

**Volume 73, 2014**

**Editores**

**Fernando Rodrigo Rafaeli (Editor Chefe)**

Universidade Federal de Uberlândia - UFU  
Uberlândia, MG, Brasil

**Vanessa Avansini Botta Pirani (Editor Adjunto)**

Universidade Estadual Paulista - UNESP  
Presidente Prudente, SP, Brasil

**Alexandre Loureiro Madureira**

Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC  
Petrópolis, RJ, Brasil

**Edson Luiz Cataldo Ferreira**

Universidade Federal Fluminense - UFF  
Niterói, RJ, Brasil

**Jorge Manuel Vieira Capela**

Universidade Estadual Paulista - UNESP  
Araraquara, SP, Brasil

**Sandra Augusta Santos**

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP  
Campinas, SP, Brasil

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.9)**, as **figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página  
[http://www.sbmac.org.br/p\\_notas.php](http://www.sbmac.org.br/p_notas.php)

# ANÁLISE DE SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA – TEORIA E APLICAÇÕES –

Antonio André Novotny  
novotny@lncc.br

Coordenação de Matemática Aplicada e Computacional  
Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC / MCTI  
Av. Getúlio Vargas, 333, 25.651-075, Petrópolis-RJ, BRASIL

Jan Sokołowski  
jan.sokolowski@univ-lorraine.fr  
Institut Élie Cartan de Nancy, UMR 7502  
Université de Lorraine, CNRS  
Vandoeuvre-lès-Nancy, FRANCE



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil  
2016

Coordenação Editorial: Maria do Socorro Rangel

Coordenação Editorial da Série: Fernando Rodrigo Rafaeli

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2016 by Antonio André Novotny & Jan Sokołowski. Edição revista. Direitos reservados, 2016 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

**Catálogo elaborado pela Biblioteca do LNCC/MCTI**  
**Bibliotecária: Maria Cristina A. de Almeida**

Novotny, Antonio André  
N944a      Análise de Sensibilidade Topológica: Teoria e Aplicações / Antonio André  
Novotny, Jan Sokołowski. Ed. rev. - São Carlos, SP : SBMAC, 2016.  
xii, 131 p.: il., 22 cm - (Notas em Matemática Aplicada; vol. 73)

e-ISBN 978-85-8215-059-7

1. Derivada Topológica 2. Otimização Topológica 3. Problemas Inversos  
4. Processamento de Imagens 5. Modelagem Mecânica  
6. Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma 7. Análise Assintótica  
I. Novotny, Antonio André II. Sokołowski, Jan IV. Título. V. Série

CDD - 512.55

*Dedicado a*  
Vanessinha e Božena



- E então, topas fazer uns furos ?
- Topo, lógico !





# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 O Conceito de Derivada Topológica . . . . .	2
1.2 Organização do Trabalho . . . . .	10
1.3 Exercícios . . . . .	12
<b>2 Perturbação Singular</b>	<b>13</b>
2.1 Formulação do Problema . . . . .	13
2.2 Cálculo da Variação da Energia . . . . .	14
2.3 Análise Assintótica da Solução . . . . .	15
2.3.1 Condição de Neumann . . . . .	16
2.3.2 Condição de Dirichlet . . . . .	16
2.4 Cálculo da Derivada Topológica . . . . .	18
2.4.1 Condição de Neumann . . . . .	18
2.4.2 Condição de Dirichlet . . . . .	20
2.5 Exemplos com Forma Explícita para a Derivada Topológica . . . . .	23
2.5.1 Exemplo A: Caso de Neumann . . . . .	23
2.5.2 Exemplo B: Caso de Dirichlet . . . . .	24
2.6 Comentários Adicionais e Resumo dos Resultados . . . . .	25
2.7 Exercícios . . . . .	27
<b>3 Perturbação Configuracional</b>	<b>29</b>
3.1 Formulação do Problema . . . . .	29
3.2 Cálculo da Variação da Energia . . . . .	32
3.3 Análise Assintótica da Solução . . . . .	33
3.4 Cálculo da Derivada Topológica . . . . .	37
3.5 Experimento Numérico . . . . .	40
3.6 Exercícios . . . . .	43
<b>4 Relação entre Derivadas de Forma e Topológica</b>	<b>45</b>
4.1 Método de Cálculo de Derivada Topológica . . . . .	45
4.2 Um Exemplo de Cálculo da Derivada Topológica . . . . .	48
4.3 Exercícios . . . . .	53
<b>5 Derivada Topológica para um Funcional Geral</b>	<b>55</b>
5.1 Formulação do Problema . . . . .	55
5.2 Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma . . . . .	58
5.3 Análise Assintótica das Soluções . . . . .	61
5.3.1 Expansão Assintótica do Estado Direto . . . . .	61

5.3.2	Expansão Assintótica do Estado Adjunto . . . . .	62
5.4	Cálculo da Derivada Topológica . . . . .	64
5.5	Estimativas para os Termos Remanescentes . . . . .	66
5.6	Exercícios . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Derivada Topológica em Elasticidade Tridimensional</b>	<b>69</b>
6.1	Formulação do Problema . . . . .	69
6.2	Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma . . . . .	71
6.3	Análise Assintótica da Solução . . . . .	72
6.4	Cálculo da Derivada Topológica . . . . .	76
6.5	Exemplo Numérico . . . . .	78
6.6	Exercícios . . . . .	81
<b>7</b>	<b>Método do Domínio Truncado</b>	<b>83</b>
7.1	Problema Modelo . . . . .	83
7.1.1	Problema não Perturbado . . . . .	84
7.1.2	Problema Perturbado . . . . .	85
7.2	Técnica da Decomposição do Domínio . . . . .	85
7.2.1	Compacidade da Expansão Assintótica . . . . .	88
7.2.2	Expansão Assintótica da Solução . . . . .	91
7.2.3	Expansão Assintótica do Funcional de Forma . . . . .	92
7.3	Exercícios . . . . .	94
<b>A</b>	<b>Derivada em Relação a um Domínio Geométrico</b>	<b>95</b>
A.1	Descrições Material e Espacial . . . . .	96
A.1.1	Gradiente de Campos Escalares . . . . .	97
A.1.2	Gradiente de Campos Vetoriais . . . . .	98
A.1.3	Descrição Espacial do Campo de Velocidade . . . . .	98
A.2	Derivada Material de Campos Espaciais . . . . .	98
A.2.1	Derivada do Gradiente de um Campo Escalar . . . . .	99
A.2.2	Derivada do Gradiente de um Campo Vetorial . . . . .	100
A.3	Derivada Material de Expressões Integrais . . . . .	100
A.3.1	Integral de Domínio . . . . .	101
A.3.2	Integral de Contorno . . . . .	103
A.4	Resumo das Fórmulas Obtidas . . . . .	105
A.5	O Tensor Momento-Energia de Eshelby . . . . .	107
A.6	Exercícios . . . . .	110
<b>B</b>	<b>Cálculo Tensorial</b>	<b>113</b>
B.1	Produtos Interno, Vetorial e Tensorial . . . . .	113
B.2	Gradiente, Divergente e Rotacional . . . . .	114
B.3	Teoremas Integrais . . . . .	115
B.4	Algumas Decomposições Úteis . . . . .	115
B.5	Sistemas de Coordenadas Polares e Esféricas . . . . .	118
B.6	Exercícios . . . . .	121

# Prefácio

A derivada topológica é definida como o primeiro termo da expansão assintótica de um dado funcional de forma com relação ao parâmetro associado ao tamanho de uma perturbação infinitesimal singular – tais como furos, inclusões, termos fonte e até mesmo trincas – introduzida em um ponto arbitrário de um dado domínio geométrico. Ao longo da última década a análise de sensibilidade topológica tornou-se uma área de pesquisa rica e fascinante, além de bastante ampla dos pontos de vista teórico e numérico, possuindo aplicações em diversos campos de interesse, em especial na otimização de forma e topológica, problemas inversos, processamento de imagens, síntese e/ou projeto ótimo de microestruturas e modelagem de fenômenos dissipativos, incluindo mecânica da fratura e do dano.

Este trabalho tem como objetivo combinar a análise de sensibilidade à mudança de forma clássica com a teoria da análise assintótica em domínios geométricos singularmente perturbados. A teoria da derivada topológica aqui apresentada pode então ser vista como uma generalização das técnicas de análise de sensibilidade à mudança de forma desenvolvidas na monografia *Introduction to Shape Optimization – Shape Sensitivity Analysis*, Springer-Verlag (1992), de Sokołowski e Zolésio. Será mostrado que o método da velocidade em otimização de forma pode ser combinado com a análise assintótica em domínios singularmente perturbados e, como resultado, novas propriedades do funcional de forma são derivadas de modo a estabelecer condições de otimalidade para soluções numéricas de problemas de otimização de forma e topológica. Mais precisamente, demonstra-se que a derivada topológica pode ser vista como o limite singular da derivada de forma, o qual é obtido com o auxílio da análise assintótica de soluções de problemas elípticos de valor de contorno em domínios singularmente perturbados combinada com a análise assintótica de funcionais de forma, ambas em relação ao parâmetro pequeno que governa o tamanho da perturbação topológica. Esse procedimento conduz a um método simples e construtivo de cálculo da derivada topológica. Para uma detalhada e rigorosa apresentação do conceito de derivada topológica sugere-se consultar o livro de Novotny & Sokołowski, *Topological Derivatives in Shape Optimization* da série *Interaction of Mechanics and Mathematics*, Springer (2013). Cabe mencionar que o presente trabalho é complementar a referido livro, vez que apresenta a derivada topológica de forma simples e pedagógica, mas ainda assim rigorosa, enquanto que o outro material é bem mais avançado, exigindo maior esforço do leitor.

O problema de obtenção das expansões assintóticas topológicas de funcionais de forma associados a problemas elípticos de valor de contorno é então considerado neste trabalho. Objetiva-se obter a forma fechada da derivada topológica para problemas de otimização de forma e de topologia governados por problemas elípticos de valor de contorno. As fórmulas explícitas da derivada topológica são adequadas para o desenvolvimento de algoritmos numéricos simples e eficientes, já que dependem de quantidades definidas no domínio geométrico não perturbado. Em particular,

apresenta-se o cálculo da derivada topológica para problemas elípticos bidimensionais incluindo equações diferenciais parciais de segunda ordem escalar (Laplace) e vetorial (Navier). Também se considera a derivada topológica associada a problemas de elasticidade linear tridimensional. A justificativa matemática completa para a expansão assintótica associada a perturbações topológicas em domínios geométricos é apresentada no contexto de problemas elípticos de valor de contorno acoplados. Cabe frisar que os resultados são apresentados em suas formas fechadas, sendo utilizados em métodos numéricos de otimização de forma e topológica. Finalmente, com o objetivo de fixar as ideias aqui apresentadas, são propostos alguns exercícios ao final de cada capítulo.

Através desse trabalho busca-se apresentar o conceito de derivada topológica de forma clara, simples e pedagógica. Sendo assim, o texto destina-se a pesquisadores e estudantes de pós-graduação em matemática aplicada e mecânica computacional interessados em qualquer aspecto da análise de sensibilidade topológica. Em particular, este material pode ser adotado como livro texto em cursos avançados sobre o assunto. Além disso, alguns capítulos são autocontidos e podem ser utilizados como notas de aula para minicursos acerca de classes específicas de problemas. O conteúdo apresentado no início do livro é acessível a um amplo público, enquanto que os últimos capítulos podem exigir conhecimentos matemáticos um pouco mais avançados. Finalmente, acredita-se que este livro será útil para os leitores interessados nos aspectos matemáticos da análise de sensibilidade topológica, assim como em aplicações da derivada topológica em mecânica computacional.

Registra-se, por fim, que este trabalho é amplamente baseado em notas de aulas preparadas pelos autores para cursos de pós graduação e escolas de verão realizadas no Institute Elie Cartan (IECN) em Nancy (França) e no Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC) em Petrópolis (Brasil). Referido material foi compilado, ampliado, revisado e, finalmente, traduzido do inglês para o português por Vanessa Seguezzi. Muito da teoria aqui apresentada foi desenvolvida como resultado da colaboração científica durante os anos de 1994–2013 entre França, Polônia, Rússia e Brasil. Destaca-se o registro de pesquisas e publicações conjuntas com A. Zochowski (Varsóvia, Polônia), S.A. Nazarov (St. Petersburg, Rússia), T. Lewinski (Varsóvia, Polônia), A.M. Khludnev (Novosibirsk, Rússia), e com os ex-alunos Antoine Laurain (Berlim & Graz) e Katarzyna Kedzierska-Szulc (Nancy, Petrópolis & Varsóvia). Foram bastante frutíferas também as colaborações com R.A. Feijó e E. Taroco (Petrópolis, Brasil), C. Padra (Bariloche, Argentina), E.A. de Souza Neto (Swansea, UK), S. Amstutz (Avignon, França) e com os ex-alunos Sebastián Miguel Giusti (Córdoba, Argentina) e Jairo Rocha de Faria (João Pessoa, Brasil).

A colaboração entre André Novotny e Jan Sokołowski, iniciada com o Programa CAPES/COFECUB (Brasil/França), recebeu suporte ainda do CNPq, FAPERJ e LNCC em Petrópolis. Destaca-se ademais o fomento proveniente do Programa Ciência sem Fronteiras do Governo Federal através da concessão de uma bolsa Pesquisador Visitante Especial a Jan Sokołowski, cuja pesquisa também tem sido suportada pelo IECN em Nancy, França e pelo IBS PAN em Varsóvia, Polônia.

Petrópolis, Nancy & Varsóvia, 21 de julho de 2013.

Antonio André Novotny  
Jan Sokołowski

# Capítulo 1

## Introdução

A derivada topológica mede a sensibilidade de um dado funcional de forma em relação a uma perturbação singular infinitesimal no domínio geométrico, tal como ocorre, por exemplo, na inserção de furos, inclusões, termos fonte ou até mesmo fissuras. O conceito de derivada topológica foi rigorosamente introduzido em 1999 por Sokołowski & Żochowski [89]. Desde então a derivada topológica, que pode ser vista como uma justificativa matemática para o método da bolha [22], tem se mostrado extremamente útil no tratamento de uma vasta classe de problemas, em especial na otimização topológica [1, 7, 10, 11, 15, 16, 34, 35, 53, 60, 81, 82, 83, 97], análise inversa [9, 17, 18, 28, 39, 44, 46, 49, 63] e processamento de imagens [13, 14, 43, 45, 57], de modo que se tornou objeto de intensa pesquisa. Vide, por exemplo, aplicações da derivada topológica no contexto de síntese e/ou projeto ótimo de microestruturas [8, 31, 32, 33, 85], mecânica da fratura [98] e do dano [2]. Em relação ao desenvolvimento teórico da análise de sensibilidade topológica o leitor poderá consultar os trabalhos [5, 6, 26, 27, 29, 30, 47, 52, 61, 76, 77, 78, 79, 91, 92], bem como o livro de Novotny & Sokołowski [84].

A derivada topológica é obtida a partir da análise assintótica de soluções clássicas para problemas de valor de contorno em domínios singularmente perturbados, combinada com a análise assintótica de funcionais de forma com relação ao parâmetro pequeno associado ao tamanho da perturbação. Assim, a análise assintótica de problemas elípticos de valor de contorno em domínios geométricos singularmente perturbados é o principal elemento da teoria matemática das derivadas topológicas.

Nas décadas de 1970 e 1980 dois métodos assintóticos, conhecidos como *matched* [48] e *compound* (composto) [64], foram desenvolvidos com sucesso para a construção de expansões assintóticas de soluções para problemas elípticos de valor de contorno em domínios singularmente perturbados, bem como de funcionais avaliados para referidas soluções. Tais funcionais incluem, e.g., a energia associada a problemas elípticos de valor de contorno [66, 72, 76, 79], autovalores de problemas espectrais [51, 65, 68, 86, 87], além do funcional capacidade, que também está associado à energia.

A teoria de problemas de valor de contorno em domínios singularmente perturbados pode ser encontrada em [64, 67] para sistemas de equações diferenciais parciais elípticas no sentido de Agmon-Douglis-Nirenberg. Em particular, o livro de Mazja, Nazarov e Plamenewsky [64] (em russo) contém os procedimentos de construção e justificativa para expansões assintóticas de soluções, bem como a derivação de estimativas assintoticamente finas em normas ponderadas. A análise assintótica de problemas elípticos em domínios singularmente perturbados através

dos métodos assintóticos compostos tornou-se a mais apropriada e relevante abordagem para obter uma fórmula quase explícita da derivada topológica, tal como demonstrado em [76, 79] e outros. Recomenda-se ao leitor os livros de Maz'ya, Nazarov e Plamenevsky [69, 75] para o estado da arte da análise assintótica de problemas elípticos de valor de contorno em domínios geométricos singularmente perturbados. Mencionam-se, ainda, os livros [3] e [70] em que o assunto é estudado do ponto de vista físico e numérico. As fórmulas para expansões assintóticas obtidas para os funcionais de energia [66] ou para os autovalores [68] podem ser usadas na otimização de forma e topológica, por exemplo. Entretanto, para aplicações práticas mais relevantes, esses resultados são estendidos para funcionais de forma mais gerais, com a introdução de um estado adjunto apropriado [89], bem como usando o limite singular da derivada de forma de primeira ordem [90].

Ressalta-se que este trabalho diz respeito às questões que estão fora do escopo dos livros [69, 75]. As ideias principais aqui expostas referem-se à perturbação singular do domínio associada à nucleação de furos e à perturbação regular do operador diferencial associado à nucleação de inclusões. Entretanto, a fim de evitar dificuldades técnicas desnecessárias, a análise será desenvolvida para soluções clássicas de problemas elípticos de valor de contorno, sendo que a maioria dos resultados de natureza local é também válida em domínios Lipschitzianos. Para o caso de fraturas, por exemplo, é necessário um tratamento especial, como rigorosamente demonstrado em [76].

## 1.1 O Conceito de Derivada Topológica

Considere um domínio aberto e limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , com  $d \geq 2$ , que está sujeito a uma perturbação não suave confinada em uma pequena região  $\omega_\varepsilon(\hat{x}) = \hat{x} + \varepsilon\omega$  de tamanho  $\varepsilon$ , com  $\bar{\omega}_\varepsilon \Subset \Omega$ , como mostrado na fig. 1.1. Aqui,  $\hat{x}$  é um ponto arbitrário de  $\Omega$  e  $\omega$  é um domínio fixo de  $\mathbb{R}^d$ . Seja ainda uma *função característica*  $x \mapsto \chi(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , associada ao domínio não perturbado, ou seja  $\chi = \mathbf{1}_\Omega$ , tal que

$$|\Omega| = \int_{\mathbb{R}^d} \chi, \quad (1.1.1)$$

onde  $|\Omega|$  é a *medida de Lebesgue* de  $\Omega$ . Assim, é definida uma função característica associada ao domínio topologicamente perturbado  $x \mapsto \chi_\varepsilon(\hat{x}; x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ . No caso de uma perfuração, por exemplo,  $\chi_\varepsilon(\hat{x}) = \mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_{\omega_\varepsilon(\hat{x})}$  e o domínio perturbado é obtido como  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{\omega}_\varepsilon$ . Em seguida, assume-se que um dado funcional de forma  $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$ , associado ao domínio topologicamente perturbado, admite a seguinte *expansão assintótica topológica*

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) + f(\varepsilon)\mathcal{T}(\hat{x}) + o(f(\varepsilon)), \quad (1.1.2)$$

em que  $\psi(\chi)$  é o funcional de forma associado ao domínio de referência (não perturbado),  $f(\varepsilon)$  é uma *função correção de primeira ordem* positiva, que decresce monotonicamente tal que  $f(\varepsilon) \rightarrow 0$  com  $\varepsilon \rightarrow 0$ , e  $o(f(\varepsilon))$  é o *termo remanescente*, ou seja  $o(f(\varepsilon))/f(\varepsilon) \rightarrow 0$  com  $\varepsilon \rightarrow 0$ . A função  $\hat{x} \mapsto \mathcal{T}(\hat{x})$  é chamada de *derivada topológica* de  $\psi$  em  $\hat{x}$ . Assim, esta derivada pode ser vista como uma correção de primeira ordem sobre  $\psi(\chi)$  para aproximar  $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$ . De fato, após rearranjar (1.1.2) tem-se

$$\frac{\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi)}{f(\varepsilon)} = \mathcal{T}(\hat{x}) + \frac{o(f(\varepsilon))}{f(\varepsilon)}. \quad (1.1.3)$$

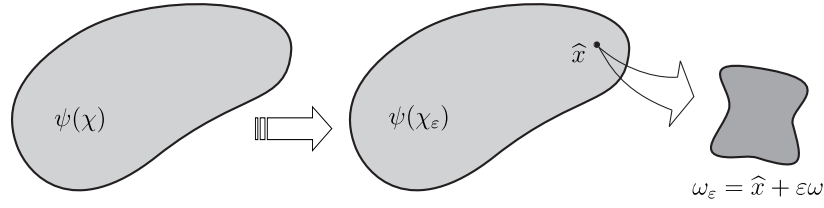


Figura 1.1: Conceito de derivada topológica.

A passagem ao limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  na expressão acima conduz à definição geral da *derivada topológica*

$$\mathcal{T}(\hat{x}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi)}{f(\varepsilon)}. \quad (1.1.4)$$

Desde que o funcional  $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$  admite a expansão assintótica topológica (1.1.2), a aplicabilidade desta expansão depende do procedimento de avaliação da função não conhecida  $\hat{x} \mapsto \mathcal{T}(\hat{x})$ . Em particular, busca-se uma fórmula explícita para a derivada topológica que permita sua utilização direta em métodos numéricos de otimização de forma, por exemplo. Assim, este cálculo deve ser realizado de modo que a função  $\hat{x} \mapsto \mathcal{T}(\hat{x})$  seja obtida explicitamente. Portanto, são necessárias algumas propriedades do funcional de forma e da expansão assintótica a fim de aplicar um simples método para avaliação da derivada topológica. Com efeito, para que um funcional de forma definido em um dado *domínio de referência*  $\Omega$  aceite a expansão assintótica topológica (1.1.2), as seguintes propriedades devem ser verificadas:

1. Para  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ , com  $\varepsilon_0 > 0$ , o funcional  $\omega_\varepsilon \mapsto J(\Omega_\varepsilon) := \psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$  deve ser diferenciável em relação à forma em  $\hat{x} \in \Omega$ . A *diferenciabilidade em relação à forma* significa que existe o gradiente de forma  $\omega_\varepsilon \mapsto J(\Omega_\varepsilon)$  concentrado na fronteira ou interface  $\partial\omega_\varepsilon$  para um dado  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ .
2. O funcional de forma  $\varepsilon \mapsto j(\varepsilon) := \psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$  é contínuo em relação à *perturbação topológica* em  $0^+$ , i.e.,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\varepsilon) = 0$ .
3. A função  $\varepsilon \mapsto f(\varepsilon)$  é continuamente diferenciável em  $(0, \varepsilon_0]$ .
4. A passagem ao limite  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} o(f(\varepsilon))/f(\varepsilon) = 0$  é verdadeira.

Observe que, em geral, o cálculo do limite (1.1.4) não é trivial, pois se trata de perturbações singulares consistindo na nucleação de furos em que os funcionais de forma  $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$  e  $\psi(\chi)$  resultam definidos em domínios topologicamente diferentes. Em particular é necessário realizar a análise assintótica do funcional de forma  $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$  com relação ao parâmetro pequeno  $\varepsilon$ , que é, de fato, o tema central deste trabalho. Entretanto, também serão consideradas perturbações regulares produzidas pela nucleação de inclusões, sendo, frise-se, muito mais simples do ponto de vista matemático do que o caso singular. Sendo assim, para enfatizar esta diferença, será introduzida notação específica para cada caso de perturbação topológica. Em particular, o funcional de forma  $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$  é redefinido como  $\psi(\chi_\varepsilon) := \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon)$  e  $\psi(\chi) := \mathcal{J}_{\Omega}(u)$  para perturbações singular e regular, respectivamente, onde  $u_\varepsilon$  é a solução para o problema de valor de contorno perturbado. Apesar da falta de rigor, essas definições tornarão a apresentação mais simples, evitando a utilização de uma notação muito complexa. Cabe mencionar ainda que no caso de perturbações

singulares  $\chi_\varepsilon$  é de fato uma função característica no sentido estrito, enquanto que tal afirmação não é verdadeira no caso de perturbações regulares. Portanto, a função  $\chi_\varepsilon$  deve ser definida de maneira apropriada de acordo com o contexto em estudo.

A fim de fixar estas ideias serão apresentados três simples exemplos. O primeiro referente à perturbação singular do domínio, ao passo que o segundo está associado à perturbação regular do integrando e o último, finalmente, mostra que a derivada topológica obedece as regras básicas de cálculo diferencial.

**Exemplo 1.1.** *Considerando o funcional de forma*

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) := \int_{\Omega_\varepsilon} g(x), \quad (1.1.5)$$

onde  $\chi_\varepsilon(\hat{x}) = \mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_{\omega_\varepsilon(\hat{x})}$  e  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}$ . A função  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  é Lipschitz contínua em  $\omega_\varepsilon(\hat{x})$ , i.e.  $|g(x) - g(\hat{x})| \leq C\|x - \hat{x}\|$ ,  $\forall x \in \omega_\varepsilon(\hat{x})$ , onde  $C \geq 0$  é a constante de Lipschitz. Note que este é o caso de perturbação singular do domínio. Desde que  $|\omega_\varepsilon| \rightarrow 0$  como  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tem-se que

$$\psi(\chi) := \int_{\Omega} g(x). \quad (1.1.6)$$

Busca-se uma expansão assintótica tal como em (1.1.2), ou seja

$$\begin{aligned} \psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) &= \int_{\Omega_\varepsilon} g(x) + \int_{\omega_\varepsilon} g(x) - \int_{\omega_\varepsilon} g(x) \\ &= \int_{\Omega} g(x) - \int_{\omega_\varepsilon} g(x) \\ &= \psi(\chi) - |\omega_\varepsilon| g(\hat{x}) + o(|\omega_\varepsilon|). \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Neste exemplo o termo  $-g(\hat{x})$  é chamado de derivada topológica do funcional de forma  $\psi$  avaliada no ponto  $\hat{x} \in \Omega$ , sendo dado por  $\mathcal{T}(\hat{x}) = -g(\hat{x})$ , e identifica-se  $f(\varepsilon) = |\omega_\varepsilon| \sim \varepsilon^d$ .

**Exemplo 1.2.** *Considerando agora um funcional de forma dado por*

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) := \int_{\Omega} g_\varepsilon(x), \quad (1.1.8)$$

onde  $\chi_\varepsilon(\hat{x}) = \mathbf{1}_\Omega - (1 - \gamma)\mathbf{1}_{\omega_\varepsilon(\hat{x})}$  e  $g_\varepsilon = \chi_\varepsilon g$  é definido como

$$g_\varepsilon(x) := \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon(\hat{x})} \\ \gamma g(x) & \text{se } x \in \omega_\varepsilon(\hat{x}) \end{cases}, \quad (1.1.9)$$

com a função  $g$  Lipschitz contínua em  $\omega_\varepsilon$  (veja Exemplo 1.1). Isto significa que o conjunto  $\Omega$  inclui a interface  $\partial\omega_\varepsilon$ . Observe que este é o caso regular em que o funcional de forma depende de funções características associadas a pequenos conjuntos. Desde que  $|\omega_\varepsilon| \rightarrow 0$  como  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tem-se

$$\psi(\chi) := \int_{\Omega} g(x). \quad (1.1.10)$$



Objetiva-se obter uma expansão assintótica tal como em (1.1.2), isto é

$$\begin{aligned}
\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) &= \int_{\Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}} g(x) + \int_{\omega_\varepsilon} \gamma g(x) \\
&= \int_{\Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}} g(x) + \int_{\omega_\varepsilon} \gamma g(x) + \int_{\omega_\varepsilon} g(x) - \int_{\omega_\varepsilon} g(x) \\
&= \int_{\Omega} g(x) - (1 - \gamma) \int_{\omega_\varepsilon} g(x) \\
&= \psi(\chi) - |\omega_\varepsilon| (1 - \gamma) g(\hat{x}) + o(|\omega_\varepsilon|) .
\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Assim, identifica-se imediatamente o termo  $-(1-\gamma)g(\hat{x})$  como a derivada topológica do funcional de forma  $\psi$  avaliada no ponto  $\hat{x} \in \Omega$ , ou seja  $\mathcal{T}(\hat{x}) = -(1-\gamma)g(\hat{x})$ . Além do mais, tem-se que  $f(\varepsilon) = |\omega_\varepsilon| \sim \varepsilon^d$ . Cabe ainda mencionar que no caso limite  $\gamma \rightarrow 0$  tem-se  $\mathcal{T}(\hat{x}) = -g(\hat{x})$ . Isto significa que o primeiro exemplo pode ser visto como o limite singular deste último.

**Exemplo 1.3.** Considerando duas funções  $g$  e  $h$  Lipschitz contínuas em  $\omega_\varepsilon$  (veja Exemplo 1.1) e retornando ao caso associado a domínios singularmente perturbados definido como  $\Omega_\varepsilon(\hat{x}) = \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon(\hat{x})}$ , então de acordo com o Exemplo 1.1, tem-se os seguintes resultados básicos:

$$\psi(\chi) := \left( \int_{\Omega} g(x) \right)^\alpha \Rightarrow \mathcal{T}(\hat{x}) = -\alpha g(\hat{x}) \left( \int_{\Omega} g(x) \right)^{\alpha-1}, \tag{1.1.12}$$

com  $\alpha \in \mathbb{Z}$ ,

$$\psi(\chi) := \int_{\Omega} g(x) \int_{\Omega} h(x) \Rightarrow \mathcal{T}(\hat{x}) = -g(\hat{x}) \int_{\Omega} h(x) - h(\hat{x}) \int_{\Omega} g(x) \tag{1.1.13}$$

e

$$\psi(\chi) := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} g(x) \Rightarrow \mathcal{T}(\hat{x}) = -\frac{1}{|\Omega|^2} \left( g(\hat{x})|\Omega| - \int_{\Omega} g(x) \right). \tag{1.1.14}$$

Antes de prosseguir serão mostrados dois exemplos associados a equações diferenciais ordinárias de segunda e quarta ordens, respectivamente, que dizem respeito à derivada topológica no caso simples de problemas de valor de contorno unidimensionais.

**Exemplo 1.4.** Seja uma equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$u_\varepsilon''(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{1.1.15}$$

com as condições de contorno

$$u_\varepsilon(0) = 0 \quad e \quad u_\varepsilon'(1) = 1, \tag{1.1.16}$$

e as condições de transmissão na interface

$$u_\varepsilon(\varepsilon^+) = u_\varepsilon(\varepsilon^-) \quad e \quad u_\varepsilon'(\varepsilon^+) = \gamma u_\varepsilon'(\varepsilon^-), \tag{1.1.17}$$

onde  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  é o contraste na propriedade material. O problema de valor de contorno acima tem uma solução explícita, a saber

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x) = \frac{x}{\gamma}, & 0 < x \leq \varepsilon, \\ u_\varepsilon(x) = x + \varepsilon \frac{1-\gamma}{\gamma}, & \varepsilon < x < 1. \end{cases} \tag{1.1.18}$$

Considera-se um funcional de forma dado por

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) := \int_0^1 \gamma_\varepsilon(u'_\varepsilon)^2 . \quad (1.1.19)$$

Note que neste caso  $\Omega = (0, 1)$ ,  $\chi_\varepsilon(\hat{x}) = \mathbf{1}_\Omega - (1 - \gamma)\mathbf{1}_{\omega_\varepsilon(\hat{x})}$ , com  $\omega_\varepsilon(\hat{x}) = (0, \varepsilon)$ , e  $\gamma_\varepsilon := \chi_\varepsilon$ . Isto significa que  $\gamma_\varepsilon(x) = \gamma$  para  $0 < x \leq \varepsilon$ , e  $\gamma_\varepsilon(x) = 1$  para  $\varepsilon < x < 1$ . Ademais, tem-se

$$\psi(\chi) := \int_0^1 (u')^2 , \quad (1.1.20)$$

onde  $u$  é solução do problema de valor de contorno acima para  $\varepsilon = 0$ , ou seja

$$u(x) = x . \quad (1.1.21)$$

Deseja-se encontrar uma expansão assintótica análoga a (1.1.2). Portanto, tem-se que

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \int_0^\varepsilon \gamma(u'_\varepsilon)^2 + \int_\varepsilon^1 (u'_\varepsilon)^2 = 1 + \varepsilon \frac{1 - \gamma}{\gamma} = \psi(\chi) + |\omega_\varepsilon| \frac{1 - \gamma}{\gamma} . \quad (1.1.22)$$

Sendo assim, a derivada topológica é dada por

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = \frac{1 - \gamma}{\gamma} , \quad (1.1.23)$$

com  $f(\varepsilon) = |\omega_\varepsilon| = \varepsilon$ . Note-se que, para o caso limite  $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $\mathcal{T}(\hat{x}) = -1$ , e para  $\gamma \rightarrow 0$  a derivada topológica não existe. Esta é, de fato, uma propriedade intrínseca de problemas de valor de contorno unidimensionais, que não admitem perturbações singulares [12].

**Exemplo 1.5.** Considera-se uma equação diferencial ordinária de quarta ordem

$$u_\varepsilon''''(x) = 0 , \quad 0 < x < 1 , \quad (1.1.24)$$

com condições de contorno dadas por

$$u_\varepsilon(0) = u'_\varepsilon(0) = u_\varepsilon''(1) = 0 \quad e \quad u_\varepsilon''(1) = 1 , \quad (1.1.25)$$

e condições de transmissão

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(\varepsilon^+) &= u_\varepsilon(\varepsilon^-) , & u'_\varepsilon(\varepsilon^+) &= u'_\varepsilon(\varepsilon^-) , \\ u_\varepsilon''(\varepsilon^+) &= \gamma u_\varepsilon''(\varepsilon^-) , & u_\varepsilon''''(\varepsilon^+) &= \gamma u_\varepsilon''''(\varepsilon^-) , \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

onde  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  é o contraste. O problema de valor de contorno acima possui solução explícita, a saber

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x) = \frac{x^2}{2} , & 0 < x \leq \varepsilon , \\ u_\varepsilon(x) = \frac{x^2}{2} + \varepsilon \frac{1 - \gamma}{2\gamma} (2x - \varepsilon) , & \varepsilon < x < 1 . \end{cases} \quad (1.1.27)$$

Seja o seguinte funcional de forma

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) := \int_0^1 \gamma_\varepsilon(u''_\varepsilon)^2 . \quad (1.1.28)$$

Observe que neste caso  $\Omega = (0, 1)$ ,  $\chi_\varepsilon(\hat{x}) = \mathbb{1}_\Omega - (1-\gamma)\mathbb{1}_{\omega_\varepsilon(\hat{x})}$ , com  $\omega_\varepsilon(\hat{x}) = (0, \varepsilon)$ , e  $\gamma_\varepsilon := \chi_\varepsilon$ . Isto significa que  $\gamma_\varepsilon(x) = \gamma$  para  $0 < x \leq \varepsilon$ , e  $\gamma_\varepsilon(x) = 1$ , para  $\varepsilon < x < 1$ . Ademais, tem-se que

$$\psi(\chi) := \int_0^1 (u'')^2, \quad (1.1.29)$$

onde  $u$  é solução do problema de valor de contorno acima para  $\varepsilon = 0$ , ou seja

$$u(x) = \frac{x^2}{2}. \quad (1.1.30)$$

Busca-se uma expansão assintótica tal como (1.1.2). Assim, tem-se

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \int_0^\varepsilon \gamma(u''_\varepsilon)^2 + \int_\varepsilon^1 (u''_\varepsilon)^2 = 1 + \varepsilon \frac{1-\gamma}{\gamma} = \psi(\chi) + |\omega_\varepsilon| \frac{1-\gamma}{\gamma}. \quad (1.1.31)$$

Para o simples exemplo analisado, a derivada topológica é dada por

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = \frac{1-\gamma}{\gamma}, \quad (1.1.32)$$

com  $f(\varepsilon) = |\omega_\varepsilon| = \varepsilon$ . Novamente, pode-se estudar o caso limite  $\gamma \rightarrow \infty$ , o que resulta em  $\mathcal{T}(\hat{x}) = -1$ . Por outro lado, o limite singular dado por  $\gamma \rightarrow 0$  não está definido [12].

Finalmente, de modo a explicar o significado da derivada topológica em otimização de forma é apresentado um último exemplo em que o mínimo global  $\Omega^*$  é conhecido.

**Exemplo 1.6.** Seja  $B_R = \{\|x\| < R\} \subset \mathbb{R}^2$ , com  $1 < R < \infty$ , e sejam domínios admissíveis multiplamente conexos  $\Omega \subset B_R$  com a restrição de volume

$$|\Omega| \geq \pi(1 - \rho^2), \quad (1.1.33)$$

em que  $0 < \rho < 1$  é fixo. Seja o funcional de forma amplamente utilizado em problemas de controle ótimo e em processamento de imagens, por exemplo, dado por

$$\psi(\chi) = \int_\Omega (u - z_d)^2, \quad (1.1.34)$$

onde  $z_d$ , definido no sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$  centrado na origem, é uma dada função de  $r$ , ou seja

$$z_d(r) := \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < r \leq \rho, \\ g(r) & \text{para } \rho < r < 1, \\ 0 & \text{para } 1 \leq r < R, \end{cases} \quad (1.1.35)$$

sendo a função  $g(r)$  definida como

$$g(r) := -(1-r)^2(1+2r-24r^2). \quad (1.1.36)$$

O campo escalar  $u$  é solução para o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} \text{Encontre } u, \text{ tal que} \\ -\Delta u = b & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1.37)$$

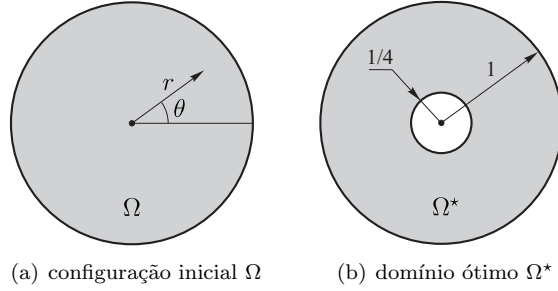


Figura 1.2: Exemplo com mínimo global: domínios geométricos.

Aqui a fonte  $b$  é definida em coordenadas polares como segue

$$b(r) := -\frac{1}{r}(rg'(r))'. \quad (1.1.38)$$

A partir dos elementos acima pode-se concluir que:

- se a estimativa inicial é dada pela bola unitária  $B = \{\|x\| < 1\}$ , o gradiente de forma de  $\psi(\chi)$  é nulo;
- calculando a derivada topológica de  $\psi(\chi)$  em  $B$ , o domínio ótimo é obtido a partir de uma simples análise do sinal da derivada topológica;
- o custo ótimo é nulo, portanto o domínio ótimo é o mínimo global do problema.

Agora, em mais detalhes, considere um domínio ótimo  $\Omega^* \subset \mathbb{R}^2$ , dado por um anel  $\Omega^* = B \setminus \overline{B_\rho}$ , onde  $B_\rho$  é uma bola centrada na origem com raio  $\rho < 1$ . Veja fig. 1.2. Tem-se construído a fonte  $b$  de modo que a solução  $u$  é obtida explicitamente como uma função de  $r$  apenas, ou seja

$$u(r) = g(r) \quad \text{para } 0 < r < 1. \quad (1.1.39)$$

O gráfico de  $u(r)$  é plotado na fig. 1.3(a). A função  $z_d$  é definida para  $\rho = 1/4$  como segue

$$z_d(r) := \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < r \leq \rho, \\ u(r) & \text{para } \rho < r < 1. \end{cases} \quad (1.1.40)$$

Já o gráfico de  $z_d(r)$  é mostrado na fig. 1.3(b), onde a escala cinza é usada para denotar a região onde a função alvo é não nula. Portanto, o funcional de forma se anula sobre o domínio ótimo  $\Omega^*$ . De fato, a solução ótima  $u^* = u|_{\Omega^*} = z_d$ . Além do mais, a derivada de forma de  $\psi(\chi)$  é dada por [94]

$$d\psi(\chi; \mathfrak{V}) = - \int_{\partial B} (\partial_n u \partial_n v) n \cdot \mathfrak{V}. \quad (1.1.41)$$

Na fórmula acima,  $\mathfrak{V}$  é o campo de velocidade à mudança de forma [94] e  $v$  é a solução do problema adjunto, a saber

$$\begin{cases} \text{Encontre } v, \text{ tal que} \\ -\Delta v = -(u - z_d) & \text{em } \Omega = B, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases} \quad (1.1.42)$$

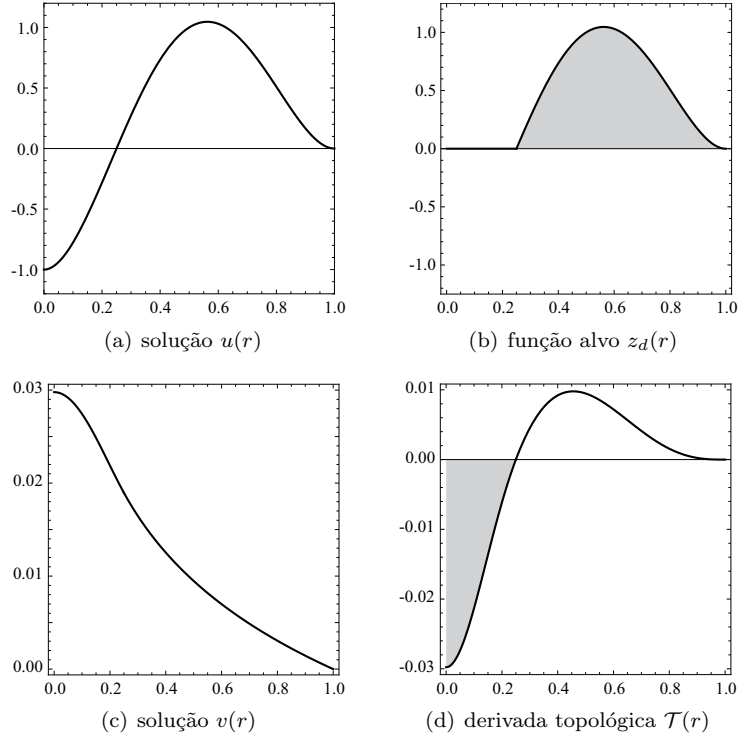


Figura 1.3: Exemplo com mínimo global: soluções direta e adjunta, função alvo e derivada topológica.

Devido à simetria de revolução, a solução do problema de valor de contorno anterior pode ser obtida explicitamente em termos de  $r$ . O gráfico de  $v(r)$  é mostrado na fig. 1.3(c). Assim, a derivada de forma de  $\psi(\chi)$  é dada por  $d\psi(\chi; \mathfrak{B}) = 0$ , desde que neste caso particular  $\partial_n u|_{\partial B} = u'(1) = 0$ . Isto significa que o funcional de forma não pode ser melhorado usando a informação fornecida pela derivada de forma. Por outro lado, a derivada topológica, associada à condição de contorno homogênea de Dirichlet no furo (veja Capítulo 2, Seção 2.1), é dada pela seguinte fórmula

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = u(\hat{x})v(\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in \Omega = B. \quad (1.1.43)$$

Neste exemplo a derivada topológica resulta em uma função de  $r$  dada por  $\mathcal{T}(r) = u(r)v(r)$ , para  $0 < r < 1$ . Em particular, a função  $\mathcal{T}(r)$  é plotada na fig. 1.3(d), onde a escala de cinza é usada para denotar a região onde a derivada topológica é negativa. Isto significa que para minimizar o funcional de forma, o furo deve ser nucleado no centro do disco. Ademais, a região onde  $\mathcal{T}(r) < 0$ , ou seja, para  $r < \rho$ , fornece informação sobre o tamanho ótimo do furo. De fato, uma vez que um furo de tamanho  $\rho$  é introduzido,  $u^* = u|_{\Omega^*} = z_d$  por construção, e o estado adjunto correspondente  $v^*$  satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } v^*, \text{ tal que} \\ -\Delta v^* = 0 \quad \text{em } \Omega^* = B \setminus \overline{B_\rho}, \\ v^* = 0 \quad \text{sobre } \partial B, \\ v^* = 0 \quad \text{sobre } \partial B_\rho, \end{array} \right. \quad (1.1.44)$$

que tem uma solução única trivial, ou seja  $v^* = 0$ . Observa-se, portanto, que as condições de otimalidade  $d\psi(\chi^*; \mathfrak{B}) = 0$  e  $\mathcal{T}(\hat{x}) \geq 0 \forall \hat{x} \in \Omega^*$  são satisfeitas, onde  $\chi^* = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{B_p}$  é a função característica associada a  $\Omega^*$ . Logo, o domínio ótimo  $\Omega^*$  é o mínimo global absoluto do funcional de forma  $\psi(\chi)$ . Cabe mencionar ainda que, neste exemplo, o ótimo global foi obtido em um único passo usando as derivadas de forma e topológica, vez que tal resultado seria impossível de ser obtido tendo em conta apenas a derivada de forma.

## 1.2 Organização do Trabalho

Como visto, neste capítulo foi introduzido o conceito de *derivada topológica*. Note que o parâmetro pequeno da análise assintótica está associado ao tamanho da perturbação singular (topológica) ou configuracional (regular) do domínio, permitindo assim a criação de pequenas inclusões ou vazios em um procedimento de otimização numérica associado a alterações das propriedades materiais ou do próprio domínio geométrico. A ideia central deste trabalho, portanto, é apresentar o conceito de derivada topológica para uma vasta classe de problemas elípticos com aplicações em métodos numéricos de otimização topológica e de forma, acessível tanto aos leitores com formação em matemática aplicada quanto em mecânica computacional. Logo, o trabalho é apresentado da seguinte maneira:

A análise de sensibilidade topológica do funcional de forma energia associada a equação de Poisson, com relação a perturbações singulares no domínio geométrico, é estudada no Capítulo 2. Em particular, considera-se perturbações singulares produzidas por pequenos furos circulares com condições de contorno homogêneas de Neumann, Dirichlet e Robin.

No Capítulo 3 é considerado o funcional de forma associado à energia de deformação armazenada em um corpo elástico deformável bidimensional, modelado pelo sistema de Navier. A derivada topológica associada a perturbações regulares produzidas por pequenas inclusões com condições de transmissão apropriadas é então obtida em sua forma fechada.

A relação entre derivadas de forma e topológica é apresentada no Capítulo 4. Com efeito, é mostrado que a derivada topológica está associada ao limite singular da derivada de forma em relação ao parâmetro pequeno que governa o tamanho da perturbação topológica. O resultado obtido conduz a um método simples e construtivo de cálculo da derivada topológica. Para fixar as ideias é apresentado um exemplo simples associado a perturbações regulares do termo fonte em um problema elíptico de valor de contorno.

No Capítulo 5 a derivada topológica é obtida para uma classe geral de funcionais de forma. Para funcionais de forma que não estão associados à energia, o método adjunto é necessário a fim de simplificar as fórmulas para as derivadas de forma e, conseqüentemente, topológica. Para o problema em análise é introduzida, ainda, uma generalização do tensor momento energia de Eshelby dependente dos estados direto e adjunto.

Os resultados apresentados no Capítulo 6 são importantes para aplicações em mecânica estrutural. Ou seja, é realizada a análise de sensibilidade topológica

da energia potencial total de um corpo elástico tridimensional em relação a perturbações singulares produzidas por pequenas cavidades esféricas. Em particular, obtém-se a fórmula fechada da derivada topológica, o que permite construir um algoritmo de otimização topológica simples e eficiente, conforme demonstrado através de um exemplo numérico.

