_{n_0+1-j}}), \tag{4.2.53}$$

com $I \in \mathbb{N}$, $n_0 = 2I + 1$ se $\gamma_0 > 0$, $n_0 = 2I$ se $\gamma_0 = 0$, e $\gamma_j \in \mathbb{C}$ para $j = 1, 2, \ldots, n_0$. Vamos supor que

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{n_0-1} < \omega_{n_0} < 2\pi\,,$$

$$\overline{\gamma}_{n_0+1-j} = \gamma_j \neq 0 \qquad \text{e} \qquad 2\pi - \omega_{n_0+1-j} = \omega_j \neq 0\,,$$

para $j = 1, 2, \ldots, I$. A função $x(m)$ é chamada de sinal trigonométrico (ou sinal discreto).

Aqui, m representa o tempo discreto, as constantes γ_j são as amplitudes, as constantes ω_j são as frequências do sinal $x(m)$ e $e^{i\omega_j}$ são os de pontos de frequência. Quando necessário, utilizaremos a notação

$$\xi_j = e^{i\omega_j}$$

para os pontos de frequência.

O problema de análise de frequência consiste em determinar o número n_0 de pontos de frequência e os valores γ_j e ω_j (ou $e^{i\omega_j}$), para $j = 0, 1, \ldots, I$, a partir de N valores conhecidos de $x(m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, para $N > 0$ (veja [34] e [50]).

4.2.1 Polinômios de Szegő e análise de frequência

Uma maneira de determinar as frequências em (4.2.53) é utilizar os polinômios de Szegő. Este método tem origem nos trabalhos de Wiener [50] e Levinson [34] e foi desenvolvido por Jones e outros em [25, 31] e Pan e Saff em [36]. O método é baseado no comportamento dos zeros dos polinômios de Szegő $\{S_k^{\psi_N}\}_{k=0}^{n_0}$, ortogonais com relação à medida positiva ψ_N dada, a partir de (4.2.53), por

$$\frac{d\psi_N(e^{i\theta})}{d\theta} = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-im\theta} \right|^2, \quad 0 \le \theta < 2\pi\,. \tag{4.2.54}$$

Utilizando um sinal trigonométrico conhecido (4.2.53), considera-se também a medida discreta ψ definida por

$$\psi(e^{i\theta}) = \begin{cases} 0, & \theta < \omega_1, \\ \sum_{k=1}^{s} \lambda_k^{\psi}, & \omega_{k-1} \le \theta < \omega_k,\ s = 2, 3, \ldots, n_0 - 1, \\ \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k^{\psi}, & \omega_{n_0} \le \theta, \end{cases} \tag{4.2.55}$$

onde $\lambda_k^{\psi} = |\gamma_k|^2$, $k = 1, 2, \ldots, n_0$, ω_k, γ_k e n_0 são dados em (4.2.53).

Os momentos μ_n^ψ com respeito a ψ são dados por

$$\mu_n^\psi = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k^\psi e^{-in\omega_k}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

A medida ψ tem n_0 pontos de aumento e $\{S_k^\psi\}_{k=0}^{n_0}$ é a sequência de polinômios mônicos de Szegő reais associados a ψ. Observe que, neste caso, o coeficiente de reflexão satisfaz $|S_{n_0}^\psi(0)| = |a_{n_0}| = 1$ e o polinômio de Szegő de grau n_0 associados a ψ é dado por

$$S_{n_0}^\psi(z) = \prod_{m=1}^{n_0} (z - e^{i\omega_m}) = \prod_{m=1}^{n_0} (z - \xi_m).$$

Para mais detalhes, veja, por exemplo, Jones e outros [31].

Dados os valores de $x(m)$ para $m = 1, 2, \ldots, N-1$, com $N \in \mathbb{N}$, tomamos $x(m) = 0$ para $m < 0$ e para $m \geq N$. Neste caso, o sinal trigonométrico pode ser chamado de N-truncado.

Para a medida ψ_N dada por (4.2.54), vamos adotar a notação

$$\alpha_{n-1}^{(N)} = -\overline{S_n^{\psi_N}(0)},$$

para os coeficientes de Verblunsky dos polinômios de Szegő, $S_n^{\psi_N}$, com relação à medida ψ_N.

Observe que os momentos $\mu_n^{(N)}$, $n \in \mathbb{Z}$, com respeito a ψ_N, são dados por

$$\mu_{-n}^{(N)} = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\psi_N(e^{i\theta}).$$

Substituindo $d\psi_N(e^{i\theta})$ por sua expressão dada em (4.2.54), obtemos

$$\begin{aligned}
\mu_{-n}^{(N)} &= \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \left| \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-im\theta} \right|^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} x(m) x(j) e^{-im\theta} e^{ij\theta} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} x(m) x(j) \int_0^{2\pi} e^{i(n-m+j)\theta} d\theta,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mu_{-n}^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{m=n}^{N-1} x(m) x(m-n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.2.56}$$

Observe que $\mu_{-n}^{(N)} = \mu_n^{(N)}$. Neste caso, os polinômios $S_n^{\psi_N}$ são reais e os os coeficientes de Verblunsky $\alpha_{n-1}^{(N)}$ também são reais.

Utilizando os momentos $\mu_n^{(N)}$ e a relação de recorrência (1.5.52), podemos obter os coeficientes de Verblunsky $\alpha_{n-1}^{(N)}$, pois

$$\alpha_{n-1}^{(N)} = \frac{\left\langle z S_{n-1}^{\psi_N}(z), 1 \right\rangle}{\left\langle S_{n-1}^{\psi_N,*}(z), 1 \right\rangle}.$$

Denotando $S_n^{\psi_N}(z) = \sum_{j=0}^{n} b_{n,j} z^j$, com $b_{n,j} \in \mathbb{R}$, obtemos $S_n^{\psi_N,*}(z) = \sum_{j=0}^{n} b_{n,j} z^{n-j}$. Utilizando essas expressões, obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle z S_{n-1}^{\psi_N}(z), 1 \right\rangle &= \int_0^{2\pi} z S_{n-1}^{\psi_N}(z) d\psi_N(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-1,j} \int_0^{2\pi} z^{j+1} d\psi_N(e^{i\theta}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-1,j} \mu_{-(j+1)}^{(N)}\end{aligned}$$

e, ainda,

$$\begin{aligned}\left\langle S_{n-1}^{\psi_N,*}(z), 1 \right\rangle &= \int_0^{2\pi} S_{n-1}^{\psi_N,*}(z) d\psi_N(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-1,j} \int_0^{2\pi} z^{n-1-j} d\psi_N(e^{i\theta}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-1,j} \mu_{-(n-j-1)}^{(N)}.\end{aligned}$$

Portanto, os coeficientes de reflexão são dados por

$$\alpha_{n-1}^{(N)} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} b_{n-1,j} \mu_{-(j+1)}^{(N)}}{\sum_{j=0}^{n-1} b_{n-1,j} \mu_{-(n-j-1)}^{(N)}},$$

com $\mu_{-n}^{(N)}$ dado por (4.2.56). Este método de se obter os coeficientes de Verblunsky, juntamente com as relações de recorrência (1.5.44) e (1.5.45), é conhecido como algoritmo de Levinson (ver Jones e outros [25, 31]).