A técnica de decomposição de domínio juntamente com o operador Steklov-Poincaré é introduzida no Capítulo 7 no contexto de problemas elípticos de valor de contorno acoplados. A mesma ideia é então empregada com o propósito de derivar as expansões assintóticas topológicas da solução, bem como do funcional de forma, em relação a perturbações singulares no domínio geométrico produzidas por pequenos furos circulares com condição de contorno de Neumann homogênea. O método proposto permite obter uma estimativa bastante fina para os termos remanescentes das expansões assintóticas topológicas, podendo ser visto como uma justificativa rigorosa para as derivações apresentadas nos capítulos anteriores.

A análise de sensibilidade à mudança de forma é apresentada no Apêndice A do ponto de vista da mecânica do contínuo. O ferramental para este tipo de análise inclui o teorema do transporte de Reynolds combinado com as derivadas materiais de campos espaciais em mecânica. O tensor momento-energia de Eshelby é introduzido no contexto de análise de falhas em corpos elásticos tridimensionais.

Com o objetivo de facilitar a leitura deste trabalho alguns resultados básicos de cálculo tensorial estão compilados no Apêndice B. Em particular, são definidos produtos escalar, vetorial e tensorial, sendo apresentadas algumas fórmulas para o gradiente, divergente e rotacional, juntamente com alguns teoremas integrais. Finalmente, são fornecidas algumas decomposições úteis em sistemas de coordenadas curvilínea, polar e esférica.

### 1.3 Exercícios

1. Mostre que o termo remanescente da expansão assintótica topológica do Exemplo 1.1 se comporta como  $o(\varepsilon^d)$ .
2. Ao considerar um termo a mais na expansão assintótica topológica da seguinte maneira

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) + f(\varepsilon)\mathcal{T}(\hat{x}) + f_2(\varepsilon)\mathcal{T}^2(\hat{x}) + o(f_2(\varepsilon)) ,$$

onde  $f_2(\varepsilon)$  é tal que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_2(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} = 0 .$$

Tem-se que  $\mathcal{T}(\hat{x})$  e  $\mathcal{T}^2(\hat{x})$  são as *derivadas topológicas de primeira e segunda ordens* de  $\psi$ , respectivamente. Supondo que a função  $g(x)$  do Exemplo 1.2 é de classe  $C^2(\Omega)$ , com seu gradiente de segunda ordem *Lipschitz contínuo* em  $\omega_\varepsilon$  ( $\exists C \geq 0 : \|\nabla\nabla g(x) - \nabla\nabla g(\hat{x})\| \leq C\|x - \hat{x}\|, \forall x \in \omega_\varepsilon$ ). Considerando ainda o caso particular associado à nucleação de uma inclusão circular dada por  $\omega_\varepsilon(\hat{x}) = B_\varepsilon(\hat{x})$ , com  $B_\varepsilon(\hat{x})$  utilizado para denotar uma bola de raio  $\varepsilon$  e centro em  $\hat{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ , mostre que a expansão assintótica topológica do funcional  $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$  é dada por

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) - (1 - \gamma)\pi\varepsilon^2 g(\hat{x}) - \frac{1 - \gamma}{8}\pi\varepsilon^4 \Delta g(\hat{x}) + o(\varepsilon^4) .$$

3. Utilizando a definição de derivada topológica dada por (1.1.2), mostre os resultados apresentados no Exemplo 1.3.
4. Repita o Exemplo 1.4 com as seguintes condições:  $-u''(x) = 1$  para  $0 < x < 1$  e  $u(0) = u'(1) = 0$ .
5. Repita o Exemplo 1.5 com as seguintes condições:  $-u''''(x) = 0$  para  $0 < x < 1$ ,  $u(0) = u'(0) = u''(1) = 0$  e  $u'''(1) = 1$ .
6. Encontre as funções  $b(r)$ ,  $v(r)$  e  $\mathcal{T}(r)$  do Exemplo 1.6.



## Capítulo 2

# Perturbação Singular

Neste capítulo será avaliada a derivada topológica da energia potencial total associada ao problema de condução de calor em estado estacionário, considerando condições homogêneas de Neumann e Dirichlet na fronteira do furo  $\partial B_\varepsilon$ , cuja justificativa matemática do resultado pode ser encontrada no Capítulo 7 e, em detalhes, no livro de Novotny & Sokolowski, 2013 [84], por exemplo. No caso, o domínio é topologicamente perturbado pela nucleação de um pequeno furo circular, como mostrado na fig. 2.1. Desde que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é o domínio original (não perturbado), então,  $\Omega_\varepsilon(\hat{x}) = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(\hat{x})}$  é o domínio topologicamente perturbado, onde  $B_\varepsilon(\hat{x})$ , com  $\overline{B_\varepsilon} \subseteq \Omega$ , é uma bola de raio  $\varepsilon$ , com  $0 < \varepsilon < \text{dist}(\hat{x}, \partial\Omega)$ , e centro em  $\hat{x} \in \Omega$  representando um furo circular.

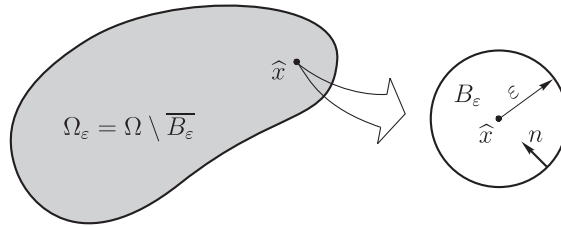


Figura 2.1: Domínio topologicamente perturbado pela nucleação de um pequeno furo circular.

### 2.1 Formulação do Problema

O funcional de forma associado ao domínio não perturbado  $\Omega$  é dado por

$$\psi(\chi) := \mathcal{J}_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega bu, \quad (2.1.1)$$

onde a função escalar  $u$  é a solução do seguinte problema variacional:

$$\begin{cases} \text{Encontre } u \in H_0^1(\Omega), \text{ tal que} \\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \eta = \int_\Omega b\eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Na equação acima,  $b$  é um termo fonte considerado constante em todo o domínio. A formulação forte associada ao problema variacional (2.1.2) é dada pela equação de Poisson, ou seja:

$$\begin{cases} \text{Encontre } u, \text{ tal que} \\ -\Delta u = b & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Considerando o mesmo problema, mas agora definido no domínio perturbado  $\Omega_\varepsilon$ , tem-se que a energia potencial total é escrita como

$$\psi(\chi_\varepsilon) := \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 - \int_{\Omega_\varepsilon} b u_\varepsilon, \quad (2.1.4)$$

onde a função  $u_\varepsilon$  é a solução do problema variacional:

$$\begin{cases} \text{Encontre } u_\varepsilon \in \mathcal{V}_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta = \int_{\Omega_\varepsilon} b \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_\varepsilon. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

O espaço  $\mathcal{V}_\varepsilon$  é definido de acordo com a condição de contorno sobre  $\partial B_\varepsilon$ . Em particular, tem-se

$$\mathcal{V}_\varepsilon := \{\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon) : \varphi|_{\partial\Omega} = 0, \beta\varphi|_{\partial B_\varepsilon} = 0\}, \quad (2.1.6)$$

com  $\beta \in \{0, 1\}$ . Esta notação deve ser entendida da seguinte forma:

- Quando  $\beta = 1$ , tem-se condição de Dirichlet homogênea na fronteira da bola  $\partial B_\varepsilon$ , desde que  $u_\varepsilon = 0$  e  $\eta = 0$  sobre  $\partial B_\varepsilon$ .
- Quando  $\beta = 0$ ,  $u_\varepsilon$  e  $\eta$  estão livres na fronteira do furo  $\partial B_\varepsilon$ , logo tem-se condição de Neumann homogênea sobre  $\partial B_\varepsilon$ .

A *formulação forte* associada ao problema variacional (2.1.5) pode ser escrita como:

$$\begin{cases} \text{Encontre } u_\varepsilon, \text{ tal que} \\ -\Delta u_\varepsilon = b & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \beta u_\varepsilon + (1 - \beta)\partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \end{cases} \quad (2.1.7)$$

## 2.2 Cálculo da Variação da Energia

Através de um simples cálculo pode-se mostrar que a variação da energia potencial total resulta em integrais concentradas na bola  $B_\varepsilon$ . De fato, tomando-se  $\eta = u$  em (2.1.2) e  $\eta = u_\varepsilon$  em (2.1.5), tem-se as seguintes igualdades

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} b u \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} b u_\varepsilon, \quad (2.2.8)$$

o que permite escrever  $\mathcal{J}_\Omega(u)$  e  $\mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon)$  respectivamente como

$$\mathcal{J}_\Omega(u) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} b u - \frac{1}{2} \int_{B_\varepsilon} b u \quad \text{e} \quad \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} b u_\varepsilon, \quad (2.2.9)$$

em que  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}$ . Assim, a variação da energia potencial total resulta em

$$\mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) - \mathcal{J}_\Omega(u) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} b(u_\varepsilon - u) + \frac{1}{2} \int_{B_\varepsilon} b u. \quad (2.2.10)$$

Por outro lado, reecreando a eq. (2.1.2) da seguinte forma

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \eta + \int_{B_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \eta = \int_{\Omega_\varepsilon} b\eta + \int_{B_\varepsilon} b\eta, \quad (2.2.11)$$

e aplicando o teorema da divergência, obtém-se

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \eta - \int_{B_\varepsilon} (\Delta u + b)\eta - \int_{\partial B_\varepsilon} \partial_n u \eta = \int_{\Omega_\varepsilon} b\eta, \quad (2.2.12)$$

lembrando que  $n$  é a normal que aponta para o centro do furo, conforme mostrado na fig. 2.1. Como  $u$  é solução de (2.1.3), ou seja  $\Delta u + b = 0$ , tem-se

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \eta - \int_{\partial B_\varepsilon} \partial_n u \eta = \int_{\Omega_\varepsilon} b\eta, \quad (2.2.13)$$

o que permite tomar  $\eta = u_\varepsilon$  como função teste, resultando na seguinte igualdade

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla u_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} b u_\varepsilon + \int_{\partial B_\varepsilon} u_\varepsilon \partial_n u. \quad (2.2.14)$$

Utilizando novamente o teorema da divergência, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u &= - \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u_\varepsilon u + \int_{\partial \Omega} u \partial_n u_\varepsilon + \int_{\partial B_\varepsilon} u \partial_n u_\varepsilon \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} b u + \int_{\partial B_\varepsilon} u \partial_n u_\varepsilon, \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

onde foi utilizado o fato de que  $u_\varepsilon$  é solução de (2.1.7), ou seja  $-\Delta u_\varepsilon = b$ , e que  $u = 0$  sobre  $\partial \Omega$ . Substituindo este último resultado na equação anterior, observa-se que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} b(u_\varepsilon - u) = \int_{\partial B_\varepsilon} (u \partial_n u_\varepsilon - u_\varepsilon \partial_n u). \quad (2.2.16)$$

Sendo assim, tem-se que a variação da energia potencial total pode, efetivamente, ser escrita na forma de integrais concentradas na bola  $B_\varepsilon$ , ou seja

$$\mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) - \mathcal{J}_\Omega(u) = -\frac{1}{2} \int_{\partial B_\varepsilon} (u \partial_n u_\varepsilon - u_\varepsilon \partial_n u) + \frac{1}{2} \int_{B_\varepsilon} b u. \quad (2.2.17)$$

## 2.3 Análise Assintótica da Solução

A variação da energia potencial total é dada exclusivamente em termos de integrais concentradas na bola  $B_\varepsilon$ . Assim, para obter a expansão assintótica topológica na forma (1.1.2), basta conhecer o comportamento assintótico da solução  $u_\varepsilon$  em relação a  $\varepsilon$  na vizinhança do furo  $B_\varepsilon$ . Em particular, uma vez conhecido o comportamento explícito, é possível identificar a função  $f(\varepsilon)$  e realizar a passagem ao limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  em (1.1.4) de modo a obter a fórmula final para a derivada topológica  $\mathcal{T}$  do funcional de forma  $\psi$ . Entretanto, em geral isto não é tarefa fácil. De fato, é necessário realizar a análise assintótica de  $u_\varepsilon$  com relação a  $\varepsilon$ . Nesta seção é apresentado o cálculo formal de expansão da solução  $u_\varepsilon$  associada a ambas as condições de contorno de Neumann e Dirichlet sobre  $\partial B_\varepsilon$ . Para uma rigorosa justificativa da expansão assintótica de  $u_\varepsilon$ , o leitor pode consultar o livro de Kozlov et al. 1999 [55], por exemplo. Para a teoria geral da análise assintótica de soluções em domínios singularmente perturbados remete-se o leitor ao livro de Mazja, Nasarow e Plamenewski, 1991 [69].

### 2.3.1 Condição de Neumann

Para o caso  $\beta = 0$  em (2.1.7) é proposto um *ansatz* para a expansão de  $u_\varepsilon$  na forma [55, 69]

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= u(x) + \varepsilon w(\varepsilon^{-1}x) + \tilde{u}_\varepsilon(x) \\ &= u(\hat{x}) + \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) + \frac{1}{2} \nabla \nabla u(y)(x - \hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) \\ &\quad + \varepsilon w(\varepsilon^{-1}x) + \tilde{u}_\varepsilon(x), \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

onde  $y$  é um ponto intermediário entre  $x$  e  $\hat{x}$ . Na fronteira do furo  $\partial B_\varepsilon$  tem-se  $\partial_n u_\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon} = 0$ . Assim, a derivada normal da expansão acima, avaliada sobre  $\partial B_\varepsilon$ , conduz a

$$\nabla u(\hat{x}) \cdot n - \varepsilon \nabla \nabla u(y) n \cdot n + \varepsilon \partial_n w(\varepsilon^{-1}x) + \partial_n \tilde{u}_\varepsilon(x) = 0. \quad (2.3.19)$$

Selecionando  $w$  tal que

$$\varepsilon \partial_n w(\varepsilon^{-1}x) = -\nabla u(\hat{x}) \cdot n \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \quad (2.3.20)$$

Na nova variável  $\xi = \varepsilon^{-1}x$ , que implica  $\nabla_\xi w(\xi) = \varepsilon \nabla w(\varepsilon^{-1}x)$ , o seguinte *problema exterior* é formalmente obtido com  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Encontre } w, \text{ tal que} \\ \Delta_\xi w = 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_1}, \\ w \rightarrow 0 & \text{no } \infty, \\ \nabla_\xi w \cdot n = -\nabla u(\hat{x}) \cdot n & \text{sobre } \partial B_1. \end{array} \right. \quad (2.3.21)$$

O problema de valor de contorno acima admite uma solução explícita, ou seja

$$w(\varepsilon^{-1}x) = \frac{\varepsilon}{\|x - \hat{x}\|^2} \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}). \quad (2.3.22)$$

Agora é possível construir  $\tilde{u}_\varepsilon$  de modo a compensar a discrepância introduzida pelo termo de alta ordem em  $\varepsilon$  bem como pela camada limite  $w$  sobre a fronteira exterior  $\partial\Omega$ . Ou seja, o *resíduo*  $\tilde{u}_\varepsilon$  deve ser solução para o seguinte problema de valor de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Encontre } \tilde{u}_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \Delta \tilde{u}_\varepsilon = 0 & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \tilde{u}_\varepsilon = -\varepsilon w & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \partial_n \tilde{u}_\varepsilon = \varepsilon \nabla \nabla u(y) n \cdot n & \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (2.3.23)$$

em que, sob apropriada condição de regularidade [69], claramente  $\tilde{u}_\varepsilon \approx O(\varepsilon)$  em uma dada norma. Entretanto, esta estimativa pode ser melhorada [55, 69], ou seja  $\tilde{u}_\varepsilon \approx O(\varepsilon^2)$ , e a *expansão* para  $u_\varepsilon$  pode ser escrita como

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \frac{\varepsilon^2}{\|x - \hat{x}\|^2} \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) + O(\varepsilon^2). \quad (2.3.24)$$

### 2.3.2 Condição de Dirichlet

Para o caso  $\beta = 1$  em (2.1.7), inicialmente é considerado o seguinte *ansatz* para a expansão de  $u_\varepsilon$  [55, 69]

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= u(x) + v_\varepsilon(x) + \varepsilon w_\varepsilon(\varepsilon^{-1}x) + \tilde{u}_\varepsilon(x) \\ &= u(\hat{x}) + \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) + \frac{1}{2} \nabla \nabla u(y)(x - \hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) \\ &\quad + v_\varepsilon(x) + \varepsilon w_\varepsilon(\varepsilon^{-1}x) + \tilde{u}_\varepsilon(x), \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

onde  $y$  é um ponto intermediário entre  $x$  e  $\hat{x}$ . Ademais, a função  $v_\varepsilon$  é definida como

$$v_\varepsilon(x) = \alpha(\varepsilon)u(\hat{x})G(x). \quad (2.3.26)$$

A função  $G$  é a solução para o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} \text{Encontre } G, \text{ tal que} \\ -\Delta G = \delta(x - \hat{x}) & \text{em } \Omega, \\ G = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.3.27)$$

que, por meio da *solução fundamental* para o Laplaciano, admite uma representação na vizinhança do ponto  $\hat{x} \in \Omega$  da forma

$$G(x) = -\left(\frac{1}{2\pi} \log \|x - \hat{x}\| + g(x)\right), \quad \text{com } \|x - \hat{x}\| > 0, \quad (2.3.28)$$

onde  $g$  é harmônico em  $\Omega$  e deve compensar a discrepância sobre  $\partial\Omega$  introduzida pela representação acima, isto é,  $g$  é a solução do problema de valor de contorno auxiliar:

$$\begin{cases} \text{Encontre } g, \text{ tal que} \\ \Delta g = 0 & \text{em } \Omega, \\ g = -\frac{1}{2\pi} \log \|x - \hat{x}\| & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.3.29)$$

Sendo assim, a função  $v_\varepsilon$  pode ser escrita da seguinte forma na vizinhança do furo

$$v_\varepsilon(x) = -\alpha(\varepsilon)u(\hat{x})\left(\frac{1}{2\pi} \log \|x - \hat{x}\| + g(x)\right). \quad (2.3.30)$$

Na fronteira do furo  $\partial B_\varepsilon$  tem-se  $u_{\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon}} = 0$ . Desta maneira, a expansão para  $u_\varepsilon$ , avaliada sobre  $\partial B_\varepsilon$ , resulta em

$$\begin{aligned} & u(\hat{x}) - \varepsilon \nabla u(\hat{x}) \cdot n + \varepsilon^2 \nabla \nabla u(y) n \cdot n - \\ & \alpha(\varepsilon)u(\hat{x}) \left( \frac{1}{2\pi} \log \varepsilon + g(\hat{x}) - \varepsilon \nabla g(\hat{x}) \cdot n + \varepsilon^2 \nabla \nabla g(z) n \cdot n \right) + \\ & \varepsilon w_\varepsilon(\varepsilon^{-1}x) + \tilde{u}_\varepsilon(x) = 0, \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

onde  $z$  é um ponto intermediário entre  $x$  e  $\hat{x}$ . Ademais, foi utilizada a *regularidade elíptica* da função  $g$  ao redor de  $\hat{x}$ . Agora é possível construir  $\tilde{u}_\varepsilon$  de modo que compense a discrepância introduzida pelos termos de alta ordem em  $\varepsilon$ , ou seja

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = \varepsilon^2(\alpha(\varepsilon)u(\hat{x})\nabla \nabla g(z)n - \nabla \nabla u(y)n) \cdot n \quad \text{on } \partial B_\varepsilon. \quad (2.3.32)$$

Entretanto, na nova variável  $\xi = \varepsilon^{-1}x$  a função  $w_\varepsilon$  é solução do *problema exterior*:

$$\begin{cases} \text{Encontre } w_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \Delta_\xi w_\varepsilon = 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_1}, \\ w_\varepsilon \rightarrow 0 & \text{no } \infty, \\ w_\varepsilon = (\nabla u(\hat{x}) - \alpha(\varepsilon)u(\hat{x})\nabla g(\hat{x})) \cdot n & \text{sobre } \partial B_1, \end{cases} \quad (2.3.33)$$

que tem uma solução fechada, dada por

$$w_\varepsilon(\varepsilon^{-1}x) = -\frac{\varepsilon}{\|x - \hat{x}\|^2} (\nabla u(\hat{x}) - \alpha(\varepsilon)u(\hat{x})\nabla g(\hat{x})) \cdot (x - \hat{x}). \quad (2.3.34)$$

Assim, a expansão prévia (2.3.31) reduz-se a

$$u(\hat{x}) - \alpha(\varepsilon)u(\hat{x}) \left( \frac{1}{2\pi} \log \varepsilon + g(\hat{x}) \right) = 0 \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \quad (2.3.35)$$

que pode ser resolvida em termos de  $\alpha(\varepsilon)$ , conduzindo a

$$\alpha(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\log \varepsilon + 2\pi g(\hat{x})}. \quad (2.3.36)$$

Finalmente, o *resíduo*  $\tilde{u}_\varepsilon$  é construído de modo a compensar as discrepâncias na expansão para  $u_\varepsilon$  inicialmente introduzidas, assim  $\tilde{u}_\varepsilon$  deve ser solução de:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Encontre } \tilde{u}_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \Delta \tilde{u}_\varepsilon = 0 & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \tilde{u}_\varepsilon = -\varepsilon w_\varepsilon & \text{sobre } \partial \Omega, \\ \tilde{u}_\varepsilon = \varepsilon^2(\alpha(\varepsilon)u(\hat{x})\nabla\nabla g(z)n - \nabla\nabla u(y)n) \cdot n & \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (2.3.37)$$

onde  $y$  e  $z$  são pontos intermediários entre  $x$  e  $\hat{x}$ . Sob apropriada condição de regularidade [69], claramente  $\tilde{u}_\varepsilon \approx O(\varepsilon^2)$  em uma dada norma, desde que  $w_\varepsilon \approx O(\varepsilon)$  sobre a fronteira exterior  $\partial \Omega$ . Portanto, a *expansão* para  $u_\varepsilon$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= u(x) - \alpha(\varepsilon)u(\hat{x}) \left( \frac{1}{2\pi} \log \|x - \hat{x}\| + g(x) \right) \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2}{\|x - \hat{x}\|^2} (\nabla u(\hat{x}) - \alpha(\varepsilon)u(\hat{x})\nabla g(\hat{x})) \cdot (x - \hat{x}) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

com  $\alpha(\varepsilon)$  dado por (2.3.36).

## 2.4 Cálculo da Derivada Topológica

Devido à *regularidade elíptica* interior da solução  $u$ , o último termo da variação da energia potencial total dada pela eq. (2.2.17) pode ser trivialmente expandido em potências de  $\varepsilon$  da seguinte forma (ver Exercício 1, no final do Capítulo 1)

$$\int_{B_\varepsilon} bu = \pi\varepsilon^2 bu(\hat{x}) + o(\varepsilon^2), \quad (2.4.39)$$

o que resulta em

$$\mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) - \mathcal{J}_\Omega(u) = -\frac{1}{2} \int_{\partial B_\varepsilon} (u\partial_n u_\varepsilon - u_\varepsilon\partial_n u) + \frac{1}{2}\pi\varepsilon^2 bu(\hat{x}) + o(\varepsilon^2). \quad (2.4.40)$$

### 2.4.1 Condição de Neumann

Tomando  $\beta = 0$  em (2.1.7), tem-se condição de Neumann homogênea sobre  $\partial B_\varepsilon$ , ou seja  $\partial_n u_\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon} = 0$ . Neste caso, a variação da energia potencial total dada pela eq. (2.4.40) reduz para

$$\mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) - \mathcal{J}_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_{\partial B_\varepsilon} u_\varepsilon \partial_n u + \frac{1}{2}\pi\varepsilon^2 bu(\hat{x}) + o(\varepsilon^2). \quad (2.4.41)$$

Introduzindo o ansatz  $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon w(\varepsilon^{-1}x) + \tilde{u}_\varepsilon(x)$  no primeiro termo da equação acima tem-se

$$\int_{\partial B_\varepsilon} u_\varepsilon \partial_n u = \int_{\partial B_\varepsilon} u \partial_n u + \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} w(\varepsilon^{-1}x) \partial_n u + o(\varepsilon^2). \quad (2.4.42)$$

Utilizando o teorema da divergência e considerando a *regularidade elíptica* interior da solução  $u$ , observa-se que

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon} u \partial_n u &= - \int_{B_\varepsilon} \|\nabla u\|^2 - \int_{B_\varepsilon} u \Delta u \\ &= - \int_{B_\varepsilon} \|\nabla u\|^2 + \int_{B_\varepsilon} bu \\ &= -\pi\varepsilon^2 \|\nabla u(\hat{x})\|^2 + \pi\varepsilon^2 bu(\hat{x}) + o(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

lembrando que a normal  $n$  aponta para o centro do furo. Por outro lado, a derivada normal de  $u$  avaliada sobre  $\partial B_\varepsilon$  pode ser expandida em série de Taylor da seguinte forma

$$\begin{aligned} \partial_n u(x)|_{\partial B_\varepsilon} &= \nabla u(\hat{x}) \cdot n - \varepsilon \nabla \nabla u(y) n \cdot n \\ &= \nabla u(\hat{x}) \cdot n + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.4.44)$$

onde  $y$  é um ponto intermediário entre  $x$  e  $\hat{x}$ . Além do mais, a função  $w(\varepsilon^{-1}x)$  dada na forma explícita por (2.3.22) pode ser avaliada na fronteira do furo  $\partial B_\varepsilon$ , o que resulta em

$$w(\varepsilon^{-1}x)|_{\partial B_\varepsilon} = -\nabla u(\hat{x}) \cdot n, \quad (2.4.45)$$

desde que  $\|x - \hat{x}\| = \varepsilon$  e  $x - \hat{x} = -\varepsilon n$  sobre  $\partial B_\varepsilon$ . Logo

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} w(\varepsilon^{-1}x) \partial_n u &= -\varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} (\nabla u(\hat{x}) \cdot n)(\nabla u(\hat{x}) \cdot n) + o(\varepsilon^2) \\ &= -\varepsilon (\nabla u(\hat{x}) \otimes \nabla u(\hat{x})) \cdot \int_{\partial B_\varepsilon} n \otimes n + o(\varepsilon^2) \\ &= -\pi\varepsilon^2 (\nabla u(\hat{x}) \otimes \nabla u(\hat{x})) \cdot \mathbf{I} + o(\varepsilon^2) \\ &= -\pi\varepsilon^2 (\nabla u(\hat{x}) \cdot \nabla u(\hat{x})) + o(\varepsilon^2) \\ &= -\pi\varepsilon^2 \|\nabla u(\hat{x})\|^2 + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.4.46)$$

Sendo assim, o primeiro termo da variação da energia potencial total (2.4.41) pode ser expandido em potências de  $\varepsilon$  da seguinte forma

$$\int_{\partial B_\varepsilon} u_\varepsilon \partial_n u = -2\pi\varepsilon^2 \|\nabla u(\hat{x})\|^2 + \pi\varepsilon^2 bu(\hat{x}) + o(\varepsilon^2). \quad (2.4.47)$$

O resultado acima juntamente com a expansão (2.4.41) conduz a

$$\mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) - \mathcal{J}_\Omega(u) = -\pi\varepsilon^2 (\|\nabla u(\hat{x})\|^2 - bu(\hat{x})) + o(\varepsilon^2). \quad (2.4.48)$$

Agora, a fim de identificar o termo principal da expansão acima, seleciona-se

$$f(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2, \quad (2.4.49)$$

que resulta na fórmula final para a *derivada topológica* [81, 89]

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = -\|\nabla u(\hat{x})\|^2 + bu(\hat{x}). \quad (2.4.50)$$

Isto conduz à *expansão assintótica topológica* do funcional de forma energia, ou seja

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) - \pi\varepsilon^2 (\|\nabla u(\hat{x})\|^2 - bu(\hat{x})) + o(\varepsilon^2). \quad (2.4.51)$$

A justificativa matemática completa para a expansão acima pode ser vista em detalhes no Capítulo 7, bem como no livro de Novotny & Sokolowski 2013 [84], Capítulo 10.

## 2.4.2 Condição de Dirichlet

Tomando  $\beta = 1$  em (2.1.7), tem-se condição de Dirichlet homogênea sobre  $\partial B_\varepsilon$ , ou seja  $u_\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon} = 0 \Rightarrow \partial_\tau u_\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon} = 0$ . Entretanto, a variação da energia potencial total dada pela eq. (2.4.40) reduz para

$$\mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) - \mathcal{J}_\Omega(u) = -\frac{1}{2} \int_{\partial B_\varepsilon} u \partial_n u_\varepsilon + \frac{1}{2} \pi \varepsilon^2 b u(\hat{x}) + o(\varepsilon^2). \quad (2.4.52)$$

Introduzindo o ansätz  $u_\varepsilon(x) = u(x) + v_\varepsilon(x) + \varepsilon w_\varepsilon(\varepsilon^{-1}x) + \tilde{u}_\varepsilon(x)$  no primeiro termo da equação acima tem-se

$$\int_{\partial B_\varepsilon} u \partial_n u_\varepsilon = \int_{\partial B_\varepsilon} u \partial_n u + \int_{\partial B_\varepsilon} u \partial_n v_\varepsilon + \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} u \partial_n w_\varepsilon(\varepsilon^{-1}x) + o(\varepsilon^2), \quad (2.4.53)$$

onde, como visto anteriormente, o primeiro termo da equação anterior pode ser expandido em potência de  $\varepsilon$  da seguinte forma

$$\int_{\partial B_\varepsilon} u \partial_n u = -\pi \varepsilon^2 \|\nabla u(\hat{x})\|^2 + \pi \varepsilon^2 b u(\hat{x}) + o(\varepsilon^2). \quad (2.4.54)$$

Além do mais, a função  $u$  avaliada sobre  $\partial B_\varepsilon$  pode ser expandida em série de Taylor da seguinte forma

$$\begin{aligned} u(x)|_{\partial B_\varepsilon} &= u(\hat{x}) - \varepsilon \nabla u(\hat{x}) \cdot n + \varepsilon^2 \nabla \nabla u(y) n \cdot n \\ &= u(\hat{x}) - \varepsilon \nabla u(\hat{x}) \cdot n + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.4.55)$$

onde  $y$  é um ponto intermediário entre  $x$  e  $\hat{x}$ . Por outro lado, a derivada normal da função  $v_\varepsilon$ , dada pela eq. (2.3.30), avaliada sobre  $\partial B_\varepsilon$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \partial v_\varepsilon(x)|_{\partial B_\varepsilon} &= \alpha(\varepsilon) u(\hat{x}) \left( \frac{1}{2\pi\varepsilon} - \nabla g(\hat{x}) \cdot n + \varepsilon \nabla \nabla g(z) n \cdot n \right) \\ &= \alpha(\varepsilon) u(\hat{x}) \left( \frac{1}{2\pi\varepsilon} - \nabla g(\hat{x}) \cdot n \right) + o(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.4.56)$$

em que  $z$  é um ponto intermediário entre  $x$  e  $\hat{x}$ . Finalmente, a derivada normal da função  $w_\varepsilon(\varepsilon^{-1}x)$ , dada pela eq. (2.3.34), avaliada sobre  $\partial B_\varepsilon$ , pode ser escrita como

$$\partial w_\varepsilon(\varepsilon^{-1}x)|_{\partial B_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} (\nabla u(\hat{x}) - \alpha(\varepsilon) u(\hat{x}) \nabla g(\hat{x})) \cdot n. \quad (2.4.57)$$

Levando em conta todos esses elementos, observa-se que

$$\int_{\partial B_\varepsilon} u \partial_n v_\varepsilon = \alpha(\varepsilon) u(\hat{x}) \int_{\partial B_\varepsilon} (u(\hat{x}) - \varepsilon \nabla u(\hat{x}) \cdot n) \left( \frac{1}{2\pi\varepsilon} - \nabla g(\hat{x}) \cdot n \right) + o(\varepsilon^2), \quad (2.4.58)$$

onde, calculando cada uma das integrais acima, tem-se

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon} u(\hat{x}) = u(\hat{x}), \quad (2.4.59)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_\varepsilon} \nabla u(\hat{x}) \cdot n = 0, \quad (2.4.60)$$

$$u(\hat{x}) \int_{\partial B_\varepsilon} \nabla g(\hat{x}) \cdot n = 0, \quad (2.4.61)$$



$$\varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} (\nabla u(\hat{x}) \cdot n)(\nabla g(\hat{x}) \cdot n) = O(\varepsilon^2) . \quad (2.4.62)$$

O que resulta em

$$\int_{\partial B_\varepsilon} u \partial_n v_\varepsilon = \alpha(\varepsilon) u(\hat{x})^2 + o(\varepsilon^2) , \quad (2.4.63)$$

pois  $\alpha(\varepsilon)O(\varepsilon^2) = o(\varepsilon^2)$ . Do mesmo modo,

$$\varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} u \partial_n w_\varepsilon(\varepsilon^{-1}x) = \int_{\partial B_\varepsilon} (u(\hat{x}) - \varepsilon \nabla u(\hat{x}) \cdot n) (\nabla u(\hat{x}) - \alpha(\varepsilon) u(\hat{x}) \nabla g(\hat{x})) \cdot n + o(\varepsilon^2) , \quad (2.4.64)$$

onde, calculando novamente cada uma das integrais acima, obtém-se

$$u(\hat{x}) \int_{\partial B_\varepsilon} \nabla u(\hat{x}) \cdot n = 0 , \quad (2.4.65)$$

$$\varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} (\nabla u(\hat{x}) \cdot n) (\nabla u(\hat{x}) \cdot n) = \pi \varepsilon^2 \|\nabla u(\hat{x})\|^2 , \quad (2.4.66)$$

$$\alpha(\varepsilon) u(\hat{x})^2 \int_{\partial B_\varepsilon} \nabla g(\hat{x}) \cdot n = 0 , \quad (2.4.67)$$

$$\varepsilon \alpha(\varepsilon) u(\hat{x}) \int_{\partial B_\varepsilon} (\nabla u(\hat{x}) \cdot n) (\nabla u(\hat{x}) \cdot n) = o(\varepsilon^2) , \quad (2.4.68)$$

lembrando que  $\varepsilon^2 \alpha(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ . Sendo assim,

$$\varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} u \partial_n w_\varepsilon(\varepsilon^{-1}x) = -\pi \varepsilon^2 \|\nabla u(\hat{x})\|^2 + o(\varepsilon^2) . \quad (2.4.69)$$

Coletando-se os principais resultados ora apresentados tem-se que o primeiro termo da variação da energia potencial total (2.4.52) pode ser expandido em potências de  $\varepsilon$  da seguinte forma

$$\int_{\partial B_\varepsilon} u \partial_n u_\varepsilon = \alpha(\varepsilon) u(\hat{x})^2 - 2\pi \varepsilon^2 \|\nabla u(\hat{x})\|^2 + \pi \varepsilon^2 b u(\hat{x}) + o(\varepsilon^2) . \quad (2.4.70)$$

Portanto, o resultado acima juntamente com a expansão (2.4.52) resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) - \mathcal{J}_\Omega(u) &= -\frac{\pi}{\log \varepsilon + 2\pi g(\hat{x})} u(\hat{x})^2 + \pi \varepsilon^2 \|\nabla u(\hat{x})\|^2 + o(\varepsilon^2) \\ &= -\frac{\pi}{\log \varepsilon + 2\pi g(\hat{x})} u(\hat{x})^2 + O(\varepsilon^2) . \end{aligned} \quad (2.4.71)$$

Agora, objetivando identificar o termo principal da expansão acima, toma-se

$$f(\varepsilon) = -\frac{\pi}{\log \varepsilon + 2\pi g(\hat{x})} , \quad (2.4.72)$$

que conduz à fórmula final para a *derivada topológica*, ou seja [20, 81]

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = u(\hat{x})^2 . \quad (2.4.73)$$

Finalmente a expansão assintótica topológica do funcional de forma energia pode ser escrita como

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) - \frac{\pi}{\log \varepsilon + 2\pi g(\hat{x})} u(\hat{x})^2 + O(\varepsilon^2) . \quad (2.4.74)$$

A justificativa completa para a expansão acima é dada no livro de Novotny & Sokolowski 2013 [84], Capítulo 10.

**Observação 2.1.** *É importante notar que a técnica do domínio truncado, amplamente utilizada na literatura, introduz um parâmetro artificial  $R$  na expansão assintótica topológica que não pode ser explicitamente avaliado. Assim, a simplificação  $f(\varepsilon) \approx -\pi/\log \varepsilon$  é frequentemente adotada, conduzindo à seguinte expansão (veja, por exemplo, [36])*

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) - \frac{\pi}{\log \varepsilon} u(\hat{x})^2 + o\left(\frac{-1}{\log \varepsilon}\right), \quad (2.4.75)$$

que introduz uma discrepância na expansão assintótica topológica.

Indo além na expansão e considerando um termo a mais, a expansão assintótica topológica resulta em

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) + f(\varepsilon)\mathcal{T}(\hat{x}) + f_2(\varepsilon)\mathcal{T}^2(\hat{x}) + o(f_2(\varepsilon)), \quad (2.4.76)$$

em que  $f_2(\varepsilon)$  é a *função correção de segunda ordem* positiva que decresce monotonicamente tal que  $f_2(\varepsilon) \rightarrow 0$  com  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ademais,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_2(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} = 0. \quad (2.4.77)$$

Logo  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{T}^2$  são as *derivadas topológicas de primeira e segunda ordens* de  $\psi$ , respectivamente. Agora, dividindo (2.4.76) por  $f_2(\varepsilon)$  e realizando a passagem ao limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tem-se que a derivada topológica de segunda ordem é definida da seguinte forma

$$\mathcal{T}^2(\hat{x}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi) - f(\varepsilon)\mathcal{T}(\hat{x})}{f_2(\varepsilon)}. \quad (2.4.78)$$

Assim, é possível avaliar a derivada topológica de segunda ordem do funcional de forma energia a partir da expansão obtida. Mais precisamente, tendo em vista (2.4.71), combinado com (2.4.72) e (2.4.73), tem-se

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi) - f(\varepsilon)\mathcal{T}(\hat{x}) = \pi\varepsilon^2 \|\nabla u(\hat{x})\|^2 + o(\varepsilon^2). \quad (2.4.79)$$

Portanto, a fim de identificar o termo principal da expansão acima, seleciona-se

$$f_2(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2, \quad (2.4.80)$$

que conduz à fórmula final da *derivada topológica de segunda ordem* [26]

$$\mathcal{T}^2(\hat{x}) = \|\nabla u(\hat{x})\|^2. \quad (2.4.81)$$

Finalmente, a *expansão assintótica topológica* do funcional de forma energia resulta em

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) - \frac{\pi}{\log \varepsilon + 2\pi g(\hat{x})} u(\hat{x})^2 + \pi\varepsilon^2 \|\nabla u(\hat{x})\|^2 + o(\varepsilon^2). \quad (2.4.82)$$

A justificativa matemática completa para a expansão acima pode ser conferida detalhadamente no livro de Novotny & Sokolowski 2013 [84], Capítulo 10.

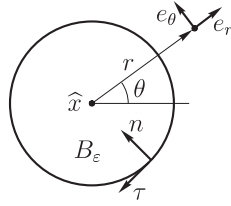


Figura 2.2: Sistema polar de coordenadas  $(r, \theta)$  centrado no ponto  $\hat{x} \in \Omega$ .

## 2.5 Exemplos com Forma Explícita para a Derivada Topológica

Agora, por meio de alguns exemplos, será verificada a precisão da expansão assintótica topológica obtida. Para tanto, é calculada uma aproximação para o funcional de forma energia tendo em conta as expansões dadas por (2.4.51), (2.4.74) e também por (2.4.82). Assim, considerando o problema de Laplace definido no domínio  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}$ , onde  $\Omega = B_\rho$ , com  $\varepsilon < \rho$ . Em particular,

$$B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < \rho\} \quad \text{e} \quad B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < \varepsilon\}. \quad (2.5.83)$$

Seja também um sistema polar de coordenadas  $(r, \theta)$  como mostrado na fig. 2.2.

### 2.5.1 Exemplo A: Caso de Neumann

Tomando  $b = 0$  e  $\partial_n u_\varepsilon = \cos \theta$  sobre  $\partial B_\rho$ , a formulação do problema associado ao domínio perturbado  $\Omega_\varepsilon$  pode ser escrita como:

$$\begin{cases} \text{Encontre } u_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \Delta u_\varepsilon = 0 & \text{em } B_\rho \setminus \overline{B_\varepsilon}, \\ \partial_n u_\varepsilon = \cos \theta & \text{sobre } \partial B_\rho, \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \end{cases} \quad (2.5.84)$$

A solução analítica, salvo uma constante aditiva arbitrária, é dada por

$$u_\varepsilon(r, \theta) = \frac{\rho^2}{r} \left( \frac{r^2 + \varepsilon^2}{\rho^2 - \varepsilon^2} \right) \cos \theta. \quad (2.5.85)$$

Assim, o funcional de forma pode ser escrito como

$$\psi(\chi_\varepsilon) = -\frac{\pi \rho^2}{2} \left( \frac{\rho^2 + \varepsilon^2}{\rho^2 - \varepsilon^2} \right), \quad (2.5.86)$$

que pode ser expandido em potências de  $\varepsilon$ , ou seja

$$\psi(\chi_\varepsilon) = -\frac{1}{2} \pi \rho^2 - \pi \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4). \quad (2.5.87)$$

Por outro lado, de acordo com (2.4.51) e considerando que  $u(r, \theta) = r \cos \theta$ , a expansão assintótica topológica é dada por

$$\begin{aligned} \psi(\chi_\varepsilon) &= \psi(\chi) - \pi \varepsilon^2 \|\nabla u\|^2 + o(\varepsilon^2) \\ &= -\frac{1}{2} \pi \rho^2 - \pi \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.5.88)$$

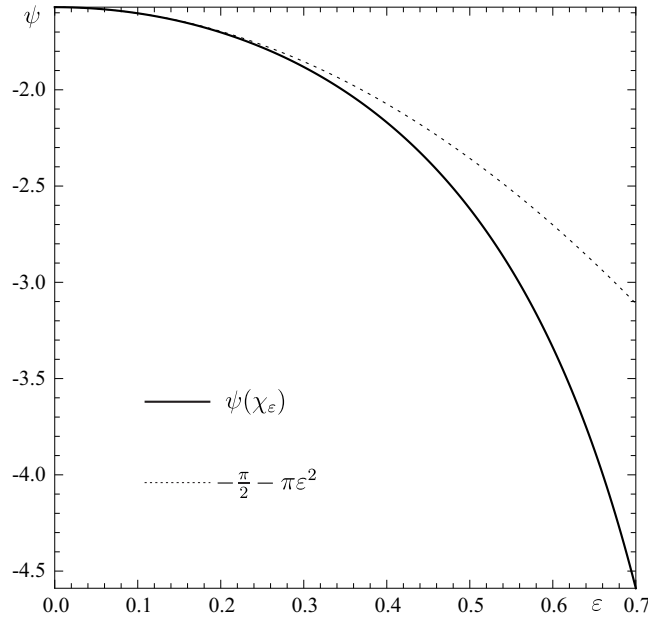


Figura 2.3: Expansão assintótica topológica avaliada explicitamente no anel: caso de Neumann.

que corrobora com a expansão acima em potências de  $\varepsilon$ , desde que  $\|\nabla u\|^2 = 1$ . Em particular, tomando  $\rho = 1$ , a expansão assintótica topológica é dada por

$$\psi(\chi_\varepsilon) \approx -\frac{\pi}{2} - \pi\varepsilon^2. \quad (2.5.89)$$

Estes resultados são comparados no gráfico da fig. 2.3, onde observa-se que a aproximação (2.5.89) é bastante precisa para valores pequenos de  $\varepsilon$ , com os valores exatos dados por (2.5.86).

### 2.5.2 Exemplo B: Caso de Dirichlet

Agora, considerando  $b = 0$  e  $u_\varepsilon = a + \cos \theta$  sobre  $\partial B_\rho$ , a formulação do problema associado ao domínio perturbado  $\Omega_\varepsilon$  pode ser escrita como:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Encontre } u_\varepsilon, \text{ tal que} & \\ \Delta u_\varepsilon = 0 & \text{em } B_\rho \setminus \overline{B_\varepsilon}, \\ u_\varepsilon = a + \cos \theta & \text{sobre } \partial B_\rho, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (2.5.90)$$

cujas solução analítica é dada por

$$u_\varepsilon(r, \theta) = a \frac{\log(r/\varepsilon)}{\log(\rho/\varepsilon)} + \frac{\rho}{r} \left( \frac{r^2 - \varepsilon^2}{\rho^2 - \varepsilon^2} \right) \cos \theta. \quad (2.5.91)$$

Assim, o funcional de forma resulta em

$$\psi(\chi_\varepsilon) = \frac{\pi}{\log(\rho/\varepsilon)} a^2 + \frac{\pi}{2} \frac{\rho^2 + \varepsilon^2}{\rho^2 - \varepsilon^2}. \quad (2.5.92)$$

que pode ser expandido em potências de  $\varepsilon$ , tal que

$$\psi(\chi_\varepsilon) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\log(\rho/\varepsilon)} a^2 + \pi\varepsilon^2 \frac{1}{\rho^2} + O(\varepsilon^4). \quad (2.5.93)$$

Tendo em conta a fórmula final para a expansão assintótica topológica dada por (2.4.74) e considerando que  $u(r, \theta) = a + (r/\rho) \cos \theta$ , tem-se

$$\begin{aligned} \psi(\chi_\varepsilon) &= \psi(\chi) - \frac{\pi}{\log \varepsilon + 2\pi g} u^2 + \pi\varepsilon^2 \|\nabla u\|^2 + o(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\log(\rho/\varepsilon)} a^2 + \pi\varepsilon^2 \frac{1}{\rho^2} + o(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.5.94)$$

que corrobora com a expansão em potências de  $\varepsilon$  acima, desde que  $\|\nabla u\|^2 = 1/\rho^2$ , onde  $g$  é a solução de (2.3.29), ou seja

$$\begin{cases} \Delta g = 0 & \text{em } B_\rho \\ g = -\frac{1}{2\pi} \log \rho & \text{sobre } \partial B_\rho \end{cases} \Rightarrow g(\hat{x}) = -\frac{1}{2\pi} \log \rho. \quad (2.5.95)$$

Escolhendo  $\rho = a = 1$ , é possível calcular a aproximação do funcional de forma energia tendo em conta somente a derivada topológica de primeira ordem, de fato

$$\psi(\chi_\varepsilon) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\log \varepsilon}. \quad (2.5.96)$$

Em seguida, levando em conta a aproximação considerando as derivadas topológicas de primeira e segunda ordens, tem-se

$$\psi(\chi_\varepsilon) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\log \varepsilon} + \pi\varepsilon^2. \quad (2.5.97)$$

Estes resultados são comparados no gráfico da fig. 2.4, onde se observa que a aproximação (2.5.96) conduz a bons resultados em comparação com (2.5.92) para pequenos valores de  $\varepsilon$ . Ademais, nota-se que a derivada topológica de segunda ordem é um importante fator de correção, pois a expansão (2.5.97) continua a ser bastante precisa, mesmo para valores grandes de  $\varepsilon$ .

## 2.6 Comentários Adicionais e Resumo dos Resultados

Neste capítulo foi calculada a derivada topológica do funcional de forma energia associada à equação de Poisson em domínios bidimensionais, tendo em conta condições homogêneas de Neumann ou Dirichlet sobre a fronteira do furo.