Muitos resultados sobre a aplicação dos polinômios de Szegő ao problema de análise de frequência podem ser encontrados em Jones e outros [25, 31, 28, 36]. Citaremos alguns.

Teorema 4.8. (Ver [25]) *A medida ψ_N, definida por* (4.2.54)*, converge "fracamente" para a medida discreta ψ definida por* (4.2.55)*. Isto significa que*

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi_N(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}),$$

para toda f contínua no círculo unitário.

Teorema 4.9. (Ver [31] e [36]) *(i) Para cada n fixo, $1 \le n \le n_0$,*

$$\lim_{N\to\infty} S_n^{\psi_N}(z) = S_n^{\psi}(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

onde $S_n^{\psi}(z)$ é o polinômio mônico de Szegő de grau n associado à medida discreta ψ. Em particular,

$$\lim_{N\to\infty} S_{n_0}^{\psi_N}(z) = S_{n_0}^{\psi}(z) = \prod_{m=1}^{n_0} (z - \xi_m), \quad z \in \mathbb{C},$$

onde $\xi_m = e^{i\omega_m}$ *são os pontos de frequência.*
(ii) Para cada $n < n_0$*, existe* $L_n \in (0,1)$*, dependendo somente de* n*, tal que*

$$|S_n^{\psi_N}(0)| = |\alpha_{n-1}^{(N)}| \leq L_n < 1\,, \quad N = 1, 2, \ldots$$

(iii) Para cada $n > n_0$*, os zeros de* $S_n^{\psi_N}$ *de maior módulo tendem aos pontos* ξ_m*,* $m = 1, 2, \ldots, n_0$*. Além disso, existe um número* $K_n < 1$*, dependendo somente de* n*, tal que os* $n - n_0$ *zeros restantes de* $S_n^{\psi_N}$ *pertencem ao disco* $|z| < K_n$*.*

Assim, como a medida ψ_N converge para ψ, então os polinômios de Szegő $S_n^{\psi_N}(z)$, $n \geq 0$, associados à medida ψ_N, convergem para os polinômios de Szegő $S_n^{\psi}(z)$. Além disso, os zeros do polinômio $S_{n_0}^{\psi}(z)$ são os pontos de frequência ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n_0$. Se $n > n_0$, então n_0 zeros de $S_n^{\psi_N}(z)$ tendem para ξ_j e as restantes $n - n_0$ zeros satisfazem $|z| < K_n < 1$. Este é um resultado importante na utilização dos polinômios de Szegő para solução do problema de análise de frequência. A maior dificuldade é determinar o valor de n_0 e calcular os zeros dos polinômios de Szegő $S_n^{\psi_N}(z)$.

Uma vez determinadas as frequências ω_j, $j = 1, 2, \ldots, n_0$, pode-se calcular as amplitudes γ_j resolvendo-se o sistema de equações lineares (4.2.53) para $I + 1$ valores de $x(m)$.

Exemplo 4.5. Considere o sinal

$$x(m) = \sum_{j=1}^{3} (\gamma_j e^{im\omega_j} + \gamma_{n_0+1-j} e^{im\omega_{n_0+1-j}}),$$

com $n_0 = 6$ e

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2\pi - \omega_6 = \frac{\pi}{3}, & \gamma_1 &= \gamma_6 = 10, \\ \omega_2 &= 2\pi - \omega_5 = \frac{\pi}{2}, & \gamma_2 &= \gamma_5 = 4, \\ \omega_3 &= 2\pi - \omega_4 = \frac{4\pi}{5}, & \gamma_3 &= \gamma_4 = 1. \end{aligned}$$

Os zeros de $S_n^{\psi_N}(z)$, para $n = 10$ e $N = 50, 100, 150$, são apresentados na Fig. 4.1, onde podemos notar a convergência de seis zeros para os pontos de frequência $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{\pi}{2}}$ e $e^{i\frac{4\pi}{5}}$, e seus simétricos, $e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $e^{-i\frac{\pi}{2}}$ e $e^{-i\frac{4\pi}{5}}$ Os outros quatro zeros restantes, como previsto pelo Teorema 4.9, convergem para pontos pertencem a um disco de raio K_n, com $K_n < 1$.

4.2.2 Polinômios para-ortogonais e análise de frequência

Em [16], Daruis e outros utilizaram os polinômios para-ortogonais, definidos em (1.5.56), associados à medida ψ_N, ou seja,

$$S_n^{\psi_N}(w, z) = S_n^{\psi_N}(z) + w S_n^{\psi_N,*}(z),$$

para resolver o problema de análise de frequência. Vejamos os principais resultados desse trabalho.

Consideremos a fórmula de quadratura no círculo unitário (ver Seção 4.1.3)

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi_N(e^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k}^{\psi_N}(w) f(z_{n,k}^{\psi_N}(w)),$$

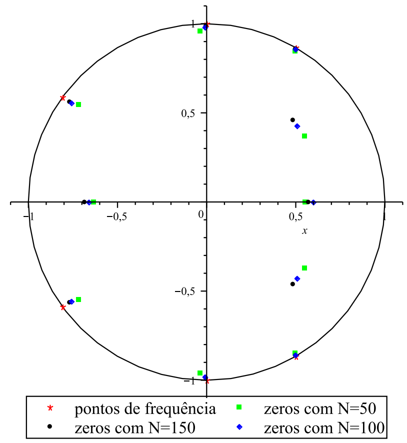

Figura 4.1: Zeros de $S_n^{\psi_N}(z)$ para $n = 10$ e $N = 50, 100, 150$.

válida para $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$. Os valores $\lambda_{n,k}^{\psi_N}(w)$ são os pesos da fórmula de quadratura e os nós $z_{n,k}^{\psi_N}(w)$ são os zeros do polinômio para-ortogonal $S_n^{\psi_N}(w,z)$.

Teorema 4.10. (i) *Para $n \geq 1$ fixo, temos*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k}^{\psi_N}(w) = \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k^{\psi}\,,$$

onde $\lambda_k^{\psi} = |\gamma_k|^2$, como em (4.2.55), e γ_k e n_0 são dados em (4.2.53).
(ii) *Sejam $n \geq n_0$ fixo, M uma sequência arbitrária de números naturais e w um valor arbitrário tal que $|w| = 1$. Então, existem uma subsequência M_1 de M e um polinômio $W_{n-n_0}^{\psi}(w,z)$ de grau $n - n_0$ tais que*

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in M_1}} S_n^{\psi_N}(w,z) = W_{n-n_0}^{\psi}(w,z) S_{n_0}^{\psi}(z)\,. \tag{4.2.57}$$

Denotemos por $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n_0}$ os zeros de $S_{n_0}(\psi, z)$ e por $\xi_{n_0+1}(w), \xi_{n_0+2}(w), \ldots, \xi_n(w)$ os de $W_{n-n_0}^{\psi}(w,z)$. Por (4.2.57), podemos supor que

$$\lim_{N\to\infty} z_{n,m}^{\psi_N}(w) = \xi_m\,, \quad m = 1, 2, \ldots, n_0,$$

e

$$\lim_{N\to\infty} z_{n,m}^{\psi_N}(w) = \xi_m(w)\,, \quad m = n_0+1, n_0+2, \ldots, n\,,$$

onde qualquer um dos zeros de $W_{n-n_0}^{\psi}(w,z)$ pode ou não coincidir com os pontos de frequência, ou seja, com os zeros de $S_{n_0}^{\psi}(z)$.