Ademais, é possível também considerar uma condição de Robin sobre a fronteira do furo. Para isso, é necessário tomar  $\beta = 0$  e adicionar um termo a mais para a energia potencial total (2.1.4), ou seja

$$\frac{1}{2} \int_{\partial B_\varepsilon} u_\varepsilon^2, \quad (2.6.98)$$

que conduz à seguinte condição sobre a fronteira do furo

$$u_\varepsilon + \partial_n u_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \quad (2.6.99)$$

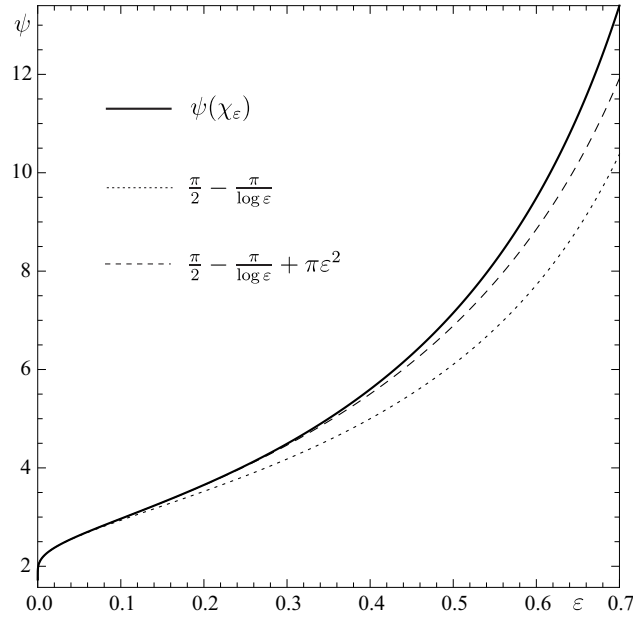


Figura 2.4: Expansão assintótica topológica avaliada explicitamente no anel: caso de Dirichlet.

A solução para o problema de valor de contorno resultante possui a seguinte *expansão*

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= u(x) + O(\varepsilon) \\ &= u(\hat{x}) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.6.100)$$

Portanto a variação do funcional de forma energia, tendo em conta o termo associado à condição de Robin na fronteira do furo (2.6.98), pode ser escrita como

$$\mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) - \mathcal{J}_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_{\partial B_\varepsilon} u_\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2). \quad (2.6.101)$$

Considerando a expansão (2.6.100) na equação acima e após avaliar explicitamente a integral sobre a fronteira do furo  $\partial B_\varepsilon$ , obtém-se

$$\mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) - \mathcal{J}_\Omega(u) = \pi \varepsilon u(\hat{x})^2 + O(\varepsilon^2). \quad (2.6.102)$$

Agora, objetivando identificar o termo principal da expansão acima, seleciona-se

$$f(\varepsilon) = \pi \varepsilon, \quad (2.6.103)$$

que conduz à fórmula final da *derivada topológica*, ou seja [81]

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = u(\hat{x})^2. \quad (2.6.104)$$

Finalmente, a *expansão assintótica topológica* do funcional de forma energia é dada por

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) + \pi \varepsilon u(\hat{x})^2 + o(\varepsilon). \quad (2.6.105)$$

Resumindo, os resultados para as *derivadas topológicas* obtidas neste capítulo são reportados na Tabela 2.1. Recordando que  $u$  é a solução para (2.1.3) e  $g$  é a solução para (2.3.29), ambas definidas no domínio não perturbado  $\Omega$ .

Tabela 2.1: Derivadas Topológicas da energia potencial total associada à equação de Poisson em duas dimensões, levando em conta condições de contorno homogênea de Neumann, Dirichlet ou Robin na fronteira do furo.

condição de contorno sobre $\partial B_\varepsilon$	$f(\varepsilon)$	$\mathcal{T}(\hat{x})$
Neumann	$\pi\varepsilon^2$	$-\ \nabla u(\hat{x})\ ^2 + bu(\hat{x})$
Dirichlet	$-\frac{\pi}{\log \varepsilon + 2\pi g(\hat{x})}$	$u(\hat{x})^2$
Robin	$\pi\varepsilon$	$u(\hat{x})^2$

## 2.7 Exercícios

1. A partir de (2.1.4) obtenha (2.1.5) e (2.1.7).
2. Usando separação de variáveis encontre as soluções explícitas para os problemas de valor de contorno (2.3.21) e (2.3.33).
3. Considere o problema definido em um anel de raio interno  $\varepsilon$  e raio externo unitário apresentado na Seção 2.5. Tendo em conta o seguinte funcional de forma

$$\psi(\chi_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial B_\varepsilon} u_\varepsilon^2,$$

onde  $u_\varepsilon$  é solução para:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Encontre } u_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \Delta u_\varepsilon = 0 & \text{em } B_1 \setminus \overline{B_\varepsilon}, \\ u_\varepsilon = a + \cos \theta & \text{sobre } \partial B_1, \\ u_\varepsilon + \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \end{array} \right.$$

Desenvolva  $\psi(\chi_\varepsilon)$  em potências de  $\varepsilon$  ao redor da origem para obter

$$\psi(\chi_\varepsilon) = \frac{\pi}{2} + \pi\varepsilon a^2 + o(\varepsilon^2),$$

e compare com a expansão assintótica topológica (2.6.105).





## Capítulo 3

# Perturbação Configuracional

Neste capítulo será calculada a derivada topológica da energia potencial total associada ao problema de elasticidade linear bidimensional em estado plano de tensões e deformações, considerando como perturbação topológica a nucleação de uma pequena inclusão, representada por  $B_\varepsilon \subset \Omega$ . Esse problema pode ser visto em maiores detalhes no livro de Novotny & Sokolowski, 2013 [84]. No caso, o domínio perturbado é obtido quando um furo circular  $B_\varepsilon(\hat{x})$  é introduzido no interior de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , onde  $\overline{B_\varepsilon(\hat{x})} \Subset \Omega$  denota uma bola de raio  $\varepsilon$  e centro em  $\hat{x} \in \Omega$ . Em seguida, o furo produzido por  $B_\varepsilon(\hat{x})$  é preenchido por uma inclusão com propriedade material diferente do meio ocupado pelo domínio não perturbado  $\Omega$ , como mostrado na fig. 3.1. As propriedades materiais são caracterizadas por uma função constante por partes  $\gamma_\varepsilon$  definida como

$$\gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon} \\ \gamma & \text{se } x \in B_\varepsilon \end{cases}, \quad (3.0.1)$$

onde  $0 < \gamma < \infty$  é o *contraste* nas propriedades materiais.

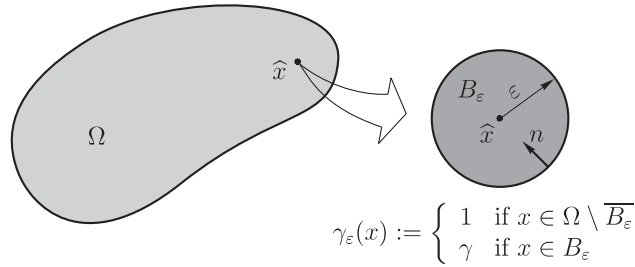


Figura 3.1: domínio topologicamente perturbado pela nucleação de uma pequena inclusão circular.

### 3.1 Formulação do Problema

O funcional de forma associado ao domínio não perturbado aqui considerado é definido como

$$\psi(\chi) := \mathcal{J}_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \sigma(u) \cdot \nabla u^s - \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot u, \quad (3.1.2)$$

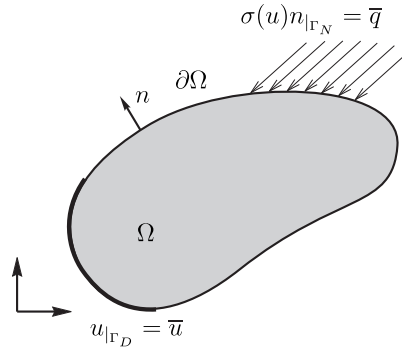


Figura 3.2: Problema de Navier definido no domínio não perturbado.

onde a função vetorial  $u$  é a solução para o problema variacional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u \in \mathcal{U}, \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \nabla \eta^s = \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{V}, \\ \text{com } \sigma(u) = \mathbb{C} \nabla u^s. \end{array} \right. \quad (3.1.3)$$

Na equação acima,  $\mathbb{C}$  é o tensor constitutivo dado por

$$\mathbb{C} = 2\mu \mathbb{I} + \lambda \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \quad (3.1.4)$$

em que  $\mathbb{I}$  e  $\mathbb{I}$  são os tensores identidade de segunda e quarta ordens, respectivamente,  $\mu$  e  $\lambda$  são os coeficientes de Lamé, ambos considerados constantes em todo o domínio. Em particular, no caso do estado plano de tensões tem-se

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad (3.1.5)$$

enquanto que no caso do estado plano de deformações

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (3.1.6)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade de Young e  $\nu$  o coeficiente de Poisson. O conjunto  $\mathcal{U}$  e o espaço  $\mathcal{V}$  são respectivamente definidos como

$$\mathcal{U} := \{\varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) : \varphi|_{\Gamma_D} = \bar{u}\}, \quad (3.1.7)$$

$$\mathcal{V} := \{\varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}. \quad (3.1.8)$$

Ademais,  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$  com  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ , onde  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$  são fronteiras de Dirichlet e Neumann, respectivamente. Assim  $\bar{u}$  é um dado de Dirichlet sobre  $\Gamma_D$  e  $\bar{q}$  é um dado de Neumann sobre  $\Gamma_N$ , ambos assumidos como sendo suficientemente regulares. Veja detalhes na fig. 3.2. O sistema forte associado ao problema variacional (3.1.3) é enunciado como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u, \text{ tal que} \\ \text{div} \sigma(u) = 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \sigma(u) = \mathbb{C} \nabla u^s \\ u = \bar{u} \quad \text{sobre } \Gamma_D, \\ \sigma(u)n = \bar{q} \quad \text{sobre } \Gamma_N. \end{array} \right. \quad (3.1.9)$$

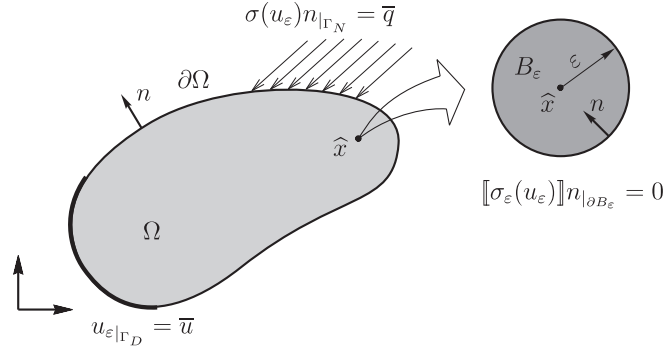


Figura 3.3: Problema de Navier definido no domínio perturbado.

Desde que o módulo de Young  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$  são constantes, o problema de valor de contorno acima se reduz ao bem conhecido sistema de Navier, a saber

$$-\mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div}u) = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (3.1.10)$$

Agora, tem-se o mesmo problema no domínio perturbado, em que o funcional de forma pode ser escrito como

$$\psi(\chi_\varepsilon) := \mathcal{J}_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon^s - \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot u_\varepsilon, \quad (3.1.11)$$

onde a função vetorial  $u_\varepsilon$  resolve o problema variacional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla \eta^s = \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_\varepsilon, \\ \text{com } \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) = \gamma_\varepsilon \mathbb{C} \nabla u_\varepsilon^s, \end{array} \right. \quad (3.1.12)$$

sendo  $\gamma_\varepsilon$  dado por (3.0.1). O conjunto  $\mathcal{U}_\varepsilon$  e o espaço  $\mathcal{V}_\varepsilon$  são definidos como

$$\mathcal{U}_\varepsilon := \{\varphi \in \mathcal{U} : [[\varphi]] = 0 \text{ sobre } \partial B_\varepsilon\}, \quad (3.1.13)$$

$$\mathcal{V}_\varepsilon := \{\varphi \in \mathcal{V} : [[\varphi]] = 0 \text{ sobre } \partial B_\varepsilon\}, \quad (3.1.14)$$

onde o operador  $[[\varphi]]$  é usado para denotar o salto da função  $\varphi$  na fronteira da inclusão  $\partial B_\varepsilon$ , a saber  $[[\varphi]] := \varphi|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} - \varphi|_{B_\varepsilon}$  sobre  $\partial B_\varepsilon$ . Veja detalhes na fig. 3.3. O sistema forte associado ao problema variacional (3.1.12) pode ser escrito como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \operatorname{div} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) = \gamma_\varepsilon \mathbb{C} \nabla u_\varepsilon^s \\ u_\varepsilon = \bar{u} \quad \text{sobre } \Gamma_D, \\ \sigma(u_\varepsilon)n = \bar{q} \quad \text{sobre } \Gamma_N, \\ \left. \begin{array}{l} [[u_\varepsilon]] = 0 \\ [[\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon)]n] = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (3.1.15)$$

A condição de transmissão no contorno da inclusão  $\partial B_\varepsilon$  resulta da formulação variacional (3.1.12).

**Lema 3.1.** *Sejam  $u$  e  $u_\varepsilon$  soluções dos problemas original e perturbado dados respectivamente por (3.1.3) e (3.1.12). Então tem-se que a seguinte estimativa é válida*

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)} \leq C\varepsilon, \quad (3.1.16)$$

onde  $C$  é uma constante independente do parâmetro de controle  $\varepsilon$ .

*Demonstração.* Da definição do contraste  $\gamma_\varepsilon$  dada por (3.0.1), tem-se que a equação (3.1.3) pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} \sigma(u) \cdot \nabla \eta^s + \int_{B_\varepsilon} \sigma(u) \cdot \nabla \eta^s \pm \int_{B_\varepsilon} \gamma \sigma(u) \cdot \nabla \eta^s = \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot \eta, \quad (3.1.17)$$

ou ainda

$$u \in \mathcal{U} : \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u) \cdot \nabla \eta^s + (1 - \gamma) \int_{B_\varepsilon} \sigma(u) \cdot \nabla \eta^s = \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{V}. \quad (3.1.18)$$

Tomando  $\eta = u_\varepsilon - u$  como função teste na equação acima e em (3.1.12), obtém-se respectivamente

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u) \cdot \nabla (u_\varepsilon - u)^s &= \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot (u_\varepsilon - u) \\ &\quad - (1 - \gamma) \int_{B_\varepsilon} \sigma(u) \cdot \nabla (u_\varepsilon - u)^s, \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla (u_\varepsilon - u)^s = \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot (u_\varepsilon - u). \quad (3.1.20)$$

Subtraindo a primeira equação da segunda tem-se a seguinte igualdade

$$\int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla (u_\varepsilon - u)^s = (1 - \gamma) \int_{B_\varepsilon} \sigma(u) \cdot \nabla (u_\varepsilon - u)^s. \quad (3.1.21)$$

A partir da *desigualdade de Cauchy-Schwarz* obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla (u_\varepsilon - u)^s &\leq C_1 \|\sigma(u)\|_{L^2(B_\varepsilon; \mathbb{R}^2)} \|\nabla (u_\varepsilon - u)^s\|_{L^2(B_\varepsilon; \mathbb{R}^2)} \\ &\leq C_2 \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)}, \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

onde é usada a *regularidade elíptica* interior da função  $u$ . Finalmente, a partir da *coercividade* da forma bilinear no lado esquerdo da inequação anterior, a saber,

$$c \|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)}^2 \leq \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla (u_\varepsilon - u)^s, \quad (3.1.23)$$

obtém-se

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)}^2 \leq C\varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)}, \quad (3.1.24)$$

o que conduz ao resultado, com  $C = C_2/c$ .  $\square$

## 3.2 Cálculo da Variação da Energia

A partir de um simples algebrismo é possível obter a variação da energia potencial total em termos de uma integral concentrada na bola  $B_\varepsilon$ . De fato, tomando-se  $\eta = u_\varepsilon - u$  como função teste em (3.1.3), tem-se a seguinte igualdade

$$\int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \nabla (u_\varepsilon - u)^s = \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot (u_\varepsilon - u), \quad (3.2.25)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \nabla u^s = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \nabla u_{\varepsilon}^s - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot (u_{\varepsilon} - u). \quad (3.2.26)$$

Sendo assim, a energia potencial total  $\mathcal{J}_{\Omega}(u)$  resulta em

$$\mathcal{J}_{\Omega}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla u^s - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot (u_{\varepsilon} + u), \quad (3.2.27)$$

onde foi utilizada a simetria da forma bilinear. Do mesmo modo, tomando  $\eta = u_{\varepsilon} - u$  como função teste em (3.1.12), obtém-se a igualdade

$$\int_{\Omega} \sigma_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla (u_{\varepsilon} - u)^s = \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot (u_{\varepsilon} - u), \quad (3.2.28)$$

que pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla u_{\varepsilon}^s = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla u^s + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot (u_{\varepsilon} - u). \quad (3.2.29)$$

Logo, a energia potencial total  $\mathcal{J}_{\mathcal{X}_{\varepsilon}}(u_{\varepsilon})$  resulta em

$$\mathcal{J}_{\mathcal{X}_{\varepsilon}}(u_{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla u^s - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot (u_{\varepsilon} + u). \quad (3.2.30)$$

Assim, a variação da energia potencial total é dada por

$$\mathcal{J}_{\mathcal{X}_{\varepsilon}}(u_{\varepsilon}) - \mathcal{J}_{\Omega}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla u^s - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla u^s. \quad (3.2.31)$$

Da definição do contraste  $\gamma_{\varepsilon}$  em (3.0.1) observa-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mathcal{X}_{\varepsilon}}(u_{\varepsilon}) - \mathcal{J}_{\Omega}(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \overline{B_{\varepsilon}}} \sigma(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla u^s + \frac{1}{2} \int_{B_{\varepsilon}} \gamma \sigma(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla u^s \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \overline{B_{\varepsilon}}} \sigma(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla u^s - \frac{1}{2} \int_{B_{\varepsilon}} \sigma(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla u^s. \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

Deste modo, tem-se que a variação da energia potencial total pode, de fato, ser escrita na forma de uma integral concentrada na bola  $B_{\varepsilon}$ , ou seja

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mathcal{X}_{\varepsilon}}(u_{\varepsilon}) - \mathcal{J}_{\Omega}(u) &= -\frac{1-\gamma}{2} \int_{B_{\varepsilon}} \sigma(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla u^s \\ &= -\frac{1-\gamma}{2\gamma} \int_{B_{\varepsilon}} \sigma_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla u^s. \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

### 3.3 Análise Assintótica da Solução

A variação da energia potencial total é dada exclusivamente em termos de uma integral concentrada na bola  $B_{\varepsilon}$ . Dessa forma, para obter a expansão assintótica topológica dada por (1.1.2), basta conhecer o comportamento assintótico da solução  $u_{\varepsilon}$  em relação a  $\varepsilon$  na vizinhança da bola  $B_{\varepsilon}$ . Em particular, conhecendo-se explicitamente esse comportamento, pode-se identificar a função  $f(\varepsilon)$ , o que permite

calcular o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  em (1.1.4) para obter a fórmula final para a derivada topológica  $\mathcal{T}$  do funcional de forma  $\psi$ . Com efeito, é necessário realizar a análise assintótica de  $u_\varepsilon$  com relação a  $\varepsilon$ . Nesta seção obtém-se a expansão assintótica da solução  $u_\varepsilon$  associada à condição de transmissão na inclusão. Assim, iniciando-se pela proposição de um *ansatz* para  $u_\varepsilon$  da forma [55]

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + w_\varepsilon(x) + \tilde{u}_\varepsilon(x). \quad (3.3.34)$$

Aplicando o operador  $\sigma_\varepsilon$  tem-se

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon(x)) &= \sigma_\varepsilon(u(x)) + \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon(x)) + \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon(x)) \\ &= \sigma_\varepsilon(u(\hat{x})) + \gamma_\varepsilon \nabla \sigma(u(y))(x - \hat{x}) + \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon(x)) + \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon(x)), \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

onde  $y$  é um ponto intermediário entre  $x$  e  $\hat{x}$ . No contorno da inclusão  $\partial B_\varepsilon$  tem-se

$$\llbracket \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \rrbracket n = 0 \quad \Rightarrow \quad (\sigma(u_\varepsilon)|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} - \gamma \sigma(u_\varepsilon)|_{B_\varepsilon})n = 0, \quad (3.3.36)$$

com  $\sigma_\varepsilon(\varphi) = \gamma_\varepsilon \mathbb{C} \nabla \varphi^s$  e  $\sigma(\varphi) = \mathbb{C} \nabla \varphi^s$ . A expansão acima, avaliada sobre  $\partial B_\varepsilon$ , conduz a

$$\begin{aligned} (1 - \gamma)\sigma(u(\hat{x}))n - \varepsilon(1 - \gamma)(\nabla \sigma(u(y))n)n + \\ \llbracket \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon(x)) \rrbracket n + \llbracket \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon(x)) \rrbracket n = 0. \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

Assim, pode-se escolher  $\sigma_\varepsilon(w_\varepsilon)$  da seguinte forma

$$\llbracket \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon(x)) \rrbracket n = -(1 - \gamma)\sigma(u(\hat{x}))n \quad \text{em} \quad \partial B_\varepsilon. \quad (3.3.38)$$

Agora, o seguinte *problema exterior* é formalmente obtido com  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon), \text{ tal que} \\ \text{div } \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2, \\ \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{no} \quad \infty, \\ \llbracket \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \rrbracket n = \hat{u} \quad \text{sobre} \quad \partial B_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (3.3.39)$$

onde  $\hat{u} = -(1 - \gamma)\sigma(u(\hat{x}))n$ . O problema de valor de contorno acima admite uma *solução explícita* (veja, por exemplo, o livro de Little 1973 [62]), o qual pode ser escrito no sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$  centrado no ponto  $\hat{x}$  (veja fig. 3.4) como:

- Para  $r \geq \varepsilon$  (fora da inclusão)

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon^{rr}(w_\varepsilon(r, \theta)) &= -\varphi_1 \left( \frac{1-\gamma}{1+\gamma\alpha} \frac{\varepsilon^2}{r^2} \right) \\ &\quad - \varphi_2 \left( 4 \frac{1-\gamma}{1+\gamma\beta} \frac{\varepsilon^2}{r^2} + 3 \frac{1-\gamma}{1+\gamma\beta} \frac{\varepsilon^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (3.3.40)$$

$$\sigma_\varepsilon^{\theta\theta}(w_\varepsilon(r, \theta)) = \varphi_1 \left( \frac{1-\gamma}{1+\gamma\alpha} \frac{\varepsilon^2}{r^2} \right) - \varphi_2 \left( 3 \frac{1-\gamma}{1+\gamma\beta} \frac{\varepsilon^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \quad (3.3.41)$$

$$\sigma_\varepsilon^{r\theta}(w_\varepsilon(r, \theta)) = -\varphi_2 \left( 2 \frac{1-\gamma}{1+\gamma\beta} \frac{\varepsilon^2}{r^2} - 3 \frac{1-\gamma}{1+\gamma\beta} \frac{\varepsilon^4}{r^4} \right) \sin 2\theta. \quad (3.3.42)$$

- Para  $0 < r < \varepsilon$  (no interior da inclusão)

$$\sigma_\varepsilon^{rr}(w_\varepsilon(r, \theta)) = \varphi_1 \left( \gamma\alpha \frac{1-\gamma}{1+\gamma\alpha} \right) + \varphi_2 \left( \gamma\beta \frac{1-\gamma}{1+\gamma\beta} \right) \cos 2\theta, \quad (3.3.43)$$

$$\sigma_\varepsilon^{\theta\theta}(w_\varepsilon(r, \theta)) = \varphi_1 \left( \gamma\alpha \frac{1-\gamma}{1+\gamma\alpha} \right) - \varphi_2 \left( \gamma\beta \frac{1-\gamma}{1+\gamma\beta} \right) \cos 2\theta, \quad (3.3.44)$$

$$\sigma_\varepsilon^{r\theta}(w_\varepsilon(r, \theta)) = -\varphi_2 \left( \gamma\beta \frac{1-\gamma}{1+\gamma\beta} \right) \sin 2\theta. \quad (3.3.45)$$

Alguns termos nas fórmulas acima requerem explicação mais detalhada. Os coeficientes  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são dados por

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1(u(\hat{x})) + \sigma_2(u(\hat{x}))), \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1(u(\hat{x})) - \sigma_2(u(\hat{x}))), \quad (3.3.46)$$

em que  $\sigma_1(u(\hat{x}))$  e  $\sigma_2(u(\hat{x}))$  são os autovalores do tensor  $\sigma(u(\hat{x}))$ , que podem ser expressos como

$$\sigma_{1,2}(u(\hat{x})) = \frac{1}{2} \left( \text{tr}\sigma(u(\hat{x})) \pm \sqrt{2\sigma^D(u(\hat{x})) \cdot \sigma^D(u(\hat{x}))} \right), \quad (3.3.47)$$

com  $\sigma^D(u(\hat{x}))$  usado para denotar a parte desviadora do tensor tensão  $\sigma(u(\hat{x}))$ , ou seja

$$\sigma^D(u(\hat{x})) = \sigma(u(\hat{x})) - \frac{1}{2}\text{tr}\sigma(u(\hat{x}))\mathbf{I}. \quad (3.3.48)$$

Ademais, as constantes  $\alpha$  e  $\beta$  são dadas por

$$\alpha = \frac{\mu + \lambda}{\mu} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{3\mu + \lambda}{\mu + \lambda}. \quad (3.3.49)$$

Finalmente,  $\sigma_\varepsilon^{rr}(u_\varepsilon)$ ,  $\sigma_\varepsilon^{\theta\theta}(u_\varepsilon)$  e  $\sigma_\varepsilon^{r\theta}(u_\varepsilon)$  são componentes do tensor  $\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon)$  no sistema de coordenadas polares, ou seja  $\sigma_\varepsilon^{rr}(u_\varepsilon) = e^r \cdot \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon)e^r$ ,  $\sigma_\varepsilon^{\theta\theta}(u_\varepsilon) = e^\theta \cdot \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon)e^\theta$  e  $\sigma_\varepsilon^{r\theta}(u_\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^{\theta r}(u_\varepsilon) = e^r \cdot \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon)e^\theta$ , com  $e^r$  e  $e^\theta$  usados para denotar a base canônica associada ao sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$ , tal que,  $\|e^r\| = \|e^\theta\| = 1$  e  $e^r \cdot e^\theta = 0$ . Veja fig. 3.4. Ver também Apêndice B.

**Observação 3.1** (Teorema de Eshelby). *Segundo (3.3.43), (3.3.44) e (3.3.45), observa-se que o campo de tensão associado à solução do problema exterior (3.3.39) é uniforme no interior da inclusão  $B_\varepsilon(\hat{x})$ . Isto significa que a tensão (ou deformação) atuando na inclusão imersa em todo o espaço bidimensional  $\mathbb{R}^2$  pode ser escrita de forma compacta como*

$$\sigma_\varepsilon(w_\varepsilon)|_{B_\varepsilon(\hat{x})} = \mathbb{T}_\gamma \sigma(u(\hat{x})), \quad (3.3.50)$$

onde  $\mathbb{T}_\gamma$  é um tensor uniforme (constante) de quarta ordem dado por

$$\mathbb{T}_\gamma = \frac{1}{2} \frac{\gamma(1-\gamma)}{1+\gamma\beta} \left( 2\beta\mathbb{I} + \frac{\alpha-\beta}{1+\gamma\alpha} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right). \quad (3.3.51)$$

Tal resultado, proveniente do famoso problema de Eshelby formulado em 1957 [23] e 1959 [24], representa um dos maiores avanços do século XX na teoria da mecânica do contínuo [50] e desempenha papel central na teoria da elasticidade no que tange à determinação das propriedades elásticas efetivas de materiais com múltiplas heterogeneidades. Para mais detalhes veja por exemplo o livro de Mura 1987 [71]. O problema de Eshelby, também referido como teorema de Eshelby, é relacionado com o tensor de Polarização na análise assintótica da energia de deformação com relação a perturbações configuracionais (nucleação de inclusões) no domínio [73]. De fato, o tensor  $\mathbb{T}_\gamma$  representa a contribuição de um termo para o tensor de Polarização proveniente da solução do problema exterior (3.3.39). Na próxima seção o teorema de Eshelby será aplicado na derivação do tensor de polarização e, conseqüentemente, no cálculo da derivada topológica. Acerca das aplicações do teorema de Eshelby para problemas inversos em elasticidade, veja [59, 74].

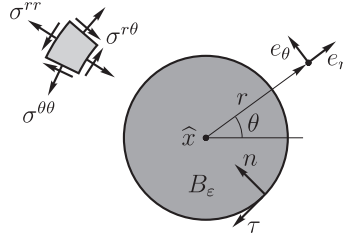


Figura 3.4: Sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$  centrado no ponto  $\hat{x} \in \Omega$ .

Agora pode-se construir  $\sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)$  de tal forma que ficam compensadas as discrepâncias introduzidas por termos de ordem superior em  $\varepsilon$ , bem como pela camada limite  $w_\varepsilon$  na fronteira exterior  $\partial\Omega$ . Isto significa que o *resíduo*  $\tilde{u}_\varepsilon$  deve ser solução para o seguinte problema de valor de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } \tilde{u}_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \text{div} \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) = 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) = \gamma_\varepsilon \mathbb{C} \nabla \tilde{u}_\varepsilon^s \\ \tilde{u}_\varepsilon = -w_\varepsilon \quad \text{sobre } \Gamma_D, \\ \sigma(\tilde{u}_\varepsilon)n = -\sigma(w_\varepsilon)n \quad \text{sobre } \Gamma_N, \\ \llbracket \tilde{u}_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \rrbracket n = \varepsilon h \end{array} \right\} \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \quad (3.3.52)$$

com  $h = (1 - \gamma)(\nabla \sigma(u(y))n)n$ . Considerando o problema acima, pode-se demonstrar que o resíduo possui uma estimativa na forma  $\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)} = O(\varepsilon^2)$ , como descrito em [55, 69], por exemplo. De fato, antes de continuar, enuncia-se o seguinte importante resultado:

**Lema 3.2.** *Seja  $\tilde{u}_\varepsilon$  solução de (3.3.52) ou equivalentemente solução do seguinte problema variacional:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } \tilde{u}_\varepsilon \in \tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \int_\Omega \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \cdot \nabla \eta^s = \varepsilon^2 \int_{\Gamma_N} \sigma(g)n \cdot \eta + \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} h \cdot \eta \quad \forall \eta \in \tilde{\mathcal{V}}_\varepsilon, \\ \text{com } \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) = \gamma_\varepsilon \mathbb{C} \nabla \tilde{u}_\varepsilon^s, \end{array} \right. \quad (3.3.53)$$

onde o conjunto  $\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon$  e o espaço  $\tilde{\mathcal{V}}_\varepsilon$  são definidos como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon &:= \{ \varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) : \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \text{ sobre } \partial B_\varepsilon, \varphi|_{\Gamma_D} = \varepsilon^2 g \}, \\ \tilde{\mathcal{V}}_\varepsilon &:= \{ \varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) : \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \text{ sobre } \partial B_\varepsilon, \varphi|_{\Gamma_D} = 0 \}, \end{aligned}$$

com as funções  $g = -\varepsilon^{-2} w_\varepsilon|_{\partial\Omega}$  e  $h = (1 - \gamma)(\nabla \sigma(u(y))n)n$  independentes do parâmetro pequeno  $\varepsilon$ . Então tem-se uma estimativa na forma  $\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)} = O(\varepsilon^2)$  para o resíduo.

*Demonstração.* Tomando  $\eta = \tilde{u}_\varepsilon - \varphi_\varepsilon$  em (3.3.53), onde  $\varphi_\varepsilon$  é uma translação (*lifting*) do dado de Dirichlet  $\varepsilon^2 g$  sobre  $\Gamma_D$ , tem-se

$$\int_\Omega \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \cdot \nabla \tilde{u}_\varepsilon^s = \varepsilon^2 \int_{\Gamma_N} \sigma(g)n \cdot \tilde{u}_\varepsilon + \varepsilon^2 \int_{\Gamma_D} g \cdot \sigma(\tilde{u}_\varepsilon)n + \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} h \cdot \tilde{u}_\varepsilon. \quad (3.3.54)$$



A partir da *desigualdade de Cauchy-Schwarz* obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{\varepsilon}(\tilde{u}_{\varepsilon}) \cdot \nabla \tilde{u}_{\varepsilon}^s &\leq \varepsilon^2 \|\sigma(g)n\|_{H^{-1/2}(\Gamma_N; \mathbb{R}^2)} \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^{1/2}(\Gamma_N; \mathbb{R}^2)} \\ &+ \varepsilon^2 \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_D; \mathbb{R}^2)} \|\sigma(\tilde{u}_{\varepsilon})n\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D; \mathbb{R}^2)} \\ &+ \varepsilon \|h\|_{H^{-1/2}(\partial B_{\varepsilon}; \mathbb{R}^2)} \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^{1/2}(\partial B_{\varepsilon}; \mathbb{R}^2)}. \end{aligned} \quad (3.3.55)$$

Levando em conta o *teorema do traço*, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{\varepsilon}(\tilde{u}_{\varepsilon}) \cdot \nabla \tilde{u}_{\varepsilon}^s &\leq (\varepsilon^2 C_1 + \varepsilon \|h\|_{L^2(B_{\varepsilon}; \mathbb{R}^2)}) \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)} \\ &\leq \varepsilon^2 C_2 \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)}, \end{aligned} \quad (3.3.56)$$

onde utilizou-se a *regularidade elíptica* interior da função  $u$ . Finalmente, da *coercividade* da forma bilinear no lado esquerdo de (3.3.53), ou seja,

$$c \|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)}^2 \leq \int_{\Omega} \sigma_{\varepsilon}(\tilde{u}_{\varepsilon}) \cdot \nabla \tilde{u}_{\varepsilon}^s, \quad (3.3.57)$$

obtém-se

$$\|\tilde{u}_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)} \leq C \varepsilon^2, \quad (3.3.58)$$

o que conduz ao resultado com a constante  $C = C_2/c$  independente de  $\varepsilon$ .  $\square$

### 3.4 Cálculo da Derivada Topológica

Agora, é possível avaliar a integral na fórmula (3.2.33) para coletar os termos em potências de  $\varepsilon$  e identificar a função  $f(\varepsilon)$ . Com este resultado é possível realizar a passagem ao limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  e obter a derivada topológica. De fato, a integral em (3.2.33) pode ser avaliada do mesmo modo como mostrado no Capítulo 2 usando a expansão (3.3.34) juntamente com a solução explícita para  $\sigma_{\varepsilon}(u_{\varepsilon})$  dada por (3.3.43), (3.3.44) e (3.3.45). Em particular, substituindo o ansatz (3.3.34) em (3.2.33), tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\chi_{\varepsilon}}(u_{\varepsilon}) - \mathcal{J}_{\Omega}(u) &= -\frac{1-\gamma}{2} \int_{B_{\varepsilon}} \sigma(u) \cdot \nabla u^s \\ &- \frac{1-\gamma}{2\gamma} \int_{B_{\varepsilon}} \sigma_{\varepsilon}(w_{\varepsilon}) \cdot \nabla u^s \\ &- \frac{1-\gamma}{2\gamma} \int_{B_{\varepsilon}} \sigma_{\varepsilon}(\tilde{u}_{\varepsilon}) \cdot \nabla u^s, \end{aligned} \quad (3.4.59)$$

onde foi empregada a definição do contraste dada pela eq. (3.0.1) no primeiro termo da equação acima. Assim, este termo pode ser trivialmente expandido em potências de  $\varepsilon$  da seguinte forma (ver Exercício 1, Capítulo 1)

$$\begin{aligned} \int_{B_{\varepsilon}} \sigma(u) \cdot \nabla u^s &= \int_{B_{\varepsilon}} \sigma(u) \cdot \nabla u^s \pm \int_{B_{\varepsilon}} \sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x})^s \\ &= \int_{B_{\varepsilon}} \sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x})^s + \int_{B_{\varepsilon}} (\sigma(u) \cdot \nabla u^s - \sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x})^s) \\ &= \pi \varepsilon^2 \sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x})^s + \mathcal{E}_1(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.4.60)$$

onde o resíduo  $\mathcal{E}_1(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$  é dado por

$$\mathcal{E}_1(\varepsilon) = \int_{B_{\varepsilon}} (\sigma(u) \cdot \nabla u^s - \sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x})^s). \quad (3.4.61)$$

O próximo termo pode ser calculado explicitamente utilizando as fórmulas (3.3.43), (3.3.44) e (3.3.45) ou ainda o teorema de Eshelby apresentado na Observação 3.1. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \cdot \nabla u^s &= \int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \cdot \nabla u^s \pm \int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \cdot \nabla u(\hat{x})^s \\
&= \int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \cdot \nabla u(\hat{x})^s + \int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \cdot (\nabla u^s - \nabla u(\hat{x})^s) \\
&= \pi\varepsilon^2 \mathbb{T}_\gamma \sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x})^s + \mathcal{E}_2(\varepsilon), \tag{3.4.62}
\end{aligned}$$

onde o tensor  $\mathbb{T}_\gamma$  é dado por (3.3.51) e o resíduo  $\mathcal{E}_2(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$  é definido como

$$\mathcal{E}_2(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \cdot (\nabla u^s - \nabla u(\hat{x})^s). \tag{3.4.63}$$

Finalmente, pode-se demonstrar que o último termo não contribui para a derivada topológica, produzindo, no entanto, um terceiro resíduo  $\mathcal{E}_3(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ , dado por

$$\mathcal{E}_3(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \cdot \nabla u^s. \tag{3.4.64}$$

Sendo assim, substituindo esses resultados em (3.4.59), obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) - \mathcal{J}_\Omega(u) &= -\pi\varepsilon^2 \frac{1-\gamma}{2\gamma} (\mathbb{T}_\gamma + \gamma\mathbb{I}) \sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x})^s + o(\varepsilon^2) \\
&= -\pi\varepsilon^2 \mathbb{P}_\gamma \sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x})^s + o(\varepsilon^2), \tag{3.4.65}
\end{aligned}$$

em que o *tensor de polarização*  $\mathbb{P}_\gamma$  é dado pelo seguinte tensor isotrópico de quarta ordem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\gamma &= \frac{1-\gamma}{2\gamma} (\mathbb{T}_\gamma + \gamma\mathbb{I}) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1-\gamma}{1+\gamma\beta} \left( (1+\beta)\mathbb{I} + \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \frac{1-\gamma}{1+\gamma\alpha} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \right), \tag{3.4.66}
\end{aligned}$$

com os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  dados por (3.3.49). Agora, objetivando extrair o termo principal da expansão acima, toma-se

$$f(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2, \tag{3.4.67}$$

que conduz à fórmula final para a *derivada topológica*, ou seja [5, 34]

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = -\mathbb{P}_\gamma \sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla u^s(\hat{x}). \tag{3.4.68}$$

Finalmente, a *expansão assintótica topológica* associada à energia potencial total toma a forma

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) - \pi\varepsilon^2 \mathbb{P}_\gamma \sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla u^s(\hat{x}) + o(\varepsilon^2). \tag{3.4.69}$$

**Observação 3.2.** *Note que o tensor de polarização obtido é isotrópico porque trata-se de inclusões circulares. Para o tensor de polarização associado a inclusões de forma arbitrária o leitor pode consultar [3], por exemplo.*

**Observação 3.3.** *Formalmente pode-se tomar os limites  $\gamma \rightarrow 0$  e  $\gamma \rightarrow \infty$ . Para  $\gamma \rightarrow 0$ , a inclusão torna-se um vazio e a condição de transmissão na interface da inclusão degenera para a condição de Neumann homogênea na fronteira da bola  $B_\varepsilon(\hat{x})$ . De fato, neste caso o tensor de polarização é dado por*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0 &= \frac{1}{2}(1 + \beta)\mathbb{I} + \frac{1}{4}(\alpha - \beta)\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \\ &= \frac{2\mu + \lambda}{\mu + \lambda} \left( \mathbb{I} - \frac{\mu - \lambda}{4\mu} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right). \end{aligned} \quad (3.4.70)$$

Ademais, para  $\gamma \rightarrow \infty$ , a inclusão elástica resulta rígida e o tensor de polarização é dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\infty &= -\frac{1 + \beta}{2\beta}\mathbb{I} + \frac{\alpha - \beta}{4\alpha\beta}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \\ &= -\frac{2\mu + \lambda}{3\mu + \lambda} \left( \mathbb{I} + \frac{\mu - \lambda}{4(\mu + \lambda)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right). \end{aligned} \quad (3.4.71)$$

Agora, basta demonstrar que os resíduos  $\mathcal{E}_i(\varepsilon)$ , com  $i = 1, 2, 3$ , possuem ordem  $o(\varepsilon^2)$ . Considerando o primeiro resíduo dado por (3.4.61), tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} (g(x) - g(\hat{x})) &\leq \|g(x) - g(\hat{x})\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|1\|_{L^2(B_\varepsilon)} \\ &\leq C_1 \varepsilon \|g(x) - g(\hat{x})\|_{L^2(B_\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (3.4.72)$$

onde utilizou-se a *desigualdade de Cauchy-Schwarz* e a mudança de variável  $g(x) = \sigma(u(x)) \cdot \nabla u^s(x)$  e  $g(\hat{x}) = \sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x})^s$ . No entanto, devido à *regularidade elíptica* interior da solução  $u$ , tem-se  $|g(x) - g(\hat{x})| \leq C\|x - \hat{x}\|$ ,  $\forall x \in B_\varepsilon(\hat{x})$ , onde  $C$  é a constante de Lipschitz. Então

$$\int_{B_\varepsilon} (g(x) - g(\hat{x})) \leq C_2 \varepsilon \|x - \hat{x}\|_{L^2(B_\varepsilon; \mathbb{R}^2)}. \quad (3.4.73)$$

Além do mais, considerando o sistema polar de coordenadas  $(r, \theta)$ , tal como descrito na fig. 3.4, tem-se que  $\|x - \hat{x}\| = r$ , logo

$$\|x - \hat{x}\|_{L^2(B_\varepsilon; \mathbb{R}^2)} = \sqrt{\int_{B_\varepsilon} \|x - \hat{x}\|^2} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \left( \int_0^\varepsilon (r^2) r dr \right) d\theta} \leq C_3 \varepsilon^2. \quad (3.4.74)$$

Sendo assim, o primeiro resíduo é tal que

$$\mathcal{E}_1(\varepsilon) \leq C\varepsilon^3, \quad (3.4.75)$$

com a constante  $C$  independente de  $\varepsilon$ . O próximo resíduo, definido através de (3.4.63), pode ser estimado utilizando o teorema de Eshelby descrito na Observação 3.1, ou seja

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \cdot (\nabla u^s - \nabla u(\hat{x})^s) &\leq \|\mathbb{T}_\gamma \sigma(u(\hat{x}))\|_{L^2(B_\varepsilon; \mathbb{R}^2)} \|\nabla u^s - \nabla u(\hat{x})^s\|_{L^2(B_\varepsilon; \mathbb{R}^2)} \\ &\leq C_1 \varepsilon \|x - \hat{x}\|_{L^2(B_\varepsilon; \mathbb{R}^2)} \leq C\varepsilon^3. \end{aligned} \quad (3.4.76)$$

Logo o segundo resíduo possui um comportamento assintótico em relação a  $\varepsilon$  dado por

$$\mathcal{E}_2(\varepsilon) \leq C\varepsilon^3, \quad (3.4.77)$$

onde a constante  $C$  é independente de  $\varepsilon$ . Cabe esclarecer que novamente empregou-se a *desigualdade de Cauchy-Schwarz* e a *regularidade elíptica* interior da solução  $u$ . Finalmente, o último resíduo dado pela eq. (3.4.64) pode ser estimado da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \cdot \nabla u^s &\leq \|\sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2(B_\varepsilon; \mathbb{R}^2)} \|\nabla u^s\|_{L^2(B_\varepsilon; \mathbb{R}^2)} \\ &\leq C_1 \varepsilon \|\sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)} \leq C_1 \varepsilon \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)}, \end{aligned} \quad (3.4.78)$$

em que utilizou-se mais uma vez a *desigualdade de Cauchy-Schwarz* e a *regularidade elíptica* interior da solução  $u$ . Logo, utilizando o resultado do Lemma 3.2, dado por  $\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)} = O(\varepsilon^2)$ , tem-se a seguinte estimativa para o terceiro resíduo

$$\mathcal{E}_3(\varepsilon) \leq C\varepsilon^3, \quad (3.4.79)$$

onde novamente  $C$  é uma constante independente de  $\varepsilon$ .

### 3.5 Experimento Numérico

O experimento numérico é iniciado com a descrição do modelo e cálculo da derivada topológica associada à complacência a ser minizada com uma restrição de volume, sendo finalmente apresentada a topologia ótima obtida. Resta claro a partir dos experimentos numéricos que a derivada topológica reflete uma distribuição ótima de material para o problema de otimização topológica. Assim, nas figuras 3.5, 3.6 e 3.8 são apresentadas a configuração inicial para a estrutura a ser otimizada, as curvas de nível da derivada topológica calculada em todo o domínio geométrico e, finalmente, a topologia ótima dada por uma estrutura que se assemelha a uma ponte em arco, que é bem conhecida na literatura. Mais precisamente, inicia-se propondo o seguinte funcional de forma

$$\Psi_\Omega(u) := -\mathcal{J}_\Omega(u) + \beta |\Omega|, \quad (3.5.80)$$

onde  $|\Omega|$  é a medida de Lebesgue de  $\Omega$  e  $\beta > 0$  é um multiplicador de Lagrange fixo. Isto significa que o funcional de forma a ser minimizado corresponde à energia de deformação elástica armazenada na estrutura com uma restrição de volume. A derivada topológica de  $\Psi_\Omega(u)$  é dada por

$$\mathcal{T} = \mathbb{P}_0 \sigma(u) \cdot \nabla u^s - \beta, \quad (3.5.81)$$

com  $\sigma(u) = \mathbb{C} \nabla u^s$ , onde foi usada a fórmula (3.4.68) com  $\gamma = 0$ , sendo que a derivada topológica do termo  $\beta |\Omega|$  é trivial. Ademais, o campo vetorial de deslocamento  $u$  é calculado resolvendo o problema (3.1.3) numericamente.

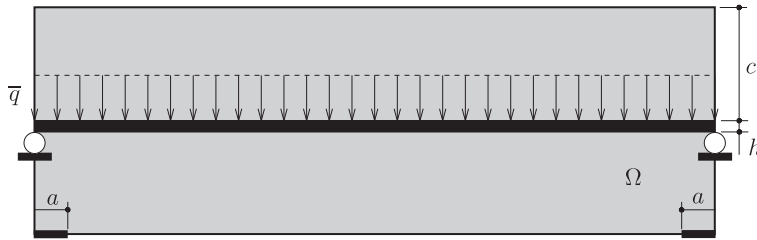


Figura 3.5: Configuração inicial  $\Omega$ .

No exemplo numérico mostrado na fig. 3.5, o domínio inicial é representado por um painel retangular de dimensões  $180 \times 60 \text{ m}^2$ , com módulo de Young  $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 1/3$ , fixado (engastado) na região  $a = 9\text{m}$  e submetido a uma carga de tráfego uniformemente distribuída  $\bar{q} = 250 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ . Esta carga é aplicada na faixa escura de altura  $h = 3\text{m}$ , que é colocada a uma distância  $c = 30\text{m}$  a partir do topo do retângulo. A faixa escura encontra-se simplesmente apoiada em suas extremidades e não será otimizada. O multiplicador de Lagrange é fixado como  $\beta = 10 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  e o contraste  $\gamma \rightarrow 0$ .

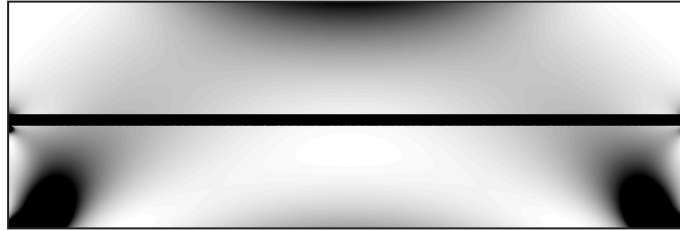


Figura 3.6: Derivada topológica calculada sobre a configuração inicial  $\Omega$ .