Esses resultados garantem que n_0 zeros do polinômio para-ortogonal $S_n^{\psi_N}(w,z)$ convergem para os n_0 pontos de frequência quando aumenta-se os N valores conhecidos de $x(m)$. Ainda é necessário descobrir quais são os zeros de $S_n^{\psi_N}(w,z)$ que convergem para os pontos de frequência ξ_m. Os próximos resultados, encontrados em [16], apresentam o comportamento dos $\lambda_{n,m}^{\psi_N}(w)$ que solucionam esse problema.

Teorema 4.11. (Ver [16]) *Consideremos as mesmas notações dadas anteriormente.* (*i*) *Se* $n > n_0$ *e a subsequência* $\{z_{n,m}^{\psi_N}(w) : N \in M_1\}$ *converge para um ponto diferente de um ponto de frequência, então*

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_1}} \lambda_{n,m}^{\psi_N}(w) = 0\,.$$

(*ii*) *Suponhamos que* $\xi_{n_0+m}(w) = \xi_m$ *para* $m = 1, 2, \ldots, p$ *e que* $\xi_1, \ldots, \xi_{n_0}$, $\xi_{n_0+p+1}(w), \ldots, \xi_n(w)$ *são pontos distintos. Então,*

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_1}} (\lambda_{n,m}^{\psi_N}(w) + \lambda_{n,n_0+m}^{\psi_N}(w)) &= \lambda_m^{\psi}\,, \quad \textit{para} \quad m = 1, 2, \ldots, p\,,\\
\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_1}} \lambda_{n,m}^{\psi_N}(w) &= \lambda_m^{\psi}\,, \quad \textit{para} \quad m = p+1, \ldots, n_0\,,\\
\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_1}} \lambda_{n,m}^{\psi_N}(,w) &= 0\,, \quad \textit{para} \quad m = n_0+p+1, \ldots, n\,.
\end{aligned}$$

(*iii*) *Em particular, se os zeros de* $W_{n-n_0}^{\psi}(w,z)S_{n_0}^{\psi}(z)$ *são simples, então*

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_1}} \lambda_{n,m}^{\psi_N}(w) &= \lambda_m^{\psi}\,, \quad \textit{para} \quad m = 1, \ldots, n_0\,,\\
\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_1}} \lambda_{n,m}^{\psi_N}(w) &= 0\,, \quad \textit{para} \quad m = n_0+1, \ldots, n\,.
\end{aligned}$$

Portanto, uma maneira de determinar se um zero $z_{n,m}^{\psi_N}(w)$ de $S_n^{\psi_N}(w,z)$ está convergindo para um ponto de frequência ξ_m (zero "interessante") é observar o comportamento do peso $\lambda_{n,m}^{\psi_N}(w)$ correspondente quando $N \to \infty$. Assim, quando $\lim\limits_{N\to\infty} \lambda_{n,m}^{\psi_N}(w) = 0$, o zero correspondente $z_{n,m}^{\psi_N}(w)$ converge para o ponto de frequência $\xi_m = e^{i\omega_m}$.

Os próximos resultados garantem que é possível determinar arcos no círculo unitário que contêm pelo menos um zero de $S_n^{\psi_N}(w,z)$.

Teorema 4.12. *Seja* $n \geq n_0$ *fixo. Então, para qualquer* $\varepsilon > 0$, *existe um* $N(\varepsilon)$ *tal que, para todo* $N \geq N(\varepsilon)$, *cada um dos arcos* $\{z : |z| = 1 \text{ e } |z - \xi_m| < \varepsilon\}$, $m = 1, 2, \ldots, n_0$, *contém pelo menos um zero de* $S_n^{\psi_N}(w,z)$.

Teorema 4.13. *Seja* $\varepsilon > 0$ *tal que os intervalos* $Y_j(\varepsilon) = (\omega_j - \varepsilon, \omega_j + \varepsilon)$, $j = 1, 2, \ldots, n_0$, *satisfazem*

$$Y_j(\varepsilon) \subset (0, 2\pi) \quad \text{e} \quad \omega_k \notin Y_j(\varepsilon),\ \textit{se}\ k \neq j\,.$$

Consideremos $\hat{Y}(\varepsilon) = [0, 2\pi] \setminus \bigcup_{j=1}^{n_0} Y_j(\varepsilon)$. *Então,*

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \sum_{\theta_{n,k}(\psi_N,w)\in Y_j(\varepsilon)} \lambda_{n,k}^{\psi_N}(w) &= \lambda_j^{\psi}\,,\ j = 1, 2, \ldots, n_0\,,\\
\lim_{N\to\infty} \sum_{\theta_{n,k}(\psi_N,w)\in \hat{Y}_j} \lambda_{n,k}^{\psi_N}(w) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Uma das restrições para se utilizar polinômios para-ortogonais em análise de frequência é a dificuldade em se distinguir os zeros "interessantes" (zeros que convergem para pontos de frequência) daqueles "desinteressantes" (que não convergem para pontos de frequência). As informações sobre o comportamento de $\lambda_{n,k}^{\psi_N}(w)$ auxiliam neste problema. Ainda assim, há dificuldades numéricas para se calcular os zeros dos polinômios $S_n^{\psi_N}(w,z)$, pois são zeros complexos, e para se determinar o número de frequências n_0.

4.2.3 Polinômios ortogonais e análise de frequência

Em [9], o estudo do problema de análise de frequência foi estendido para os polinômios ortogonais no intervalo $[-1,1]$, $P_n^{\phi_1}$ e $P_n^{\phi_2}$ (veja 3.1.24), apresentados na Seção 3.1.

Manteremos, aqui, todas as notações e resultados apresentados nas Seções 4.2.1 e 4.2.2.

O próximo resultado apresenta informações sobre duas sequências distintas de polinômios para-ortogonais associados aos polinômios de Szegő $S_n^{\psi_N}$, denotados por $W_{n-n_0}^{\psi_N}(w_1,z)$ e $W_{n-n_0}^{\psi_N}(w_2,z)$.

Teorema 4.14. *Sejam $n > n_0$ fixo e M uma sequência arbitrária de números naturais. Consideremos $W_{n-n_0}^{\psi}(w,z)$ como no Teorema 4.10. Então,*

(i) existe uma subsequência M_1 de M tal que, para $N \in M_1$,

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_1}} W_{n-n_0}^{\psi_N}(w_1,z) = W_{n-n_0}^{\psi}(w_1,z)\,;$$

(ii) se $w_1 \neq w_2$, existe uma subsequência M_2 de M_1 tal que, para $N \in M_2$,

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_2}} W_{n-n_0}^{\psi_N}(w_1,z) = W_{n-n_0}^{\psi}(w_1,z),$$

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_2}} W_{n-n_0}^{\psi_N}(w_2,z) = W_{n-n_0}^{\psi}(w_2,z).$$

Além disso, $W_{n-n_0}^{\psi}(w_1,z)$ e $W_{n-n_0}^{\psi}(w_2,z)$ não têm zeros comuns.