A derivada topológica do funcional de forma  $\Psi_{\Omega}(u)$  obtida na primeira iteração do procedimento numérico de otimização topológica é mostrada na fig. 3.6, onde os níveis de preto para branco significam do menor (negativo) para o maior (positivo) valor. Esta figura induz uma representação do domínio por funções *level-set* para a forma ótima, como proposto em [7]. No entanto, neste trabalho é adotado um esquema bastante simples que consiste basicamente na nucleação de pequenos furos de acordo com os valores da derivada topológica. Em particular, a topologia é identificada pela distribuição de material elástico, enquanto que as cavidades são mimetizadas por um material muito complacente. Além do mais, a derivada topológica é avaliada nos pontos nodais da malha de elementos finitos. Assim, remove-se os elementos que compartilham o nó onde a derivada topológica assume seus valores mais negativos, como mostrado no esquema da fig. 3.7. Este procedimento é repetido até que a derivada topológica se torne positiva em todo lugar. Para um algoritmo de otimização topológica mais elaborado, o leitor poderá verificar o artigo de Amstutz & André, 2006 [7].

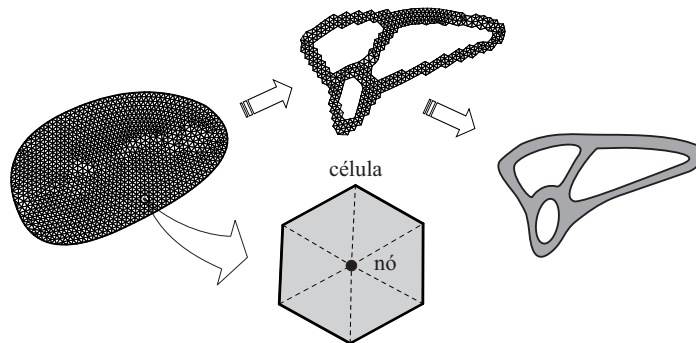


Figura 3.7: Esquema do procedimento de nucleação de furos numa malha de elementos finitos. Para maiores detalhes do procedimento numérico adotado, ver [81].

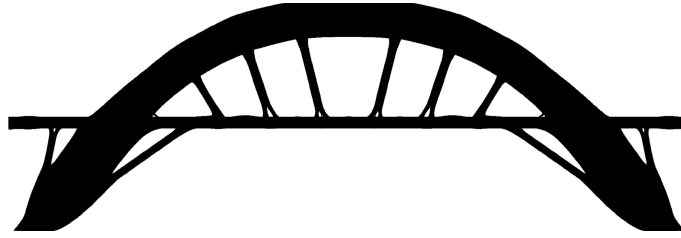


Figura 3.8: Solução ótima obtida [47].

O resultado final obtido na fig. 3.8 consiste numa ponte em arco, estrutura bem conhecida e aceitável do ponto de vista prático. Cabe esclarecer, no entanto, que em geral este resultado trata-se apenas de um mínimo local obtido numericamente a partir da minimização da complacência com restrição de volume. De fato, há falta de condições de otimalidade suficientes para tais problemas de otimização topológica.

### 3.6 Exercícios

1. A partir de (3.1.9) derive o sistema de Navier como apresentado na eq. (3.1.10).
2. A partir de (3.1.11) derive (3.1.12) e (3.1.15).
3. Usando separação de variáveis encontre a forma explícita da distribuição de tensões ao redor da inclusão, que é a solução do problema de valor de contorno (3.3.39). Dica: consulte o livro de Little 1973 [62] e procure pelas funções de Airy em coordenadas polares.
4. Considere a Observação 3.1 e derive uma forma fechada para o tensor isotrópico e uniforme de quarta ordem  $\mathbb{T}_\gamma = \alpha_1 \mathbb{I} + \alpha_2 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ , encontrando os coeficientes constantes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  explicitamente.





## Capítulo 4

# Relação entre Derivadas de Forma e Topológica

Este capítulo é dedicado a estabelecer a relação entre derivada de forma clássica e derivada topológica. Conforme mencionado, a derivada topológica é dada pelo limite singular da derivada de forma com relação ao parâmetro que governa a perturbação topológica do domínio. Sendo assim, a derivada topológica pode ser vista como uma generalização da ferramenta clássica da otimização de forma. Este resultado conduz a um simples e construtivo método para o cálculo da derivada topológica, amplamente discutido no livro de Novotny & Sokolowski, 2013 [84]. Para fixar as ideias aqui apresentadas é proposto um exemplo no contexto da teoria de controle ótimo (vide, a propósito [54, 56]), onde a derivada topológica é obtida para um funcional de forma muito utilizado no referido contexto.

### 4.1 Método de Cálculo de Derivada Topológica

Como motivação para o método de cálculo da derivada topológica aqui proposto é apresentado um exemplo simples associado à torção de barras prismáticas elásticas. Sendo assim, antes de enunciar o principal resultado deste trabalho, observe o seguinte caso:

**Exemplo 4.1.** *Considerando uma barra sob torção, a sua seção transversal é representada por um domínio aberto e limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , como mostrado na fig. 4.1. Seguindo as hipóteses simplificativas de Prandtl, a energia de dissipação complementar é dada por*

$$\psi(\chi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 - \int_{\Omega} bu, \quad (4.1.1)$$

onde o campo escalar  $u$  é solução do seguinte problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \text{Encontre } u, \text{ tal que} \\ -\Delta u = b & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1.2)$$

com a constante  $b$  usada para denotar uma torção rígida da secção transversal da barra. A derivada de forma de  $\psi(\chi)$  é dada por [94]

$$d\psi(\chi; \mathfrak{W}) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\partial_n u)^2 n \cdot \mathfrak{W}, \quad (4.1.3)$$

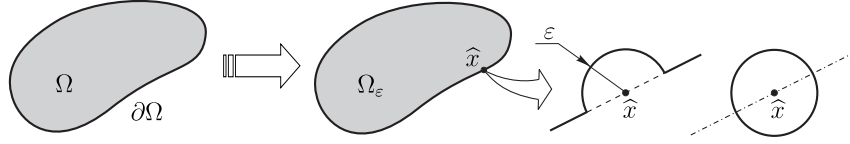


Figura 4.1: Seção transversal de uma barra sob torção: domínios original e topologicamente perturbado.

onde  $\mathfrak{V}$  é o campo de velocidade à mudança de forma [94]. A expansão assintótica topológica para o problema acima é conhecida [81] e dada por (veja resultados análogos apresentados no Capítulo 2)

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) + \pi\varepsilon^2 \|\nabla u(\hat{x})\|^2 + o(\varepsilon^2) \quad \forall \hat{x} \in \Omega, \quad (4.1.4)$$

em que a derivada topológica é identificada como  $\mathcal{T}(\hat{x}) = \|\nabla u(\hat{x})\|^2$ . Este último resultado pode ser estendido para a fronteira usando um rebatimento do problema, como mostrado na fig. 4.1. Ademais, desde que  $u|_{\partial\Omega} = 0$ , então sua derivada tangencial se anula na fronteira, a saber  $\partial_\tau u|_{\partial\Omega} = 0$ . Portanto, a expansão assintótica topológica avaliada sobre a fronteira  $\partial\Omega$  resulta em

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) + \frac{1}{2}\pi\varepsilon^2 (\partial_n u(\hat{x}))^2 + o(\varepsilon^2) \quad \forall \hat{x} \in \partial\Omega. \quad (4.1.5)$$

Isto significa que neste simples exemplo a derivada topológica  $\mathcal{T}(\hat{x}) = \frac{1}{2}(\partial_n u(\hat{x}))^2$  coincide com a densidade da derivada de forma no ponto  $\hat{x} \in \partial\Omega$ , fato que motiva o principal resultado deste trabalho.

Objetiva-se agora introduzir um método de cálculo para a derivada topológica, o qual deve ser suficientemente simples e robusto. A abordagem restringe-se aos problemas de valor de contorno elípticos que são bem compreendidos do ponto de vista da análise assintótica em domínios singularmente perturbados. O método proposto deve ser aplicável tanto a furos quanto a inclusões, vez que ambos os casos são importantes em aplicações práticas tais como otimização topológica, problemas inversos e processamento de imagens. Dentre os métodos de cálculo das derivadas topológicas para problemas elípticos de valor de contorno atualmente disponíveis na literatura especializada acerca de métodos numéricos de otimização de forma (veja, por exemplo, [4, 58, 95]), adota-se a metodologia desenvolvida em [80], que usa as seguintes propriedades do funcional de forma considerado:

**Proposição 4.1.** *Seja  $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$  o funcional de forma associado ao domínio topologicamente perturbado, que admite, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, a expansão assintótica topológica da seguinte forma*

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) + f(\varepsilon)\mathcal{T}(\hat{x}) + \mathcal{R}(f(\varepsilon)), \quad (4.1.6)$$

onde  $\psi(\chi)$  é o funcional de forma associado ao domínio original (não perturbado), a função positiva  $f(\varepsilon)$  é tal que  $f(\varepsilon) \rightarrow 0$ , com  $\varepsilon \rightarrow 0$ , e a função  $\mathcal{T}(\hat{x})$  é a derivada topológica do funcional de forma  $\psi$  em  $\hat{x} \in \Omega$ . Assumindo que o resíduo  $\mathcal{R}(f(\varepsilon)) = o(f(\varepsilon))$  tem a seguinte propriedade adicional  $\mathcal{R}'(f(\varepsilon)) \rightarrow 0$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Então, a derivada topológica pode ser escrita como

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\varepsilon)} \frac{d}{d\varepsilon} \psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})), \quad (4.1.7)$$

onde  $\frac{d}{d\varepsilon}\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$  é a derivada (de forma) de  $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$  com relação ao parâmetro de controle  $\varepsilon$ .

*Demonstração.* Calculando a derivada total da expansão (4.1.6) em relação ao parâmetro de controle  $\varepsilon$ , tem-se

$$\frac{d}{d\varepsilon}\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = f'(\varepsilon)\mathcal{T}(\hat{x}) + \mathcal{R}'(f(\varepsilon))f'(\varepsilon). \quad (4.1.8)$$

Após divisão por  $f'(\varepsilon)$  tem-se

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = \frac{1}{f'(\varepsilon)} \frac{d}{d\varepsilon}\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \mathcal{R}'(f(\varepsilon)). \quad (4.1.9)$$

Finalmente, tomando o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  na expressão acima, o resultado provém do fato que  $\mathcal{R}'(f(\varepsilon)) \rightarrow 0$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

**Observação 4.1.** *Propõe-se aqui um método simples para cálculo da derivada topológica, que pode ser usado para problemas elípticos de valor de contorno. O método baseia-se nas propriedades da expansão assintótica composta obtida para soluções de problemas elípticos de valor de contorno em domínios singularmente perturbados. A fim de aplicar o método é requerida a convergência necessária dos termos remanescentes*

$$\mathcal{R}'(f(\varepsilon)) \rightarrow 0, \quad \text{para } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (4.1.10)$$

que deve ser verificada em cada caso específico de funcional de forma considerado para problemas de valor de contorno definidos em domínios geométricos singularmente perturbados. De fato, a convergência decorre da propriedade da expansão assintótica das soluções que pode ser diferenciada termo a termo sob apropriada diminuição da ordem  $\varepsilon$  dos termos remanescentes das expansões. Ou seja, o procedimento de cálculo da derivada topológica ora proposto pode ser empregado em problemas de valor de contorno que desfrutem dessa propriedade. Ressalte-se que esta condição é válida para uma vasta classe de problemas elípticos de valor de contorno de segunda ordem considerados em [76]. Entretanto, também em [76] são apresentados alguns contra exemplos sobre a falta de diferenciabilidade topológica. Em particular, acredita-se que essa propriedade não se confirma para certos problemas de valor de contorno hiperbólicos, o que torna o cálculo da derivada topológica, nesses casos, muito mais árduos, quando possível.

A derivada de  $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$  com relação a  $\varepsilon$  pode ser vista como a sensibilidade de  $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$ , no sentido clássico [21, 94], com respeito a variações do domínio produzida por uma expansão uniforme da perturbação  $\omega_\varepsilon$ , como mostrado na fig. 4.2. De fato, tem-se

$$\frac{d}{d\varepsilon}\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(\chi_{\varepsilon+t}(\hat{x})) - \psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))}{t}, \quad (4.1.11)$$

onde  $\varepsilon > 0$  e  $\psi(\chi_{\varepsilon+t}(\hat{x}))$  é o funcional de forma associado ao domínio perturbado, cuja perturbação é dada por  $\omega_{\varepsilon+t}$ . Portanto, desde que  $\psi(\chi_{\varepsilon+t}(\hat{x}))$  e  $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$  são agora associados a domínios topologicamente idênticos, pode ser usado o conceito de análise de sensibilidade à mudança de forma como um passo intermediário no cálculo da derivada topológica. Mais tarde será mostrado que este procedimento simplifica enormemente a análise.

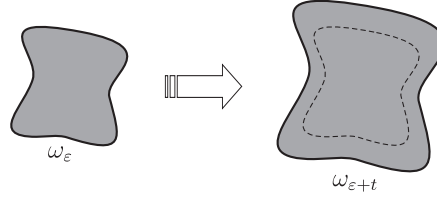


Figura 4.2: Expansão uniforme da perturbação  $\omega_\varepsilon$ .

## 4.2 Um Exemplo de Cálculo da Derivada Topológica

Antes de concluir este capítulo será apresentado um último exemplo relativo a um simples caso de perturbação topológica, que é dado por uma perturbação no lado direito de um problema do valor de contorno. Este caso pode ser visto como uma variante simples de domínios geométricos singularmente perturbados. Em particular a derivada topológica é calculada usando o resultado obtido na Proposição 4.1.

**Exemplo 4.2.** *Considerando um funcional de forma amplamente usado em muitas aplicações práticas em controle ótimo e em processamento de imagens, que é dado por*

$$\psi(\chi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - z_d)^2, \quad (4.2.12)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $z_d$  é a função alvo e o campo escalar  $u$  é solução do seguinte problema variacional

$$\begin{cases} \text{Encontre } u \in H_0^1(\Omega), \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \eta = \int_{\Omega} b \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (4.2.13)$$

A fim de simplificar a apresentação deste exemplo, assume-se que o termo fonte  $b(x)$  é constante na vizinhança do ponto  $\hat{x}$ . Agora, introduzindo uma perturbação topológica no termo fonte tal que  $b_\varepsilon = \chi_\varepsilon b$ , com  $\chi_\varepsilon(\hat{x}) = \mathbb{1}_{\Omega} - (1 - \gamma)\mathbb{1}_{B_\varepsilon(\hat{x})}$ , então o termo fonte perturbado  $b_\varepsilon$  pode ser escrito como

$$b_\varepsilon(x) := \begin{cases} b(x) & \text{se } x \in \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(\hat{x})}, \\ \gamma b(x) & \text{se } x \in B_\varepsilon(\hat{x}), \end{cases} \quad (4.2.14)$$

com  $\gamma$  usado para denotar o contraste no termo fonte. Portanto, o funcional de forma associado ao problema perturbado é definido como

$$\psi(\chi_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_\varepsilon - z_d)^2, \quad (4.2.15)$$

onde  $u_\varepsilon$  é a solução do seguinte problema variacional

$$\begin{cases} \text{Encontre } u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta = \int_{\Omega} b_\varepsilon \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (4.2.16)$$

**Lema 4.1.** *Seja  $\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon - u$ , onde  $u$  e  $u_\varepsilon$  são soluções de (4.2.13) e (4.2.16), respectivamente. Assim, tem-se a seguinte estimativa para o resíduo  $\tilde{u}_\varepsilon$*

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon, \quad (4.2.17)$$

com a constante  $C$  independente do parâmetro pequeno  $\varepsilon$ .

*Demonstração.* Recordando que  $b_\varepsilon = b$  em  $\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}$  e  $b_\varepsilon = \gamma b$  em  $B_\varepsilon$ , o lado direito de (4.2.16) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b_\varepsilon \eta &= \int_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} b \eta + \gamma \int_{B_\varepsilon} b \eta \pm \int_{B_\varepsilon} b \eta \\ &= \int_{\Omega} b \eta - (1 - \gamma) \int_{B_\varepsilon} b \eta. \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Após calcular a diferença entre os problemas variacionais (4.2.16) e (4.2.13), obtém-se

$$\tilde{u}_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla \eta = -(1 - \gamma) \int_{B_\varepsilon} b \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega), \quad (4.2.19)$$

com  $\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon - u$ . Agora, tomando  $\eta = \tilde{u}_\varepsilon$  na equação acima tem-se

$$\int_{\Omega} \|\nabla \tilde{u}_\varepsilon\|^2 = -(1 - \gamma) \int_{B_\varepsilon} b \tilde{u}_\varepsilon. \quad (4.2.20)$$

A partir da *desigualdade de Cauchy-Schwarz*, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|\nabla \tilde{u}_\varepsilon\|^2 &\leq C_1 \|b\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_\varepsilon)} \\ &\leq C_2 \varepsilon \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_3 \varepsilon \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

onde é usada a continuidade da função  $b$  no ponto  $\hat{x} \in \Omega$ . Finalmente, a partir da *coercividade* da forma bilinear do lado esquerdo de (4.2.20), a saber,

$$c \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \|\nabla \tilde{u}_\varepsilon\|^2, \quad (4.2.22)$$

tem-se

$$c \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C_3 \varepsilon, \quad (4.2.23)$$

que conduz ao resultado, com  $C = C_3/c$ .  $\square$

**Observação 4.2.** *O resultado prévio pode ser ligeiramente melhorado usando a desigualdade de Hölder juntamente com o teorema da imersão de Sobolev. De fato, é possível obter uma estimativa para o resíduo  $\tilde{u}_\varepsilon$  da seguinte forma  $\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^{1+\delta}$ , com  $\delta > 0$  pequeno. Em particular, para  $1/p + 1/q = 1$ , tem-se*

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_\varepsilon)} &\leq \left[ \left( \int_{B_\varepsilon} (|\tilde{u}_\varepsilon|^2)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{B_\varepsilon} 1^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \pi^{1/2q} \varepsilon^{1/q} \left( \int_{B_\varepsilon} |\tilde{u}_\varepsilon|^{2p} \right)^{\frac{1}{2p}} \\ &= \pi^{1/2q} \varepsilon^{1/q} \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^{2p}(B_\varepsilon)} \\ &= \pi^{1/2q} \varepsilon^{1/q} \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^{2q/(q-1)}(B_\varepsilon)} \\ &\leq C \varepsilon^\delta \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

onde  $p = q/(q-1)$ , com  $q > 1$ , e  $\delta = 1/q$ .

Objetivando-se posterior simplificação é introduzido um estado adjunto  $v_\varepsilon$ , solução do seguinte problema variacional

$$\begin{cases} \text{Encontre } v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla \eta = - \int_{\Omega} (u_\varepsilon - z_d) \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (4.2.25)$$

Ademais, o estado adjunto associado ao problema não perturbado é obtido tomando  $\varepsilon = 0$  na equação anterior. A saber,  $v$  é a solução da equação adjunta da forma

$$\begin{cases} \text{Encontre } v \in H_0^1(\Omega), \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \eta = - \int_{\Omega} (u - z_d) \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (4.2.26)$$

**Lema 4.2.** *Seja  $\tilde{v}_\varepsilon = v_\varepsilon - v$ , onde  $v$  e  $v_\varepsilon$  são soluções de (4.2.26) e (4.2.25), respectivamente. Assim, tem-se a seguinte estimativa para o resíduo  $\tilde{v}_\varepsilon$*

$$\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon, \quad (4.2.27)$$

com a constante  $C$  independente do parâmetro pequeno  $\varepsilon$ .

*Demonstração.* Ao subtrair o problema variacional (4.2.25) de (4.2.26), tem-se

$$\tilde{v}_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla \tilde{v}_\varepsilon \cdot \nabla \eta = - \int_{\Omega} \tilde{u}_\varepsilon \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega), \quad (4.2.28)$$

com  $\tilde{v}_\varepsilon = v_\varepsilon - v$  e  $\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon - u$ . Tomando  $\eta = \tilde{v}_\varepsilon$  na equação acima tem-se

$$\int_{\Omega} \|\nabla \tilde{v}_\varepsilon\|^2 = - \int_{\Omega} \tilde{u}_\varepsilon \tilde{v}_\varepsilon. \quad (4.2.29)$$

A partir da *desigualdade de Cauchy-Schwarz* obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|\nabla \tilde{v}_\varepsilon\|^2 &\leq \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{v}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \|\tilde{v}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C_1 \varepsilon \|\tilde{v}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

onde é usado o resultado (4.2.17). Finalmente, a partir da *coercividade* da forma bilinear do lado esquerdo de (4.2.29), a saber,

$$c \|\tilde{v}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \|\nabla \tilde{v}_\varepsilon\|^2, \quad (4.2.31)$$

tem-se

$$c \|\tilde{v}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \varepsilon, \quad (4.2.32)$$

que conduz ao resultado, com  $C = C_1/c$ .  $\square$

*Neste caso particular, o domínio geométrico permanece fixo e a aplicação do resultado dado pela Proposição 4.1 é direto. De fato, calculando a derivada do funcional de forma com relação ao parâmetro pequeno  $\varepsilon$ , obtém-se*

$$\dot{\psi}(\chi_\varepsilon) = \int_{\Omega} (u_\varepsilon - z_d) \dot{u}_\varepsilon, \quad (4.2.33)$$

onde o ponto é usado para denotar a derivada total com relação a  $\varepsilon$  (ver Apêndice A). Desde que a equação acima envolve  $\dot{u}_\varepsilon$ , é necessário calcular a derivada da equação de estado (4.2.16) com relação a  $\varepsilon$ . No caso de perturbação regular do domínio, é fácil notar que o funcional de forma  $\varepsilon \mapsto \psi(\chi_\varepsilon)$  é diferenciável para  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Efetivamente, assumindo que  $B_\varepsilon = \{\|x\| < \varepsilon\}$ , pela passagem a coordenadas polares e diferenciação do resultado paramétrico com relação a  $\varepsilon$ , a função real de uma variável

$$\varepsilon \mapsto \int_{B_\varepsilon} g \quad (4.2.34)$$

é diferenciável em  $(0, \varepsilon_0]$  para  $\varepsilon_0 > 0$ , sendo  $\varepsilon_0$  suficientemente pequeno, e a derivada é contínua e dada pela integral na fronteira sobre  $\partial B_\varepsilon = \{\|x\| = \varepsilon\}$ . Assim tem-se a expansão em série de Taylor de primeira ordem

$$\int_{B_{\varepsilon+t}} g = \int_{B_\varepsilon} g + t \int_{\partial B_\varepsilon} g + o(t). \quad (4.2.35)$$

Desta forma, a solução fraca de (4.2.16) é também diferenciável em  $H_0^1(\Omega)$  com relação a  $\varepsilon$  como resultado da aplicação do teorema da função implícita [94]. De fato, recordando que  $b_\varepsilon = b$  em  $\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}$  e  $b_\varepsilon = \gamma b$  em  $B_\varepsilon$ , é possível reescrever o lado direito de (4.2.16) como

$$\int_{\Omega} b_\varepsilon \eta = \int_{\Omega} b \eta - (1 - \gamma) \int_{B_\varepsilon} b \eta. \quad (4.2.36)$$

Considerando que a função  $\varepsilon \mapsto u_\varepsilon$  admite a derivada  $\dot{u}_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$  com relação a  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  da forma

$$u_{\varepsilon+t}(x) = u_\varepsilon(x) + t \dot{u}_\varepsilon(x) + o(t) \quad x \in \Omega, \quad (4.2.37)$$

onde  $\dot{u}_\varepsilon$  é dado pela solução da equação variacional

$$\begin{cases} \text{Encontre } \dot{u}_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \nabla \dot{u}_\varepsilon \cdot \nabla \eta = (\gamma - 1) \int_{\partial B_\varepsilon} b \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (4.2.38)$$

Pode-se agora retornar ao funcional de forma e obter sua expansão em  $\varepsilon$  com ajuda de um estado adjunto apropriado. Com efeito, desde que  $\dot{u}_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ , é possível tomar  $\eta = \dot{u}_\varepsilon$  como função teste na equação adjunta (4.2.25) e  $\eta = v_\varepsilon$  como função teste em (4.2.38), o que resulta respectivamente nas seguintes igualdades

$$\int_{\Omega} \nabla \dot{u}_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon = -(1 - \gamma) \int_{\partial B_\varepsilon} b v_\varepsilon \quad (4.2.39)$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla \dot{u}_\varepsilon = - \int_{\Omega} (u_\varepsilon - z_d) \dot{u}_\varepsilon. \quad (4.2.40)$$

Comparando ambas as equações obtém-se o importante resultado seguinte

$$\int_{\Omega} (u_\varepsilon - z_d) \dot{u}_\varepsilon = (1 - \gamma) \int_{\partial B_\varepsilon} b v_\varepsilon. \quad (4.2.41)$$

Portanto, a derivada do funcional de forma é dada por

$$\dot{\psi}(\chi_\varepsilon) = (1 - \gamma) \int_{\partial B_\varepsilon} b v_\varepsilon = (1 - \gamma) \int_{\partial B_\varepsilon} b v + (1 - \gamma) \int_{\partial B_\varepsilon} b \tilde{v}_\varepsilon, \quad (4.2.42)$$

onde  $\tilde{v}_\varepsilon = v_\varepsilon - v$ . Para a primeira integral no lado direito da equação acima, a seguinte expansão em potências de  $\varepsilon$  é válida

$$(1 - \gamma) \int_{\partial B_\varepsilon} bv = 2\pi\varepsilon(1 - \gamma)b(\hat{x})v(\hat{x}) + o(\varepsilon), \quad (4.2.43)$$

em que é usada a continuidade da função  $b$  no ponto  $\hat{x} \in \Omega$  e a regularidade elíptica interior da solução  $v$ . Finalmente, do resultado (4.2.27), a segunda integral produz um resíduo da forma

$$(1 - \gamma) \int_{\partial B_\varepsilon} b\tilde{v}_\varepsilon = o(\varepsilon). \quad (4.2.44)$$

Tem-se, portanto, a seguinte expansão em potências de  $\varepsilon$  para a derivada do funcional de forma

$$\dot{\psi}(\chi_\varepsilon) = 2\pi\varepsilon(1 - \gamma)b(\hat{x})v(\hat{x}) + o(\varepsilon). \quad (4.2.45)$$

O resultado acima, juntamente com a relação entre as derivadas de forma e topológica dada por (4.1.7), resulta em

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\varepsilon)} (2\pi\varepsilon(1 - \gamma)b(\hat{x})v(\hat{x}) + o(\varepsilon)). \quad (4.2.46)$$

Agora, a fim de identificar o termo principal da expansão acima, escolhe-se  $f(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2$ , que conduz à fórmula final para a derivada topológica, a saber

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = (1 - \gamma)b(\hat{x})v(\hat{x}). \quad (4.2.47)$$

Note que a expansão (4.2.45) corrobora com a hipótese da Proposição 4.1, a saber  $\mathcal{R}'(f(\varepsilon)) = o(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Observação 4.3.** Este tipo de perturbação topológica, ou seja, no lado direito de um problema de valor de contorno, pode ser tratado usando argumentos muito simples. Com efeito, foi utilizado apenas o fato dos problemas de valor de contorno serem bem postos. Portanto, neste cenário, é possível considerar até mesmo algumas classes de problemas não lineares. Entretanto, este trabalho é dedicado principalmente ao caso de perturbações singulares em domínios geométricos, tal como aquelas produzidas pela nucleação de furos. O tratamento matemático desta classe de perturbação topológica é muito mais árduo, sendo discutido com maior profundidade no Capítulo 7 e em [84], por exemplo.



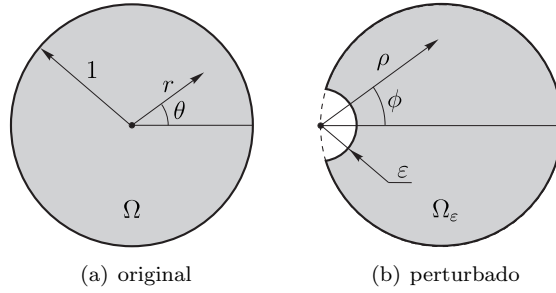


Figura 4.3: Barra de seção circular submetida a efeitos de torção: domínios original e singularmente perturbado.

### 4.3 Exercícios

1. Considere o Exemplo 4.1 para o caso particular de uma barra com seção transversal circular, com  $\Omega = B_1$ , onde  $B_1$  é uma bola de raio unitário e centro na origem (veja fig. 4.3(a)). Considere um domínio singularmente perturbado da forma  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}$ , onde  $B_\varepsilon$  é uma bola de raio  $\varepsilon$  e centro em  $\partial\Omega$  (veja fig. 4.3(b)). Mostre que a expansão assintótica topológica da dissipação de energia complementar é dada por

$$\psi(\chi_\varepsilon) = -\pi \frac{b^2}{16} + \pi \varepsilon^2 \frac{b^2}{8} + o(\varepsilon^2).$$

Compare a expansão acima com o resultado geral dado por (4.1.5). Dica: use o sistema de coordenadas polares como mostrado na fig. 4.3. As formas fechadas para as soluções de ambos os problemas, original e perturbado, são dadas respectivamente por

$$u(r) = \frac{b}{4}(1 - r^2) \quad \text{e} \quad u_\varepsilon(\rho, \phi) = -\frac{b}{4}(\rho^2 - \varepsilon^2) \left(1 - \frac{2}{\rho} \cos \phi\right).$$

2. Tendo em conta o Exemplo 4.2:

- (a) Mostre que as expansões (4.2.43) e (4.2.44) são válidas.
- (b) Substitua o funcional de forma dado por (4.2.12) pela energia potencial total, ou seja

$$\psi(\chi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 - \int_{\Omega} bu,$$

e repita os mesmos passos para obter a derivada topológica associada. Repita a derivação usando diretamente a definição (4.1.6) para a expansão assintótica topológica.

- (c) Tome a energia potencial total definida num disco  $B_1$  de raio unitário e centro na origem, submetido a um termo fonte constante  $b$ . Como perturbação topológica, considere o caso particular dado por

$$b_\varepsilon(x) := \begin{cases} b & \text{se } x \in B_1 \setminus \overline{B_\varepsilon}, \\ \gamma b & \text{se } x \in B_\varepsilon, \end{cases}$$

onde  $B_\varepsilon$  é um disco de raio  $\varepsilon$  e centro na origem. Assim, desenvolva  $\psi(\chi_\varepsilon)$  em potências de  $\varepsilon$  ao redor da origem e compare com o resultado previamente obtido.

## Capítulo 5

# Derivada Topológica para um Funcional Geral

Neste capítulo é mostrada uma extensão do método de cálculo da derivada topológica apresentado no Capítulo 4, que utiliza o método adjunto modificado proposto em [5]. Esta nova abordagem conduz a uma maneira alternativa para calcular a derivada topológica baseada na análise de sensibilidade à mudança de forma juntamente com o método Lagrangeano aumentado modificado, como mostrado no livro de Novotny & Sokołowski, 2013 [84]. Para ilustrar uma aplicação do método aqui proposto, a derivada topológica é calculada para uma classe geral de funcionais de forma. Em particular, é apresentada a derivada topológica para um funcional de forma que representa a energia modificada associada à equação de Laplace, considerando a nucleação de uma pequena inclusão como perturbação topológica. Tratando-se de uma classe geral de funcionais de forma, não necessariamente associados à energia, será mais tarde mostrado que esta nova abordagem permite simplificar o passo mais delicado associado ao cálculo da derivada topológica, ou seja, a análise assintótica do estado adjunto.

### 5.1 Formulação do Problema

O funcional de forma no domínio não perturbado aqui tratado é definido como

$$\psi(\chi) := \mathcal{J}_\chi(u) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} Aq(u) \cdot \nabla u, \quad (5.1.1)$$

onde  $A$  é um dado tensor constante de segunda ordem simétrico e a função escalar  $u$  é a solução para o problema variacional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u \in \mathcal{U}, \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} q(u) \cdot \nabla \eta = \int_{\Gamma_N} \bar{q} \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{V}, \\ \text{com } q(u) = -k \nabla u. \end{array} \right. \quad (5.1.2)$$

Na equação acima  $k$  é a condutividade térmica do meio, assumida constante em todo lugar. O conjunto  $\mathcal{U}$  e o espaço  $\mathcal{V}$  são respectivamente definidos como

$$\mathcal{U} := \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_D} = \bar{u}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{V} := \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}. \quad (5.1.3)$$

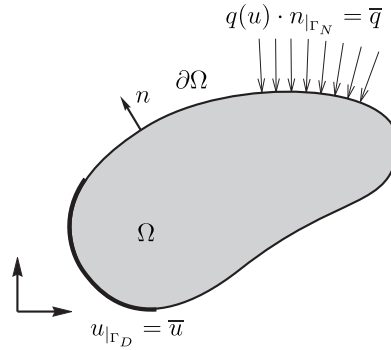


Figura 5.1: Problema de Laplace definido no domínio não perturbado.

Ademais,  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$  com  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ , onde  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$  são contornos de Dirichlet e Neumann, respectivamente. Assim  $\bar{u}$  é um dado de Dirichlet sobre  $\Gamma_D$  e  $\bar{q}$  é um dado de Neumann sobre  $\Gamma_N$ , ambos assumidos como sendo suficientemente regulares. Veja detalhes na fig. 5.1. A equação forte associada ao problema variacional acima (5.1.2) pode ser escrita como:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Encontre } u, \text{ tal que} \\ \text{div}q(u) = 0 & \text{em } \Omega, \\ q(u) = -k\nabla u & \\ u = \bar{u} & \text{sobre } \Gamma_D, \\ q(u) \cdot n = \bar{q} & \text{sobre } \Gamma_N. \end{array} \right. \quad (5.1.4)$$

**Observação 5.1.** *O funcional (5.1.1) inclui um largo alcance de funções de forma, que podem ser usadas em aplicações práticas. Por outro lado, quando  $A = I$  o funcional (5.1.1) degenera para a energia. Ademais, quando  $A \neq I$ , a análise torna-se muito mais árdua, o que justifica a introdução do estado adjunto modificado.*

Conforme mencionado, o domínio é topologicamente perturbado pela nucleação de uma pequena inclusão. Mais precisamente, o domínio perturbado é obtido quando um furo circular  $\omega_\varepsilon(\hat{x}) = B_\varepsilon(\hat{x})$  é introduzido em  $\Omega$ , onde  $B_\varepsilon(\hat{x})$  é usado para denotar uma bola de raio  $\varepsilon$  e centro em  $\hat{x} \in \Omega$ . A seguir, esta região é preenchida por uma inclusão com propriedade material diferente do meio. Em particular, é introduzida uma função constante por partes  $\gamma_\varepsilon$  de modo que

$$\gamma_\varepsilon := \begin{cases} 1 & \text{em } \Omega \setminus \bar{B}_\varepsilon \\ \gamma & \text{em } B_\varepsilon \end{cases}, \quad (5.1.5)$$

onde  $0 < \gamma < \infty$  é o contraste na propriedade material. No caso de uma inclusão circular, pode-se construir um campo de velocidade à mudança de forma  $\mathfrak{V} \in C^\infty(\Omega)$  que representa uma expansão uniforme de  $B_\varepsilon(\hat{x})$ . De fato, é suficiente definir  $\mathfrak{V}$  nas fronteiras  $\partial\Omega$  e  $\partial B_\varepsilon$  da seguinte maneira

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{V} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ \mathfrak{V} = -n & \text{sobre } \partial B_\varepsilon \end{array} \right., \quad (5.1.6)$$

onde  $n = -(x - \hat{x})/\varepsilon$ , com  $x \in \partial B_\varepsilon$ , é o campo vetorial unitário normal apontando na direção do centro da inclusão circular  $B_\varepsilon$ . Será visto mais tarde que este campo de velocidade  $\mathfrak{V}$  é fundamental para utilização do resultado (4.1.7), que conduz a um

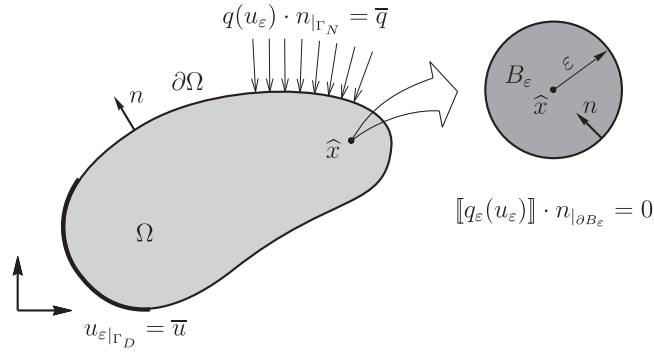


Figura 5.2: Problema de Laplace definido no domínio perturbado.

simples e construtivo método para calcular a derivada topológica. Note que neste caso as topologias dos domínios original e perturbado são preservadas. Entretanto, introduz-se uma perturbação não suave nos coeficientes do operador diferencial através do contraste  $\gamma_\varepsilon$ , pela troca de propriedade do material em uma pequena região  $\overline{B_\varepsilon(\hat{x})} \Subset \Omega$ . Portanto, a sensibilidade do funcional de forma em relação à nucleação de uma inclusão pode também ser estudada através do conceito de análise de sensibilidade topológica, que é, com efeito, a mais apropriada abordagem para tal finalidade.

O mesmo problema pode então ser definido no domínio perturbado, cujo funcional de forma é dado por

$$\psi(\chi_\varepsilon) := \mathcal{J}_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} Aq_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon, \quad (5.1.7)$$

onde a função escalar  $u_\varepsilon$  resolve a seguinte equação variacional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} q_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla \eta = \int_{\Gamma_N} \bar{q} \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_\varepsilon, \\ \text{com } q_\varepsilon(u_\varepsilon) = -\gamma_\varepsilon k \nabla u_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (5.1.8)$$

com  $\gamma_\varepsilon$  definido por (5.1.5). O conjunto  $\mathcal{U}_\varepsilon$  e o espaço  $\mathcal{V}_\varepsilon$  são definidos como

$$\mathcal{U}_\varepsilon := \{\varphi \in \mathcal{U} : \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \text{ sobre } \partial B_\varepsilon\} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_\varepsilon := \{\varphi \in \mathcal{V} : \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \text{ sobre } \partial B_\varepsilon\}, \quad (5.1.9)$$

onde o operador  $\llbracket \varphi \rrbracket$  é usado para denotar o salto da função  $\varphi$  na fronteira da inclusão  $\partial B_\varepsilon$ , ou seja,  $\llbracket \varphi \rrbracket := \varphi|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} - \varphi|_{B_\varepsilon}$  sobre  $\partial B_\varepsilon$ . Veja detalhes na fig. 5.2. A equação forte associada ao problema variacional (5.1.8) é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \begin{array}{ll} \operatorname{div} q_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0 & \text{em } \Omega, \\ q_\varepsilon(u_\varepsilon) = -\gamma_\varepsilon k \nabla u_\varepsilon & \\ u_\varepsilon = \bar{u} & \text{sobre } \Gamma_D, \\ q_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot n = \bar{q} & \text{sobre } \Gamma_N, \\ \llbracket u_\varepsilon \rrbracket = 0 & \\ \llbracket q_\varepsilon(u_\varepsilon) \rrbracket \cdot n = 0 & \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \end{array} \end{array} \right. \quad (5.1.10)$$

A condição de transmissão no contorno da inclusão  $\partial B_\varepsilon$  resulta da formulação variacional (5.1.8).

Agora é necessário introduzir o estado adjunto  $v_\varepsilon$ . Neste caso particular,  $v_\varepsilon$  é a solução para a equação adjunta na forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } v_\varepsilon \in \mathcal{V}_\varepsilon, \text{ tal que} \\ - \int_{\Omega} q_\varepsilon(v_\varepsilon) \cdot \nabla \eta = - \langle D_u \mathcal{J}_{\chi_\varepsilon}(u), \eta \rangle \\ \qquad \qquad \qquad = \int_{\Omega} Aq_\varepsilon(u) \cdot \nabla \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_\varepsilon, \\ \text{com } q_\varepsilon(v_\varepsilon) = -\gamma_\varepsilon k \nabla v_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (5.1.11)$$

A equação adjunta na forma forte associada ao problema variacional (5.1.11) é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } v_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \text{div} q_\varepsilon(v_\varepsilon) = -\text{div}(Aq_\varepsilon(u)) \quad \text{em } \Omega, \\ q_\varepsilon(v_\varepsilon) = -\gamma_\varepsilon k \nabla v_\varepsilon \\ v_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_D, \\ q_\varepsilon(v_\varepsilon) \cdot n = -Aq_\varepsilon(u) \cdot n \quad \text{sobre } \Gamma_N, \\ \begin{array}{l} \llbracket v_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket q_\varepsilon(v_\varepsilon) \rrbracket \cdot n = -\llbracket Aq_\varepsilon(u) \rrbracket \cdot n \end{array} \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (5.1.12)$$

Mediante esta construção, o lado direito da equação adjunta não depende do parâmetro  $\varepsilon$  através da função  $u_\varepsilon$ . Este recurso simplificará a análise assintótica do estado adjunto  $v_\varepsilon$ . Finalmente, o estado adjunto associado ao domínio não perturbado é obtido tomando  $\varepsilon = 0$  em (5.1.11), ou seja,  $v$  é a solução da equação adjunta da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } v \in \mathcal{V}, \text{ tal que} \\ - \int_{\Omega} q(v) \cdot \nabla \eta = - \langle D_u \mathcal{J}_\chi(u), \eta \rangle \\ \qquad \qquad \qquad = \int_{\Omega} Aq(u) \cdot \nabla \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{V}, \\ \text{com } q(v) = -k \nabla v. \end{array} \right. \quad (5.1.13)$$

A equação adjunta na forma forte associada ao problema variacional (5.1.13) pode ser escrita como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } v, \text{ tal que} \\ \text{div} q(v) = -\text{div}(Aq(u)) \quad \text{em } \Omega, \\ q(v) = -k \nabla v \\ v = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_D, \\ q(v) \cdot n = -Aq(u) \cdot n \quad \text{sobre } \Gamma_N. \end{array} \right. \quad (5.1.14)$$

## 5.2 Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma

Objetivando aplicar o resultado (4.1.7) é necessário primeiramente calcular a derivada de forma do funcional  $\mathcal{J}_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon)$  com relação a uma expansão uniforme da inclusão  $B_\varepsilon$ . Antes de iniciar note que após levar em conta a relação constitutiva  $q_\varepsilon(u_\varepsilon) = -\gamma_\varepsilon k \nabla u_\varepsilon$  em (5.1.7), com o contraste  $\gamma_\varepsilon$  dado por (5.1.5), o funcional de forma  $\mathcal{J}_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon)$  pode ser escrito como segue

$$\mathcal{J}_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) = -\frac{1}{2} \left( \int_{\Omega \setminus \tilde{B}_\varepsilon} Aq(u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon + \int_{B_\varepsilon} \gamma Aq(u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon \right), \quad (5.2.15)$$

onde  $q(u_\varepsilon) = -k \nabla u_\varepsilon$ . Assim, a dependência com relação ao parâmetro  $\varepsilon$  torna-se explícita, podendo-se demonstrar o seguinte resultado:

**Proposição 5.1.** *Seja  $\mathcal{J}_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon)$  o funcional de forma definido por (5.1.7). Assim, a derivada deste funcional com relação ao parâmetro de controle  $\varepsilon$  é dada por*

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}\psi(\chi_\varepsilon) = \dot{\mathcal{J}}_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) = & - \int_{\partial B_\varepsilon} \llbracket \Sigma_\varepsilon - \nabla u_\varepsilon \otimes Aq_\varepsilon(u_\varepsilon - u) \rrbracket n \cdot n \\ & - \int_{\Omega} Aq_\varepsilon(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla u'_\varepsilon, \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

onde  $\mathfrak{V}$  representa o campo de velocidade à mudança de forma definido através de (5.1.6) e  $\Sigma_\varepsilon$  pode ser visto como uma generalização do clássico tensor momento-energia de Eshelby [25] dado por

$$\begin{aligned} \Sigma_\varepsilon = & -\frac{1}{2}(Aq_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon + 2q_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla v_\varepsilon)\mathbf{I} \\ & + (\nabla u_\varepsilon \otimes Aq_\varepsilon(u_\varepsilon) + \nabla u_\varepsilon \otimes q_\varepsilon(v_\varepsilon) + \nabla v_\varepsilon \otimes q_\varepsilon(u_\varepsilon)). \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

*Demonstração.* Inicialmente recorde-se que o operador constitutivo é definido como  $q_\varepsilon(\varphi) = -\gamma_\varepsilon k \nabla \varphi$  e que o campo de velocidade à mudança de forma se anula na fronteira exterior, ou seja,  $\mathfrak{V} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Assim, usando o teorema do transporte de Reynolds dado por (A.4.87) e o conceito de derivada material de campos espaciais juntamente com a relação entre derivadas material e espacial de campos escalares (A.4.81), ou seja,  $\dot{\varphi} = \varphi' + \nabla \varphi \cdot \mathfrak{V}$ , a derivada com relação a  $\varepsilon$  do funcional de forma (5.2.15) é dada por (ver Apêndice A)

$$\dot{\mathcal{J}}_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) = - \int_{\Omega} Aq_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla u'_\varepsilon - \frac{1}{2} \int_{\partial B_\varepsilon} \llbracket Aq_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon \rrbracket n \cdot \mathfrak{V}. \quad (5.2.18)$$

Ademais, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{J}}_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) = & -\frac{1}{2} \int_{\partial B_\varepsilon} \llbracket Aq_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon \rrbracket n \cdot \mathfrak{V} \\ & - \int_{\Omega} Aq_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla \dot{u}_\varepsilon + \int_{\Omega} Aq_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla (\nabla u_\varepsilon \cdot \mathfrak{V}). \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

Integrando por partes obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{J}}_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) = & -\frac{1}{2} \int_{\partial B_\varepsilon} \llbracket Aq_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon \rrbracket n \cdot \mathfrak{V} + \int_{\partial B_\varepsilon} \llbracket (\nabla u_\varepsilon \cdot \mathfrak{V}) Aq_\varepsilon(u_\varepsilon) \rrbracket \cdot n \\ & - \int_{\Omega} \operatorname{div}(Aq_\varepsilon(u_\varepsilon)) \nabla u_\varepsilon \cdot \mathfrak{V} - \int_{\Omega} Aq_\varepsilon(u) \cdot \nabla \dot{u}_\varepsilon \\ & - \int_{\Omega} Aq_\varepsilon(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla \dot{u}_\varepsilon, \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

e após alguns rearranjos

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{J}}_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) = & -\frac{1}{2} \int_{\partial B_\varepsilon} \llbracket Aq_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon \mathbf{I} - 2 \nabla u_\varepsilon \otimes Aq_\varepsilon(u_\varepsilon) \rrbracket n \cdot \mathfrak{V} \\ & - \int_{\Omega} \operatorname{div}(Aq_\varepsilon(u_\varepsilon - u)) \nabla u_\varepsilon \cdot \mathfrak{V} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(Aq_\varepsilon(u)) \nabla u_\varepsilon \cdot \mathfrak{V} \\ & - \int_{\Omega} Aq_\varepsilon(u) \cdot \nabla \dot{u}_\varepsilon - \int_{\Omega} Aq_\varepsilon(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla \dot{u}_\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

Agora, diferenciando ambos os lados da equação de estado (5.1.8) com relação a  $\varepsilon$ , tem-se

$$- \int_{\Omega} (q_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla \eta)' = \int_{\partial B_\varepsilon} \llbracket q_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla \eta \rrbracket n \cdot \mathfrak{V}, \quad (5.2.22)$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla \eta)' &= \int_{\Omega} (q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla \eta) \cdot - \int_{\Omega} \nabla (q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla \eta) \cdot \mathfrak{Y} \\
&= \int_{\Omega} q_{\varepsilon}(\dot{u}_{\varepsilon}) \cdot \nabla \eta - \int_{\Omega} (\nabla \mathfrak{Y}^{\top} \nabla u_{\varepsilon} \cdot q_{\varepsilon}(\eta) + \nabla \mathfrak{Y}^{\top} \nabla \eta \cdot q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon})) \\
&\quad - \int_{\Omega} ((\nabla \nabla u_{\varepsilon})^{\top} q_{\varepsilon}(\eta) \cdot \mathfrak{Y} + (\nabla \nabla \eta)^{\top} q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \cdot \mathfrak{Y}) . \quad (5.2.23)
\end{aligned}$$