Esse resultado pode ser usado para encontrar os zeros "interessantes" observando-se o comportamento assintótico de duas sequências distintas de polinômios para-ortogonais.

Vamos utilizar polinômios para-ortogonais com $w_1 = 1$ e $w_2 = -1$, ou seja, $S_n^{\psi_N}(1,z)$ e $S_n^{\psi_N}(-1,z)$, para aplicar os resultados descritos na Seção 3.1.

Por (4.2.57), vemos, por exemplo, que $S_{n_0}^{\psi}(z)$ é o único fator comum entre os limites das subsequências convergentes de

$$\{S_n^{\psi_{N_k}}(1,z)\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{e} \quad \{S_n^{\psi_{N_k}}(-1,z)\}_{k=1}^{\infty}.$$

Agora, novamente utilizaremos a transformação $x(z)$, com $|z| = 1$ e $x \in [-1,1]$, definida em (3.1.13) por

$$x(z) = \frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2}),$$

para relacionar os polinômios para-ortogonais aos ortogonais no intervalo $(-1,1)$. Note que podemos escrever $x(\theta) = \cos(\theta/2)$, para $0 \leq \theta \leq \pi$.

Das relações entre os polinômios $P_n^{(i)}$ e $R_n^{(i)}$, $i = 1,2$, dadas no Teorema 3.4, tomamos

$$P_n^{(1)}(N, x(z)) = (4z)^{-n/2} R_n^{(1)}(N,z) = (4z)^{-n/2} \frac{S_n^{\psi_N}(1,z)}{1 + S_n^{\psi_N}(1,0)}$$

e

$$P_n^{(2)}(N, x(z)) = (4z)^{-n/2} R_n^{(2)}(N,z) = (4z)^{-n/2} \frac{S_{n+1}^{\psi_N}(-1,z)}{(z-1)(1 + S_{n+1}^{\psi_N}(-1,0))}\,.$$

Pelo Teorema 3.4, as sequências de polinômios mônicos $P_n^{(1)}(N,x)$ e $P_n^{(2)}(N,x)$, $n = 0,1,2,\ldots$, satisfazem

$$P_{n+1}^{(i)}(N,x) = xP_n^{(i)}(N,x) - \alpha_{n+1}^{(i)}(N)P_{n-1}^{(i)}(N,x),\ n \geq 1,\ i = 1,2, \tag{4.2.58}$$

onde $P_0^{(i)}(N,x) = 1$, $P_1^{(i)}(N,x) = x$,

$$\alpha_{n+1}^{(1)}(N) = \frac{1}{4}(1-\alpha_{n-2}^{(N)})(1+\alpha_{n-1}^{(N)}) \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^{(2)}(N) = \frac{1}{4}(1+\alpha_{n-1}^{(N)})(1-\alpha_n^{(N)}),$$

com $\alpha_{n-1}^{(N)} = -S_n^{\psi_N}(0)$ e $\psi_N(e^{i\theta})$ definida em (4.2.54).

Além disso, os polinômios $P_n^{(1)}(N,x)$ e $P_n^{(2)}(N,x)$ são ortogonais mônicos associados às medidas positivas $\phi_1(N,x)$ e $\phi_2(N,x)$ em $(-1,1)$, respectivamente, onde

$$d\phi_1(N,x(z)) = \frac{1}{1-x^2(z)}d\phi_2(N,x(z)) = -d\psi_N(z).$$

Como, para $z = e^{i\theta}$, temos $x = cos(\theta/2)$, então podemos escrever

$$d\phi_1(N,\cos(\theta/2)) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\theta/2)}d\phi_2(N,\cos(\theta/2)) = -d\psi_N(e^{i\theta}). \tag{4.2.59}$$

Como as medidas $\phi_1(N,x)$ e $\phi_2(N,x)$ estão relacionadas, vamos utilizar aqui apenas as informações que envolvem a medida $\phi_1(N,x)$.

Analogamente à medida $\phi_1(N,x)$ consideremos, então, a medida ϕ_1 definida por

$$d\phi_1(\cos(\theta/2)) = -d\psi(e^{i\theta}), \tag{4.2.60}$$

onde ψ é dada pela equação (4.2.55). Das expressões (4.2.60) e (4.2.55), podemos escrever

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 0, & x < \xi_{n_0}, \\ \displaystyle\sum_{k=s}^{n_0} \lambda_k^{\psi}, & \xi_k \leq x < \xi_{k-1}, \quad s = n_0, n_0-1, \ldots, 2, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k^{\psi}, & \xi_1 \leq x, \end{cases}$$

onde $\lambda_k^{\psi} = |\gamma_k|^2$, como em (4.2.55), γ_k e n_0 são dados em (4.2.53) e $\xi_k = \cos(\omega_k/2)$ são ordenados da seguinte forma:

$$-1 < \xi_{n_0} < \cdots < \xi_2 < \xi_1 < 1,$$

pois

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{n_0} < 2\pi.$$

Teorema 4.15. *(i) Para* $\forall\, g \in C(-1,1)$,

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-1}^{1} g(x)d\phi_1(N,x) = \int_{-1}^{1} g(x)d\phi_1(x). \tag{4.2.61}$$

(ii) Para cada n fixo, $1 \leq n \leq n_0$,

$$\lim_{N\to\infty} P_n^{(1)}(N,x) = P_n^{\phi_1}(x), \qquad x \in (-1,1),$$

onde $P_n^{\phi_1}$ *são os polinômios ortogonais com relação à medida* ϕ_1*. Em particular, temos*

$$\lim_{N\to\infty} P_{n_0}^{(1)}(N,x) = P_{n_0}^{\phi_1}(x) = \prod_{m=1}^{n_0}(x-\xi_m)\,, \qquad x\in(-1,1)\,,$$

onde $\xi_m = \cos(\omega_m/2)$.

Assim, podemos obter aproximações para $\xi_m,\ m=1,2,\dots n_0$, através dos zeros do polinômio $P_{n_0}^{(1)}(N,x)$ quando $N\to\infty$, o que é uma grande vantagem, pois os zeros de $P_{n_0}^{(1)}(N,x)$ são simples e pertencem ao intervalo $(-1,1)$.

Para se obter informações sobre $\lambda_k^{\psi} = |\gamma_k|^2$, consideremos as fórmulas de quadratura gaussianas relacionadas com $P_n^{(1)}(N,x)$,

$$\int_{-1}^{1} f(x)d\phi_1(N,x) = \sum_{m=1}^{n} W_{n,m}^{(1)}(N) f(x_{n,m}^{(1)}(N))\,, \quad f\in\mathbb{P}_{2n-1}\,, \tag{4.2.62}$$

onde $x_{n,m}^{(1)}(N)$ são os zeros de $P_n^{(1)}(N,x)$, ordenados da seguinte maneira:

$$-1 < x_{n,n}^{(1)}(N) < x_{n,n-1}^{(1)}(N) < \ldots < x_{n,2}^{(1)}(N) < x_{n,1}^{(1)}(N) < 1\,.$$

Das relações (4.1.47) entre pesos e nós de fórmulas de quadratura gaussianas e fórmulas de quadratura no círculo unitário, temos

$$\begin{array}{rcl} x_{n,m}^{(1)}(N) &=& \cos(\theta_{n,m}^{(1)}(\psi_N)/2)\,, \\ W_{n,m}^{(1)}(N) &=& \lambda_{n,m}^{(1)}(\psi_N)\,, \end{array} \qquad m=1,2,\ldots,n. \tag{4.2.63}$$

Utilizando as relações (4.2.63) e $\xi_m = \cos(\omega_m/2)$, $m=1,2,\ldots,n$, nos Teoremas 4.12 e 4.13, obtemos o seguinte resultado que pode ser utilizado para determinar os pontos de frequência e os módulos das amplitudes de um dado sinal através dos nós e dos pesos da fórmula de quadratura (4.2.62).