Rearranjando novamente obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla \eta)' &= \int_{\Omega} q_{\varepsilon}(\dot{u}_{\varepsilon}) \cdot \nabla \eta \\
&\quad - \int_{\Omega} \nabla (\nabla u_{\varepsilon} \cdot \mathfrak{Y}) \cdot q_{\varepsilon}(\eta) - \int_{\Omega} \nabla (\nabla \eta \cdot \mathfrak{Y}) \cdot q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) , \quad (5.2.24)
\end{aligned}$$

e, considerando que  $\nabla \nabla(\cdot) = (\nabla \nabla(\cdot))^{\top}$ , tem-se

$$\begin{aligned}
- \int_{\Omega} q_{\varepsilon}(\dot{u}_{\varepsilon}) \cdot \nabla \eta &= \int_{\partial B_{\varepsilon}} \llbracket q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla \eta \rrbracket n \cdot \mathfrak{Y} \\
&\quad - \int_{\Omega} q_{\varepsilon}(\eta) \cdot \nabla (\nabla u_{\varepsilon} \cdot \mathfrak{Y}) - \int_{\Omega} q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla (\nabla \eta \cdot \mathfrak{Y}) . \quad (5.2.25)
\end{aligned}$$

Desde que  $\dot{u}_{\varepsilon} \in \mathcal{V}_{\varepsilon}$  e  $v_{\varepsilon} \in \mathcal{V}_{\varepsilon}$ , então é possível tomar  $\eta = v_{\varepsilon}$  na equação acima e  $\eta = \dot{u}_{\varepsilon}$  na equação adjunta modificada (5.1.11), conduzindo a

$$- \int_{\Omega} q_{\varepsilon}(v_{\varepsilon}) \cdot \nabla \dot{u}_{\varepsilon} = \int_{\Omega} A q_{\varepsilon}(u) \cdot \nabla \dot{u}_{\varepsilon} \quad (5.2.26)$$

$$\begin{aligned}
- \int_{\Omega} q_{\varepsilon}(\dot{u}_{\varepsilon}) \cdot \nabla v_{\varepsilon} &= \int_{\partial B_{\varepsilon}} \llbracket q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla v_{\varepsilon} \rrbracket n \cdot \mathfrak{Y} \\
&\quad - \int_{\Omega} q_{\varepsilon}(v_{\varepsilon}) \cdot \nabla (\nabla u_{\varepsilon} \cdot \mathfrak{Y}) - \int_{\Omega} q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla (\nabla v_{\varepsilon} \cdot \mathfrak{Y}) . \quad (5.2.27)
\end{aligned}$$

Pela simetria da forma bilinear acima tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} A q_{\varepsilon}(u) \cdot \nabla \dot{u}_{\varepsilon} &= \int_{\partial B_{\varepsilon}} \llbracket q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla v_{\varepsilon} \rrbracket n \cdot \mathfrak{Y} \\
&\quad - \int_{\Omega} q_{\varepsilon}(v_{\varepsilon}) \cdot \nabla (\nabla u_{\varepsilon} \cdot \mathfrak{Y}) - \int_{\Omega} q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla (\nabla v_{\varepsilon} \cdot \mathfrak{Y}) . \quad (5.2.28)
\end{aligned}$$

A partir da integração por partes e alguns rearranjos obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} A q_{\varepsilon}(u) \cdot \nabla \dot{u}_{\varepsilon} &= \int_{\partial B_{\varepsilon}} \llbracket q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \cdot \nabla v_{\varepsilon} \rrbracket n \cdot \mathfrak{Y} \\
&\quad - \int_{\partial B_{\varepsilon}} \llbracket \nabla u_{\varepsilon} \otimes q_{\varepsilon}(v_{\varepsilon}) \rrbracket n \cdot \mathfrak{Y} - \int_{\partial B_{\varepsilon}} \llbracket \nabla v_{\varepsilon} \otimes q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \rrbracket n \cdot \mathfrak{Y} \\
&\quad + \int_{\Omega} \operatorname{div}(q_{\varepsilon}(v_{\varepsilon})) \nabla u_{\varepsilon} \cdot \mathfrak{Y} + \int_{\Omega} \operatorname{div}(q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon})) \nabla v_{\varepsilon} \cdot \mathfrak{Y} . \quad (5.2.29)
\end{aligned}$$

Após considerar esse último resultado tem-se

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{J}}_{\chi_{\varepsilon}}(u_{\varepsilon}) &= - \int_{\Omega} [\operatorname{div}(q_{\varepsilon}(v_{\varepsilon})) + \operatorname{div}(A q_{\varepsilon}(u))] \nabla u_{\varepsilon} \cdot \mathfrak{Y} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon})) \nabla v_{\varepsilon} \cdot \mathfrak{Y} \\
&\quad - \int_{\Omega} \operatorname{div}(A q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon} - u)) \nabla u_{\varepsilon} \cdot \mathfrak{Y} - \int_{\Omega} A q_{\varepsilon}(u_{\varepsilon} - u) \cdot \nabla \dot{u}_{\varepsilon} \\
&\quad + \int_{\partial B_{\varepsilon}} \llbracket \Sigma_{\varepsilon} \rrbracket n \cdot \mathfrak{Y} . \quad (5.2.30)
\end{aligned}$$



Considerando que  $u_\varepsilon$  é a solução para a equação de estado (5.1.10) e que  $v_\varepsilon$  é a solução para a equação adjunta modificada (5.1.12), ou seja,  $\operatorname{div} q_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0$  e  $\operatorname{div} q_\varepsilon(v_\varepsilon) = -\operatorname{div}(Aq_\varepsilon(u))$ , respectivamente, os primeiros dois termos da equação anterior se anulam. A partir da relação entre as derivadas material e espacial de um campo escalar e após integrar por partes, tem-se

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{J}}_{\mathcal{X}_\varepsilon}(u_\varepsilon) &= \int_{\partial B_\varepsilon} \llbracket \Sigma_\varepsilon \rrbracket n \cdot \mathfrak{Y} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(Aq_\varepsilon(u_\varepsilon - u)) \nabla u_\varepsilon \cdot \mathfrak{Y} \\
&- \int_{\Omega} Aq_\varepsilon(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla u'_\varepsilon - \int_{\Omega} Aq_\varepsilon(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla(\nabla u_\varepsilon \cdot \mathfrak{Y}) \\
&= \int_{\partial B_\varepsilon} \llbracket \Sigma_\varepsilon \rrbracket n \cdot \mathfrak{Y} - \int_{\partial B_\varepsilon} \llbracket (\nabla u_\varepsilon \cdot \mathfrak{Y}) Aq_\varepsilon(u_\varepsilon - u) \rrbracket \cdot n \\
&- \int_{\Omega} Aq_\varepsilon(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla u'_\varepsilon, \tag{5.2.31}
\end{aligned}$$

o que conduz ao resultado.  $\square$

### 5.3 Análise Assintótica das Soluções

A derivada de forma do funcional  $\mathcal{J}_{\mathcal{X}_\varepsilon}(u_\varepsilon)$  é dada em termos de uma integral sobre a fronteira da inclusão  $\partial B_\varepsilon$  e também por uma integral de domínio associada a  $u'_\varepsilon$ , como enunciado na Proposição 5.1. Cabe esclarecer que esta integral de domínio é resultado da introdução do estado adjunto modificado, solução para (5.1.11). Portanto, objetivando aplicar o resultado (4.1.7), é necessário conhecer o comportamento assintótico das funções  $u_\varepsilon$  e  $v_\varepsilon$  com relação a  $\varepsilon$ . Em particular, uma vez que estes comportamentos são conhecidos explicitamente, é possível identificar a função  $f(\varepsilon)$  e realizar a passagem ao limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  em (4.1.7) de modo a obter a fórmula final para a derivada topológica  $\mathcal{T}(\hat{x})$  do funcional de forma  $\psi$ . Entretanto, em geral esta não é tarefa fácil. Efetivamente, é necessário realizar a análise assintótica de  $u_\varepsilon$  e  $v_\varepsilon$  com relação a  $\varepsilon$ . Nesta seção é apresentado o cálculo formal da expansão para soluções associadas à condição de transmissão na inclusão. A justificativa rigorosa para as expansões assintóticas de  $u_\varepsilon$  e  $v_\varepsilon$  é dada na Seção 5.5.

#### 5.3.1 Expansão Assintótica do Estado Direto

Propondo um *ansatz* para a expansão de  $u_\varepsilon$  da seguinte maneira [55]:

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) &= u(x) + w_\varepsilon(x) + \tilde{u}_\varepsilon(x) \\
&= u(\hat{x}) + \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) + \frac{1}{2} \nabla \nabla u(y) (x - \hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) \\
&+ w_\varepsilon(x) + \tilde{u}_\varepsilon(x), \tag{5.3.32}
\end{aligned}$$

onde  $y$  é um ponto intermediário entre  $x$  e  $\hat{x}$ . Na fronteira da inclusão  $\partial B_\varepsilon$  tem-se

$$\llbracket q_\varepsilon(u_\varepsilon) \rrbracket \cdot n = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_n u_\varepsilon|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} - \gamma \partial_n u_\varepsilon|_{B_\varepsilon} = 0, \tag{5.3.33}$$

com  $q_\varepsilon(\varphi) = -\gamma_\varepsilon k \nabla \varphi$ . Assim, a derivada normal da expansão acima, calculada sobre  $\partial B_\varepsilon$ , conduz a

$$\begin{aligned}
(1 - \gamma) \nabla u(\hat{x}) \cdot n - \varepsilon (1 - \gamma) \nabla \nabla u(y) n \cdot n + \partial_n w_\varepsilon(x)|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} \\
- \gamma \partial_n w_\varepsilon(x)|_{B_\varepsilon} + \partial_n \tilde{u}_\varepsilon(x)|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} - \gamma \partial_n \tilde{u}_\varepsilon(x)|_{B_\varepsilon} = 0. \tag{5.3.34}
\end{aligned}$$

Logo, é possível selecionar  $w_\varepsilon$  tal que

$$\partial_n w_\varepsilon(x)|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} - \gamma \partial_n w_\varepsilon(x)|_{B_\varepsilon} = -(1 - \gamma) \nabla u(\hat{x}) \cdot n \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \quad (5.3.35)$$

O seguinte *problema exterior* é então considerado e formalmente obtido com  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } w_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \begin{array}{ll} \operatorname{div} q_\varepsilon(w_\varepsilon) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^2, \\ q_\varepsilon(w_\varepsilon) = -\gamma_\varepsilon k \nabla w_\varepsilon & \\ w_\varepsilon \rightarrow 0 & \text{no } \infty, \end{array} \\ \begin{array}{ll} w_\varepsilon|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} - w_\varepsilon|_{B_\varepsilon} = 0 & \\ \partial_n w_\varepsilon|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} - \gamma \partial_n w_\varepsilon|_{B_\varepsilon} = \hat{u} & \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \end{array} \end{array} \right. \quad (5.3.36)$$

com  $\hat{u} = -(1 - \gamma) \nabla u(\hat{x}) \cdot n$ . Tal problema de valor de contorno admite solução explícita, ou seja

$$w_\varepsilon(x)|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \frac{\varepsilon^2}{\|x - \hat{x}\|^2} \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}), \quad (5.3.37)$$

$$w_\varepsilon(x)|_{B_\varepsilon} = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}). \quad (5.3.38)$$

Agora é possível construir  $\tilde{u}_\varepsilon$  de modo que seja compensada a discrepância introduzida por termos de alta ordem em  $\varepsilon$ , bem como pela camada limite  $w_\varepsilon$  na fronteira exterior  $\partial\Omega$ . Isto significa que o *termo remanescente*  $\tilde{u}_\varepsilon$  é solução para o seguinte problema de valor de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } \tilde{u}_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \begin{array}{ll} \operatorname{div} q_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) = 0 & \text{em } \Omega, \\ q_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) = -\gamma_\varepsilon k \nabla \tilde{u}_\varepsilon & \\ \tilde{u}_\varepsilon = -\varepsilon^2 g & \text{sobre } \Gamma_D, \\ q_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \cdot n = -\varepsilon^2 q(g) \cdot n & \text{sobre } \Gamma_N, \\ \llbracket \tilde{u}_\varepsilon \rrbracket = 0 & \\ \llbracket q_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \rrbracket \cdot n = \varepsilon h & \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \end{array} \end{array} \right. \quad (5.3.39)$$

onde  $g = \varepsilon^{-2} w_\varepsilon$  e  $h = k(1 - \gamma) \nabla \nabla u(y) n \cdot n$ . Claramente  $\tilde{u}_\varepsilon \approx O(\varepsilon)$  em uma norma apropriada, desde que  $w_\varepsilon \approx O(\varepsilon^2)$  na fronteira exterior  $\partial\Omega$ . Entretanto, esta estimativa pode ser melhorada. De fato, de acordo com o Lema 5.1 da Seção 5.5, com  $r_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon$ , tem-se  $\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} = O(\varepsilon^2)$ . Finalmente, a *expansão* para  $u_\varepsilon$  é dada por

$$u_\varepsilon(x)|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} = u(x) + \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \frac{\varepsilon^2}{\|x - \hat{x}\|^2} \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) + O(\varepsilon^2), \quad (5.3.40)$$

$$u_\varepsilon(x)|_{B_\varepsilon} = u(x) + \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) + O(\varepsilon^2). \quad (5.3.41)$$

### 5.3.2 Expansão Assintótica do Estado Adjunto

Propondo novamente um *ansatz* para a expansão de  $v_\varepsilon$  desta maneira [55]:

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x) &= v(x) + w_\varepsilon(x) + \tilde{v}_\varepsilon(x) \\ &= v(\hat{x}) + \nabla v(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) + \frac{1}{2} \nabla \nabla v(y) (x - \hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) \\ &+ w_\varepsilon(x) + \tilde{v}_\varepsilon(x), \end{aligned} \quad (5.3.42)$$

onde  $y$  é um ponto intermediário entre  $x$  e  $\hat{x}$ . Na fronteira da inclusão  $\partial B_\varepsilon$  tem-se

$$\begin{aligned} \llbracket q_\varepsilon(v_\varepsilon) \rrbracket \cdot n &= -\llbracket Aq_\varepsilon(u) \rrbracket \cdot n \Rightarrow \\ \partial_n v_\varepsilon|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} - \gamma \partial_n v_\varepsilon|_{B_\varepsilon} &= -(1-\gamma)A\nabla u \cdot n, \end{aligned} \quad (5.3.43)$$

com  $q_\varepsilon(\varphi) = -\gamma_\varepsilon k \nabla \varphi$ . Assim, a derivada normal da expansão acima, calculada sobre  $\partial B_\varepsilon$ , conduz a

$$\begin{aligned} (1-\gamma)\nabla v(\hat{x}) \cdot n - \varepsilon(1-\gamma)\nabla \nabla v(y)n \cdot n + \partial_n w_\varepsilon(x)|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} - \gamma \partial_n w_\varepsilon(x)|_{B_\varepsilon} + \\ \partial_n \tilde{v}_\varepsilon(x)|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} - \gamma \partial_n \tilde{v}_\varepsilon(x)|_{B_\varepsilon} = -(1-\gamma)A\nabla u \cdot n. \end{aligned} \quad (5.3.44)$$

Tomando-se  $w_\varepsilon$  tal que

$$\partial_n w_\varepsilon(x)|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} - \gamma \partial_n w_\varepsilon(x)|_{B_\varepsilon} = -(1-\gamma)(\nabla v(\hat{x}) + A\nabla u(\hat{x})) \cdot n \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \quad (5.3.45)$$

onde tem-se expandido  $A\nabla u(x)$  em série de Taylor ao redor do centro  $\hat{x}$  da inclusão. Note que a partir da construção do estado adjunto tem-se

$$-\Delta v_\varepsilon = \operatorname{div}(A\nabla u) \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad -\Delta v = \operatorname{div}(A\nabla u) \quad \text{em } \Omega, \quad (5.3.46)$$

recordando que  $q_\varepsilon(\varphi) = -\gamma_\varepsilon k \nabla \varphi$  e  $q(\varphi) = -k \nabla \varphi$ . Cabe esclarecer que a solução  $v_\varepsilon$  da primeira equação deve ser entendida juntamente com as condições de transmissão na interface  $\partial B_\varepsilon$ . Ademais,  $v_\varepsilon = v = 0$  sobre  $\Gamma_D$  e  $\partial_n v_\varepsilon = \partial_n v = -A\nabla u \cdot n$  sobre  $\Gamma_N$ . Isto significa que ambos os problemas de valor de contorno associados a  $v_\varepsilon$  e  $v$  têm os mesmos termos fonte, exceto, por óbvio, na fronteira da inclusão  $\partial B_\varepsilon$ . Em particular, a condição de transmissão, ou seja  $\partial_n v_\varepsilon|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} - \gamma \partial_n v_\varepsilon|_{B_\varepsilon} = -(1-\gamma)A\nabla u \cdot n$  sobre  $\partial B_\varepsilon$ , não depende do parâmetro  $\varepsilon$  através da solução  $u_\varepsilon$ . Agora o seguinte *problema exterior* é formalmente obtido com  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } w_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \begin{array}{l} \operatorname{div} q_\varepsilon(w_\varepsilon) = 0 \\ q_\varepsilon(w_\varepsilon) = -\gamma_\varepsilon k \nabla w_\varepsilon \\ w_\varepsilon \rightarrow 0 \\ w_\varepsilon|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} - w_\varepsilon|_{B_\varepsilon} = 0 \\ \partial_n w_\varepsilon|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} - \gamma \partial_n w_\varepsilon|_{B_\varepsilon} = \hat{v} \end{array} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{em } \mathbb{R}^2, \\ \text{no } \infty, \\ \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \end{array} \quad (5.3.47)$$

com  $\hat{v} = -(1-\gamma)(\nabla v(\hat{x}) + A\nabla u(\hat{x})) \cdot n$ . O problema de valor de contorno acima admite uma solução explícita, ou seja

$$w_\varepsilon(x)|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \frac{\varepsilon^2}{\|x - \hat{x}\|^2} (\nabla v(\hat{x}) + A\nabla u(\hat{x})) \cdot (x - \hat{x}), \quad (5.3.48)$$

$$w_\varepsilon(x)|_{B_\varepsilon} = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} (\nabla v(\hat{x}) + A\nabla u(\hat{x})) \cdot (x - \hat{x}). \quad (5.3.49)$$

Agora, basta construir  $\tilde{v}_\varepsilon$  de modo a compensar as discrepâncias introduzidas por termos de alta ordem em  $\varepsilon$  bem como pela camada limite  $w_\varepsilon$  na fronteira exterior  $\partial \Omega$ . Isto significa que o *termo remanescente*  $\tilde{v}_\varepsilon$  deve ser a solução para o seguinte

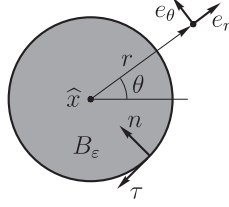


Figura 5.3: Sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$  centrado no ponto  $\hat{x} \in \Omega$ .

problema de valor de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } \tilde{v}_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \operatorname{div} q_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon) = 0 \quad \text{em } \Omega, \\ q_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon) = -\gamma_\varepsilon k \nabla \tilde{v}_\varepsilon \\ \tilde{v}_\varepsilon = -\varepsilon^2 g \quad \text{sobre } \Gamma_D, \\ q_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon) \cdot n = -\varepsilon^2 q(g) \cdot n \quad \text{sobre } \Gamma_N, \\ \llbracket \tilde{v}_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket q_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon) \rrbracket \cdot n = \varepsilon h \end{array} \right\} \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \quad (5.3.50)$$

com  $g = \varepsilon^{-2} w_\varepsilon$  e  $h = k(1 - \gamma)(\nabla \nabla v(y)n + A(\nabla \nabla u(z)n) \cdot n)$ , onde  $z$  é um ponto intermediário entre  $x$  e  $\hat{x}$ . Novamente, tem-se que  $\tilde{v}_\varepsilon \approx O(\varepsilon)$  em uma norma apropriada, desde que  $w_\varepsilon \approx O(\varepsilon^2)$  na fronteira exterior  $\partial \Omega$ . Do mesmo modo esta estimativa pode ser melhorada. Com efeito, tomando  $r_\varepsilon = \tilde{v}_\varepsilon$  no Lema 5.1 da Seção 5.5, tem-se  $\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} = O(\varepsilon^2)$ . Finalmente, a *expansão* para  $v_\varepsilon$  pode ser escrita como

$$v_\varepsilon(x)|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} = v(x) + \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \frac{\varepsilon^2}{\|x - \hat{x}\|^2} (\nabla v(\hat{x}) + A \nabla u(\hat{x})) \cdot (x - \hat{x}) + O(\varepsilon^2), \quad (5.3.51)$$

$$v_\varepsilon(x)|_{B_\varepsilon} = v(x) + \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} (\nabla v(\hat{x}) + A \nabla u(\hat{x})) \cdot (x - \hat{x}) + O(\varepsilon^2). \quad (5.3.52)$$

## 5.4 Cálculo da Derivada Topológica

Agora, é necessário calcular a integral na fórmula (5.2.16) para coletar os termos em potências de  $\varepsilon$  e reconhecer a função  $f(\varepsilon)$ . Com estes resultados, é possível realizar a passagem ao limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . A integral em (5.2.16) pode ser calculada explicitamente usando as expansões para os estados direto  $u_\varepsilon$  e adjunto  $v_\varepsilon$ , respectivamente dadas por (5.3.40), (5.3.41) e (5.3.51), (5.3.52). A ideia é introduzir um sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$  com centro em  $\hat{x}$  (ver fig. 5.3). Em seguida, é possível escrever  $u_\varepsilon$ ,  $v_\varepsilon$  e também o tensor  $A$  nesse sistema de coordenadas para calcular as integrais explicitamente (ver Apêndice B). Em particular, a primeira integral em (5.2.16) é dada por

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial B_\varepsilon} \llbracket \Sigma_\varepsilon - \nabla u_\varepsilon \otimes A q_\varepsilon(u_\varepsilon - u) \rrbracket n \cdot n = \\ & 2\pi\varepsilon \left( 2\alpha q(u(\hat{x})) \cdot \nabla v(\hat{x}) + \frac{1}{2} A q(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x}) + \alpha A q(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x}) - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \gamma (1 + \alpha)^2 A q(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x}) + \frac{1}{4} \alpha^2 \operatorname{tr}(A) q(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x}) \right) + o(\varepsilon), \quad (5.4.53) \end{aligned}$$

com o parâmetro  $\alpha$  dado por  $\alpha = (1 - \gamma)/(1 + \gamma)$ . A segunda integral em (5.2.16) torna-se

$$- \int_{\Omega} Aq_{\varepsilon}(u_{\varepsilon} - u) \cdot \nabla u'_{\varepsilon} = -2\pi\varepsilon \left( \frac{1}{2}\alpha^2 \text{tr}(A)q(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x}) \right) + o(\varepsilon), \quad (5.4.54)$$

onde  $u'_{\varepsilon}$  é obtido simplesmente calculando a derivada de  $u_{\varepsilon}$  em (5.3.40) e (5.3.41) com relação a  $\varepsilon$ . Finalmente, a derivada topológica dada por (4.1.7) conduz a

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\hat{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\varepsilon)} & \left[ 2\pi\varepsilon \left( 2\alpha q(u(\hat{x})) \cdot \nabla v(\hat{x}) + \frac{1}{2}Aq(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x}) \right. \right. \\ & + \alpha Aq(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x}) - \frac{1}{2}\gamma(1 + \alpha)^2 Aq(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x}) \\ & \left. \left. - \frac{1}{4}\alpha^2 \text{tr}(A)q(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x}) \right) + o(\varepsilon) \right], \quad (5.4.55) \end{aligned}$$

onde o termo remanescente  $o(\varepsilon)$  provém das estimativas apresentadas na Seção 5.5 e da *regularidade elíptica* interior de  $u$  e  $v$ . Agora, objetivando extrair o termo principal da expansão acima, toma-se  $f(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2$ , que conduz ao seguinte resultado:

**Teorema 5.1.** *A derivada topológica do funcional de forma (5.1.1) é dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\hat{x}) &= 2\alpha q(u(\hat{x})) \cdot \nabla v(\hat{x}) + \frac{1}{2}Aq(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x}) \\ &+ \alpha Aq(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x}) - \frac{1}{2}\gamma(1 + \alpha)^2 Aq(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x}) \\ &- \frac{1}{4}\alpha^2 \text{tr}(A)q(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in \Omega, \quad (5.4.56) \end{aligned}$$

recordando que  $u$  e  $v$  são soluções dos problemas direto (5.1.2) e adjunto (5.1.13), respectivamente, e  $\alpha = (1 - \gamma)/(1 + \gamma)$ .

**Observação 5.2.** *Note que para  $A = \mathbf{I}$  tem-se o funcional de forma associado à energia. Neste caso, o estado adjunto é dado por  $v = -(u + \varphi)$ , onde  $\varphi$  é o levantamento (lifting) da condição de Dirichlet  $\bar{u}$  na fronteira  $\Gamma_D$ , ou seja,  $\varphi|_{\Gamma_D} = -\bar{u}$ . Desde que é possível construir  $\varphi$  tal que  $\hat{x} \notin \text{supp}(\varphi)$ , então a derivada topológica torna-se*

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = -P_{\gamma}q(u(\hat{x})) \cdot \nabla u(\hat{x}), \quad (5.4.57)$$

onde o tensor de polarização  $P_{\gamma}$  é dado pelo seguinte tensor de segunda ordem isotrópico

$$P_{\gamma} = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \mathbf{I}. \quad (5.4.58)$$

**Observação 5.3.** *Cabe esclarecer que o tensor de polarização resulta isotrópico porque foi considerado o caso particular de inclusões circulares. Para o tensor de polarização associado a formas arbitrárias de inclusões o leitor poderá consultar [3], por exemplo.*

**Observação 5.4.** *Formalmente pode-se tomar os casos limites  $\gamma \rightarrow 0$  e  $\gamma \rightarrow \infty$ . Para  $\gamma \rightarrow 0$ , a inclusão resulta em um isolamento ideal e a condição de transmissão na fronteira da inclusão degenera para condição de contorno de Neumann homogênea. Efetivamente, neste caso o tensor de polarização é dado por*

$$P_0 = \mathbf{I}. \quad (5.4.59)$$

Ademais, para  $\gamma \rightarrow \infty$ , a inclusão resulta em um condutor ideal e o tensor de polarização é dado por

$$P_{\infty} = -\mathbf{I}. \quad (5.4.60)$$

## 5.5 Estimativas para os Termos Remanescentes

Nesta Seção objetiva-se obter a estimativa dos termos remanescentes da expansão assintótica topológica usada no cálculo da derivada topológica (5.4.56). Para tal, estuda-se o comportamento assintótico dos termos remanescentes  $\tilde{u}_\varepsilon$  em (5.3.39) e  $\tilde{v}_\varepsilon$  em (5.3.50), conduzindo ao seguinte resultado:

**Lema 5.1.** *Seja  $r_\varepsilon$  a solução para o seguinte problema variacional:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } r_\varepsilon \in \tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon, \text{ tal que} \\ - \int_{\Omega} q_\varepsilon(r_\varepsilon) \cdot \nabla \eta = \varepsilon^2 \int_{\Gamma_N} q(g) \cdot n \eta + \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} h \eta \quad \forall \eta \in \tilde{\mathcal{V}}_\varepsilon, \\ \text{com } q_\varepsilon(r_\varepsilon) = -\gamma_\varepsilon k \nabla r_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (5.5.61)$$

onde o conjunto  $\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon$  e o espaço  $\tilde{\mathcal{V}}_\varepsilon$  são definidos como

$$\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon := \{ \varphi \in H^1(\Omega) : \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \text{ sobre } \partial B_\varepsilon, \varphi|_{\Gamma_D} = -\varepsilon^2 g \}, \quad (5.5.62)$$

$$\tilde{\mathcal{V}}_\varepsilon := \{ \varphi \in H^1(\Omega) : \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \text{ sobre } \partial B_\varepsilon, \varphi|_{\Gamma_D} = 0 \}, \quad (5.5.63)$$

com funções  $g$  e  $h$  independentes do parâmetro de controle  $\varepsilon$ . Assim, tem-se a estimativa  $\|r_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} = O(\varepsilon^2)$  para o resíduo.

*Demonstração.* Tomando  $\eta = r_\varepsilon - \varphi_\varepsilon$  em (5.5.61), onde  $\varphi_\varepsilon$  é o levantamento da condição de Dirichlet  $\varepsilon^2 g$  na fronteira  $\Gamma_D$ , tem-se

$$- \int_{\Omega} q_\varepsilon(r_\varepsilon) \cdot \nabla r_\varepsilon = \varepsilon^2 \int_{\Gamma_N} q(g) \cdot n r_\varepsilon + \varepsilon^2 \int_{\Gamma_D} g q(r_\varepsilon) \cdot n + \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} h r_\varepsilon. \quad (5.5.64)$$

A partir da desigualdade de *Cauchy-Schwarz* obtém-se

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} q_\varepsilon(r_\varepsilon) \cdot \nabla r_\varepsilon &\leq \varepsilon^2 \|q(g) \cdot n\|_{H^{-1/2}(\Gamma_N)} \|r_\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)} \\ &\quad + \varepsilon^2 \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} \|q(r_\varepsilon) \cdot n\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)} \\ &\quad + \varepsilon \|h\|_{H^{-1/2}(\partial B_\varepsilon)} \|r_\varepsilon\|_{H^{1/2}(\partial B_\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (5.5.65)$$

Considerando o *teorema do traço*, tem-se

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} q_\varepsilon(r_\varepsilon) \cdot \nabla r_\varepsilon &\leq \varepsilon^2 C_1 \|r_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon^2 C_2 \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \|h\|_{L^2(B_\varepsilon)} \|r_\varepsilon\|_{H^1(B_\varepsilon)} \\ &\leq \varepsilon^2 C_1 \|r_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon^2 C_3 \|r_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon^2 C_4 \|r_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \varepsilon^2 C_5 \|r_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (5.5.66)$$

onde se tem usado a *regularidade elíptica* interior. Finalmente, a partir da *coercividade* da forma bilinear no lado esquerdo de (5.5.61), ou seja,

$$c \|r_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq - \int_{\Omega} q_\varepsilon(r_\varepsilon) \cdot \nabla r_\varepsilon, \quad (5.5.67)$$

obtém-se

$$\|r_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^2, \quad (5.5.68)$$

que conduz ao resultado, com  $C = C_5/c$  independente do parâmetro  $\varepsilon$   $\square$

**Corolário 5.1.** *Fixando  $r_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon$  e  $r_\varepsilon = \tilde{v}_\varepsilon$  no Lema 5.1, tem-se as estimativas desejadas para ambos os termos remanescentes, ou seja*

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} = O(\varepsilon^2) \quad e \quad \|\tilde{v}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} = O(\varepsilon^2). \quad (5.5.69)$$

## 5.6 Exercícios

1. Obtenha as expressões (5.4.53) e (5.4.54).
2. Repita o desenvolvimento apresentado neste capítulo levando em conta o seguinte funcional de forma

$$\psi(\chi) := \mathcal{J}_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \mathbb{B}\sigma(u) \cdot \nabla u^s ,$$

onde  $\mathbb{B} = \beta_1 \mathbb{I} + \beta_2 \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$  é um tensor isotrópico de quarta ordem, com  $\beta_1$  e  $\beta_2$  usados para denotar parâmetros reais dados. Além do mais, a função vetorial  $u$  é solução do seguinte problema de valor de contorno vetorial de segunda ordem:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Encontre } u, \text{ tal que} & \\ -\text{div}\sigma(u) = 0 & \text{em } \Omega , \\ \sigma(u) = \mathbb{C}\nabla u^s , & \\ u = \bar{u} & \text{sobre } \Gamma_D , \\ \sigma(u)n = \bar{q} & \text{sobre } \Gamma_N . \end{array} \right.$$

3. Repita o desenvolvimento apresentado neste capítulo levando em conta o seguinte funcional de forma

$$\psi(\chi) := \mathcal{J}_\Omega(u) = -\frac{1}{2} \int_\Omega \mathbb{B}M(u) \cdot \nabla \nabla u ,$$

onde  $\mathbb{B} = \beta_1 \mathbb{I} + \beta_2 \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$  é um tensor isotrópico de quarta ordem, com  $\beta_1$  e  $\beta_2$  parâmetros reais dados. Ademais, a função escalar  $u$  é solução do seguinte problema de valor de contorno escalar de quarta ordem:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Encontre } u, \text{ tal que} & \\ \text{div}(\text{div}M(u)) = 0 & \text{em } \Omega , \\ M(u) = -\mathbb{C}\nabla \nabla u , & \\ u = \bar{u} & \text{sobre } \Gamma_{D_u} , \\ \partial_n u = \bar{\rho} & \text{sobre } \Gamma_{D_\rho} , \\ M^{nn}(u) = \bar{m} & \text{sobre } \Gamma_{N_m} , \\ \partial_\tau M^{\tau n}(u) + \text{div}M(u) \cdot n = \bar{q} & \text{sobre } \Gamma_{N_q} , \\ \llbracket M^{\tau n}(u(x_i)) \rrbracket = \bar{Q}_i & \text{sobre } x_i \in \Gamma_{N_q} . \end{array} \right.$$





## Capítulo 6

# Derivada Topológica em Elasticidade Tridimensional

Neste capítulo a derivada topológica da energia potencial total associada ao problema de elasticidade linear tridimensional é obtida para o caso particular de uma perturbação na forma de uma pequena cavidade esférica  $B_\varepsilon(\hat{x})$ , com  $\hat{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$  e  $\overline{B_\varepsilon} \Subset \Omega$ . Portanto, o domínio topologicamente perturbado é dado por  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}$ . O método de cálculo da derivada topológica segue os mesmos passos apresentados no Capítulo 5 e no livro de Novotny & Sokołowski, 2013 [84]. Inicialmente é definido um campo de velocidade à mudança de forma  $\mathfrak{V}$  que representa uma expansão uniforme da cavidade  $B_\varepsilon(\hat{x})$ . Graças a este campo de velocidade, juntamente com a Proposição 4.1, é possível usar a derivada de forma do funcional energia como um passo intermediário no cálculo da derivada topológica. De fato, após obter a expansão assintótica da solução do sistema de elasticidade (definido no domínio perturbado  $\Omega_\varepsilon$ ) com relação ao parâmetro de controle  $\varepsilon$ , o limite singular  $\varepsilon \rightarrow 0$  na fórmula (4.1.7) pode ser avaliado explicitamente, conduzindo à forma final da derivada topológica.

### 6.1 Formulação do Problema

O funcional de forma associado ao domínio não perturbado  $\Omega$  é dado por

$$\psi(\chi) := \mathcal{J}_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \sigma(u) \cdot \nabla u^s - \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot u, \quad (6.1.1)$$

onde a função vetorial  $u$  é a solução do problema variacional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u \in \mathcal{U}, \text{ tal que} \\ \int_\Omega \sigma(u) \cdot \nabla \eta^s = \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{V}, \\ \text{com } \sigma(u) = \mathbb{C} \nabla u^s. \end{array} \right. \quad (6.1.2)$$

Na equação acima,  $\mathbb{C}$  é o tensor constitutivo dado por

$$\mathbb{C} = \frac{E}{1+\nu} \left( \mathbb{I} + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \right), \quad (6.1.3)$$

em que  $\mathbb{I}$  e  $\mathbb{I}$  são os tensores identidade de segunda e quarta ordens, respectivamente,  $E$  é o módulo de Young e  $\nu$  o coeficiente de Poisson, ambos considerados constantes

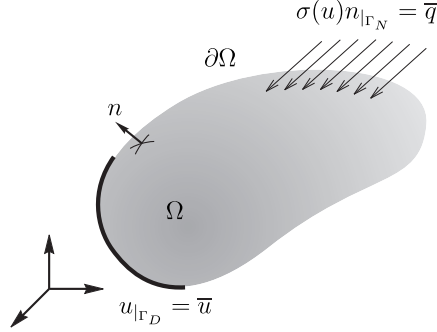


Figura 6.1: Problema de elasticidade linear tridimensional definido no domínio não perturbado  $\Omega$ .

em todo o domínio. O conjunto  $\mathcal{U}$  e o espaço  $\mathcal{V}$  são respectivamente definidos como

$$\mathcal{U} := \{\varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) : \varphi|_{\Gamma_D} = \bar{u}\}, \quad (6.1.4)$$

$$\mathcal{V} := \{\varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}. \quad (6.1.5)$$

Ademais,  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$  com  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ , onde  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$  são os contornos de Dirichlet e Neumann, respectivamente. Assim  $\bar{u}$  é um dado de Dirichlet sobre  $\Gamma_D$  e  $\bar{q}$  é um dado de Neumann sobre  $\Gamma_N$ , ambos considerados suficientemente regulares. Veja detalhes na fig. 6.1. O sistema forte associado ao problema variacional (6.1.2) pode ser escrito como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u, \text{ tal que} \\ -\text{div}\sigma(u) = 0 \\ \sigma(u) = \mathbb{C}\nabla^s u, \\ u = \bar{u} \\ \sigma(u)n = \bar{q} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{em } \Omega, \\ \\ \text{sobre } \Gamma_D, \\ \text{sobre } \Gamma_N. \end{array} \right. \quad (6.1.6)$$

**Observação 6.1.** Desde que o módulo de Young  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$  são considerados constantes, o problema de valor de contorno acima reduz ao sistema de Navier, ou seja

$$-\mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla(\text{div}u) = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (6.1.7)$$

com os coeficientes de Lamé  $\mu$  e  $\lambda$  respectivamente dados por

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad e \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (6.1.8)$$

Agora, considerando o mesmo problema no domínio perturbado  $\Omega_\varepsilon$ , a energia potencial total pode ser escrita como

$$\psi(\chi_\varepsilon) := \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma(u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon^s - \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot u_\varepsilon, \quad (6.1.9)$$

onde a função vetorial  $u_\varepsilon$  resolve o problema variacional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma(u_\varepsilon) \cdot \nabla \eta^s = \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_\varepsilon, \\ \text{com } \sigma(u_\varepsilon) = \mathbb{C}\nabla u_\varepsilon^s. \end{array} \right. \quad (6.1.10)$$

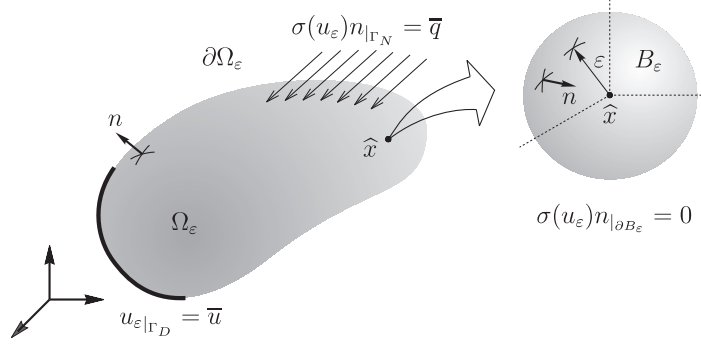


Figura 6.2: Problema de elasticidade linear tridimensional definido no domínio perturbado  $\Omega_\varepsilon$ .

O conjunto  $\mathcal{U}_\varepsilon$  e o espaço  $\mathcal{V}_\varepsilon$  são definidos como

$$\mathcal{U}_\varepsilon := \{\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}^3) : \varphi|_{\Gamma_D} = \bar{u}\}, \quad (6.1.11)$$

$$\mathcal{V}_\varepsilon := \{\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}^3) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}. \quad (6.1.12)$$

Desde que  $u_\varepsilon$  é livre sobre  $\partial B_\varepsilon$ , então tem-se condição de Neumann homogênea na fronteira da cavidade. Isto é, a cavidade é uma fronteira livre representando um vazio. Veja detalhes na fig. 6.2. O sistema forte associado ao problema variacional (6.1.10) pode ser escrito como:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Encontre } u_\varepsilon, \text{ tal que} \\ -\text{div}(\sigma(u_\varepsilon)) = 0 & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \sigma(u_\varepsilon) = \mathbb{C}\nabla u_\varepsilon^s, & \\ u_\varepsilon = \bar{u} & \text{sobre } \Gamma_D, \\ \sigma(u_\varepsilon)n = \bar{q} & \text{sobre } \Gamma_N, \\ \sigma(u_\varepsilon)n = 0 & \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (6.1.13)$$

## 6.2 Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma

A fim de aplicar o resultado apresentado na Proposição 4.1 é necessário calcular a derivada de forma do funcional  $\mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon)$  com relação a uma expansão uniforme da cavidade  $B_\varepsilon$ . Em particular, a análise de sensibilidade à mudança de forma é realizada em detalhes. Portanto, usando o teorema do transporte de Reynolds dado pela fórmula (A.4.84), a derivada à mudança de forma do funcional (6.1.9) resulta em

$$\dot{\mathcal{J}}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma(u_\varepsilon) \cdot (\nabla u_\varepsilon^s)^s + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (\sigma(u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon^s)n \cdot \mathfrak{V} - \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot \dot{u}_\varepsilon, \quad (6.2.14)$$

onde  $(\cdot)'$  é a derivada parcial de  $(\cdot)$  com relação a  $\varepsilon$  e  $\mathfrak{V}$  é a velocidade à mudança de forma definida de modo que  $\mathfrak{V}|_{\partial\Omega} = 0$  e  $\mathfrak{V}|_{\partial B_\varepsilon} = -n$ . Usando a relação entre as derivadas material e espacial de campos vetoriais (A.4.82), ou seja  $\varphi' = \dot{\varphi} - (\nabla\varphi)\mathfrak{V}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{J}}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (\sigma(u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon^s)n \cdot \mathfrak{V} - \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma(u_\varepsilon) \cdot \nabla((\nabla u_\varepsilon)\mathfrak{V})^s \\ &+ \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma(u_\varepsilon) \cdot \nabla \dot{u}_\varepsilon^s - \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot \dot{u}_\varepsilon. \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

Desde que  $\dot{u}_\varepsilon$  é a variação de  $u_\varepsilon$  na direção de  $\mathfrak{V}$ , então  $\dot{u}_\varepsilon \in \mathcal{V}_\varepsilon$ . Agora, tomando  $\dot{u}_\varepsilon$  como função teste no problema variacional (6.1.10), os últimos dois termos da equação acima desaparecem. Usando a relação tensorial (B.2.23) e aplicando o teorema da divergência (B.3.33) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{J}}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (\sigma(u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon^s) n \cdot \mathfrak{V} \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} ((\nabla u_\varepsilon) \mathfrak{V}) \cdot \sigma(u_\varepsilon) n + \int_{\Omega_\varepsilon} (\operatorname{div} \sigma(u_\varepsilon)) \cdot (\nabla u_\varepsilon) \mathfrak{V}, \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

onde foi considerado o fato de que  $\sigma(u_\varepsilon)^\top = \sigma(u_\varepsilon)$ . Tratando-se de expansão uniforme de uma cavidade esférica  $B_\varepsilon$ , recorde-se que  $\mathfrak{V}|_{\partial\Omega} = 0$  e  $\mathfrak{V}|_{\partial B_\varepsilon} = -n$ , logo

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{J}}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) &= -\frac{1}{2} \int_{\partial B_\varepsilon} \sigma(u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon^s + \int_{\partial B_\varepsilon} ((\nabla u_\varepsilon) n) \cdot \sigma(u_\varepsilon) n \\ &\quad + \int_{\Omega_\varepsilon} (\operatorname{div} \sigma(u_\varepsilon)) \cdot (\nabla u_\varepsilon) \mathfrak{V}, \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

sendo  $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon$ . Considerando que  $u_\varepsilon$  também é solução para o sistema forte (6.1.13), ou seja,  $\operatorname{div} \sigma(u_\varepsilon) = 0$  em  $\Omega_\varepsilon$  e  $\sigma(u_\varepsilon) n = 0$  sobre  $\partial B_\varepsilon$ , os dois últimos termos da equação acima desaparecem. Assim, tem-se finalmente que

$$\frac{d}{d\varepsilon} \psi(\chi_\varepsilon) = \dot{\mathcal{J}}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) = -\frac{1}{2} \int_{\partial B_\varepsilon} \sigma(u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon^s, \quad (6.2.18)$$

onde o gradiente de forma originalmente definido em todo o domínio  $\Omega_\varepsilon$  conduz, novamente, a uma integral definida somente na fronteira da cavidade  $\partial B_\varepsilon$ . Portanto, a fim de aplicar o resultado da Proposição 4.1, é necessário conhecer o comportamento assintótico da função  $u_\varepsilon$  com relação a  $\varepsilon$  na vizinhança da cavidade  $B_\varepsilon$ . Em particular, uma vez que o comportamento explícito é conhecido, pode-se identificar a função  $f(\varepsilon)$  e realizar a passagem ao limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  em (4.1.7), permitindo obter a fórmula final para a derivada topológica  $\mathcal{T}$  do funcional de forma  $\psi$ .

### 6.3 Análise Assintótica da Solução

Nesta seção é apresentado o cálculo formal da expansão da solução  $u_\varepsilon$  associada à condição de Neumann homogênea na fronteira da cavidade. Para uma rigorosa justificativa da expansão assintótica de  $u_\varepsilon$ , o leitor poderá remeter-se a [55, 69], por exemplo. Propondo um *ansatz* para a expansão de  $u_\varepsilon$  na forma [55]

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + w_\varepsilon(x) + \tilde{u}_\varepsilon(x). \quad (6.3.19)$$

Após aplicar o operador  $\sigma$  tem-se que

$$\begin{aligned} \sigma(u_\varepsilon(x)) &= \sigma(u(x)) + \sigma(w_\varepsilon(x)) + \sigma(\tilde{u}_\varepsilon(x)) \\ &= \sigma(u(\hat{x})) + \nabla \sigma(u(y))(x - \hat{x}) + \sigma(w_\varepsilon(x)) + \sigma(\tilde{u}_\varepsilon(x)), \end{aligned} \quad (6.3.20)$$

onde  $y$  é um ponto intermediário entre  $x$  e  $\hat{x}$ . Na fronteira da cavidade  $\partial B_\varepsilon$  tem-se  $\sigma(u_\varepsilon) n|_{\partial B_\varepsilon} = 0$ . Assim, a projeção normal da expansão acima, avaliada sobre  $\partial B_\varepsilon$ , conduz a

$$\sigma(u(\hat{x})) n - \varepsilon (\nabla \sigma(u(y)) n) n + \sigma(w_\varepsilon(x)) n + \sigma(\tilde{u}_\varepsilon(x)) n = 0. \quad (6.3.21)$$

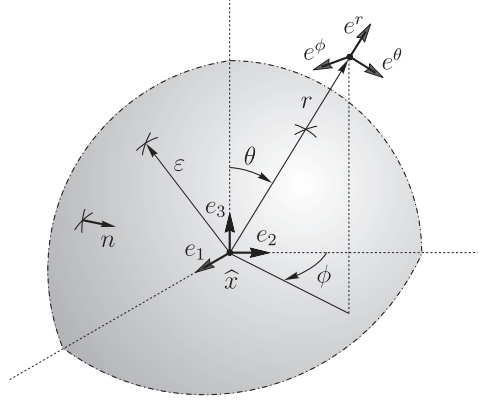


Figura 6.3: Sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  centrado no ponto  $\hat{x} \in \Omega$ .

Em particular, é possível selecionar  $\sigma(w_\varepsilon)$  tal que

$$\sigma(w_\varepsilon(x))n = -\sigma(u(\hat{x}))n \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \quad (6.3.22)$$

Agora, o seguinte *problema exterior* é formalmente obtido com  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\begin{cases} \text{Encontre } \sigma(w_\varepsilon), \text{ tal que} \\ \text{div} \sigma(w_\varepsilon) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_\varepsilon}, \\ \sigma(w_\varepsilon) \rightarrow 0 & \text{no } \infty, \\ \sigma(w_\varepsilon)n = -\sigma(u(\hat{x}))n & \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \end{cases} \quad (6.3.23)$$

O problema de valor de contorno acima admite solução explícita (veja, por exemplo, o livro de Little 1973 [62]), que será usada mais tarde para obter a expansão para  $\sigma(u_\varepsilon)$ . Agora é possível construir  $\sigma(\tilde{u}_\varepsilon)$  de modo que compense as discrepâncias introduzidas pelos termos de ordem superior em  $\varepsilon$  bem como pela camada limite  $\sigma(w_\varepsilon)$  na fronteira exterior  $\partial\Omega$ . Isto significa que o *resíduo*  $\sigma(\tilde{u}_\varepsilon)$  deve ser solução para o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} \text{Encontre } \sigma(\tilde{u}_\varepsilon), \text{ tal que} \\ \text{div} \sigma(\tilde{u}_\varepsilon) = 0 & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \sigma(\tilde{u}_\varepsilon) = -\sigma(w_\varepsilon) & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \sigma(\tilde{u}_\varepsilon)n = \varepsilon(\nabla\sigma(u(y))n)n & \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \end{cases} \quad (6.3.24)$$

onde, de acordo com [55, 69],  $\sigma(\tilde{u}_\varepsilon) \approx O(\varepsilon^3)$ . Finalmente, a *expansão* para  $\sigma(u_\varepsilon)$  no sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  pode ser escrita como (veja fig. 6.3)

$$\begin{aligned} \sigma^{rr}(u_\varepsilon) &= \sigma_1^{rr} + \sigma_2^{rr} + \sigma_3^{rr} + O(\varepsilon), \\ \sigma^{r\theta}(u_\varepsilon) &= \sigma_1^{r\theta} + \sigma_2^{r\theta} + \sigma_3^{r\theta} + O(\varepsilon), \\ \sigma^{r\phi}(u_\varepsilon) &= \sigma_1^{r\phi} + \sigma_2^{r\phi} + \sigma_3^{r\phi} + O(\varepsilon), \\ \sigma^{\theta\theta}(u_\varepsilon) &= \sigma_1^{\theta\theta} + \sigma_2^{\theta\theta} + \sigma_3^{\theta\theta} + O(\varepsilon), \\ \sigma^{\theta\phi}(u_\varepsilon) &= \sigma_1^{\theta\phi} + \sigma_2^{\theta\phi} + \sigma_3^{\theta\phi} + O(\varepsilon), \\ \sigma^{\phi\phi}(u_\varepsilon) &= \sigma_1^{\phi\phi} + \sigma_2^{\phi\phi} + \sigma_3^{\phi\phi} + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (6.3.25)$$

em que  $\sigma_i^{rr}$ ,  $\sigma_i^{r\theta}$ ,  $\sigma_i^{r\phi}$ ,  $\sigma_i^{\theta\theta}$ ,  $\sigma_i^{\theta\phi}$  e  $\sigma_i^{\phi\phi}$ , para  $i = 1, 2, 3$ , são escritos como:

Para  $i = 1$

$$\sigma_1^{rr} = \frac{\sigma_1}{14 - 10\nu} \left[ 12 \left( \frac{\varepsilon^3}{r^3} - \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right) + \left( 14 - 10\nu - 10(5 - \nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} + 36 \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right) \sin^2 \theta \sin^2 \phi \right], \quad (6.3.26)$$

$$\sigma_1^{r\theta} = \frac{\sigma_1}{14 - 10\nu} \left[ 7 - 5\nu + 5(1 + \nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} - 12 \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right] \sin 2\theta \sin^2 \phi, \quad (6.3.27)$$

$$\sigma_1^{r\phi} = \frac{\sigma_1}{14 - 10\nu} \left[ 7 - 5\nu + 5(1 + \nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} - 12 \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right] \sin \theta \sin 2\phi, \quad (6.3.28)$$

$$\sigma_1^{\theta\theta} = \frac{\sigma_1}{56 - 40\nu} \left[ 14 - 10\nu + (1 + 10\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} + 3 \frac{\varepsilon^5}{r^5} - \left( 14 - 10\nu + 25(1 - 2\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} - 9 \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right) \cos 2\phi + \left( 28 - 20\nu - 10(1 - 2\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} + 42 \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right) \cos 2\theta \sin^2 \phi \right], \quad (6.3.29)$$

$$\sigma_1^{\theta\phi} = \frac{\sigma_1}{14 - 10\nu} \left[ 7 - 5\nu + 5(1 - 2\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} + 3 \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right] \cos \theta \sin 2\phi, \quad (6.3.30)$$

$$\sigma_1^{\phi\phi} = \frac{\sigma_1}{56 - 40\nu} \left[ 28 - 20\nu + (11 - 10\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} + 9 \frac{\varepsilon^5}{r^5} + \left( 28 - 20\nu + 5(1 - 2\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} + 27 \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right) \cos 2\phi - 30 \left( (1 - 2\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} - \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right) \cos 2\theta \sin^2 \phi \right]. \quad (6.3.31)$$

Para  $i = 2$

$$\sigma_2^{rr} = \frac{\sigma_2}{14 - 10\nu} \left[ 12 \left( \frac{\varepsilon^3}{r^3} - \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right) + \left( 14 - 10\nu - 10(5 - \nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} + 36 \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \phi \right], \quad (6.3.32)$$

$$\sigma_2^{r\theta} = \frac{\sigma_2}{14 - 10\nu} \left[ 7 - 5\nu + 5(1 + \nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} - 12 \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right] \cos^2 \phi \sin 2\theta, \quad (6.3.33)$$

$$\sigma_2^{r\phi} = \frac{-\sigma_2}{14 - 10\nu} \left[ 7 - 5\nu + 5(1 + \nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} - 12 \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right] \sin \theta \sin 2\phi, \quad (6.3.34)$$

$$\sigma_2^{\theta\theta} = \frac{\sigma_2}{56 - 40\nu} \left[ 14 - 10\nu + (1 + 10\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} + 3 \frac{\varepsilon^5}{r^5} + \left( 14 - 10\nu + 25(1 - 2\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} - 9 \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right) \cos 2\phi + \left( 28 - 20\nu - 10(1 - 2\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} + 42 \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right) \cos 2\theta \cos^2 \phi \right], \quad (6.3.35)$$

$$\sigma_2^{\theta\phi} = \frac{-\sigma_2}{14 - 10\nu} \left[ 7 - 5\nu + 5(1 - 2\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} + 3 \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right] \cos \theta \sin 2\phi, \quad (6.3.36)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2^{\phi\phi} = \frac{\sigma_2}{56 - 40\nu} & \left[ 28 - 20\nu + (11 - 10\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} + 9 \frac{\varepsilon^5}{r^5} - \right. \\ & \left. \left( 28 - 20\nu + 5(1 - 2\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} + 27 \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right) \cos 2\phi - \right. \\ & \left. 30 \left( (1 - 2\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} - \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right) \cos 2\theta \cos^2 \phi \right]. \end{aligned} \quad (6.3.37)$$

Para  $i = 3$

$$\begin{aligned} \sigma_3^{rr} = \frac{\sigma_3}{14 - 10\nu} & \left[ 14 - 10\nu - (38 - 10\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} + 24 \frac{\varepsilon^5}{r^5} - \right. \\ & \left. \left( 14 - 10\nu - 10(5 - \nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} + 36 \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right) \sin^2 \theta \right], \end{aligned} \quad (6.3.38)$$

$$\sigma_3^{r\theta} = \frac{-\sigma_3}{14 - 10\nu} \left[ 14 - 10\nu + 10(1 + \nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} - 24 \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right] \cos \theta \sin \theta, \quad (6.3.39)$$

$$\sigma_3^{r\phi} = 0, \quad (6.3.40)$$

$$\begin{aligned} \sigma_3^{\theta\theta} = \frac{\sigma_3}{14 - 10\nu} & \left[ (9 - 15\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} - 12 \frac{\varepsilon^5}{r^5} + \right. \\ & \left. \left( 14 - 10\nu - 5(1 - 2\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} + 21 \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right) \sin^2 \theta \right], \end{aligned} \quad (6.3.41)$$

$$\sigma_3^{\theta\phi} = 0, \quad (6.3.42)$$

$$\begin{aligned} \sigma_3^{\phi\phi} = \frac{\sigma_3}{14 - 10\nu} & \left[ (9 - 15\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} - 12 \frac{\varepsilon^5}{r^5} - \right. \\ & \left. 15 \left( (1 - 2\nu) \frac{\varepsilon^3}{r^3} - \frac{\varepsilon^5}{r^5} \right) \sin^2 \theta \right]. \end{aligned} \quad (6.3.43)$$

Nas fórmulas anteriores,  $\sigma_1 = \sigma_1(u(\hat{x}))$ ,  $\sigma_2 = \sigma_2(u(\hat{x}))$  e  $\sigma_3 = \sigma_3(u(\hat{x}))$  são os autovalores do tensor tensão  $\sigma(u(\hat{x}))$  associado ao domínio original  $\Omega$ , sem cavidade. Em outras palavras, o tensor  $\sigma(u(\hat{x}))$  foi diagonalizado da seguinte forma:

$$\sigma(u(\hat{x})) = \sum_{i=1}^3 \sigma_i (e_i \otimes e_i), \quad (6.3.44)$$

onde  $\sigma_i$  é o autovalor associado ao autovetor  $e_i$  do tensor  $\sigma(u(\hat{x}))$ . Ademais,  $\sigma^{rr}(\varphi)$ ,  $\sigma^{r\theta}(\varphi)$ ,  $\sigma^{r\phi}(\varphi)$ ,  $\sigma^{\theta\theta}(\varphi)$ ,  $\sigma^{\theta\phi}(\varphi)$  e  $\sigma^{\phi\phi}(\varphi)$  são as componentes do tensor  $\sigma(\varphi)$  no sistema de coordenadas esféricas, ou seja,  $\sigma^{rr}(\varphi) = e^r \cdot \sigma(\varphi) e^r$ ,  $\sigma^{r\theta}(\varphi) = \sigma^{\theta r}(\varphi) = e^r \cdot \sigma(\varphi) e^\theta$ ,  $\sigma^{r\phi}(\varphi) = \sigma^{\phi r}(\varphi) = e^r \cdot \sigma(\varphi) e^\phi$ ,  $\sigma^{\theta\theta}(\varphi) = e^\theta \cdot \sigma(\varphi) e^\theta$ ,  $\sigma^{\theta\phi}(\varphi) = \sigma^{\phi\theta}(\varphi) = e^\theta \cdot \sigma(\varphi) e^\phi$  e  $\sigma^{\phi\phi}(\varphi) = e^\phi \cdot \sigma(\varphi) e^\phi$ , com  $\|e^r\| = \|e^\theta\| = \|e^\phi\| = 1$  e  $e^r \cdot e^\theta = e^r \cdot e^\phi = e^\theta \cdot e^\phi = 0$ . Veja fig. 6.3 e também o Apêndice B.

## 6.4 Cálculo da Derivada Topológica

A partir do sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  mostrado na fig. 6.3, o tensor tensão  $\sigma(u_\varepsilon) = \sigma(u_\varepsilon)^\top$  pode ser decomposto como

$$\begin{aligned} \sigma(u_\varepsilon)|_{\partial B_\varepsilon} &= \sigma^{rr}(u_\varepsilon)(e^r \otimes e^r) + \sigma^{r\theta}(u_\varepsilon)(e^r \otimes e^\theta) + \sigma^{r\phi}(u_\varepsilon)(e^r \otimes e^\phi) \\ &+ \sigma^{\theta\theta}(u_\varepsilon)(e^\theta \otimes e^\theta) + \sigma^{\theta\phi}(u_\varepsilon)(e^\theta \otimes e^\phi) + \sigma^{\phi\phi}(u_\varepsilon)(e^\phi \otimes e^\phi). \end{aligned} \quad (6.4.45)$$

Desde que  $n = -e^r$ , observe que  $\sigma(u_\varepsilon)n|_{\partial B_\varepsilon} = -\sigma(u_\varepsilon)e^r|_{\partial B_\varepsilon}$ . Portanto,

$$\sigma(u_\varepsilon)e^r|_{\partial B_\varepsilon} = \sigma^{rr}(u_\varepsilon)e^r + \sigma^{r\theta}(u_\varepsilon)e^\theta + \sigma^{r\phi}(u_\varepsilon)e^\phi = 0, \quad (6.4.46)$$

com  $e^r \perp e^\theta$ ,  $e^r \perp e^\phi$  e  $e^\theta \perp e^\phi$ , que implica

$$\sigma^{rr}(u_\varepsilon) = \sigma^{r\theta}(u_\varepsilon) = \sigma^{\theta r}(u_\varepsilon) = \sigma^{r\phi}(u_\varepsilon) = \sigma^{\phi r}(u_\varepsilon) = 0 \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \quad (6.4.47)$$

desde que  $\sigma(u_\varepsilon) = \sigma(u_\varepsilon)^\top$ . Ademais, o tensor constitutivo  $\mathbb{C}$  é inversível,

$$\mathbb{C}^{-1} = \frac{1}{E}((1 + \nu)\mathbb{I} - \nu\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}), \quad (6.4.48)$$

que implica  $\nabla u_\varepsilon^s = \mathbb{C}^{-1}\sigma(u_\varepsilon)$ . Portanto, tem-se que

$$\sigma(u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon^s = \frac{1}{E}((1 + \nu)\sigma(u_\varepsilon) \cdot \sigma(u_\varepsilon) - \nu \text{tr}^2 \sigma(u_\varepsilon)). \quad (6.4.49)$$

Usando a decomposição acima juntamente com a condição de contorno sobre  $\partial B_\varepsilon$ , a derivada de forma da função custo (6.2.18) é dada por

$$\frac{d}{d\varepsilon} \psi(\chi_\varepsilon) = -\frac{1}{2E} \int_{\partial B_\varepsilon} g_\varepsilon, \quad (6.4.50)$$

onde a função auxiliar  $g_\varepsilon$  é definida como

$$g_\varepsilon := \sigma^{\theta\theta}(u_\varepsilon)^2 + \sigma^{\phi\phi}(u_\varepsilon)^2 - 2\nu\sigma^{\theta\theta}(u_\varepsilon)\sigma^{\phi\phi}(u_\varepsilon) + 2(1 + \nu)\sigma^{\theta\phi}(u_\varepsilon)^2. \quad (6.4.51)$$

A partir da fórmula (6.3.25) tem-se a seguinte expansão para  $\sigma(u_\varepsilon)$  sobre a fronteira da cavidade, ou seja, para  $r = \varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} \sigma^{\theta\theta}(u_\varepsilon)|_{\partial B_\varepsilon} &= \frac{3}{4} \frac{1}{7 - 5\nu} [\sigma_1 (3 - 5(1 - 2\nu) \cos 2\phi + 10 \cos 2\theta \sin^2 \phi) \\ &+ \sigma_2 (3 + 5(1 - 2\nu) \cos 2\phi + 10 \cos 2\theta \cos^2 \phi) \\ &+ \sigma_3 (2(4 - 5\nu) - 10 \cos 2\theta)] + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (6.4.52)$$

$$\sigma^{\theta\phi}(u_\varepsilon)|_{\partial B_\varepsilon} = \frac{15}{2} \frac{1 - \nu}{7 - 5\nu} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \theta \sin 2\phi + O(\varepsilon), \quad (6.4.53)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{\phi\phi}(u_\varepsilon)|_{\partial B_\varepsilon} &= \frac{3}{4} \frac{1}{7 - 5\nu} [\sigma_1 (8 - 5\nu + 5(2 - \nu) \cos 2\phi + 10\nu \cos 2\theta \sin^2 \phi) \\ &+ \sigma_2 (8 - 5\nu - 5(2 - \nu) \cos 2\phi + 10\nu \cos 2\theta \cos^2 \phi) \\ &- 2\sigma_3 (1 + 5\nu \cos 2\theta)] + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (6.4.54)$$

Considerando as expansões acima em (6.4.50) e tendo em conta a identidade seguinte

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \varphi = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \varphi \varepsilon^2 \sin \theta d\theta \right) d\phi, \quad (6.4.55)$$



onde  $\varphi$  é uma dada função, tem-se que é possível avaliar analiticamente a integral na fronteira da cavidade  $\partial B_\varepsilon$ , resultando em

$$\frac{d}{d\varepsilon}\psi(\chi_\varepsilon) = -4\pi\varepsilon^2 \frac{3}{4E} \frac{1-\nu}{7-5\nu} (10(1+\nu)\varphi_1 - (1+5\nu)\varphi_2) + O(\varepsilon^3), \quad (6.4.56)$$

em que  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são respectivamente dadas por

$$\varphi_1 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \quad \text{e} \quad \varphi_2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (6.4.57)$$

O resultado acima, juntamente com a relação entre derivada de forma e topológica dada por (4.1.7), conduz a

$$\mathcal{T} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\varepsilon)} \left[ 4\pi\varepsilon^2 \frac{3}{4E} \frac{1-\nu}{7-5\nu} (10(1+\nu)\varphi_1 - (1+5\nu)\varphi_2) + O(\varepsilon^3) \right]. \quad (6.4.58)$$

Agora, a fim de extrair o termo principal da expansão acima, seleciona-se

$$f(\varepsilon) = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3, \quad (6.4.59)$$

que resulta em

$$\mathcal{T} = -\frac{3}{4E} \frac{1-\nu}{7-5\nu} (10(1+\nu)\varphi_1 - (1+5\nu)\varphi_2). \quad (6.4.60)$$

Portanto, a expressão final para a *derivada topológica* torna-se uma função escalar que depende da solução  $u$  associada ao domínio original  $\Omega$  (sem cavidade), que é [30, 83]:

- Em termos das tensões principais  $\sigma_i(\hat{x}) = \sigma_i(u(\hat{x}))$ ,  $i = 1, 2, 3$

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = -\frac{3}{4E} \frac{1-\nu}{7-5\nu} \left[ 10(1+\nu) \sum_{i=1}^3 \sigma_i(\hat{x})^2 - (1+5\nu) \left( \sum_{i=1}^3 \sigma_i(\hat{x}) \right)^2 \right]. \quad (6.4.61)$$

- Em termos do tensor tensão  $\sigma(u(\hat{x}))$

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = -\frac{3}{4E} \frac{1-\nu}{7-5\nu} [10(1+\nu)\sigma(u(\hat{x})) \cdot \sigma(u(\hat{x})) - (1+5\nu)\text{tr}^2\sigma(u(\hat{x}))]. \quad (6.4.62)$$

- Em termos do tensor tensão  $\sigma(u(\hat{x}))$  e do tensor deformação  $\nabla u^s(\hat{x})$

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = -\mathbb{P}\sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla u^s(\hat{x}), \quad (6.4.63)$$

onde  $\mathbb{P}$  é o *tensor de polarização*, dado neste caso particular pelo seguinte tensor isotrópico de quarta ordem

$$\mathbb{P} = \frac{3}{4} \frac{1-\nu}{7-5\nu} \left( 10\mathbb{I} - \frac{1-5\nu}{1-2\nu} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right). \quad (6.4.64)$$

Finalmente, a *expansão assintótica topológica* do funcional de forma energia pode ser escrito como

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) - \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 \mathbb{P}\sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla u^s(\hat{x}) + o(\varepsilon^3). \quad (6.4.65)$$

## 6.5 Exemplo Numérico

Com o intuito de explicar brevemente o significado da derivada topológica em otimização de forma apresenta-se um exemplo numérico. Em particular, considera-se a minimização da energia de deformação armazenada em um corpo elástico com uma restrição de volume. Portanto, é proposto o seguinte funcional de forma

$$\Psi_{\Omega}(u) := -\mathcal{J}_{\Omega}(u) + \beta |\Omega| , \quad (6.5.66)$$

onde  $|\Omega|$  é a medida de Lebesgue de  $\Omega$  e  $\beta > 0$  é um multiplicador de Lagrange fixo. De fato, objetiva-se minimizar a complacência da estrutura para uma dada quantidade de material. A derivada topológica de  $\Psi_{\Omega}(u)$  é dada por

$$\mathcal{T} = \mathbb{P}\sigma(u) \cdot \nabla u^s - \beta , \quad (6.5.67)$$

com  $\sigma(u) = \mathbb{C}\nabla u^s$ , onde tem-se usado a fórmula (6.4.63) e o fato de que a derivada topológica do termo  $\beta |\Omega|$  é trivial. Ademais, o campo vetorial de deslocamento  $u$  é obtido pela solução numérica do problema (6.1.2).

A ideia consiste basicamente em nuclear pequenas cavidades de acordo com os valores da derivada topológica. Em particular, a topologia é identificada pela distribuição de material elástico, enquanto que as cavidades são mimetizadas por um material muito complacente. Além do mais, a derivada topológica é avaliada nos pontos nodais da malha de elementos finitos. Assim, remove-se os elementos que compartilham o nó onde a derivada topológica assume seus valores mais negativos. Este procedimento é repetido até que a derivada topológica se torne positiva em todo lugar. Para um algoritmo de otimização topológica mais elaborado o leitor poderá verificar o artigo de Amstutz & Andrä, 2006 [7].

Considera-se um cubo de dimensões  $0.5 \times 0.5 \times 0.5 m^3$ , simplesmente apoiado no fundo e submetido à carga vertical aplicada sobre a parte superior, como mostrado na fig. 6.4. A carga  $\bar{q} = 10^3 N$  é distribuída em uma pequena região circular de raio igual a  $0.03m$ . Os suportes são circulares e têm raios iguais a  $0.02m$ , com seus centros a uma distância de  $0.035m$  a partir dos vértices do cubo. As propriedades materiais são dadas pelo módulo de Young  $E = 210 \times 10^9 N/m^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 1/3$ . O parâmetro  $\beta$  é escolhido de tal modo que o volume final é dado por  $|\Omega^*| = 0.02 |\Omega|$ . O cubo é discretizado usando elementos finitos tetraédricos de quatro nós e 5% do material é removido em cada iteração.

Detalhes do resultado obtido são mostrados na fig. 6.5 e na fig. 6.6, onde é possível também observar o perfil das seções transversais das barras obtidas ao final do processo. A correspondente malha de elementos finitos associada à configuração final é apresentada em fig. 6.7 mostrando uma intensificação da malha na região ocupada pelo material elástico, permitindo uma boa identificação da topologia. Este resultado numérico é atribuído ao Engenheiro Juan Manuel Marmo Lupano e pode ser encontrado em [83].

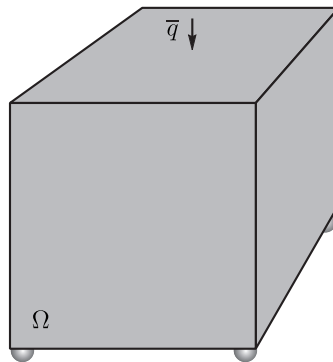
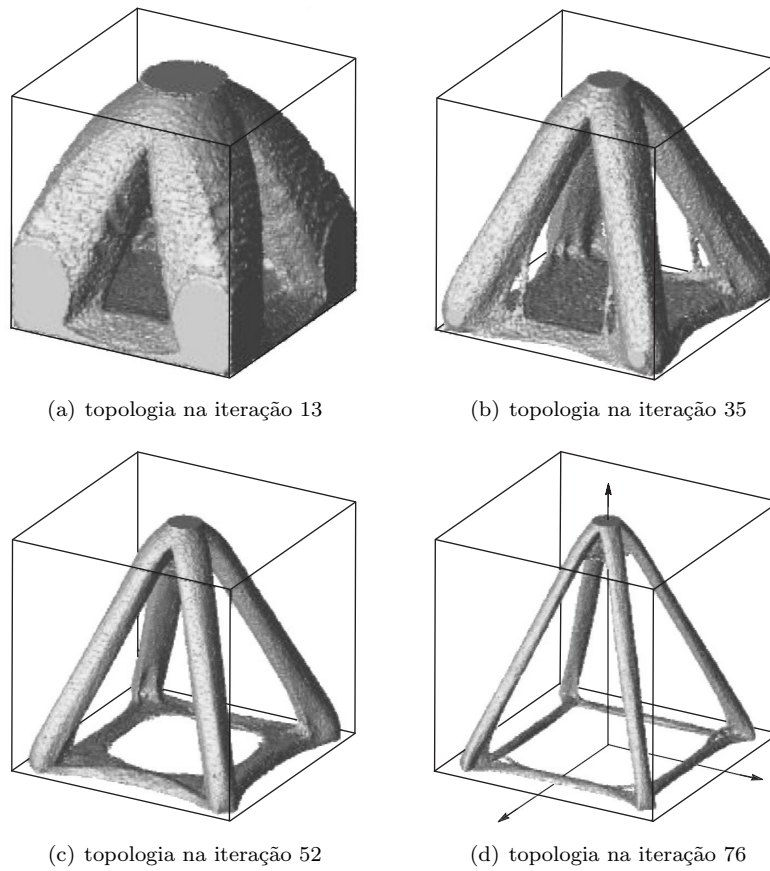


Figura 6.4: Cubo simplesmente apoiado na face inferior, submetido a uma carga vertical no topo.



(a) topologia na iteração 13

(b) topologia na iteração 35

(c) topologia na iteração 52

(d) topologia na iteração 76

Figura 6.5: Histórico do processo de otimização topológica.

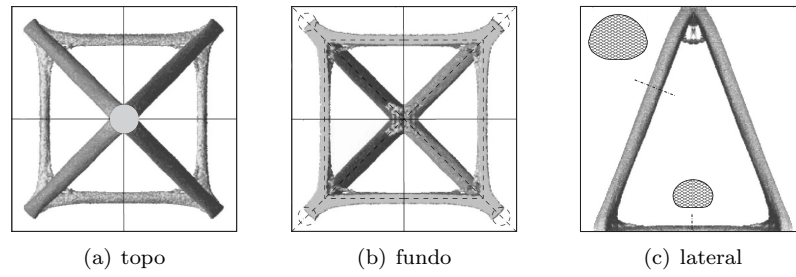


Figura 6.6: Detalhe da topologia final obtida.

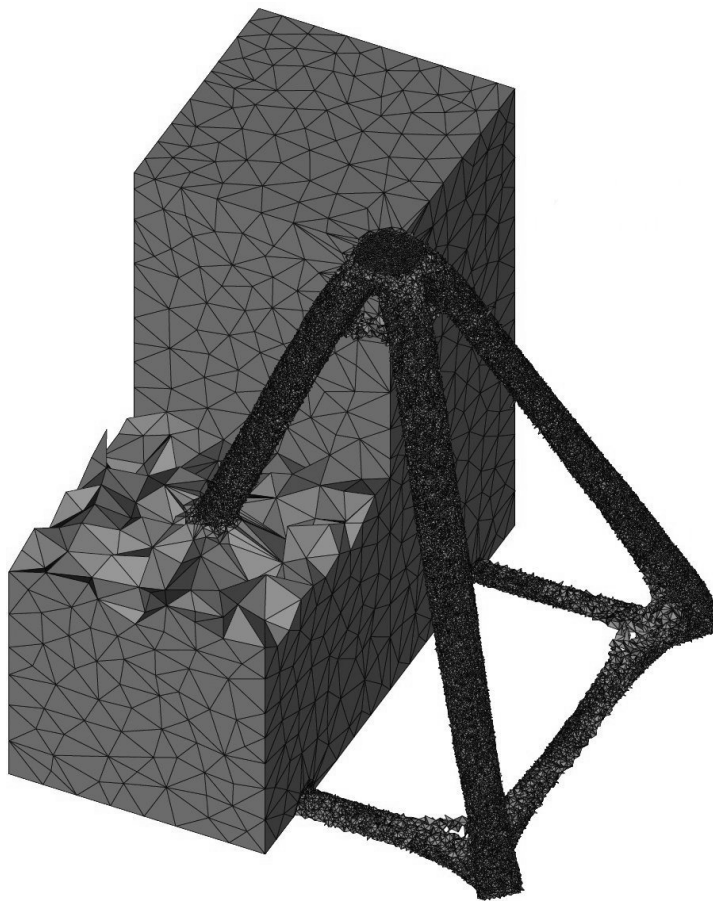


Figura 6.7: Malha de elementos finitos no final do processo de otimização topológica.

## 6.6 Exercícios

1. A partir de (6.1.6) derive o sistema de Navier apresentado na Observação 6.1.
2. A partir de (6.3.25) derive (6.4.56).
3. A partir de (6.4.60) derive (6.4.61), (6.4.62) e (6.4.63).



## Capítulo 7

# Método do Domínio Truncado

Neste capítulo é empregada a técnica de decomposição do domínio juntamente com o operador de contorno pseudodiferencial Steklov-Poincaré para fins de análise assintótica topológica em domínios geométricos singularmente perturbados no contexto de equações diferenciais parciais acopladas. O método proposto é geral e pode ser usado para fins de análise de sensibilidade topológica em uma ampla classe de problemas multifísicos. De fato, essa abordagem foi desenvolvida no contexto de problemas de contato unilateral, que resulta em uma equação não linear regida por uma desigualdade variacional. Ver, por exemplo, o livro de Novotny & Sokołowski, 2013 [84]. Além do mais, com esta estratégia, as estimativas dos termos remanescentes da expansão assintótica topológica são realizadas em um subdomínio livre de singularidades, permitindo construir as justificativas necessárias para tornar as derivações rigorosas utilizando argumentos elementares de análise.

### 7.1 Problema Modelo

O domínio geométrico  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ , com fronteira  $\Gamma = \partial\mathcal{D}$ , para o modelo em tela é decomposto em dois subdomínios com diferentes propriedades físicas, ou seja  $\omega \subset \mathcal{D}$  e  $\Omega = \mathcal{D} \setminus \bar{\omega}$ , como mostrado na fig. 7.1. A influência de cada subdomínio no outro é afetada pelas condições de transmissão na interface  $\partial\omega$ . O modelo resultante é complexo, sendo que a correspondente análise de sensibilidade topológica deve ser realizada de tal modo que a fórmula obtida possa ser utilizada diretamente em métodos numéricos de otimização de forma e topológica. Para este fim é empregada a *técnica de decomposição de domínio*. A ideia consiste em introduzir um domínio anelar fictício  $C_R(\varepsilon) := \{\varepsilon < \|x\| < R\}$  para fins de análise assintótica com relação a  $\varepsilon \rightarrow 0$ , cuja expansão é expressa sobre a fronteira  $\partial B_R$  da bola  $B_R = \{\|x\| < R\}$ . Como resultado fundamental tem-se que a expansão da energia em  $C_R(\varepsilon)$  coincide com a expansão do operador pseudodiferencial *Steklov-Poincaré* definido na fronteira fictícia  $\partial B_R$ , permitindo identificar prontamente a derivada topológica associada. Deste modo, a influência da singularidade associada à passagem ao limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  é modelada no domínio truncado livre de singularidades via condições não locais na fronteira  $\partial B_R$  e o resultado de compacidade necessário na justificativa da expansão assintótica topológica proposta é obtido via *análise de Fourier* clássica no subdomínio singularmente perturbado  $C_R(\varepsilon)$ . Esta abordagem,

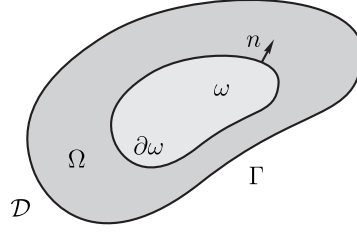


Figura 7.1: Domínio  $\mathcal{D}$  decomposto em  $\omega \subset \mathcal{D}$  e  $\Omega = \mathcal{D} \setminus \bar{\omega}$ .

conforme mencionado, simplifica a análise de sensibilidade topológica do funcional de forma analisado.

### 7.1.1 Problema não Perturbado

O funcional de forma definido no domínio não perturbado  $\Omega$  é dado por

$$\psi(\chi) := \mathcal{J}_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega (u - z_d)^2, \quad (7.1.1)$$

onde  $z_d$  é a função alvo e  $u$  é a solução do seguinte problema variacional:

$$\begin{cases} \text{Encontre } u \in H_0^1(\mathcal{D}), \text{ tal que} \\ \int_\omega \nabla u \cdot \nabla \eta + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \eta + \int_\Omega u \eta = \int_\Omega b \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\mathcal{D}). \end{cases} \quad (7.1.2)$$

Na equação acima  $b$  é um termo fonte suficientemente regular. A formulação forte associada ao problema variacional (7.1.2) é dada pelo seguinte problema de valor de contorno acoplado:

$$\begin{cases} \text{Encontre } w, \text{ tal que} \\ -\Delta w = 0 \quad \text{em } \omega, \\ w = \varphi \quad \text{sobre } \partial\omega, \end{cases} \quad (7.1.3)$$

onde  $\mathcal{S}(\varphi) = \partial_n w$  sobre  $\partial\omega$  é o *operador Steklov-Poincaré* associado ao problema não perturbado definido como  $\mathcal{S} : \varphi \in H^{1/2}(\partial\omega) \mapsto \partial_n u \in H^{-1/2}(\partial\omega)$ . Além do mais, a restrição da solução de (7.1.2) sobre  $\Omega$  é dada pelo seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} \text{Encontre } u, \text{ tal que} \\ -\Delta u + u = b \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \\ \partial_n u = \mathcal{S}(u) \quad \text{sobre } \partial\omega. \end{cases} \quad (7.1.4)$$

Com o objetivo de simplificar a análise posterior, introduz-se o *estado adjunto*  $v$ , como solução do seguinte problema variacional:

$$\begin{cases} \text{Encontre } v \in H_0^1(\mathcal{D}), \text{ tal que} \\ \int_\omega \nabla v \cdot \nabla \eta + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \eta + \int_\Omega v \eta = - \int_\Omega (u - z_d) \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\mathcal{D}). \end{cases} \quad (7.1.5)$$



### 7.1.2 Problema Perturbado

Agora é considerado o mesmo problema no domínio perturbado  $\mathcal{D}_\varepsilon(\hat{x}) = \mathcal{D} \setminus \overline{B_\varepsilon(\hat{x})}$ , com  $\hat{x} \in \omega \subset \mathcal{D}$ . Logo, o subdomínio efetivamente perturbado é dado por  $\omega_\varepsilon(\hat{x}) = \omega \setminus \overline{B_\varepsilon(\hat{x})}$ . Neste caso, o funcional de forma é escrito como

$$\psi(\chi_\varepsilon) := \mathcal{J}_\Omega(u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_\Omega (u_\varepsilon - z_d)^2, \quad (7.1.6)$$

onde a função  $u_\varepsilon$  é a solução do problema variacional

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u_\varepsilon \in \mathcal{V}_\varepsilon, \text{ tal que} \\ \int_{\omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta + \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta + \int_\Omega u_\varepsilon \eta = \int_\Omega b \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (7.1.7)$$

O espaço  $\mathcal{V}_\varepsilon$  é definido conforme segue

$$\mathcal{V}_\varepsilon := \{\varphi \in H^1(\mathcal{D}_\varepsilon) : \varphi|_{\partial\mathcal{D}} = 0\}. \quad (7.1.8)$$

A *formulação forte* associada ao problema variacional (7.1.7) pode ser escrita na forma do seguinte problema de valor de contorno acoplado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } w_\varepsilon, \text{ tal que} \\ -\Delta w_\varepsilon = 0 \quad \text{em } \omega_\varepsilon, \\ w_\varepsilon = \varphi \quad \text{sobre } \partial\omega, \\ \partial_n w_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (7.1.9)$$

onde  $\mathcal{S}_\varepsilon(\varphi) = \partial_n w_\varepsilon$  sobre  $\partial\omega$  é o *operador Steklov-Poincaré* associado ao problema perturbado definido como  $\mathcal{S}_\varepsilon : \varphi \in H^{1/2}(\partial\omega) \mapsto \partial_n w_\varepsilon \in H^{-1/2}(\partial\omega)$ . Novamente, a restrição da solução do problema (7.1.7) sobre  $\Omega$  é dada pelo seguinte problema de valor de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u_\varepsilon, \text{ tal que} \\ -\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = b \quad \text{em } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \\ \partial_n u_\varepsilon = \mathcal{S}_\varepsilon(u_\varepsilon) \quad \text{sobre } \partial\omega. \end{array} \right. \quad (7.1.10)$$

## 7.2 Técnica da Decomposição do Domínio

O operador Steklov-Poincaré será agora empregado com o objetivo de decompor o domínio singularmente perturbado  $\omega_\varepsilon$  em dois subdomínios. Um deles é dado pelo domínio truncado  $\omega \setminus \overline{B_R}$  e o outro pelo anel  $C_R(\varepsilon) := B_R \setminus \overline{B_\varepsilon}$  que contém a singularidade, onde  $B_R = B_R(\hat{x})$  e  $B_\varepsilon = B_\varepsilon(\hat{x})$ , com  $\hat{x} \in \omega$ , conforme mostrado na fig. 7.2. Dessa forma, o operador Steklov-Poincaré dependente do parâmetro de controle  $\varepsilon$  é então definido sobre a fronteira fictícia  $\partial B_R$  da seguinte forma

$$\mathcal{A}_\varepsilon : H^{1/2}(\partial B_R) \mapsto H^{-1/2}(\partial B_R). \quad (7.2.11)$$

A região  $C_R(\varepsilon)$  que inclui a perturbação singular do domínio  $B_\varepsilon$  é selecionada para a análise assintótica dependendo do pequeno parâmetro  $\varepsilon \rightarrow 0$  que governa a singularidade, que pode ser realizada, por exemplo, pelo método assintótico composto. O resultado da análise assintótica em  $C_R(\varepsilon)$  é especificado sobre a fronteira fictícia  $\partial B_R$  para o operador pseudodiferencial Steklov-Poincaré. Desta maneira, a análise assintótica é realizada na geometria simplificada representada pelo anel  $C_R(\varepsilon)$  munida de simetria radial, e isto é separado da análise de sensibilidade topológica do

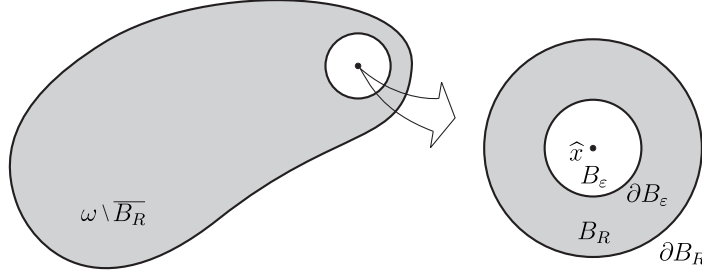


Figura 7.2: Domínio perturbado  $\omega_\varepsilon$  decomposto em  $\omega \setminus \overline{B_R}$  e  $C_R(\varepsilon) := B_R \setminus \overline{B_\varepsilon}$ .

funcional de forma, que é realizada no domínio truncado  $\omega \setminus \overline{B_R}$  com condições não locais na fronteira definidas pelo operador Steklov-Poincaré sobre  $\partial B_R$ , na ausência de singularidade  $B_\varepsilon$  no interior do domínio.

Assim, no domínio truncado  $\omega \setminus \overline{B_R}$ , considera-se o seguinte problema variacional isento de singularidade produzida pelo furo  $B_\varepsilon$  com  $\varepsilon \rightarrow 0$ , cuja condição de contorno não local sobre a fronteira fictícia  $\partial B_R$  é fornecida pelo operador Steklov-Poincaré, a saber:

$$\int_{\omega \setminus \overline{B_R}} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta + \int_{\partial B_R} \mathcal{A}_\varepsilon(u_\varepsilon) \eta + \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta + \int_{\Omega} u_\varepsilon \eta = \int_{\Omega} b \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_\varepsilon. \quad (7.2.12)$$

Por outro lado, a singularidade associada ao parâmetro  $\varepsilon \rightarrow 0$  é então absorvida pelo seguinte problema de valor de contorno definido no anel  $C_R(\varepsilon) = B_R \setminus \overline{B_\varepsilon}$ , ou seja:

$$\begin{cases} \text{Encontre } w_\varepsilon, \text{ tal que} \\ -\Delta w_\varepsilon = 0 & \text{em } C_R(\varepsilon), \\ w_\varepsilon = \varphi & \text{sobre } \partial B_R, \\ \partial_n w_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \end{cases} \quad (7.2.13)$$

onde  $\mathcal{A}_\varepsilon(\varphi) = \partial_n w_\varepsilon$  sobre  $\partial B_R$  é o operador Steklov-Poincaré associado ao problema perturbado.

**Observação 7.1.** Note que se o mapeamento  $\varphi \mapsto \mathcal{A}_\varepsilon(\varphi)$  é definido como o operador Steklov-Poincaré associado a (7.2.13), então a solução do problema (7.2.12) é dada simplesmente pela restrição da solução de (7.1.7) sobre o domínio truncado  $\mathcal{D} \setminus \overline{B_R}$ .

A energia associada ao problema (7.2.13) tem a seguinte propriedade

$$\begin{aligned} 0 = - \int_{B_R \setminus \overline{B_\varepsilon}} \Delta w_\varepsilon w_\varepsilon &= \int_{B_R \setminus \overline{B_\varepsilon}} \|\nabla w_\varepsilon\|^2 - \int_{\partial B_R} \partial_n w_\varepsilon w_\varepsilon \\ &= \int_{B_R \setminus \overline{B_\varepsilon}} \|\nabla w_\varepsilon\|^2 - \int_{\partial B_R} \mathcal{A}_\varepsilon(\varphi) \varphi, \end{aligned} \quad (7.2.14)$$

ou seja, a energia no anel  $C_R(\varepsilon)$  é igual à energia associada ao operador Steklov-Poincaré na fronteira  $\partial B_R$

$$\int_{C_R(\varepsilon)} \|\nabla w_\varepsilon\|^2 = \int_{\partial B_R} \mathcal{A}_\varepsilon(\varphi) \varphi. \quad (7.2.15)$$

Além do mais, considerando que o operador  $\mathcal{A}_\varepsilon$  é simétrico, pode-se escrever

$$\int_{C_R(\varepsilon)} \|\nabla w_\varepsilon\|^2 = \langle \mathcal{A}_\varepsilon(\varphi), \varphi \rangle_{(H^{-1/2} \times H^{1/2})(\partial B_R)} := \langle \mathcal{A}_\varepsilon(\varphi), \varphi \rangle_{\partial B_R}. \quad (7.2.16)$$

Assim, a expansão assintótica do operador Steklov-Poincaré deve coincidir com a expansão assintótica da energia no anel  $C_R(\varepsilon)$ .

De fato, sabe-se que a energia no anel  $C_R(\varepsilon)$  admite a expansão assintótica em relação ao parâmetro pequeno  $\varepsilon \rightarrow 0$  da seguinte forma:

$$\int_{C_R(\varepsilon)} \|\nabla w_\varepsilon\|^2 = \int_{B_R} \|\nabla w\|^2 - 2\pi\varepsilon^2 \|\nabla w(\hat{x})\|^2 + o(\varepsilon^2). \quad (7.2.17)$$

Veja Capítulo 2, Seção 2.1, expansão (2.4.51) para  $b = 0$  na vizinhança de  $\hat{x} \in \Omega$ .

O funcional densidade de energia  $H^1(B_R) \ni \varphi \mapsto \|\nabla \varphi(\hat{x})\|^2 \in \mathbb{R}$  em geral não é contínuo no ponto  $\hat{x}$ . Portanto, a densidade de energia é substituída pela forma bilinear contínua  $H^1(B_R) \ni \varphi \mapsto \langle \mathcal{B}(\varphi), \varphi \rangle_{\partial B_R} \in \mathbb{R}$ . Para o Laplaciano em duas dimensões, a solução do problema não perturbado  $w$  é harmônica na vizinhança de  $\hat{x}$ . Sendo assim, pode-se definir uma forma bilinear contínua com relação à norma  $H^1(B_R)$ , tal que exista a seguinte igualdade para  $w$ ,

$$\langle \mathcal{B}(w), w \rangle_{\partial B_R} = 2\|\nabla w(\hat{x})\|^2. \quad (7.2.18)$$

Esta substituição de  $\|\nabla \varphi(\hat{x})\|^2$  por  $\langle \mathcal{B}(\varphi), \varphi \rangle_{\partial B_R}$  no funcional energia foi introduzida em [92, 93] para fins de cálculo da derivada topológica no cenário do método da decomposição do domínio.

Em particular, como a função  $w$  é harmônica na bola  $B_R \subset \mathbb{R}^2$  de raio  $R > 0$  e centro em  $\hat{x} \in \omega$ , então o gradiente de  $w$  avaliado em  $\hat{x}$  admite a seguinte representação

$$\nabla w(\hat{x}) = \frac{1}{\pi R^3} \int_{\partial B_R} (x - \hat{x}) w(x). \quad (7.2.19)$$

Assim, para um  $R > \varepsilon$  suficientemente pequeno, a expansão da energia definida no anel  $C_R(\varepsilon)$  pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_{C_R(\varepsilon)} \|\nabla w_\varepsilon\|^2 &= \int_{B_R} \|\nabla w\|^2 \\ &\quad - \frac{2\varepsilon^2}{\pi R^6} \left[ \left( \int_{\partial B_R} w x_1 \right)^2 + \left( \int_{\partial B_R} w x_2 \right)^2 \right] + o(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (7.2.20)$$

onde  $x - \hat{x} = (x_1, x_2)$ . Como observado em [92, 93] é interessante notar que a expansão acima pode ser reescrita como

$$\int_{C_R(\varepsilon)} \|\nabla w_\varepsilon\|^2 = \int_{B_R} \|\nabla w\|^2 - \pi\varepsilon^2 \langle \mathcal{B}(w), w \rangle_{\partial B_R} + o(\varepsilon^2), \quad (7.2.21)$$

com o operador não local, positivo e autoadjunto  $\mathcal{B}$  definido sobre a fronteira  $\partial B_R$  unicamente determinado pela forma bilinear

$$\langle \mathcal{B}(w), w \rangle_{\partial B_R} = \frac{2}{\pi^2 R^6} \left[ \left( \int_{\partial B_R} w x_1 \right)^2 + \left( \int_{\partial B_R} w x_2 \right)^2 \right]. \quad (7.2.22)$$

A partir da representação acima e considerando que as integrais de linha em  $\partial B_R$  estão bem definidas por funções em  $L^1(\partial B_R)$ , o seguinte operador  $\mathcal{B}$  pode ser entendido, por exemplo, para o operador na fronteira sobre  $L^2(\partial B_R)$ , ou seja

$$\mathcal{B} \in \mathcal{L}(L^2(\partial B_R); L^2(\partial B_R)), \quad (7.2.23)$$

com a mesma forma bilinear simétrica

$$\langle \mathcal{B}(\varphi), \phi \rangle_{\partial B_R} = \frac{2}{\pi^2 R^6} \left[ \int_{\partial B_R} \varphi x_1 \int_{\partial B_R} \phi x_1 + \int_{\partial B_R} \varphi x_2 \int_{\partial B_R} \phi x_2 \right], \quad (7.2.24)$$

que é contínua para todo  $\varphi, \phi \in L^2(\partial B_R)$ . Observe-se que a forma bilinear

$$L^2(\partial B_R) \times L^2(\partial B_R) \ni (\varphi, \phi) \mapsto \langle \mathcal{B}(\varphi), \phi \rangle_{\partial B_R} \in \mathbb{R} \quad (7.2.25)$$

é contínua com relação à convergência fraca desde que esta possui uma simples estrutura

$$\langle \mathcal{B}(\varphi), \phi \rangle_{\partial B_R} = L_1(\varphi)L_1(\phi) + L_2(\varphi)L_2(\phi) \quad \varphi, \phi \in L^1(\partial B_R) \quad (7.2.26)$$

com duas formas lineares  $\varphi \mapsto L_1(\varphi)$  e  $\phi \mapsto L_2(\phi)$ , dadas pelas integrais de linha sobre  $\partial B_R$ . Finalmente, como a expansão assintótica do operador Steklov-Poincaré coincide com a expansão assintótica da energia no anel  $C_R(\varepsilon)$ , tem-se

$$\langle \mathcal{A}_\varepsilon(\varphi), \varphi \rangle_{\partial B_R} = \langle \mathcal{A}(\varphi), \varphi \rangle_{\partial B_R} - f(\varepsilon)\langle \mathcal{B}(\varphi), \varphi \rangle_{\partial B_R} + o(f(\varepsilon)), \quad (7.2.27)$$

com  $f(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2$ . Portanto, a expansão assintótica do funcional de forma energia em  $C_R(\varepsilon)$  para  $\varepsilon \rightarrow 0$  é dada pela expansão regular do *operador Steklov-Poincaré* (veja Seção 7.2.1, Lema 7.1):

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{A} - f(\varepsilon)\mathcal{B} + \mathcal{R}_\varepsilon, \quad (7.2.28)$$

onde o termo remanescente denotado por  $\mathcal{R}_\varepsilon$  na expansão acima é da ordem  $o(f(\varepsilon))$  na norma de operadores  $\mathcal{L}(H^{1/2}(\partial B_R); H^{-1/2}(\partial B_R))$ . Pela simetria do operador, a expansão do funcional energia pode também ser escrita como

$$\langle \mathcal{A}_\varepsilon(\varphi), \phi \rangle_{\partial B_R} = \langle \mathcal{A}(\varphi), \phi \rangle_{\partial B_R} - f(\varepsilon)\langle \mathcal{B}(\varphi), \phi \rangle_{\partial B_R} + \langle \mathcal{R}_\varepsilon(\varphi), \phi \rangle_{\partial B_R}, \quad (7.2.29)$$

onde  $\langle \mathcal{R}_\varepsilon(\varphi), \phi \rangle_{\partial B_R} = o(f(\varepsilon))$ . Assim, da expansão assintótica do funcional energia, tem-se a representação (7.2.24) ou ainda

$$\langle \mathcal{B}(\varphi), \phi \rangle_{\partial B_R} = 2\nabla\varphi(\hat{x}) \cdot \nabla\phi(\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in \omega, \quad (7.2.30)$$

caso as funções  $\phi$  e  $\varphi$  sejam analíticas. Cabe esclarecer que não se distingue as funções  $\phi$  e  $\varphi$  de seus respectivos traços sobre a fronteira fictícia  $\partial B_R$ .