Teorema 4.16. *Seja* $n\ge n_0$ *fixo.*

(i) Para qualquer $\varepsilon>0$ *existe* $N(\varepsilon)$ *tal que, para todo* $N\ge N(\varepsilon)$*, cada intervalo da forma* $(\xi_m-\varepsilon,\xi_m+\varepsilon)$*,* $m=1,2,\ldots,n_0$*, contém pelo menos um zero de* $P_n^{(1)}(N,x)$*.*

(ii) Seja $\varepsilon>0$ *tal que os intervalos* $\Delta_j(\varepsilon) = (\xi_j-\varepsilon,\xi_j+\varepsilon)$*,* $j=1,2,\ldots,n_0$*, satisfazem*

$$\Delta_j(\varepsilon)\subset(-1,1) \qquad e \qquad \xi_k\notin\Delta_j(\varepsilon) \quad se \quad k\neq j\,.$$

Se $\hat\Delta(\varepsilon) = [0,2\pi]\setminus\bigcup_{j=1}^{n_0}\Delta_j(\varepsilon)$*, então*

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{x_{n,k}^{(1)}\in\Delta_j(\varepsilon)} W_{n,k}^{(1)}(N) = \lambda_j^{\psi}\,, \quad j=1,2,\ldots,n_0,$$

com $\lambda_j^{\psi}=|\gamma_j|^2$*, e*

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{x_{n,k}^{(1)}\in\hat\Delta(\varepsilon)} W_{n,k}^{(1)}(N) = 0\,.$$

N	1000	10000	100000	1000000
$x_{1,n}^{(1)}(N)$	.9594011810	.9594358752	.9600074510	.9638104402
$x_{2,n}^{(1)}(N)$	.6240716070	.6239469630	.6262791465	.6463467115
$x_{3,n}^{(1)}(N)$	.4993490519	.4999350137	.4999935864	.4999994190
$x_{4,n}^{(1)}(N)$	.0000000000	.0000000000	.0000000000	.0000000000
$W_{1,n}^{(1)}(N)$	.2385586e−2	.2398284e−3	.2510096e−4	.3672402e−5
$W_{2,n}^{(1)}(N)$	.3019255e−1	.3038765e−2	.2968618e−3	.2512087e−4
$W_{3,n}^{(1)}(N)$	.4960261e+1	.4995888e+1	.4999684e+1	.4999974e+1
$W_{4,n}^{(1)}(N)$	.3980690e+1	.3998053e+1	.3999756e+1	.3999974e+1

Tabela 4.6: Zeros não negativos de $P_n^{(1)}(N,x)$, para $n=7$, e os pesos da fórmula de quadratura correspondentes, para um sinal dado por (4.2.64).

Esse resultado indica que, para $N \to \infty$, podemos identificar os zeros $x_{n,m}^{(1)}(N)$ de $P_n^{(1)}(N,x)$ tais que a sequência $\{x_{n,m}^{(1)}(N)\}_{N=1}^{\infty}$ tem como limite $\xi_m = \cos(\omega_m/2)$, observando se $\lim \sum W_{n,m}^{(1)}(N) \neq 0$.

O próximo resultado estabelece o comportamento de sequências de zeros de $P_n^{(1)}(N,x)$ com convergências distintas.

Teorema 4.17. *Seja $n \geq n_0$ fixo. Consideremos M uma sequência de números naturais e, para cada $N \in M$, sejam $y(1,n) > y(2,n) > y(3,n)$ três zeros distintos de $P_n^{(1)}(N,x)$ tais que os limites*

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M}} y(j,N) = y(j)\,, \quad j = 1,2,3\,,$$

existem. Então,
(i) se duas sequências de zeros têm um limite comum, esse limite deve ser igual a um ponto de frequência, isto é,

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M}} y(1,N) = \lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M}} y(2,N) = \xi_m\,, \quad \textit{para algum } m = 1,2,\ldots,n_0\,;$$

(ii) as três sequências não podem ter o mesmo limite.

Dessa forma, podemos aproximar a solução do problema de análise de frequência. Conhecidos N valores do sinal trigonométrico $x(m)$, $m = 0,1,2,\ldots,N-1$, construímos a medida ψ_N como em (4.2.54), os momentos como em (4.2.56) e calculamos os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios ortogonais, por exemplo, $P_n^{(1)}(N,x)$. Desses coeficientes, utilizando a matriz de Jacobi (1.4.20), calculamos os zeros $x_{n,m}^{(1)}(N)$ de $P_n^{(1)}(N,x)$ e, de (4.1.6), obtemos os pesos $W_{n,m}^{(1)}(N)$ da fórmula de quadratura associada. Finalmente, observando o comportamento dos pesos e nós da quadratura e utilizando o Teorema 4.16, podemos estimar o valor dos pontos de frequências e suas respectivas amplitudes.

Apresentamos, agora, alguns exemplos de como podemos determinar as frequências e amplitudes utilizando-se os zeros de polinômios ortogonais no intervalo $(-1,1)$ e os pesos das respectivas fórmulas de quadratura.

N	1000	10000	100000	1000000
$x^{(1)}_{1,n}(N)$	.9940844167	.9940870898	.9941331278	.9943640409
$x^{(1)}_{2,n}(N)$	.9472732272	.9473005082	.9475947640	.9495377568
$x^{(1)}_{3,n}(N)$	.8548244375	.8548903013	.8555067037	.8603075329
$x^{(1)}_{4,n}(N)$	.7189582997	.7189420977	.7197975661	.7268018340
$x^{(1)}_{5,n}(N)$	.5385688762	.5380815523	.5386536378	.5438509641
$x^{(1)}_{6,n}(N)$	.4993173295	.4999312006	.4999932243	.4999994002
$x^{(1)}_{7,n}(N)$	.2904740721	.2904681641	.2906274219	.2920830261
$x^{(1)}_{8,n}(N)$	.6701693e−2	.2113208e−2	.6692490e−3	.2156445e−3
$W^{(1)}_{1,n}(N)$	.7977139e−3	.8018650e−4	.8492834e−5	.1341455e−5
$W^{(1)}_{2,n}(N)$	.9460595e−3	.9528461e−4	.9991095e−5	.1489447e−5
$W^{(1)}_{3,n}(N)$	.1415432e−2	.1419179e−3	.1466860e−4	.1942683e−5
$W^{(1)}_{4,n}(N)$	.3392576e−2	.3401662e−3	.3437371e−4	.3808523e−5
$W^{(1)}_{5,n}(N)$	.9917225e−1	.1030305e−1	.1005570e−2	.8145786e−4
$W^{(1)}_{6,n}(N)$	.4881227e+1	.4987618e+1	.4998873e+1	.4999906e+1
$W^{(1)}_{7,n}(N)$	.6356956e−2	.6361711e−3	.6434639e−4	.7037543e−5
$W^{(1)}_{8,n}(N)$	.1989875e+1	.1998979e+1	.1999873e+1	.1999986e+1

Tabela 4.7: Zeros positivos de $P_n^{(1)}(N,x)$, para $n = 16$, e os correspondentes pesos da fórmula de quadratura para um sinal dado por (4.2.64).