### 7.2.1 Compacidade da Expansão Assintótica

Graças à técnica da decomposição de domínio proposta, a compacidade da expansão assintótica é estabelecida nesta seção através de uma aplicação da *análise de Fourier* elementar. Seja, portanto, uma função  $\varphi$  com traço (ainda denotado por  $\varphi$ ) sobre  $\partial B_R$  pertencentes a  $H^{1/2}(\partial B_R)$ , então

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial B_R)} \leq C_R. \quad (7.2.31)$$

O subíndice  $R$  será omitido pois o raio  $R$  é fixo, escrevendo-se  $C$  ao invés de  $C_R$ , sendo que  $C$  designa uma constante genérica independente do parâmetro pequeno  $\varepsilon$ . Finalmente, denota-se por  $(r, \theta)$  um sistema de coordenadas polares ao redor de  $\hat{x}$ . Como  $\varphi \in H^{1/2}(\partial B_R)$ , segue a existência de uma expansão em *série de Fourier* em termos de  $\theta$ :

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\theta + b_k \cos k\theta), \quad (7.2.32)$$

com coeficientes satisfazendo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{1+k^2} (a_k^2 + b_k^2) \leq C. \quad (7.2.33)$$

Isto implica em duas importantes propriedades:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq C \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2) \leq C. \quad (7.2.34)$$

Agora considere-se em  $B_R$  a solução da equação de Laplace com condição de Dirichlet sobre a fronteira  $\partial B_R$  coincidente com  $\varphi$ , denotado por  $w$ , e a solução da mesma equação em  $C_R(\varepsilon)$ , com a mesma condição sobre  $\partial B_R$  e condição de Neumann homogênea sobre  $\partial B_\varepsilon$ , denotada por  $w_\varepsilon$ . Sejam as energias dependentes de  $\varphi$  via condição de contorno sobre  $\partial B_R$

$$\mathcal{E}(\varphi) = \int_{\partial B_R} \mathcal{A}(\varphi)\varphi \equiv \int_{B_R} \|\nabla w\|^2 \quad (7.2.35)$$

e

$$\mathcal{E}_\varepsilon(\varphi) = \int_{\partial B_R} \mathcal{A}_\varepsilon(\varphi)\varphi \equiv \int_{C_R(\varepsilon)} \|\nabla w_\varepsilon\|^2, \quad (7.2.36)$$

Então, objetiva-se provar que  $\mathcal{E}_\varepsilon(\varphi)$  possui uma expansão assintótica cujo termo remanescente é uniformemente limitado. Mais precisamente, necessita-se demonstrar o seguinte resultado:

**Lema 7.1.** *A energia  $\mathcal{E}_\varepsilon(\varphi)$  admite a expansão assintótica para  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, da seguinte forma*

$$\mathcal{E}_\varepsilon(\varphi) = \mathcal{E}(\varphi) - \pi\varepsilon^2 \langle \mathcal{B}(\varphi), \varphi \rangle_{\partial B_R} + \langle \mathcal{R}_\varepsilon(\varphi), \varphi \rangle_{\partial B_R}, \quad (7.2.37)$$

com

$$|\langle \mathcal{R}_\varepsilon(\varphi), \varphi \rangle_{\partial B_R}| \leq C\varepsilon^4 \quad (7.2.38)$$

uniformemente em qualquer conjunto compacto fixo em  $H^1(\mathcal{D} \setminus \overline{B_R})$ , i.e.  $C$  depende apenas deste conjunto.

*Demonstração.* Considerando que todo conjunto compacto pode ser coberto por um número finito de bolas, é suficiente demonstrar o Lema para uma bola fixa  $B_R$ . Pode-se, portanto, supor que (7.2.34) é válido. A prova consistirá em obter as fórmulas explícitas para  $w$  e  $w_\varepsilon$  em série de Fourier, usando método bastante conhecido, similar a [89]. Assim as energias podem ser calculadas exatamente e a propriedade desejada do termo remanescente  $\mathcal{R}_\varepsilon(\varphi)$  comprovada. Construindo  $w$  a partir da expansão em *série de Fourier* da condição da contorno sobre  $\partial B_R$ , obtém-se

$$w(r, \theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k (a_k \sin k\theta + b_k \cos k\theta). \quad (7.2.39)$$

Similarmente, para  $w_\varepsilon$  em  $C_R(\varepsilon)$  é válida a seguinte expansão em *série de Fourier*

$$w_\varepsilon(r, \theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(r)(a_k \sin k\theta + b_k \cos k\theta), \quad (7.2.40)$$

onde

$$\psi_k(r) = A_k r^k + B_k r^{-k}, \quad (7.2.41)$$

com  $A_k$  e  $B_k$  determinados pelas condições de contorno sobre  $\partial B_R$  e  $\partial B_\varepsilon$ , ou seja

$$A_k R^k + B_k \frac{1}{R^k} = 1 \quad \text{e} \quad A_k \varepsilon^{k-1} - B_k \frac{1}{\varepsilon^{k+1}} = 0. \quad (7.2.42)$$

Por isso

$$A_k = \frac{R^k}{R^{2k} + \varepsilon^{2k}} \quad \text{e} \quad B_k = A_k \varepsilon^{2k}, \quad (7.2.43)$$

e finalmente

$$\psi_k(r) = \frac{r^k}{R^k} + \frac{\varepsilon^{2k}}{R^{2k} + \varepsilon^{2k}} \left( \frac{R^k}{r^k} - \frac{r^k}{R^k} \right). \quad (7.2.44)$$

Substituindo este resultado na expansão para  $w_\varepsilon$  obtém-se

$$w_\varepsilon(r, \theta) = w(r, \theta) + \tilde{w}_\varepsilon(r, \theta), \quad (7.2.45)$$

com

$$\tilde{w}_\varepsilon(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2k}}{R^{2k} + \varepsilon^{2k}} \left( \frac{R^k}{r^k} - \frac{r^k}{R^k} \right) (a_k \sin k\theta + b_k \cos k\theta). \quad (7.2.46)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\varepsilon(\varphi) &= \int_{C_R(\varepsilon)} \|\nabla w + \nabla \tilde{w}_\varepsilon\|^2 \\ &= \int_{C_R(\varepsilon)} \|\nabla w\|^2 + 2 \int_{C_R(\varepsilon)} \nabla w \cdot \nabla \tilde{w}_\varepsilon + \int_{C_R(\varepsilon)} \|\nabla \tilde{w}_\varepsilon\|^2 \pm \int_{B_\varepsilon} \|\nabla w\|^2 \\ &= \mathcal{E}(\varphi) + \int_{C_R(\varepsilon)} \|\nabla \tilde{w}_\varepsilon\|^2 + 2 \int_{C_R(\varepsilon)} \nabla w \cdot \nabla \tilde{w}_\varepsilon - \int_{B_\varepsilon} \|\nabla w\|^2 \\ &= \mathcal{E}(\varphi) + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3, \end{aligned} \quad (7.2.47)$$

onde são definidas as integrais

$$\mathcal{I}_1 := \int_{C_R(\varepsilon)} \|\nabla \tilde{w}_\varepsilon\|^2, \quad (7.2.48)$$

$$\mathcal{I}_2 := 2 \int_{C_R(\varepsilon)} \nabla w \cdot \nabla \tilde{w}_\varepsilon, \quad (7.2.49)$$

$$\mathcal{I}_3 := - \int_{B_\varepsilon} \|\nabla w\|^2. \quad (7.2.50)$$

Agora tem-se

$$\partial_r \tilde{w}_\varepsilon(r, \theta) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2k}}{R^{2k} + \varepsilon^{2k}} k \frac{1}{r} \left( \frac{R^k}{r^k} + \frac{r^k}{R^k} \right) (a_k \sin k\theta + b_k \cos k\theta), \quad (7.2.51)$$

$$\frac{1}{r} \partial_\theta \tilde{w}_\varepsilon(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2k}}{R^{2k} + \varepsilon^{2k}} k \frac{1}{r} \left( \frac{R^k}{r^k} - \frac{r^k}{R^k} \right) (a_k \cos k\theta - b_k \sin k\theta). \quad (7.2.52)$$

Após considerar a ortogonalidade das funções trigonométricas sobre  $[0, 2\pi]$  e integrando com relação a  $\theta$  tem-se

$$\mathcal{I}_1 = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon^{2k}}{R^{2k} + \varepsilon^{2k}} \right)^2 k^2 (a_k^2 + b_k^2) \mathcal{I}_k(\varepsilon), \quad (7.2.53)$$

onde a integral  $\mathcal{I}_k(\varepsilon)$  é definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k(\varepsilon) &= \int_{\varepsilon}^R \left[ \left( \frac{R^k}{r^{k+1}} + \frac{r^{k-1}}{R^k} \right)^2 + \left( \frac{R^k}{r^{k+1}} - \frac{r^{k-1}}{R^k} \right)^2 \right] r dr \\ &= \frac{1}{k} \left( \frac{R^{2k}}{\varepsilon^{2k}} - \frac{\varepsilon^{2k}}{R^{2k}} \right), \end{aligned} \quad (7.2.54)$$

que conduz a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon^{2k}}{R^{2k} + \varepsilon^{2k}} \right)^2 k (a_k^2 + b_k^2) \left( \frac{R^{2k}}{\varepsilon^{2k}} - \frac{\varepsilon^{2k}}{R^{2k}} \right) \\ &= \pi \varepsilon^2 \frac{a_1^2 + b_1^2}{R^2} + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (7.2.55)$$

A fim de calcular a segunda integral  $\mathcal{I}_2$  observa-se que

$$\partial_r w(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{r^{k-1}}{R^k} (a_k \sin k\theta + b_k \cos k\theta), \quad (7.2.56)$$

$$\frac{1}{r} \partial_{\theta} w(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{r^{k-1}}{R^k} (a_k \cos k\theta - b_k \sin k\theta), \quad (7.2.57)$$

e, após um simples cálculo, tem-se

$$\mathcal{I}_2 = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon}{R} \right)^{2k} k (a_k^2 + b_k^2) \frac{R^{2k} - \varepsilon^{2k}}{R^{2k} + \varepsilon^{2k}} = -2\pi \varepsilon^2 \frac{a_1^2 + b_1^2}{R^2} + O(\varepsilon^4). \quad (7.2.58)$$

Resta ainda a última integral  $\mathcal{I}_3$ , que resulta em

$$\mathcal{I}_3 = -\pi \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon}{R} \right)^{2k} k (a_k^2 + b_k^2) = -\pi \varepsilon^2 \frac{a_1^2 + b_1^2}{R^2} + O(\varepsilon^4). \quad (7.2.59)$$

Finalmente, após coletar as fórmulas (7.2.55), (7.2.58) e (7.2.59), é possível identificar o termo independente de  $\varepsilon$  e o termo de ordem  $\varepsilon^2$ , ou seja

$$\mathcal{E}_{\varepsilon}(\varphi) = \mathcal{E}(\varphi) - 2\pi \varepsilon^2 \frac{a_1^2 + b_1^2}{R^2} + O(\varepsilon^4), \quad (7.2.60)$$

onde, tendo em vista as desigualdades (7.2.34), o resíduo de ordem  $O(\varepsilon^4)$  é uniformemente limitado por  $C\varepsilon^4$ .  $\square$

## 7.2.2 Expansão Assintótica da Solução

Considera-se o seguinte *ansatz* para a solução  $u_{\varepsilon}$  do problema acoplado topologicamente perturbado (7.1.7)

$$u_{\varepsilon}(x) = u(x) + f(\varepsilon)g(x) + \tilde{u}_{\varepsilon}(x), \quad (7.2.61)$$

onde  $u$  é a solução do problema acoplado original (não perturbado) (7.1.2),  $g$  é o termo correção assintótica de primeira ordem e  $\tilde{u}_\varepsilon$  é o resíduo. Em seguida, necessita-se expandir a aplicação  $\mathcal{A}_\varepsilon(u_\varepsilon)$  sobre  $\partial B_R$ . Para isso, basta introduzir o ansatz (7.2.61) na expansão do operador Steklov-Poincaré (7.2.28) para obter, após alguns rearranjos,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \mathcal{A}(u) + f(\varepsilon)(\mathcal{A}(g) + \mathcal{B}(u)) + \mathcal{A}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \\ &+ \mathcal{R}_\varepsilon(u) + f(\varepsilon)\mathcal{R}_\varepsilon(g) + f(\varepsilon)^2\mathcal{B}(g) \quad \text{sobre } \partial B_R. \end{aligned} \quad (7.2.62)$$

Considerando esses dois últimos resultados em (7.2.12) e coletando os termos em potências de  $\varepsilon$ , deriva-se um problema variacional para cada termo do ansatz (7.2.61). O primeiro problema para  $u$

$$\int_{\omega \setminus \overline{B_R}} \nabla u \cdot \nabla \eta + \int_{\partial B_R} \mathcal{A}(u)\eta + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \eta + \int_{\Omega} u\eta = \int_{\Omega} b\eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\mathcal{D}). \quad (7.2.63)$$

O segundo problema para  $g$

$$\int_{\omega \setminus \overline{B_R}} \nabla g \cdot \nabla \eta + \int_{\partial B_R} \mathcal{A}(g)\eta + \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla \eta + \int_{\Omega} g\eta = - \int_{\partial B_R} \mathcal{B}(u)\eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\mathcal{D}), \quad (7.2.64)$$

e o terceiro problema para o resíduo  $\tilde{u}_\varepsilon$

$$\int_{\omega \setminus \overline{B_R}} \nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla \eta + \int_{\partial B_R} \mathcal{A}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)\eta + \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla \eta + \int_{\Omega} \tilde{u}_\varepsilon \eta = \int_{\partial B_R} \mathfrak{F}_\varepsilon \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\mathcal{D}), \quad (7.2.65)$$

onde a fonte  $\mathfrak{F}_\varepsilon$  é dada por

$$\mathfrak{F}_\varepsilon = -(\mathcal{R}_\varepsilon(u) + f(\varepsilon)\mathcal{R}_\varepsilon(g) + f(\varepsilon)^2\mathcal{B}(g)). \quad (7.2.66)$$

A estimativa  $\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{D} \setminus \overline{B_R})} = o(f(\varepsilon))$  é válida para o termo remanescente, sendo que a prova desse resultado é deixada como exercício ao final do Capítulo.

### 7.2.3 Expansão Assintótica do Funcional de Forma

Agora, objetiva-se estabelecer a expansão assintótica do funcional e obter sua derivada topológica. De fato, introduzindo o ansatz (7.2.61) no funcional de forma associado ao problema perturbado (7.1.6), tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\Omega(u_\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u + f(\varepsilon)g + \tilde{u}_\varepsilon - z_d)^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - z_d)^2 + f(\varepsilon) \int_{\Omega} (u - z_d)g + o(f(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (7.2.67)$$

Agora, reescrevendo o sistema adjunto (7.1.5) como

$$\int_{\omega \setminus \overline{B_R}} \nabla v \cdot \nabla \eta + \int_{\partial B_R} \mathcal{A}(v)\eta + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \eta + \int_{\Omega} v\eta = - \int_{\Omega} (u - z_d)\eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\mathcal{D}). \quad (7.2.68)$$

Tomando  $g$  como função teste na equação acima tem-se a seguinte igualdade

$$\int_{\omega \setminus \overline{B_R}} \nabla v \cdot \nabla g + \int_{\partial B_R} \mathcal{A}(v)g + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla g + \int_{\Omega} vg = - \int_{\Omega} (u - z_d)g. \quad (7.2.69)$$



Por outro lado, tomando  $v$  como função teste em (7.2.64), tem-se

$$\int_{\omega \setminus \overline{B_R}} \nabla g \cdot \nabla v + \int_{\partial B_R} \mathcal{A}(g)v + \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla v + \int_{\Omega} gv = - \int_{\partial B_R} \mathcal{B}(u)v. \quad (7.2.70)$$

Combinando tais igualdades obtém-se o seguinte resultado importante

$$\int_{\Omega} (u - z_d)g = \int_{\partial B_R} \mathcal{B}(u)v = \langle \mathcal{B}(u), v \rangle_{\partial B_R} = 2\nabla u(\hat{x}) \cdot \nabla v(\hat{x}), \quad (7.2.71)$$

onde foram consideradas as simetrias das formas bilineares e a representação (7.2.30), que é válida devido à *regularidade elíptica* interior de  $u$  e  $v$ . Finalmente, introduzindo esse último resultado em (7.2.67), a *expansão assintótica topológica* do funcional de forma resulta em

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) + 2f(\varepsilon)\nabla u(\hat{x}) \cdot \nabla v(\hat{x}) + o(f(\varepsilon)). \quad (7.2.72)$$

Portanto, a *derivada topológica* é imediatamente identificada, sendo dada por

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = 2\nabla u(\hat{x}) \cdot \nabla v(\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in \omega, \quad (7.2.73)$$

onde a função  $f(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2$ . Cabe lembrar que  $u$  é solução do problema direto (7.1.2) e  $v$  é solução do problema adjunto (7.1.5), ambos definidos no domínio original não perturbado  $\mathcal{D}$ .

### 7.3 Exercícios

1. Prove que o resíduo  $\tilde{u}_\varepsilon$ , satisfazendo (7.2.65), possui a estimativa  $\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{D} \setminus \overline{B_R})} = o(f(\varepsilon))$ . Dica: estude a prova do Lema 5.1, Capítulo 5, Seção 5.5, e adapte para o caso aqui analisado.
2. Repita toda a análise apresentada neste Capítulo considerando o seguinte problema acoplado elíptico não linear

$$\begin{cases} \text{Encontre } u \in H_0^1(\mathcal{D}), \text{ tal que} \\ \int_{\omega} \nabla u \cdot \nabla \eta + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \eta + \int_{\Omega} u^3 \eta = \int_{\Omega} b \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(\mathcal{D}). \end{cases}$$

Dica: Consulte o livro de Novotny & Sokolowski, 2013 [84], Capítulos 10 e 11.

## Apêndice A

# Derivada em Relação a um Domínio Geométrico

Este apêndice objetiva estudar a análise de sensibilidade à mudança de forma no contexto da mecânica do contínuo. Assim, todos os objetos em estudo são considerados suficientemente suaves, o que significa que as questões associadas à regularidade não são tratadas explicitamente, pois as hipóteses usualmente adotadas, que tornam um argumento rigoroso, em geral são óbvias para matemáticos e de pouco interesse para engenheiros e físicos. Nesse contexto, não se emprega qualquer espaço funcional no desenvolvimento da teoria aqui apresentada. No entanto, o caso de problemas de valor de contorno elípticos no âmbito de soluções variacionais (fracas) em espaços funcionais pode ser visto, por exemplo, em [84, 94], onde os resultados obtidos para as derivadas material e de forma são rigorosamente justificados utilizando uma aplicação do método da velocidade (*speed method*). Além do mais, os resultados associados a problemas de valor de contorno em mecânica dos fluídos são obtidos pelo mesmo método em [88].

A função custo (ou funcional de forma), as restrições e as equações de estado são escritas em geral como integrais de domínio e/ou de contorno, cujos integrandos podem depender de campos escalares e/ou vetoriais e de seus gradientes de primeira e/ou de segunda ordens, etc. A análise de sensibilidade à mudança de forma consiste no estudo do comportamento desses funcionais em relação a uma perturbação na forma do domínio de definição do problema. Para obter a sensibilidade (derivada) de uma dada função custo em relação a perturbações na forma, é suficiente parametrizar adequadamente o movimento do contorno do domínio geométrico e aplicar os conceitos de derivada Gâteaux e Fréchet de campos materiais e espaciais juntamente com o teorema do transporte de Reynolds. Neste apêndice, então, é apresentado o ferramental básico para a análise de sensibilidade à mudança de forma do ponto de vista da mecânica do contínuo, resultando em uma metodologia sistemática e geral aplicável para uma ampla classe de problemas.

Do ponto de vista histórico, notáveis desenvolvimentos neste campo foram observados durante a conferência *Optimization of Distributed Parameters Structures*, realizada em 1981 [41], principalmente devido aos trabalhos de Céa [19] e Zolésio [99], em que são descritos os fundamentos matemáticos da análise de sensibilidade à mudança de forma em espaços de Sobolev por meio de técnicas de variação suave do contorno (veja também Haslinger & Neittaanmäki 1988 [40], Sokołowski & Zolésio 1992 [94], Delfour & Zolésio 2001 [21] e Henrot & Pierre 2005 [42]). Além disso, é

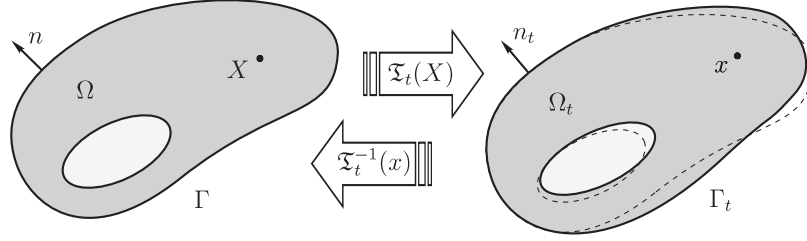


Figura A.1: Mapeamento  $\mathfrak{T}_t$  entre os domínios original (material)  $\Omega$  e perturbado (espacial)  $\Omega_t$ .

possível estabelecer estreita relação entre a análise de sensibilidade à mudança de forma e a teoria da mecânica do contínuo (vide, a respeito, [96]), que é discutida no final deste capítulo por meio de exemplo associado à análise de defeitos em corpos elásticos tridimensionais.

## A.1 Descrições Material e Espacial

Considere um domínio aberto e limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , com  $d \geq 2$ , cujo contorno, denotado por  $\Gamma := \partial\Omega$ , é suficientemente regular, i.e., classe  $C^2$  ou Lipschitz. Assumindo que o domínio  $\Omega$  está sujeito a uma perturbação regular (ou seja, sua topologia é preservada) representada por um mapeamento suave e inversível denotado por  $\mathfrak{T}_t(X)$ , onde  $X \in \Omega$  e  $t \in [0, \delta)$ , com  $\delta \in \mathbb{R}_+$ , então, para cada  $t$ , tem-se

$$\mathfrak{T}_t : \Omega \rightarrow \Omega_t \quad \text{com} \quad \mathfrak{T}_t^{-1} : \Omega_t \rightarrow \Omega . \quad (\text{A.1.1})$$

Assim, o domínio perturbado  $\Omega_t$ , delimitado por  $\Gamma_t := \partial\Omega_t$ , parametrizado com relação a  $t$ , pode ser escrito da seguinte forma (vide fig. A.1)

$$\Omega_t := \{x \in \mathbb{R}^d : x = \mathfrak{T}_t(X), X \in \Omega \text{ e } t \in [0, \delta)\} . \quad (\text{A.1.2})$$

Portanto,  $x|_{t=0} = \mathfrak{T}_t(X)|_{t=0} = X$  e  $\Omega_t|_{t=0} = \Omega$ .

Usando a notação clássica da mecânica do contínuo (Gurtin 1981 [37]),  $\Omega$  e  $\Omega_t$  representam as *configurações material e espacial*, respectivamente. Além disso,  $X \in \Omega$  e  $x \in \Omega_t$  são também referidas como as coordenadas Lagrangeanas e Eulerianas, respectivamente. Considera-se, portanto, o domínio de referência  $\Omega$  munido do *sistema de coordenadas Lagrangeanas* e o domínio variável  $\Omega_t$  com o *sistema de coordenadas Eulerianas*, em que o domínio  $\Omega_t$  é construído na forma de fluxo de um dado campo de velocidade.

Desta forma, o elemento diferencial espacial  $dx$  (definido em  $\Omega_t$ ) é associado ao elemento diferencial material  $dX$  (definido em  $\Omega$ ) como

$$x = \mathfrak{T}_t(X) \quad \Rightarrow \quad dx = \partial_X \mathfrak{T}_t(X) dX , \quad (\text{A.1.3})$$

cujas relação pode ser escrita de forma compacta como

$$\mathfrak{J}(X, t) := \partial_X \mathfrak{T}_t(X) \quad \Rightarrow \quad dx = \mathfrak{J} dX , \quad (\text{A.1.4})$$

onde  $\mathfrak{J}$  pode ser interpretado como o *tensor Jacobiano* da transformação de  $\Omega$  para  $\Omega_t$ . É possível, ainda, derivar o mapeamento  $\mathfrak{T}_t(X)$  com relação a  $t$ , para obter

$$x = \mathfrak{T}_t(X) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} := \partial_t \mathfrak{T}_t(X) = \mathfrak{V}(X, t) , \quad (\text{A.1.5})$$

onde, por analogia com a mecânica do contínuo,  $\mathfrak{V}(X, t)$  pode ser vista como a *descrição material do campo de velocidade* que caracteriza a mudança de forma do corpo.

A completa dependência dos pontos material  $X \in \Omega$  e espacial  $x \in \Omega_t$  com relação ao parâmetro  $t$  é dada respectivamente por

$$\mathfrak{T}_t^{-1}(\mathfrak{T}_t(X)) = X \quad \text{e} \quad \mathfrak{T}_t(\mathfrak{T}_t^{-1}(x)) = x. \quad (\text{A.1.6})$$

Portanto, tomando-se duas funções  $g(X, t)$  e  $h(x, t)$ , suas descrições espacial e material são, respectivamente, assim definidas

$$g_t(x) := g(\mathfrak{T}_t^{-1}(x), t) \quad \text{e} \quad h^t(X) := h(\mathfrak{T}_t(X), t). \quad (\text{A.1.7})$$

Introduzindo  $\varphi^t$  e  $\varphi_t$  para denotar, respectivamente, as descrições material e espacial de um campo  $\varphi$  (escalar, vetorial ou tensorial), a *descrição espacial do campo material*  $\varphi^t$  é definida como

$$[\varphi^t]_t(x) := \varphi^t(\mathfrak{T}_t^{-1}(x)), \quad (\text{A.1.8})$$

enquanto que a *descrição material do campo espacial*  $\varphi_t$  é escrita como

$$[\varphi_t]^t(X) := \varphi_t(\mathfrak{T}_t(X)). \quad (\text{A.1.9})$$

Combinando (A.1.8) e (A.1.9) obtém-se

$$\varphi^t(X) = [\varphi_t(x)]^t = \varphi_t(x)|_{x=\mathfrak{T}_t(X)}, \quad (\text{A.1.10})$$

$$\varphi_t(x) = [\varphi^t(X)]_t = \varphi^t(X)|_{X=\mathfrak{T}_t^{-1}(x)}, \quad (\text{A.1.11})$$

que resulta em

$$\varphi^t = [\varphi_t]^t = [[\varphi^t]_t]^t \quad \text{e} \quad \varphi_t = [\varphi^t]_t = [[\varphi_t]^t]_t. \quad (\text{A.1.12})$$

Muitas vezes é usada a seguinte notação para funções compostas

$$\varphi^t(X) = (\varphi_t \circ \mathfrak{T}_t)(X) \quad \text{e} \quad \varphi_t(x) = (\varphi^t \circ \mathfrak{T}_t^{-1})(x), \quad (\text{A.1.13})$$

que pode ser encontrada em diversas referências sobre o assunto (vide, por exemplo, os livros de Sokolowski & Zolésio 1992 [94] e Delfour & Zolésio 2001 [21]).

### A.1.1 Gradiente de Campos Escalares

Sejam  $\varphi^t$  e  $\varphi_t$  as descrições material e espacial de um campo escalar  $\varphi$ , respectivamente. Então, é possível calcular o diferencial total de  $\varphi^t$  e  $\varphi_t$ , ou seja

$$d\varphi^t = \partial_X \varphi^t \cdot dX = \nabla_X \varphi^t \cdot dX \quad \text{e} \quad d\varphi_t = \partial_x \varphi_t \cdot dx = \nabla_x \varphi_t \cdot dx, \quad (\text{A.1.14})$$

onde  $\nabla_X := \partial_X$  e  $\nabla_x := \partial_x$  são os gradientes com relação às coordenadas Lagrangeana e Euleriana, respectivamente.

Assim, sendo  $d\varphi^t = [d\varphi_t]^t$ , a relação entre  $\nabla_X \varphi^t$  e  $\nabla_x \varphi_t$  pode ser obtida da seguinte maneira

$$\begin{aligned} [d\varphi_t]^t &= [\nabla_x \varphi_t \cdot dx]^t = [\nabla_x \varphi_t]^t \cdot \mathfrak{J}dX \\ &= \mathfrak{J}^\top [\nabla_x \varphi_t]^t \cdot dX \Rightarrow \nabla_X \varphi^t = \mathfrak{J}^\top [\nabla_x \varphi_t]^t. \end{aligned} \quad (\text{A.1.15})$$

### A.1.2 Gradiente de Campos Vetoriais

Sejam  $\varphi^t$  e  $\varphi_t$  as descrições material e espacial de um campo vetorial  $\varphi$ , respectivamente. Então, é possível calcular o diferencial total de  $\varphi^t$  e  $\varphi_t$ , que é

$$d\varphi^t = (\partial_X \varphi^t) dX = (\nabla_X \varphi^t) dX \quad \text{e} \quad d\varphi_t = (\partial_x \varphi_t) dx = (\nabla_x \varphi_t) dx, \quad (\text{A.1.16})$$

onde  $\nabla_X := \partial_X$  e  $\nabla_x := \partial_x$ . Assim, sendo  $d\varphi^t = [d\varphi_t]^t$ , a relação entre  $\nabla_X \varphi^t$  e  $\nabla_x \varphi_t$  é dada por

$$[d\varphi_t]^t = [(\nabla_x \varphi_t) dx]^t = [\nabla_x \varphi_t]^t \mathfrak{J} dX \Rightarrow \nabla_X \varphi^t = [\nabla_x \varphi_t]^t \mathfrak{J}. \quad (\text{A.1.17})$$

### A.1.3 Descrição Espacial do Campo de Velocidade

A descrição material do campo de velocidade é obtida pela diferenciação do mapeamento  $X \mapsto \mathfrak{T}_t(X)$  com relação ao parâmetro  $t$  (cf. equação (A.1.5)). De outro lado, para obter a *descrição espacial do campo de velocidade* é preciso transportar sua descrição material  $\mathfrak{V}(X, t)$  para a configuração espacial  $\Omega_t$ . Assim, a descrição espacial do campo de velocidade é definida como

$$\mathfrak{V}_t(x) := \mathfrak{V}(\mathfrak{T}_t^{-1}(x), t) = \partial_t \mathfrak{T}_t(X) \Big|_{X=\mathfrak{T}_t^{-1}(x)}. \quad (\text{A.1.18})$$

Portanto, as descrições material e espacial do campo de velocidade são dadas respectivamente por (A.1.5) e (A.1.18). Ademais, em  $t = 0$ , observa-se que

$$\mathfrak{V}_t(x) \Big|_{t=0} = \mathfrak{V}(X, 0). \quad (\text{A.1.19})$$

Levando-se em conta (A.1.17) para o caso particular em que o campo vetorial  $\varphi$  é a velocidade à mudança de forma  $\mathfrak{V}$ , tem-se

$$\nabla_X \mathfrak{V} = [\nabla_x \mathfrak{V}_t]^t \mathfrak{J}, \quad (\text{A.1.20})$$

que pode ser escrita de forma compacta introduzindo a seguinte notação

$$L := \nabla_X \mathfrak{V} \quad \text{e} \quad L_t := \nabla_x \mathfrak{V}_t, \quad (\text{A.1.21})$$

que conduz a

$$L = [L_t]^t \mathfrak{J}. \quad (\text{A.1.22})$$

Ademais

$$\text{tr}(L) = \text{I} \cdot \nabla_X \mathfrak{V} = \text{div}_X \mathfrak{V} \quad \text{e} \quad \text{tr}(L_t) = \text{I} \cdot \nabla_x \mathfrak{V}_t = \text{div}_x \mathfrak{V}_t. \quad (\text{A.1.23})$$

## A.2 Derivada Material de Campos Espaciais

Conforme mencionado, o funcional de forma, as equações de estado e as restrições são em geral escritas como integrais de domínio e/ou de contorno, cujos integrandos podem depender de campos escalares e/ou vetoriais e de seus gradientes de primeira ou segunda ordens, etc. Assim, para um dado campo escalar ou vetorial, é determinada sua derivada total com relação ao parâmetro de controle  $t$  associado às descrições material e espacial.

Seja  $\varphi$  um dado campo, em que as descrições material e espacial são respectivamente denotadas por  $\varphi^t$  e  $\varphi_t$ . Então, a derivada material (total) da descrição material  $\varphi^t$  de um campo  $\varphi$  é trivialmente definida como

$$\dot{\varphi}^t(X) := \partial_t \varphi^t(X). \quad (\text{A.2.24})$$

De outro lado, a descrição espacial da derivada material (total) do campo  $\varphi$ , escrita espacialmente como  $\dot{\varphi}_t$ , é definida por

$$\dot{\varphi}_t(x) := (\partial_t \varphi_t(\mathfrak{T}_t(X)))|_{X=\mathfrak{T}_t^{-1}(x)}. \quad (\text{A.2.25})$$

Ou seja, para obter a descrição espacial da derivada material de um campo  $\varphi$  escrito espacialmente como  $\varphi_t$ , é necessário primeiro transportar o campo  $\varphi_t$  para a configuração material  $\Omega$ , calcular sua derivada com relação ao parâmetro  $t$  e, finalmente, retornar à configuração espacial  $\Omega_t$ . Portanto, a partir da notação introduzida por (A.1.12) obtém-se

$$\dot{\varphi}_t(x) = [\dot{\varphi}^t(X)]_t \quad \text{e} \quad \dot{\varphi}^t(X) = [\dot{\varphi}_t(x)]^t. \quad (\text{A.2.26})$$

Finalmente, a *relação entre as derivadas material e espacial* é dada pelo importante resultado seguinte:

**Teorema A.1.** *Seja  $\varphi_t$  a descrição espacial de um campo escalar ou vetorial suficientemente suave  $\varphi$ , então*

$$\dot{\varphi}_t = \varphi'_t + \langle \nabla_x \varphi_t, \mathfrak{V}_t \rangle, \quad \text{com} \quad \varphi'_t(x) := \partial_t \varphi_t(x). \quad (\text{A.2.27})$$

*Demonstração.* A partir da regra da cadeia e tendo em conta a definição da descrição espacial do campo de velocidade dado por (A.1.18) obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_t(x) &= (\partial_t \varphi_t(\mathfrak{T}_t(X)))|_{X=\mathfrak{T}_t^{-1}(x)} \\ &= \langle \nabla_x \varphi_t(x), \partial_t \mathfrak{T}_t(X)|_{X=\mathfrak{T}_t^{-1}(x)} \rangle + \partial_t \varphi_t(x) \\ &= \langle \nabla_x \varphi_t(x), \mathfrak{V}_t(x) \rangle + \varphi'_t(x), \end{aligned} \quad (\text{A.2.28})$$

que conduz ao resultado.  $\square$

**Corolário A.1.** *Levando-se em conta o resultado do Teorema A.1 juntamente com (A.1.19), são obtidas as seguintes relações entre as derivadas materiais e espaciais:*

- Para um campo escalar  $\varphi_t$

$$\dot{\varphi}_t = \varphi'_t + \nabla_x \varphi_t \cdot \mathfrak{V}_t. \quad (\text{A.2.29})$$

- Para um campo vetorial  $\varphi_t$

$$\dot{\varphi}_t = \varphi'_t + (\nabla_x \varphi_t) \mathfrak{V}_t. \quad (\text{A.2.30})$$

### A.2.1 Derivada do Gradiente de um Campo Escalar

Para obter a descrição espacial da derivada material do gradiente de um campo escalar  $\varphi$ , escrito espacialmente como  $\varphi_t$ , é preciso diferenciar ambos os lados de (A.1.15) com relação a  $t$ , que resulta em

$$\begin{aligned} \partial_t(\nabla_X \varphi^t) &= \partial_t(\mathfrak{J}^\top [\nabla_x \varphi_t]^t) \\ &= \partial_t \mathfrak{J}^\top [\nabla_x \varphi_t]^t + \mathfrak{J}^\top \partial_t([\nabla_x \varphi_t]^t). \end{aligned} \quad (\text{A.2.31})$$

Multiplicando-se à esquerda ambos os lados de (A.2.31) por  $\mathfrak{J}^{-\top}$  e, após alguns rearranjos, obtém-se

$$\partial_t([\nabla_x \varphi_t]^t) = \mathfrak{J}^{-\top} \partial_t(\nabla_X \varphi^t) - \mathfrak{J}^{-\top} \partial_t \mathfrak{J}^\top [\nabla_x \varphi_t]^t. \quad (\text{A.2.32})$$

Entretanto,

$$\partial_t(\nabla_X \varphi^t) = \nabla_X(\partial_t \varphi^t) = \nabla_X \dot{\varphi}^t = \nabla_X[\dot{\varphi}_t]^t = \mathfrak{J}^\top [\nabla_x \dot{\varphi}_t]^t, \quad (\text{A.2.33})$$

e, da definição do tensor Jacobiano  $\mathfrak{J}$  dado por (A.1.4), tomando (A.1.22), tem-se

$$\begin{aligned} \partial_t \mathfrak{J} &= \partial_t(\nabla_X \mathfrak{T}_t) = \nabla_X \partial_t \mathfrak{T}_t = \nabla_X \mathfrak{B} = [\nabla_x \mathfrak{B}_t]^t \mathfrak{J} \\ \Rightarrow \partial_t \mathfrak{J} &= [L_t]^t \mathfrak{J} \quad \text{e} \quad \partial_t \mathfrak{J}^\top = \mathfrak{J}^\top ([L_t]^t)^\top. \end{aligned} \quad (\text{A.2.34})$$

Considerando as equações (A.2.32), (A.2.33) e (A.2.34) obtém-se

$$\partial_t([\nabla_x \varphi_t]^t) = [\nabla_x \dot{\varphi}_t]^t - ([L_t]^t)^\top [\nabla_x \varphi_t]^t. \quad (\text{A.2.35})$$

Após tomar-se a descrição espacial da relação acima, tem-se

$$[\partial_t([\nabla_x \varphi_t]^t)]_t = [[\nabla_x \dot{\varphi}_t]^t]_t - [([L_t]^t)^\top [\nabla_x \varphi_t]^t]_t, \quad (\text{A.2.36})$$

que finalmente resulta em

$$(\nabla_x \varphi_t)' = \nabla_x \dot{\varphi}_t - L_t^\top (\nabla_x \varphi_t). \quad (\text{A.2.37})$$

## A.2.2 Derivada do Gradiente de um Campo Vetorial

Da mesma maneira, a descrição espacial da derivada material do gradiente de um campo vetorial  $\varphi$ , escrito espacialmente como  $\varphi_t$ , pode ser obtida diferenciando-se ambos os lados de (A.1.17) com relação a  $t$ , ou seja

$$\begin{aligned} \partial_t(\nabla_X \varphi^t) &= \partial_t([\nabla_x \varphi_t]^t \mathfrak{J}) \\ &= \partial_t([\nabla_x \varphi_t]^t) \mathfrak{J} + [\nabla_x \varphi_t]^t \partial_t \mathfrak{J}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.38})$$

Multiplicando-se à direita ambos os lados de (A.2.38) por  $\mathfrak{J}^{-1}$  e, após rearranjá-la, obtém-se

$$\partial_t([\nabla_x \varphi_t]^t) = \partial_t(\nabla_X \varphi^t) \mathfrak{J}^{-1} - [\nabla_x \varphi_t]^t (\partial_t \mathfrak{J}) \mathfrak{J}^{-1}. \quad (\text{A.2.39})$$

Todavia,

$$\partial_t(\nabla_X \varphi^t) = \nabla_X(\partial_t \varphi^t) = \nabla_X \dot{\varphi}^t = \nabla_X[\dot{\varphi}_t]^t = [\nabla_x \dot{\varphi}_t]^t \mathfrak{J}, \quad (\text{A.2.40})$$

e, das equações (A.2.39), (A.2.40) e (A.2.34), obtém-se

$$\partial_t([\nabla_x \varphi_t]^t) = [\nabla_x \dot{\varphi}_t]^t - [\nabla_x \varphi_t]^t [L_t]^t. \quad (\text{A.2.41})$$

Após tomar a descrição espacial da relação acima tem-se

$$[\partial_t([\nabla_x \varphi_t]^t)]_t = [[\nabla_x \dot{\varphi}_t]^t]_t - [[\nabla_x \varphi_t]^t [L_t]^t]_t, \quad (\text{A.2.42})$$

que finalmente resulta em

$$(\nabla_x \varphi_t)' = \nabla_x \dot{\varphi}_t - (\nabla_x \varphi_t) L_t. \quad (\text{A.2.43})$$

## A.3 Derivada Material de Expressões Integrais

Como mencionado no início deste apêndice, a função custo, as restrições e equações de estado são dadas em geral por funcionais definidos através de integrais do domínio e/ou de contorno, cujos integrandos dependem de campos escalares e/ou vetoriais bem como de seus gradientes de primeira e de segunda ordens, etc. Na seção anterior foi mostrado como diferenciar os gradientes de campos escalares e vetoriais com relação à forma. Agora será mostrado como diferenciar uma classe de funcionais definidos no domínio e/ou contorno quando submetido a mudanças suaves na forma.



### A.3.1 Integral de Domínio

Para obter a descrição espacial da derivada material de um funcional dado por integrais definidas na configuração espacial  $\Omega_t$ , ou seja,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi_t d\Omega_t, \quad (\text{A.3.44})$$

de início é necessário transportar o domínio da integração  $\Omega_t$  e o integrando  $\varphi_t$ , representando a descrição espacial de um campo escalar  $\varphi$ , para a configuração material  $\Omega$ . Este procedimento permite introduzir o operador derivada total na integral. Finalmente, é possível calcular a derivada com relação ao parâmetro de controle  $t$  usando regras de cálculo usuais e retornar à configuração espacial  $\Omega_t$ .

Levando-se em conta, então, os elementos diferenciais  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  definidos em  $\Omega_t$ , a relação entre  $d\Omega_t$  e  $d\Omega$  pode ser obtida a partir de (A.1.4) como o seguinte:

$$\begin{aligned} d\Omega_t &= dx \times dy \cdot dz \\ &= \mathfrak{J}dX \times \mathfrak{J}dY \cdot \mathfrak{J}dZ \\ &= \frac{\mathfrak{J}dX \times \mathfrak{J}dY \cdot \mathfrak{J}dZ}{dX \times dY \cdot dZ} d\Omega \\ &\Rightarrow d\Omega_t = (\det \mathfrak{J}) d\Omega, \end{aligned} \quad (\text{A.3.45})$$

em que  $dX$ ,  $dY$  e  $dZ$  são os elementos diferenciais definidos em  $\Omega$ .

Agora, para obter todos os elementos necessários a demonstrar o resultado principal desta seção, que é dado pelo teorema do transporte de Reynolds, tem-se somente que calcular a derivada de  $\det \mathfrak{J}$ , ou seja

$$(\det \mathfrak{J}(X, t))' = \left\langle \partial_{\mathfrak{J}}(\det \mathfrak{J}(X, t)), \dot{\mathfrak{J}}(X, t) \right\rangle, \quad (\text{A.3.46})$$

onde é empregada a seguinte expansão de primeira ordem

$$\det(\mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{J}}) = \det(\mathfrak{J}) + \left\langle \partial_{\mathfrak{J}}(\det \mathfrak{J}), \dot{\mathfrak{J}} \right\rangle + o(\|\dot{\mathfrak{J}}\|). \quad (\text{A.3.47})$$

O termo  $\partial_{\mathfrak{J}}(\det \mathfrak{J})$  é identificado abaixo e o termo remanescente  $o(\|\dot{\mathfrak{J}}\|)$  é de maior ordem com relação à norma matricial  $\|\dot{\mathfrak{J}}\|$ .