Exemplo 4.6. Consideremos um sinal dado por

$$x(m) = 2e^{im\pi} + (1+2i)e^{i2m\pi/3} + (1-2i)e^{i4m\pi/3} + Z_m, \tag{4.2.64}$$

onde adicionamos uma perturbação Z_m a cada tempo discreto $m = 0, 1, \dots$. A pertubação Z_m é um número real aleatório no intervalo $[-0.005, 0.005]$.

Espera-se que os zeros "interessantes" de $P_n^{(1)}(N,x)$, quando $N \to \infty$, tendam para o valores

$$\xi_1 = \cos(2\pi/6) = 0.5, \qquad \xi_2 = \cos(\pi/2) = 0 \quad \text{e} \quad \xi_3 = \cos(4\pi/6) = -0.5\,.$$

Os correspondentes pesos da fórmula de quadratura devem convergir para os limites

$$\lambda_1^\psi = 5, \qquad \lambda_2^\psi = 4 \quad \text{e} \quad \lambda_3^\psi = 5\,.$$

Para analisar a convergência, calculamos os zeros de $P_7^{(1)}(N,x)$ e $P_{16}^{(1)}(N,x)$. Por causa da simetria dos zeros de $P_n^{(1)}(N,x)$, fornecemos apenas os zeros não negativos de $P_7^{(1)}(N,x)$ e de $P_{16}^{(1)}(N,x)$, e os correspondentes pesos das fórmulas de quadratura (Tabelas 4.6 e 4.7, respectivamente).

Podemos ver na Tabela 4.6 que, quando N torna-se muito grande, $W_{1,7}^{(1)}(N)$ e $W_{2,7}^{(1)}(N)$ tendem para o limite 0 e, portanto, $x_{1,7}^{(1)}(N)$ e $x_{2,7}^{(1)}(N)$ representam zeros "desinteressantes". Os outros zeros, que são zeros "interessantes", permitem que recuperemos os limites $\xi_1 = 0.5$ e $\xi_2 = 0$. Os correspondentes pesos da fórmula de quadratura, por sua vez, tendem para os limites $\lambda_1^\psi = 5$ e $\lambda_2^\psi = 4$.

N	4096	16384	65536	262144	1048576
$x_{1,n}^{(1)}(N)$	.989212594	.989299970	.989210625	.989299581	.989210502
$x_{2,n}^{(1)}(N)$	.906162462	.906761986	.906133429	.906755808	.906131609
$x_{3,n}^{(1)}(N)$	.865979840	.866014421	.866022554	.866024717	.866025225
$x_{4,n}^{(1)}(N)$	.707215505	.707135396	.707113588	.707108570	.707107206
$x_{5,n}^{(1)}(N)$	.607312636	.611289737	.607296488	.611295467	.607295454
$x_{6,n}^{(1)}(N)$	.309555993	.309108278	.309050983	.309022710	.309019119
$x_{7,n}^{(1)}(N)$	.150003490	.142155835	.150181242	.142175633	.150192479
$W_{1,n}^{(1)}(N)$	.112888e−1	.287092e−2	.705654e−3	.179437e−3	.441037e−4
$W_{2,n}^{(1)}(N)$	.153277e+0	.373171e−1	.960046e−2	.233339e−2	.600109e−3
$W_{3,n}^{(1)}(N)$	.998523e+2	.999642e+2	.999907e+2	.999977e+2	.999994e+2
$W_{4,n}^{(1)}(N)$	.160273e+2	.160061e+2	.160017e+2	.160003e+2	.160001e+2
$W_{5,n}^{(1)}(N)$	.301059e−1	.774932e−2	.188245e−2	.484465e−3	.117656e−3
$W_{6,n}^{(1)}(N)$	.100595e+1	.100141e+1	.100037e+1	.100008e+1	.100002e+1
$W_{7,n}^{(1)}(N)$	.730947e−2	.198729e−2	.458248e−3	.124244e−3	.286460e−4

Tabela 4.8: Zeros positivos de $P_n^{(1)}(N,x)$, para $n = 14$, e os correspondentes pesos da fórmula de quadratura para um sinal dado por (4.2.65).

Na Tabela 4.7, o grau do polinômio é par. Como pode-se ver, isto força o zero $x_{8,16}^{(1)}(N)$ (e também o zero $x_{9,16}^{(1)}(N)$) para o limite $\xi_2 = 0$. De acordo com o Teorema 4.16, a convergência desses dois zeros para ξ_2 significa que nenhum outro zero pode convergir para o mesmo limite. Observe que, como indicado no Teorema 4.17, a soma $W_{8,16}^{(1)}(N) + W_{9,16}^{(1)}(N)$ converge para o limite $\lambda_2^\psi = 4$.

Observando os pesos da fórmula de quadratura associada, vemos que existe apenas um outro zero "interessante" de $P_{16}^{(1)}(N,x)$ na Tabela 4.7, o zero $x_{6,16}^{(1)}(N)$, que converge para $\xi_1 = 0.5$ e o correspondente peso converge para $\lambda_1^\psi = 5$.

Exemplo 4.7. Considere o sinal

$$x(m) = \sum_{j=1}^{3}(\gamma_j e^{im\omega_j} + \gamma_{n_0+1-j} e^{im\omega_{n_0+1-j}}), \tag{4.2.65}$$

com $n_0 = 6$, $\omega_1 = 2\pi - \omega_6 = \pi/3$, $\omega_2 = 2\pi - \omega_5 = \pi/2$, $\omega_3 = 2\pi - \omega_4 = 4\pi/5$, $\gamma_1 = \gamma_6 = 10$, $\gamma_2 = \gamma_5 = 4$ e $\gamma_3 = \gamma_4 = 1$.

Esperamos que os zeros positivos "interessantes" de $P_n^{(1)}(N,x)$ e os correspondentes pesos da fórmula de quadratura, quando $N \to \infty$, convirjam para os valores

$$\xi_1 = \cos(\pi/6) = 0.86602540\cdots, \qquad \lambda_1^\psi = 100,$$
$$\xi_2 = \cos(\pi/4) = 0.70710678\cdots, \qquad \lambda_2^\psi = 16,$$
$$\xi_3 = \cos(2\pi/5) = 0.30901699\cdots, \qquad \lambda_3^\psi = 1.$$

Na Tabela 4.8, apresentamos os zeros positivos de $P_{14}^{(1)}(N,x)$ e os correspondentes pesos da fórmula de quadratura. Observando os pesos que se aproximam de 0, facilmente podemos eliminar os zeros "desinteressantes" $x_{1,14}^{(1)}(N)$, $x_{2,14}^{(1)}(N)$,

N	65536	131072	262144	524288	1048576
$x_{1,n}^{(1)}(N)$	.990694550	.991069694	.990707384	.991109746	.990694385
$x_{2,n}^{(1)}(N)$	.918162836	.920315195	.918158191	.920506677	.918161176
$x_{3,n}^{(1)}(N)$	.866024393	.866025016	.866025149	.866025308	.866025340
$x_{4,n}^{(1)}(N)$	.707388335	.710944712	.707148927	.708477691	.707125604
$x_{5,n}^{(1)}(N)$	.703238297	.706967424	.700700794	.707010273	.703489755
$x_{6,n}^{(1)}(N)$	.405875346	.407626485	.386511972	.385318866	.405829382
$x_{7,n}^{(1)}(N)$	.308955310	.308988523	.308993668	.309005739	.309013135
$x_{8,n}^{(1)}(N)$	.000000000	.000000000	.000000000	.000000000	.000000000
$W_{1,n}^{(1)}(N)$	.635379e−3	.356439e−3	.162438e−3	.923051e−4	.397117e−4
$W_{2,n}^{(1)}(N)$	.510492e−2	.243761e−2	.128986e−2	.614839e−3	.319084e−3
$W_{3,n}^{(1)}(N)$	.999944e+2	.999961e+2	.999986e+2	.999990e+2	.999996e+2
$W_{4,n}^{(1)}(N)$	.149311e+2	.569533e+0	.158983e+2	.105795e+1	.159183e+2
$W_{5,n}^{(1)}(N)$	.107307e+1	.154316e+2	.102705e+0	.149423e+2	.819297e−1
$W_{6,n}^{(1)}(N)$	.107399e−2	.481206e−3	.371597e−3	.173370e−3	.671996e−4
$W_{7,n}^{(1)}(N)$	.999815e+0	.999950e+0	.999839e+0	.999932e+0	.999988e+0
$W_{8,n}^{(1)}(N)$	.320445e−3	.146707e−3	.964100e−4	.450728e−4	.200286e−4
	.160042e+2	.160011e+2	.160010e+2	.160002e+2	.160002e+2

Tabela 4.9: Zeros não-negativos de $P_n^{(1)}(N,x)$, para $n = 15$, e os correspondentes pesos da fórmula de quadratura para um sinal dado por (4.2.65).

$x_{5,14}^{(1)}(N)$ e $x_{7,14}^{(1)}(N)$. Os zeros restantes, $x_{3,14}^{(1)}(N)$, $x_{4,14}^{(1)}(N)$ e $x_{6,14}^{(1)}(N)$, convergem para os limites esperados ξ_1, ξ_2 e ξ_3, respectivamente. Dos limites dos correspondentes pesos da fórmula de quadratura, podemos recuperar os valores de λ_1^ψ, λ_2^ψ e λ_3^ψ.

Na Tabela 4.9, apresentamos os zeros não-negativos de $P_{15}^{(1)}(N,x)$. Novamente é fácil eliminar os zeros "desinteressantes" $x_{1,15}^{(1)}(N)$, $x_{2,15}^{(1)}(N)$, $x_{6,15}^{(1)}(N)$ e $x_{8,15}^{(1)}(N)$, observando o comportamento dos pesos. Além disso, o comportamento de $W_{3,15}^{(1)}(N)$ e $W_{7,15}^{(1)}(N)$ também indica que $x_{3,15}^{(1)}(N)$ converge para ξ_1 e $x_{7,15}^{(1)}(N)$ converge para o limite ξ_3.

Como esperado pelos Teoremas 4.17 e 4.16, a soma $W_{4,15}^{(1)}(N) + W_{5,15}^{(1)}(N)$ tende para o limite λ_2^ψ. Os números da última linha da Tabela 4.9 representam as somas $W_{4,15}^{(1)}(N) + W_{5,15}^{(1)}(N)$.

4.3 Exercícios

Exercício 4.1. Demonstre os Teoremas 4.1 e 4.2.

Exercício 4.2. Mostre que os pesos $W_{n,k}$, $k = 1, \ldots, n$, das fórmulas de quadratura gaussianas são positivos. Faça o mesmo para os pesos $V_{n,k}$, $k = 1, \ldots, n$, das fórmulas de quadratura L-gaussianas (4.1.10).

Exercício 4.3. Demonstre as relações da equação (4.1.21).

Exercício 4.4. Consideremos os polinômios definidos por

$$\tilde{P}_n(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r; x) = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k P_{n-2k}^{\phi}(x), \quad 0 \leq r \leq \bar{n},$$

onde P_n^{ϕ} é o polinômio ortogonal de grau n com relação à medida simétrica ϕ em $(-d, d)$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ e $\lambda_0 \neq 0$. Mostre que os polinômios $\tilde{P}_n$ satisfazem

$$\int_{-d}^{d} x^s \tilde{P}_n(x) d\phi(x) = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, n-1-2r.$$

Exercício 4.5. Mostre que um polinômio P_n de grau n satisfaz $P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$ se existe um único conjunto de números reais $\lambda_0, \ldots, \lambda_{\bar{n}}$, tal que

$$P_n(x) = \tilde{P}_n(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\bar{n}}; x).$$

Exercício 4.6. Mostre que a fórmula de quadratura (4.1.28) é exata para polinômios de grau menor ou igual a $2n - 2r - 1$.

Exercício 4.7. Considere os polinômios $\tilde{P}_n$ e $\tilde{B}_n$ e as relações entre eles.

- Use as relações (4.1.20) e (4.1.29) para mostrar que

$$\tilde{B}_n(\tilde{\lambda}_0, \ldots, \tilde{\lambda}_r; t) = \sum_{k=0}^{r} \tilde{\lambda}_k t^k \left((2\sqrt{\alpha t})^{n-2k} P_{n-2k}(x(t)) \right).$$

- Use (4.1.26) e mostre que

$$\tilde{B}_n(\tilde{\lambda}_0, \ldots, \tilde{\lambda}_r; t) = (2\sqrt{\alpha t})^n \tilde{P}_n(\lambda_0, \ldots, \lambda_r; x(t))$$

  se, e somente se,

$$\tilde{\lambda}_k = (4\alpha)^k \lambda_k, \quad k = 0, 1, \ldots, r.$$

Bibliografia

[1] ANDRADE, E. X. L.; BRACCIALI, C. F. *Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações*. São Carlos: Notas em Matemática Aplicada, vol. 20, SBMAC, 2005.

[2] ANDRADE, E. X. L.; BRACCIALI, C. F.; RAFAELI, F. R. *Introdução aos Polinômios Ortogonais*. São Carlos: Notas em Matemática Aplicada, vol. 64, SBMAC, 2012.

[3] ANDRADE, E. X. L.; BRACCIALI, C. F.; SRI RANGA, A. Inversely symmetric interpolatory quadrature rules. *Acta Applicandae Mathematicae*, v. 61, p. 15–28, 2000.

[4] ANDRADE, E. X. L.; BRACCIALI, C. F.; SRI RANGA, A. Gaussian quadrature rules with simple node-weight relations. *Numerical Algorithms*, v. 27, p. 61–76, 2001.

[5] ANDRADE, E. X. L.; COSTA, M. S.; SRI RANGA, A. L-orthogonal polynomials associated with related measures. *Applied Numerical Mathematics*, v. 60, p. 1041–1052, 2010.

[6] ANDREWS, G. E.; ASKEY, R.; ROY, R. *Special Functions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[7] BARTLE, R. G. *Elementos de Análise Real*. Rio de Janeiro: Ed. Campus, 1983.

[8] BERTI, A. C.; SRI RANGA, A. Companion orthogonal polynomials: some applications. *Applied Numerical Mathematics*, v. 39, p. 127–149, 2001.

[9] BRACCIALI, C. F.; LI, X.; SRI RANGA, A. Real orthogonal polynomials in frequency analysis. *Mathematics of Computation*, v. 74, p. 341–362, 2005.

[10] BRACCIALI, C. F.; SILVA, A. P.; SRI RANGA, A. Szegő polynomials: some relations to L-orthogonal and orthogonal polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 153, p. 79–88, 2003.

[11] BRESSAN, R.; MENEGASSO, S. F.; SRI RANGA, A. Szegő polynomials: quadrature rules on the unit circle and on [-1,1]. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, v. 33, p. 567–584, 2003.

[12] BULTHEEL, A. et al. *Orthogonal Rational Functions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[13] CHIHARA, T. S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*: Mathematics and its Applications, vol. 13. New York: Gordon & Breach, 1978.

[14] COCHRAN, L.; COOPER, S. C. Orthogonal Laurent polinomials on the real line. In: COOPER, S. C.; THRON, W. (Ed.). New York: Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Marcel-Dekker, 1994. p. 47–100.

[15] COSTA, M. S.; FELIX, H. M.; SRI RANGA, A. Orthogonal polynomials on the unit circle and chain sequences. *Journal of Approximation Theory*, v. 173, p. 14–32, 2013.

[16] DARUIS, L.; NJÅSTAD, O.; VAN ASSCHE, W. Para-orthogonal polynomials in frequency analysis. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, v. 33, p. 629–645, 2003.

[17] DELSARTE, P.; GENIN, Y. The split Levinson algorithm. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process*, v. 34, p. 470–478, 1986.

[18] DIMITROV, D. K.; SRI RANGA, A. Zeros of a family of hypergeometric para-orthogonal polynomials on the unit circle. *Mathematische Nachrichten*, v. 286, p. 1778–1791, 2013.

[19] ERDÉLYI, T. et al. A simple proof of "Favard's theorem" on the unit circle. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, v. 39, p. 551–556, 1991.

[20] GAUTSCHI, W. Orthogonal polynomials - constructive theory and applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 12/13, p. 61–76, 1985.

[21] GAUTSCHI, W. *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*. Oxford: Oxford Science Publications, 2004.

[22] GONZÁLEZ-VERA, P.; SANTOS-LEON, J.; NJÅSTAD, O. Some results about numerical quadrature on the unit circle. *Advances in Computational Mathematics*, v. 5, p. 297–328, 1996.

[23] HENRICI, P. *Applied and Computational Complex Analysis*: vol. 2. New York: John Wiley & Sons, 1977.

[24] ISMAIL, M. *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

[25] JONES, W. B.; NJÅSTAD, O.; SAFF, E. B. Szegő polynomials associated with Wiener-Levinson filters. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 32, p. 387–406, 1990.

[26] JONES, W. B.; NJÅSTAD, O.; THRON, W. J. Two-point Padé expansions for a family of analytic functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 9, p. 105–123, 1983.

[27] JONES, W. B.; NJÅSTAD, O.; THRON, W. J. Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature rules and continued fractions associated with the unit circle. *Bulletin of the London Mathematical Society*, v. 21, p. 113–152, 1989.

[28] JONES, W. B.; PETERSEN, V. Continued fractions and Szegő polynomials in frequency analisys and related topics. *Acta Applicandae Mathematicae*, v. 61, p. 149–174, 2000.

[29] JONES, W. B.; THRON, W. J. *Continued Fractions Analytic Theory and Applications*. Reading: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 11, Addison-Wesley, 1980.

[30] JONES, W. B.; THRON, W. J. A strong Stieltjes moment problem. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 261, p. 503–528, 1980.

[31] JONES, W. B. et al. Szegő polynomials applied to frequency analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 46, p. 217–228, 1993.

[32] KRYLOV, V. I. *Approximate Calculation of Integrals*. New York: Macmillan, 1962.

[33] LEBEDEV, N. N. *Special Functions and Their Applications*. New York: Dover Publ., 1972.

[34] LEVINSON, N. The Wiener RMS (root mean square) error criterion in filter design and prediction. *J. Math. Phys. Mass. Inst. Techn.*, v. 25, p. 261–278, 1947.

[35] LORENTZEN, L.; WAADELAND, H. *Continued Fractions with Applications*. Amsterdam: Studies in Computational Mathematics, vol. 3, North-Holland, 1992.

[36] PAN, K.; SAFF, E. B. Asymptotics for zeros of Szegő polynomials associated with trigonometric polynomials signals. *Journal of Approxination Theory*, v. 71, p. 239–251, 1992.

[37] RUDIN, W. *Princípios de Análise Matemática*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1971.

[38] SILVA, A.; SRI RANGA, A. Polynomials generated by a three term recurrence relation: bounds for complex zeros. *Linear Algebra and its Applications*, v. 397, p. 299–324, 2005.

[39] SIMON, B. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle*: Part 1: Classical Theory. Providence, RI: American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 54, 2004.

[40] SIMON, B. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle*: Part 2: Spectral Theory. Providence, RI: American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 54, 2004.

[41] SRI RANGA, A. *Continued Fractions which Correspond to Two Series Expansions, and the Strong Hamburguer Moment Problem*. Tese (Doutorado) — University of St. Andrews, St. Andrews, Scotland, UK, 1983.

[42] SRI RANGA, A. Another quadrature rule of highest algebraic degree of precision. *Numerische Mathematik*, v. 68, p. 283–294, 1994.

[43] SRI RANGA, A. Symmetric orthogonal polynomials and the associated orthogonal L-polynomials. *Applied Numerical Mathematics*, v. 123, p. 3135–3141, 1995.

[44] SRI RANGA, A.; ANDRADE, E. X. L. Avaliação numérica de uma classe de integrais. *Revista de Matemática e Estatística*, v. 11, p. 165–172, 1993.

[45] SRI RANGA, A.; ANDRADE, E. X. L.; PHILLIPS, G. M. Associated symmetric quadrature rules. *Applied Numerical Mathematics*, v. 21, p. 175–183, 1996.

[46] SRI RANGA, A. et al. A Favard type theorem for orthogonal polynomials on the unit circle from a three term recurrence formula. *Journal of Approximation Theory*, v. 184, p. 146–162, 2014.

[47] STROUD, A. H.; SECREST, D. *Gaussian Quadrature Formulas*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1966.

[48] SZEGŐ, G. *Orthogonal Polynomials*. Providence, RI: American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 23, 1975.

[49] WALL, H. S. *Analytic Theory of Continued Fractions*. Chelsea: The University Series in Higler Mathematics, vol. 1, 1938.

[50] WIENER, N. *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*. New York: MIT Press, 1949.

[51] ZHEDANOV, A. On some classes of polynomials orthogonal on arcs of the unit circle connected with symmetric orthogonal polynomials on an interval. *Journal of Approxination Theory*, v. 94, p. 73–106, 1998.

Índice