Por outro lado, dado um tensor de segunda ordem  $T$ ,  $\det(T - sI)$  admite a seguinte representação (Gurtin 1981 [37])

$$\det(T - sI) = -s^3 + I_1(T)s^2 - I_2(T)s + I_3(T) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.3.48})$$

onde  $I_1(T)$ ,  $I_2(T)$  e  $I_3(T)$  são os invariantes do tensor  $T$  respectivamente definidos como

$$I_1(T) = \text{tr}(T), \quad (\text{A.3.49})$$

$$I_2(T) = \frac{1}{2}[\text{tr}(T)^2 - \text{tr}(T^2)], \quad (\text{A.3.50})$$

$$I_3(T) = \det T. \quad (\text{A.3.51})$$

Tomando-se  $s = -1$  em (A.3.48) obtém-se

$$\det(T + I) = 1 + \text{tr}(T) + o(\|T\|). \quad (\text{A.3.52})$$

Ademais, observa-se que

$$\begin{aligned}\det(\mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{J}}) &= \det[(\mathbf{I} + \dot{\mathfrak{J}}\mathfrak{J}^{-1})\mathfrak{J}] \\ &= \det(\dot{\mathfrak{J}}\mathfrak{J}^{-1} + \mathbf{I})\det\mathfrak{J} .\end{aligned}\quad (\text{A.3.53})$$

Assim, escolhendo  $T = \dot{\mathfrak{J}}\mathfrak{J}^{-1}$  em (A.3.52) e considerando (A.3.53) tem-se

$$\begin{aligned}\det(\mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{J}}) &= [1 + \text{tr}(\dot{\mathfrak{J}}\mathfrak{J}^{-1}) + o(\|\dot{\mathfrak{J}}\|)]\det\mathfrak{J} \\ &= \det\mathfrak{J} + \text{tr}(\dot{\mathfrak{J}}\mathfrak{J}^{-1})\det\mathfrak{J} + o(\|\dot{\mathfrak{J}}\|) .\end{aligned}\quad (\text{A.3.54})$$

Comparando-se (A.3.47) com (A.3.54) e usando (A.2.34), obtém-se

$$\begin{aligned}\langle \partial_{\mathfrak{J}}(\det \mathfrak{J}), \dot{\mathfrak{J}} \rangle &= \text{tr}(\dot{\mathfrak{J}}\mathfrak{J}^{-1})\det\mathfrak{J} = \text{tr}([L_t]^t \mathfrak{J}\mathfrak{J}^{-1})\det\mathfrak{J} \\ &= \text{tr}([\nabla_x \mathfrak{A}_t]^t)\det\mathfrak{J} = [\text{div}_x \mathfrak{A}_t]^t \det\mathfrak{J} ,\end{aligned}\quad (\text{A.3.55})$$

resultando em

$$(\det\mathfrak{J})' = [\text{div}_x \mathfrak{A}_t]^t \det\mathfrak{J} .\quad (\text{A.3.56})$$

Finalmente, a partir dos resultados acima, tem-se todos os elementos para demonstrar o *teorema do transporte de Reynolds para integrais de domínio* (Gurtin 1981 [37]):

**Teorema A.2.** *Considerando um funcional definido através de uma integral em  $\Omega_t$ , cujo integrando é dado pela descrição espacial  $\varphi_t$  de um campo escalar suficientemente suave  $\varphi$ . Então,*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi_t d\Omega_t = \int_{\Omega_t} (\dot{\varphi}_t + \varphi_t \text{div}_x \mathfrak{A}_t) d\Omega_t ,\quad (\text{A.3.57})$$

$$= \int_{\Omega_t} \varphi'_t d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \varphi_t (\mathfrak{A}_t \cdot n_t) d\Gamma_t ,\quad (\text{A.3.58})$$

onde  $n_t$  é o vetor normal unitário exterior em  $\partial\Omega_t$ .

*Demonstração.* Das fórmulas (A.3.45) e (A.3.56) se segue

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi_t d\Omega_t &= \partial_t \int_{\Omega} \varphi^t(\det\mathfrak{J}) d\Omega = \int_{\Omega} \partial_t(\varphi^t \det\mathfrak{J}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\dot{\varphi}^t \det\mathfrak{J} + \varphi^t (\det\mathfrak{J})') d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\dot{\varphi}^t + \varphi^t [\text{div}_x \mathfrak{A}_t]^t) (\det\mathfrak{J}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega_t} (\dot{\varphi}_t + \varphi_t \text{div}_x \mathfrak{A}_t) d\Omega_t .\end{aligned}\quad (\text{A.3.59})$$

De outro lado, a partir do resultado do Teorema A.1 dado por (A.2.27) e após aplicar o teorema da divergência (B.3.35), (A.3.59) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi_t d\Omega_t &= \int_{\Omega_t} (\varphi'_t + \nabla_x \varphi_t \cdot \mathfrak{A}_t + \varphi_t \text{div}_x \mathfrak{A}_t) d\Omega_t \\ &= \int_{\Omega_t} \varphi'_t d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \text{div}_x(\varphi_t \mathfrak{A}_t) d\Omega_t \\ &= \int_{\Omega_t} \varphi'_t d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \varphi_t (\mathfrak{A}_t \cdot n_t) d\Gamma_t .\end{aligned}\quad (\text{A.3.60})$$

Assim, das equações (A.3.59) e (A.3.60) obtém-se referidos resultados.  $\square$

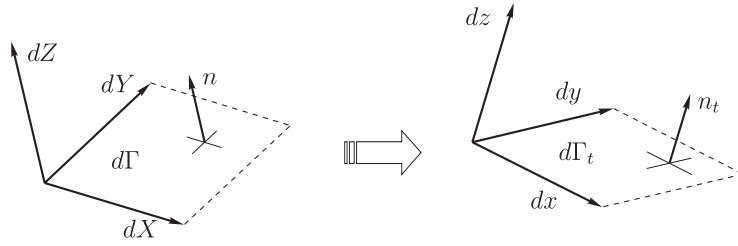


Figura A.2: Elementos diferenciais de superfície  $d\Gamma$  e  $d\Gamma_t$  respectivamente definidos nas configurações material e espacial.

### A.3.2 Integral de Contorno

Nesta seção serão mostrados os precedimentos para obter a descrição espacial da derivada material de um funcional dado por integrais de contorno, ou seja

$$\frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega_t} \varphi_t d\Gamma_t, \quad (\text{A.3.61})$$

onde o integrando  $\varphi_t$  representa a descrição espacial de um campo escalar  $\varphi$  e  $\Gamma_t = \partial\Omega_t$  é usado para denotar o contorno da configuração espacial  $\Omega_t$ .

Sejam  $n$  e  $n_t$  respectivamente os campos vetoriais normais unitários aos contornos  $\Gamma = \partial\Omega$  e  $\Gamma_t = \partial\Omega_t$ , de modo que  $(d\Gamma_t)n_t = dx \times dy$  e  $(d\Gamma)n = dX \times dY$ . Em seguida, tendo em conta que  $dz$  e  $dZ$  são os elementos diferenciais nas direções  $n_t$  e  $n$ , tem-se (vide fig. A.2)

$$d\Gamma_t(n_t \cdot dz) = d\Omega_t \quad \text{e} \quad d\Gamma(n \cdot dZ) = d\Omega. \quad (\text{A.3.62})$$

Assim, a partir de (A.3.45), obtém-se

$$\begin{aligned} d\Gamma_t(n_t \cdot dz) &= (\det\mathfrak{J})d\Gamma(n \cdot dZ) \\ &= (\det\mathfrak{J})d\Gamma(n \cdot \mathfrak{J}^{-1}dz) \\ &= (\det\mathfrak{J})d\Gamma(\mathfrak{J}^{-\top}n) \cdot dz \\ \Rightarrow (d\Gamma_t)n_t &= (\det\mathfrak{J})d\Gamma(\mathfrak{J}^{-\top}n). \end{aligned} \quad (\text{A.3.63})$$

Portanto, a relação entre  $d\Gamma_t$  e  $d\Gamma$  é dada por

$$\begin{aligned} d\Gamma_t &= \|(d\Gamma_t)n_t\| \\ &= \|\det\mathfrak{J}(\mathfrak{J}^{-\top}n)\|d\Gamma \\ &= \|\mathfrak{J}^{-\top}n\|(\det\mathfrak{J})d\Gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.3.64})$$

A derivada do  $\det\mathfrak{J}$  é dada por (A.3.56), necessária, entretanto, para calcular a derivada de  $\|\mathfrak{J}^{-\top}n\|$ . Então, primeiramente obtém-se a descrição material da normal  $n_t$  da seguinte maneira

$$n_t = \frac{n_t d\Gamma_t}{d\Gamma_t} \Rightarrow \frac{\mathfrak{J}^{-\top}n(\det\mathfrak{J})d\Gamma}{\|\mathfrak{J}^{-\top}n\|(\det\mathfrak{J})d\Gamma} = \frac{\mathfrak{J}^{-\top}n}{\|\mathfrak{J}^{-\top}n\|} = [n_t]^t. \quad (\text{A.3.65})$$

Definindo

$$m := \mathfrak{J}^{-\top}n, \quad (\text{A.3.66})$$

tem-se

$$[n_t]^t = \frac{m}{\|m\|}. \quad (\text{A.3.67})$$

Depois, diferenciando ambos os lados da seguinte equação

$$\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{J} = \text{I}, \quad (\text{A.3.68})$$

tem-se

$$(\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{J})^\cdot = (\mathfrak{J}^{-1})^\cdot\mathfrak{J} + \mathfrak{J}^{-1}\dot{\mathfrak{J}} = 0. \quad (\text{A.3.69})$$

Multiplicando-se à direita ambos os lados da expressão acima por  $\mathfrak{J}^{-1}$  e, após alguns rearranjos, obtém-se a derivada da inversa do tensor Jacobiano, ou seja

$$(\mathfrak{J}^{-1})^\cdot = -\mathfrak{J}^{-1}\dot{\mathfrak{J}}\mathfrak{J}^{-1} = -\mathfrak{J}^{-1}[L_t]^t\mathfrak{J}\mathfrak{J}^{-1} = -\mathfrak{J}^{-1}[L_t]^t, \quad (\text{A.3.70})$$

onde é usado o resultado (A.2.34). Assim,

$$(\mathfrak{J}^{-\top})^\cdot = -[L_t^\top]^t\mathfrak{J}^{-\top}. \quad (\text{A.3.71})$$

Ademais, a partir de (A.3.66) tem-se

$$\|m\| = \|\mathfrak{J}^{-\top}n\| \quad (\text{A.3.72})$$

e esta derivada toma a forma

$$\|m\|^\cdot = \partial_t(m \cdot m)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(m \cdot m)^{-\frac{1}{2}}2(m \cdot \dot{m}) = \frac{1}{\|m\|}m \cdot \dot{m}. \quad (\text{A.3.73})$$

Das equações (A.3.71) e (A.3.67) observa-se que

$$\begin{aligned} \dot{m} &= (\mathfrak{J}^{-\top}n)^\cdot \\ &= -[L_t^\top]^t\mathfrak{J}^{-\top}n = -[L_t^\top]^tm \\ &= -[L_t^\top]^t[n_t]^t\|m\| = -[L_t^\top n_t]^t\|m\|. \end{aligned} \quad (\text{A.3.74})$$

Substituindo (A.3.74) em (A.3.73) e tendo em conta (A.3.67) tem-se

$$\begin{aligned} \|m\|^\cdot &= -\frac{1}{\|m\|}m \cdot [L_t^\top n_t]^t\|m\| \\ &= -m \cdot [L_t^\top n_t]^t = -[n_t]^t \cdot [L_t^\top n_t]^t\|m\| \\ &= -[n_t \cdot L_t^\top n_t]^t\|m\| = -[L_t n_t \cdot n_t]^t\|m\|. \end{aligned} \quad (\text{A.3.75})$$

Usando as fórmulas (A.3.56) e (A.3.75), e considerando que  $m = \mathfrak{J}^{-\top}n$ , é possível calcular a derivada de  $\|\mathfrak{J}^{-\top}n\|\det\mathfrak{J}$ , a saber

$$\begin{aligned} (\|\mathfrak{J}^{-\top}n\|\det\mathfrak{J})^\cdot &= \|\mathfrak{J}^{-\top}n\|[\text{div}_x\mathfrak{A}_t]^t\det\mathfrak{J} - [n_t \cdot L_t n_t]^t\|\mathfrak{J}^{-\top}n\|\det\mathfrak{J} \\ &= [\text{div}_x\mathfrak{A}_t - n_t \cdot L_t n_t]^t\|\mathfrak{J}^{-\top}n\|\det\mathfrak{J} \\ &= [\text{div}_{\Gamma_t}\mathfrak{A}_t]^t\|\mathfrak{J}^{-\top}n\|\det\mathfrak{J}, \end{aligned} \quad (\text{A.3.76})$$

onde  $\text{div}_{\Gamma_t}\mathfrak{A}_t$  é o divergente superficial do campo de velocidade, definido como

$$\begin{aligned} \text{div}_{\Gamma_t}\mathfrak{A}_t &= \text{div}_x\mathfrak{A}_t - n_t \cdot L_t n_t \\ &= \text{I} \cdot L_t - (n_t \otimes n_t) \cdot L_t \\ &= (\text{I} - n_t \otimes n_t) \cdot L_t. \end{aligned} \quad (\text{A.3.77})$$

Finalmente, usando o resultado anterior, é possível demonstrar o *teorema do transporte de Reynolds para integrais de contorno*:

**Teorema A.3.** *Considerando um funcional definido através de uma integral em  $\partial\Omega_t$ , cujo integrando é dado pela descrição espacial  $\varphi_t$  de um campo escalar suficientemente suave  $\varphi$ . Então,*

$$\frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega_t} \varphi_t d\Gamma_t = \int_{\partial\Omega_t} (\dot{\varphi}_t + \varphi_t \operatorname{div}_{\Gamma_t} \mathfrak{V}_t) d\Gamma_t, \quad (\text{A.3.78})$$

onde  $\operatorname{div}_{\Gamma_t} \mathfrak{V}_t$  é o divergente superficial do campo de velocidade dado por (A.3.77).

*Demonstração.* Levando-se em conta os resultados (A.3.64) e (A.3.76), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega_t} \varphi_t d\Gamma_t &= \partial_t \int_{\partial\Omega} \varphi^t \|\mathfrak{J}^{-\top} n\| \det \mathfrak{J} d\Gamma \\ &= \int_{\partial\Omega} \partial_t (\varphi^t \|\mathfrak{J}^{-\top} n\| \det \mathfrak{J}) d\Gamma \\ &= \int_{\partial\Omega} (\dot{\varphi}^t \|\mathfrak{J}^{-\top} n\| \det \mathfrak{J} + \varphi^t (\|\mathfrak{J}^{-\top} n\| \det \mathfrak{J})^\cdot) d\Gamma \\ &= \int_{\partial\Omega} (\dot{\varphi}^t + \varphi^t [\operatorname{div}_{\Gamma_t} \mathfrak{V}_t]^t) \|\mathfrak{J}^{-\top} n\| \det \mathfrak{J} d\Gamma \\ &= \int_{\partial\Omega_t} (\dot{\varphi}_t + \varphi_t \operatorname{div}_{\Gamma_t} \mathfrak{V}_t) d\Gamma_t, \end{aligned} \quad (\text{A.3.79})$$

conduzindo ao resultado.  $\square$

## A.4 Resumo das Fórmulas Obtidas

Considerando as derivadas materiais (totais) avaliadas para  $t = 0$  e desde que em  $t = 0$ , tem-se  $\Omega_t|_{t=0} = \Omega$ . Então o subscrito  $X$  pode ser suprimido, ou seja,  $\nabla := \nabla_X$  e  $\operatorname{div} := \operatorname{div}_X$ . Ademais, com o objetivo de simplificar a apresentação dos resultados, pode-se escrever  $x \in \Omega$ , no lugar de  $X$ .

Portanto, para um dado campo  $\varphi$  (escalar, vetorial ou tensorial), a *relação entre suas derivadas material e espacial* é dada por

$$\dot{\varphi} = \varphi' + \langle \nabla \varphi, \mathfrak{V} \rangle. \quad (\text{A.4.80})$$

Em particular, tem-se:

- No caso de um *campo escalar*  $\varphi$

$$\dot{\varphi} = \varphi' + \nabla \varphi \cdot \mathfrak{V}. \quad (\text{A.4.81})$$

- Para um *campo vetorial*  $\varphi$

$$\dot{\varphi} = \varphi' + (\nabla \varphi) \mathfrak{V}. \quad (\text{A.4.82})$$

O *teorema do transporte de Reynolds* na forma de *integral de domínio* é dado por

$$\left( \int_{\Omega} \varphi \right)^\cdot = \int_{\Omega} (\dot{\varphi} + \varphi \operatorname{div} \mathfrak{V}), \quad (\text{A.4.83})$$

$$= \int_{\Omega} \varphi' + \int_{\partial\Omega} \varphi (\mathfrak{V} \cdot n), \quad (\text{A.4.84})$$

enquanto que na forma de *integral de contorno* é escrito como

$$\left( \int_{\partial\Omega} \varphi \right)' = \int_{\partial\Omega} (\dot{\varphi} + \varphi \operatorname{div}_{\Gamma} \mathfrak{V}), \quad (\text{A.4.85})$$

onde o *divergente superficial da velocidade* é definido como

$$\operatorname{div}_{\Gamma} \mathfrak{V} := (\mathbf{I} - n \otimes n) \cdot \nabla \mathfrak{V}, \quad (\text{A.4.86})$$

com  $n$  sendo o vetor normal unitário exterior a  $\partial\Omega$ .

**Observação A.1.** *Considerando o subconjunto  $\omega \subset \Omega$  e, se a função escalar  $\varphi$  é descontínua no contorno  $\partial\omega$ , então, nesse caso o teorema do transporte de Reynolds fornece*

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Omega} \varphi \right)' &= \left( \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \varphi + \int_{\omega} \varphi \right)' \\ &= \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} (\dot{\varphi} + \varphi \operatorname{div} \mathfrak{V}) + \int_{\omega} (\dot{\varphi} + \varphi \operatorname{div} \mathfrak{V}) \\ &= \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} (\varphi' + \nabla \varphi \cdot \mathfrak{V} + \varphi \operatorname{div} \mathfrak{V}) + \int_{\omega} (\varphi' + \nabla \varphi \cdot \mathfrak{V} + \varphi \operatorname{div} \mathfrak{V}) \\ &= \int_{\Omega} \varphi' + \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \operatorname{div}(\varphi \mathfrak{V}) + \int_{\omega} \operatorname{div}(\varphi \mathfrak{V}) \\ &= \int_{\Omega} \varphi' + \int_{\partial\Omega} \varphi(\mathfrak{V} \cdot n) + \int_{\partial\omega} \varphi_e(\mathfrak{V} \cdot n) - \int_{\partial\omega} \varphi_i(\mathfrak{V} \cdot n) \\ &= \int_{\Omega} \varphi' + \int_{\partial\Omega} \varphi(\mathfrak{V} \cdot n) + \int_{\partial\omega} \llbracket \varphi \rrbracket (\mathfrak{V} \cdot n), \end{aligned} \quad (\text{A.4.87})$$

onde  $n$  é o vetor normal unitário sobre  $\partial\omega$ , exterior a  $\Omega \setminus \bar{\omega}$ , e  $\llbracket \varphi \rrbracket$  é usado para denotar o salto de  $\varphi$  através do contorno  $\partial\omega$ , ou seja  $\llbracket \varphi \rrbracket = \varphi_e - \varphi_i$  em  $\partial\omega$ , com  $\varphi_e = \varphi|_{\Omega \setminus \bar{\omega}}$  e  $\varphi_i = \varphi|_{\omega}$ .

Ademais, para um *campo escalar*  $\varphi$  tem-se

$$(\nabla \varphi)' = \nabla \dot{\varphi} - (\nabla \mathfrak{V})^{\top} \nabla \varphi. \quad (\text{A.4.88})$$

No caso de um *campo vetorial*  $\varphi$  há

$$(\nabla \varphi)' = \nabla \dot{\varphi} - \nabla \varphi \nabla \mathfrak{V}. \quad (\text{A.4.89})$$

O *gradiente simétrico de um campo vetorial* é definido como

$$\nabla \varphi^s := \frac{1}{2} (\nabla \varphi + \nabla \varphi^{\top}) \quad (\text{A.4.90})$$

e a derivada material pode ser obtida aplicando a fórmula (A.4.89), ou seja

$$\begin{aligned} (\nabla \varphi^s)' &= \frac{1}{2} (\nabla \varphi + \nabla \varphi^{\top})' \\ &= \frac{1}{2} ((\nabla \varphi)' + (\nabla \varphi^{\top})') \\ &= \frac{1}{2} [(\nabla \varphi)' + ((\nabla \varphi)')^{\top}] \\ &= [(\nabla \varphi)']^s = \nabla \dot{\varphi}^s - (\nabla \varphi \nabla \mathfrak{V})^s. \end{aligned} \quad (\text{A.4.91})$$

A *divergência de um campo vetorial* é definida como

$$\operatorname{div}\varphi := \operatorname{tr}(\nabla\varphi) \quad (\text{A.4.92})$$

e a derivada material é facilmente obtida a partir de (A.4.89), ou seja

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}\varphi)' &= [\operatorname{tr}(\nabla\varphi)]' = \operatorname{tr}(\nabla\varphi)' \\ &= \operatorname{tr}(\nabla\dot{\varphi}) - \operatorname{tr}(\nabla\varphi\nabla\mathfrak{B}) \\ &= \operatorname{div}\dot{\varphi} - \nabla\varphi^\top \cdot \nabla\mathfrak{B}. \end{aligned} \quad (\text{A.4.93})$$

O *Laplaciano de um campo escalar* é definido como

$$\Delta\varphi := \operatorname{div}(\nabla\varphi). \quad (\text{A.4.94})$$

Em seguida, tendo em conta (A.4.93) e (A.4.88) tem-se

$$\begin{aligned} (\Delta\varphi)' &= [\operatorname{div}(\nabla\varphi)]' \\ &= \operatorname{div}(\nabla\varphi)' - (\nabla\nabla\varphi)^\top \cdot \nabla\mathfrak{B} \\ &= \operatorname{div}[\nabla\dot{\varphi} - \nabla\mathfrak{B}^\top\nabla\varphi] - \nabla\nabla\varphi \cdot \nabla\mathfrak{B} \\ &= \Delta\dot{\varphi} - \operatorname{div}(\nabla\mathfrak{B}^\top\nabla\varphi) - \nabla\nabla\varphi \cdot \nabla\mathfrak{B}. \end{aligned} \quad (\text{A.4.95})$$

De outro vértice, é interessante notar que o Laplaciano de um campo escalar pode ser escrito também como

$$\Delta\varphi = \operatorname{tr}(\nabla\nabla\varphi), \quad (\text{A.4.96})$$

onde  $\nabla\nabla\varphi = (\nabla\nabla\varphi)^\top$ . Assim, aplicando as fórmulas (A.4.89) e (A.4.88), obtém-se a derivada material do *gradiente de segunda ordem de um campo escalar*

$$\begin{aligned} (\nabla\nabla\varphi)' &= \nabla(\nabla\varphi)' - (\nabla\nabla\varphi)\nabla\mathfrak{B} \\ &= \nabla(\nabla\dot{\varphi} - \nabla\mathfrak{B}^\top\nabla\varphi) - (\nabla\nabla\varphi)\nabla\mathfrak{B} \\ &= \nabla\nabla\dot{\varphi} - \nabla(\nabla\mathfrak{B}^\top\nabla\varphi) - (\nabla\nabla\varphi)\nabla\mathfrak{B}. \end{aligned} \quad (\text{A.4.97})$$

Após tomar o traço em ambos os lados de (A.4.97), obtém-se o mesmo resultado dado por (A.4.95).

## A.5 O Tensor Momento-Energia de Eshelby

Nesta seção é discutida a relação entre análise de sensibilidade à mudança de forma e a moderna teoria da mecânica do contínuo, que é baseada no tensor momento-energia de Eshelby, conceito introduzido no trabalho fundamental de *Eshelby* 1975 [25]. Esta noção, introduzida por Taroco e Feijóo 2006 [96] no contexto do problema de torção de barras prismáticas elásticas, é aqui apresentada através de um exemplo referente à análise de falhas em corpos elásticos tridimensionais.

**Exemplo A.1** (tensor momento-energia de Eshelby). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um domínio aberto e limitado com contorno suave  $\partial\Omega$ , e  $\omega \subset \mathbb{R}^3$  domínio aberto e limitado imerso em  $\Omega$ , de modo que  $\bar{\omega} \Subset \Omega$ , com contorno suave  $\partial\omega$ . Assumindo que  $\Omega_\omega = \Omega \setminus \bar{\omega}$  representa um corpo elástico com uma pequena cavidade  $\omega$  em seu interior, a energia de deformação potencial total é dada pelo seguinte funcional:*

$$\mathcal{J}_\omega(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\omega} \sigma(u) \cdot \nabla u^s - \int_{\Omega_\omega} b \cdot u, \quad (\text{A.5.98})$$

onde a função vetorial  $u$  é a solução do problema variacional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u \in \mathcal{U}, \text{ tal que} \\ \int_{\Omega_\omega} \sigma(u) \cdot \nabla \eta^s = \int_{\Omega_\omega} b \cdot \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{U}, \\ \text{com } \sigma(u) = \mathbb{C} \nabla u^s. \end{array} \right. \quad (\text{A.5.99})$$

Na equação acima  $\mathcal{U} = \{\varphi \in H^1(\Omega_\omega; \mathbb{R}^3) : \varphi|_{\partial\Omega} = 0\}$  é o espaço das funções admissíveis,  $b$  é uma força de corpo constante distribuída no domínio  $\Omega$  e  $\mathbb{C}$  é o tensor constitutivo de quarta ordem dado por

$$\mathbb{C} = 2\mu\mathbb{I} + \lambda\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \quad (\text{A.5.100})$$

onde  $\mathbb{I}$  e  $\mathbb{I}$  são os tensores identidade de segunda e quarta ordens, respectivamente,  $\mu$  e  $\lambda$  são os coeficientes de Lamé, ambos considerados constantes em todo o domínio. Supondo que a cavidade  $\omega$  representa uma falha imersa em  $\Omega$ , então deseja-se conhecer a sensibilidade da energia potencial total com relação à forma do defeito  $\omega$ . Submetendo a cavidade  $\omega$  a uma perturbação suave em sua forma, a distribuição do gradiente de forma de  $\mathcal{J}_\omega(u)$  com relação a mudanças na forma da cavidade  $\omega$  é dada por

$$\dot{\mathcal{J}}_\omega(u) = \int_{\Omega_\omega} \Sigma \cdot \nabla \mathfrak{V}, \quad (\text{A.5.101})$$

onde  $\mathfrak{V}$  é o campo velocidade à mudança de forma definido em  $\Omega_\omega$ , de modo que  $\mathfrak{V}|_{\partial\Omega} = 0$ , desde que  $\partial\Omega$  permanece fixo e  $\Sigma$  é um campo tensorial de divergência nula dado por

$$\Sigma = \frac{1}{2}(\sigma(u) \cdot \nabla u^s - 2b \cdot u)\mathbb{I} - \nabla u^\top \sigma(u). \quad (\text{A.5.102})$$

Portanto, a referida integral de domínio pode ser escrita como uma integral concentrada sobre o contorno do defeito  $\partial\omega$

$$\dot{\mathcal{J}}_\omega(u) = \int_{\partial\omega} \Sigma n \cdot \mathfrak{V}, \quad (\text{A.5.103})$$

onde  $n$  é o campo vetorial normal unitário sobre  $\partial\omega$ , apontando em direção ao interior da cavidade  $\omega$ . Finalmente, desde que  $\sigma(u)n = 0$  no contorno da cavidade  $\partial\omega$ , tem-se uma simplificação adicional desta fórmula. Em particular, quando o gradiente é expresso em termos de integrais no contorno, o tensor correspondente  $\Sigma$  se reduz a um tensor hidrostático proporcional à densidade de energia de deformação. De fato,

$$\dot{\mathcal{J}}_\omega(u) = \int_{\partial\omega} \phi(u) n \cdot \mathfrak{V}, \quad (\text{A.5.104})$$

onde  $\phi(u)$  é a energia de deformação específica concentrada em  $\partial\omega$ , ou seja

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\sigma(u) \cdot \nabla u^s - b \cdot u. \quad (\text{A.5.105})$$

Os resultados acima são derivados usando as fórmulas resumidas na seção prévia em conjunto com o Apêndice B, sendo que a derivação destes resultados são deixados como exercício ao final deste capítulo.

Analisando os resultados obtidos no exemplo, é possível reconhecer  $\Sigma$  como o tensor momento-energia introduzido por *Eshelby* 1975 [25]. Este tensor aparece na análise de falhas em elasticidade tridimensional e desempenha papel central na



teoria da mecânica do contínuo envolvendo não-homogeneidades (inclusões, poros, fraturas, etc) em sólidos. Considerando que a distribuição do gradiente de forma da energia potencial total é dada pelo produto de  $\Sigma$  e  $\nabla\mathfrak{V}$ , o tensor  $\Sigma$  pode ser interpretado em termos das *forças configuracionais* [38] atuando em um corpo elástico deformável com uma pequena falha interior. Assim  $\text{div}\Sigma = g$  em  $\Omega$ , com  $g = 0$  neste caso em particular, pode ser associado ao balanço de forças configuracionais ou simplesmente *balanço configuracional* [38]. Finalmente, o gradiente de forma do funcional  $\mathcal{J}_\omega(u)$  resulta em uma integral concentrada no contorno em movimento  $\partial\omega$  e dependente da componente normal do campo de velocidade  $\mathfrak{V}$ , ou seja  $\mathfrak{V} \cdot n$ . Este último resultado corrobora com o *teorema de estrutura de Hadamard* da otimização de forma, demonstrado em [94], por exemplo.

## A.6 Exercícios

1. Seja  $u$  um campo escalar ou vetorial suficientemente suave definido sobre um domínio aberto e limitado  $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ . Calcule a derivada material da função  $\phi(u)$  para os seguintes casos:

- (a) Densidade de energia térmica associada a um problema de condução de calor estacionário, isto é

$$\phi(u) := -\frac{1}{2}q(u) \cdot \nabla u, \quad (\text{A.6.106})$$

onde  $q(u) := -K\nabla u$ , com  $K$  usado para denotar um tensor simétrico de segunda ordem ( $K^\top = K$ ) que não depende da forma do corpo  $\Omega$ . Então,

$$\dot{\phi}(u) = -q(u) \cdot \nabla \dot{u} + (\nabla u \otimes q(u)) \cdot \nabla \mathfrak{V}. \quad (\text{A.6.107})$$

- (b) Densidade de energia de deformação associada a um sistema de elasticidade linear, ou seja

$$\phi(u) := \frac{1}{2}\sigma(u) \cdot \nabla u^s, \quad (\text{A.6.108})$$

onde  $\sigma(u) := \mathbb{C}\nabla u^s$ , com  $\mathbb{C}$  usado para denotar um tensor simétrico de quarta ordem ( $\mathbb{C}^\top = \mathbb{C}$ ) que não depende da forma do corpo  $\Omega$ . Então,

$$\dot{\phi}(u) = \sigma(u) \cdot \nabla \dot{u}^s - \nabla u^\top \sigma(u) \cdot \nabla \mathfrak{V}. \quad (\text{A.6.109})$$

- (c) Densidade de energia associada a um problema de flexão de placas de Kirchhoff, a saber

$$\phi(u) := -\frac{1}{2}M(u) \cdot \nabla \nabla u, \quad (\text{A.6.110})$$

onde  $M(u) = -\mathbb{C}\nabla \nabla u$ , com  $\mathbb{C}$  usado para denotar um tensor simétrico de quarta ordem ( $\mathbb{C}^\top = \mathbb{C}$ ) independente da forma do corpo  $\Omega$ . Assim,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(u) = & -M(u) \cdot \nabla \nabla \dot{u} + (\nabla \nabla u) M(u) \cdot \nabla \mathfrak{V} \\ & - (\nabla u \otimes \text{div} M(u)) \cdot \nabla \mathfrak{V} + \text{div} (M(u) \nabla \mathfrak{V}^\top \nabla u). \end{aligned} \quad (\text{A.6.111})$$

- (d) Densidade de energia complementar associada ao problema de torção de barras prismáticas sujeitas à fluência estacionária, que é dado por

$$\phi(u) := -\frac{1}{p}q(u) \cdot \nabla u, \quad (\text{A.6.112})$$

onde  $q(u) := -k\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u$ , com os parâmetros material  $k$  e  $p$  independentes da forma do corpo  $\Omega$ . Logo,

$$\dot{\phi}(u) = -q(u) \cdot \nabla \dot{u} + (\nabla u \otimes q(u)) \cdot \nabla \mathfrak{V}. \quad (\text{A.6.113})$$

- (e) Forma quadrática da diferença entre o campo de tensão de von Mises  $\sigma_{eq}(u)$  e uma tensão admissível equivalente  $\bar{\sigma}$ , ou seja

$$\phi(u) := (\sigma_{eq}(u) - \bar{\sigma})^2, \quad (\text{A.6.114})$$

onde  $\bar{\sigma}$  é uma dada constante e

$$\sigma_{eq}(u) := \sqrt{\frac{1}{2}\mathbb{B}\sigma(u) \cdot \sigma(u)} \quad \text{com} \quad \mathbb{B} = 3\mathbb{I} - \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}. \quad (\text{A.6.115})$$

Na equação acima,  $\mathbb{I}$  e  $\mathbb{I}$  são respectivamente os tensores identidades de quarta e segunda ordem e  $\sigma(u) := \mathbb{C}\nabla u^s$ , com  $\mathbb{C}$  usado para denotar um tensor simétrico de quarta ordem ( $\mathbb{C}^\top = \mathbb{C}$ ) que não depende da forma do corpo  $\Omega$ . Portanto,

$$\dot{\phi}(u) = \left(1 - \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{eq}(u)}\right) (\mathbb{C}\mathbb{B}\sigma(u) \cdot \nabla \dot{u}^s - \nabla u^\top \mathbb{C}\mathbb{B}\sigma(u) \cdot \nabla \mathfrak{B}) .$$

Dica: use o formulário do Apêndice B.

2. Considere o problema  $p$ -Poisson dado pelo seguinte problema de valor de contorno não linear:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u, \text{ de modo que} \\ -\text{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u) = 1 \quad \text{em } \Omega \quad , \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{array} \right.$$

onde  $p \geq 2$ . Tendo em conta o funcional de forma dado por

$$\mathcal{J}_\Omega(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega \|\nabla u\|^p - \int_\Omega u ,$$

que representa a dissipação da energia complementar associada ao problema de torção de barras prismáticas de Prandtl sujeitas à fluência estacionária, deduza a formulação fraca do problema acima, ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u \in W_0^{1,p}(\Omega), \text{ de modo que} \\ \int_\Omega \|\nabla u\|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \eta = \int_\Omega \eta \quad \forall \eta \in W_0^{1,p}(\Omega) . \end{array} \right.$$

Agora, a partir do teorema do transporte de Reynolds e usando o conceito de derivada material de campos espaciais, mostre que a derivada de forma do funcional  $\mathcal{J}_\Omega(u)$  resulta em

$$\dot{\mathcal{J}}_\Omega(u) = \int_\Omega \Sigma \cdot \nabla \mathfrak{B} ,$$

onde  $\Sigma$  pode ser visto como uma generalização do tensor momento energia de Eshelby, o qual é dado por

$$\Sigma = \left(\frac{1}{p}\|\nabla u\|^p - u\right) \mathbb{I} - \|\nabla u\|^{p-2}(\nabla u \otimes \nabla u) .$$

Mostre que  $\Sigma$  possui divergência nula, a saber  $\text{div}\Sigma = 0$ , e deduza a sensibilidade à mudança de forma do funcional  $\mathcal{J}_\Omega(u)$  como uma integral de contorno, ou seja

$$\dot{\mathcal{J}}_\Omega(u) = \int_{\partial\Omega} \Sigma n \cdot \mathfrak{B} ,$$

onde  $n$  é o vetor normal unitário exterior a  $\partial\Omega$ . Dica: calcule a divergência do tensor  $\Sigma$  e rearranje a expressão obtida na seguinte forma

$$\int_\Omega \text{div}\Sigma \cdot \mathfrak{B} = - \int_\Omega (\text{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u) + 1)\nabla u \cdot \mathfrak{B} \quad \forall \mathfrak{B} .$$

Considerando que  $u$  é solução para o problema de valor de contorno, então  $\text{div}\Sigma = 0$  a.e. em  $\Omega$ . Mostre que este último resultado pode também ser obtido usando argumentos puramente variacionais.

3. Sabe-se que somente a componente normal do campo de velocidade  $\mathfrak{V}$  é relevante na análise de sensibilidade à mudança de forma. Tal resultado é conhecido como *teorema de estrutura de Hadamard* [94]. Assim, mostre que a solução do exercício anterior corrobora com o referido teorema de estrutura.
4. Derive os resultados apresentados no Exemplo A.1.
5. Repita o Exemplo A.1, considerando uma inclusão com condições de transmissão apropriadas, ao invés de uma cavidade.

## Apêndice B

# Cálculo Tensorial

Neste apêndice alguns resultados básicos do cálculo tensorial, úteis para o desenvolvimento apresentado neste trabalho, são rememorados. Para tanto, de início é adotada a seguinte notação, baseada no livro de Gurtin, 1981 [37]:

- $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^3$ ;
- $A, B, C, S, W \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ;
- $\varphi$  campo escalar;
- $u, v$  campos vetoriais;
- $T, U$  campos tensoriais de segunda ordem.

### B.1 Produtos Interno, Vetorial e Tensorial

O produto escalar ou interno de dois vetores  $a$  e  $b$  é definido como

$$a \cdot b = b^\top a, \quad (\text{B.1.1})$$

com  $\|a\| = (a \cdot a)^{1/2}$ . O tensor de segunda ordem  $A$  pode ser visto como um mapeamento linear que atribui a cada vetor  $a$  um vetor  $b = Aa$ . A transposição de um tensor  $A$  é definida unicamente através de um tensor  $A^\top$  com a propriedade

$$a \cdot Ab = A^\top a \cdot b, \quad (\text{B.1.2})$$

para todo vetor  $a$  e  $b$ . Um importante tensor é a identidade  $I$  definida por  $Ia = a$  para cada vetor  $a$ . O produto de dois tensores  $A$  e  $B$  é um tensor  $C = AB$ . Em geral  $AB \neq BA$ . Quando  $AB = BA$ , diz-se que  $A$  e  $B$  comutam. O produto escalar ou interno de dois tensores  $A$  e  $B$  é definido como

$$A \cdot B = \text{tr}(B^\top A) = \text{tr}(A^\top B) \Rightarrow \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA), \quad (\text{B.1.3})$$

onde o traço de um tensor  $A$  é assim definido

$$\text{tr}(A) = I \cdot A. \quad (\text{B.1.4})$$

Segue-se então que

$$A \cdot (BC) = (B^\top A) \cdot C = (AC^\top) \cdot B. \quad (\text{B.1.5})$$

O produto vetorial de dois vetores  $a$  e  $b$  é definido como

$$a \times b = -b \times a . \quad (\text{B.1.6})$$

Além disso

$$a \times a = 0 , \quad (\text{B.1.7})$$

e

$$a \cdot (b \times c) = c \cdot (a \times b) = b \cdot (c \times a) = \text{vol}(\mathfrak{P}) , \quad (\text{B.1.8})$$

onde  $\mathfrak{P}$  é o paralelepípedo definido pelo vetores  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Finalmente, o determinante de um tensor de segunda ordem é definido como

$$\det A = \frac{Aa \cdot (Ab \times Ac)}{a \cdot (b \times c)} . \quad (\text{B.1.9})$$

O produto tensorial de dois vetores  $a$  e  $b$  é um tensor de segunda ordem  $A = a \otimes b$  que atribui a cada vetor  $c$  o vetor  $(b \cdot c)a$ , ou seja

$$(a \otimes b)c = (b \cdot c)a . \quad (\text{B.1.10})$$

Então segue que

$$(a \otimes b)^\top = (b \otimes a) , \quad (\text{B.1.11})$$

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (b \cdot c)(a \otimes d) , \quad (\text{B.1.12})$$

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = (a \cdot c)(b \cdot d) , \quad (\text{B.1.13})$$

$$\text{tr}(a \otimes b) = a \cdot b , \quad (\text{B.1.14})$$

$$a \cdot Ab = A \cdot (a \otimes b) , \quad (\text{B.1.15})$$

$$A(a \otimes b) = (Aa) \otimes b . \quad (\text{B.1.16})$$

## B.2 Gradiente, Divergente e Rotacional

Sejam os campos suficientemente regulares  $\varphi$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $T$  e  $U$ , onde  $\varphi$  é escalar,  $u, v$  são vetores e  $T, U$  são tensores. As hipóteses de regularidade não são explicitamente mostradas, pois as premissas usuais de diferenciabilidade que tornam um argumento rigoroso são, como dito, óbvias para matemáticos e de pouco interesse para engenheiros e físicos. Desta forma, as seguintes identidades são válidas:

$$\nabla(\varphi u) = \varphi \nabla u + u \otimes \nabla \varphi , \quad (\text{B.2.17})$$

$$\text{div}(\varphi u) = \varphi \text{div}(u) + \nabla \varphi \cdot u , \quad (\text{B.2.18})$$

$$\text{rot}(\varphi u) = \varphi \text{rot} u + \nabla \varphi \times u , \quad (\text{B.2.19})$$

$$\nabla(u \cdot v) = (\nabla u)^\top v + (\nabla v)^\top u , \quad (\text{B.2.20})$$

$$\text{div}(u \times v) = u \cdot \text{rot}(v) - v \cdot \text{rot}(u) , \quad (\text{B.2.21})$$

$$\text{div}(u \otimes v) = u \text{div}(v) + (\nabla u)v , \quad (\text{B.2.22})$$

$$\text{div}(T^\top u) = \text{div}(T) \cdot u + T \cdot \nabla u , \quad (\text{B.2.23})$$

$$\text{div}(\varphi T) = \varphi \text{div} T + T \nabla \varphi , \quad (\text{B.2.24})$$

$$\text{div}(\nabla u^\top) = \nabla \text{div}(u) , \quad (\text{B.2.25})$$

$$\text{div}(TU) = (\nabla T)U + T \text{div}(U) , \quad (\text{B.2.26})$$

$$\nabla(T \cdot U) = (\nabla T)^\top U + (\nabla U)^\top T . \quad (\text{B.2.27})$$

### B.3 Teoremas Integrais

Seja  $\Omega$  um domínio aberto e limitado em  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , cujo contorno é denotado por  $\partial\Omega$ . Seja  $n$  um campo vetorial normal unitário exterior à fronteira  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ . Aqui, alguns teoremas integrais são enunciados sem prova e sem hipóteses de regularidade sobre os integrandos, bem como sobre o domínio de integração. Então, para um dado campo escalar  $\varphi$ , vetorial  $v$  e tensorial  $T$ , as seguintes identidades integrais são conhecidas:

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi n, \quad (\text{B.3.28})$$

$$\int_{\Omega} \nabla v = \int_{\partial\Omega} v \otimes n, \quad (\text{B.3.29})$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(v) = \int_{\partial\Omega} v \cdot n, \quad (\text{B.3.30})$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(T) = \int_{\partial\Omega} Tn. \quad (\text{B.3.31})$$

O teorema da divergência conduz a resultados matemáticos centrais para as derivações apresentadas nesta monografia. Em particular, o teorema da divergência em sua forma usual pode ser enunciado da seguinte forma

$$\int_{\Omega} (T \cdot \nabla v + \operatorname{div}(T) \cdot v) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(T^{\top} v) = \int_{\partial\Omega} Tn \cdot v. \quad (\text{B.3.32})$$

Se  $T = S$ , sendo  $S$  um campo tensorial simétrico ( $S = S^{\top}$ ), então

$$\int_{\Omega} (S \cdot \nabla v^s + \operatorname{div}(S) \cdot v) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(Sv) = \int_{\partial\Omega} Sn \cdot v. \quad (\text{B.3.33})$$

Ademais, tem-se

$$\int_{\Omega} (\varphi \operatorname{div}(v) + \nabla \varphi \cdot v) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi v) = \int_{\partial\Omega} \varphi v \cdot n. \quad (\text{B.3.34})$$

Se  $v = \nabla \phi$ , com  $\phi$  um campo escalar, então

$$\int_{\Omega} (\varphi \Delta \phi + \nabla \varphi \cdot \nabla \phi) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi \nabla \phi) = \int_{\partial\Omega} \varphi \partial_n \phi. \quad (\text{B.3.35})$$

### B.4 Algumas Decomposições Úteis

Cada tensor  $A$  pode ser expresso unicamente como a soma de um tensor simétrico  $S$  e um tensor antissimétrico  $W$ , ou seja

$$A = S + W, \quad (\text{B.4.36})$$

onde

$$S = \frac{1}{2}(A + A^{\top}) \quad \text{e} \quad W = \frac{1}{2}(A - A^{\top}). \quad (\text{B.4.37})$$

Se  $S$  é a parte simétrica de  $A$  e  $W$  a parte antissimétrica de  $A$ , há uma correspondência um pra um entre um vetor e um tensor antissimétrico

$$Wa = w \times a, \quad \text{com} \quad w_1 = W_{32}, \quad w_2 = W_{13}, \quad w_3 = W_{21}, \quad (\text{B.4.38})$$

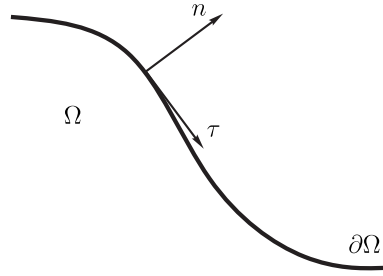


Figura B.1: Sistema de coordenadas curvilíneo sobre  $\partial\Omega$ .

onde  $W = -W^\top$  é um tensor antissimétrico ou um tensor antissimétrico de segunda ordem. Ademais,

$$[(a \otimes b) - (b \otimes a)]c = -[(a \cdot c)b - (b \cdot c)a] = -(a \times b) \times c. \quad (\text{B.4.39})$$

Finalmente, tem-se:

- Se  $S$  é simétrico,

$$S \cdot A = S \cdot A^\top = S \cdot \left[ \frac{1}{2}(A + A^\top) \right]. \quad (\text{B.4.40})$$

- Se  $W$  é antissimétrico,

$$W \cdot A = -W \cdot A^\top = W \cdot \left[ \frac{1}{2}(A - A^\top) \right]. \quad (\text{B.4.41})$$

- Se  $S$  é simétrico e  $W$  é antissimétrico,

$$S \cdot W = 0. \quad (\text{B.4.42})$$

- Se  $A \cdot B = 0$ , para cada  $B$ , então  $A = 0$ .
- Se  $A \cdot S = 0$ , para cada  $S$ , então  $A$  é antissimétrico.
- Se  $A \cdot W = 0$ , para cada  $W$ , então  $A$  é simétrico.

Seja um domínio bidimensional aberto e limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , cuja fronteira é denotada por  $\partial\Omega$  e sejam dois vetores ortonormais  $n$  e  $\tau$ , de tal modo que  $n \cdot n = 1$ ,  $\tau \cdot \tau = 1$  e  $n \cdot \tau = 0$ , definidos sobre a fronteira  $\partial\Omega$ , como mostrado na fig. B.1. Então, tem-se que um vetor  $a$  definido sobre  $\partial\Omega$  pode ser decomposto da seguinte maneira

$$\begin{aligned} a &= (n \otimes n)a + (\tau \otimes \tau)a \\ &= (a \cdot n)n + (a \cdot \tau)\tau \\ &= a^n n + a^\tau \tau, \end{aligned} \quad (\text{B.4.43})$$

onde  $a^n := a \cdot n$  e  $a^\tau := a \cdot \tau$  são as componentes normal e tangencial do vetor  $a$ , respectivamente. Em outras palavras,  $a^\tau$  é a projeção de  $a$  no plano tangente a  $\Omega$



e  $a^n$  é a projeção de  $a$  ortogonal ao referido plano tangente. Além disso, o tensor identidade  $I$  pode ser escrito na base  $(n, \tau)$ , ou seja

$$I = n \otimes n + \tau \otimes \tau . \quad (\text{B.4.44})$$

Assim, os operadores projeção nas direções tangencial e normal podem ser respectivamente definidos como

$$(I - n \otimes n)a = a - (a \cdot n)n = a^\tau \tau , \quad (\text{B.4.45})$$

$$(I - \tau \otimes \tau)a = a - (a \cdot \tau)\tau = a^n n . \quad (\text{B.4.46})$$

Seja  $A$  um tensor de segunda ordem. Então,  $A$  pode ser decomposto na base  $(n, \tau)$  na seguinte forma

$$A = A^{nn}(n \otimes n) + A^{n\tau}(n \otimes \tau) + A^{\tau n}(\tau \otimes n) + A^{\tau\tau}(\tau \otimes \tau) , \quad (\text{B.4.47})$$

cujas componentes  $A^{nn}$ ,  $A^{n\tau}$ ,  $A^{\tau n}$  e  $A^{\tau\tau}$  são definidas como

$$\begin{aligned} An &= [A^{nn}(n \otimes n) + A^{n\tau}(n \otimes \tau) + A^{\tau n}(\tau \otimes n) + A^{\tau\tau}(\tau \otimes \tau)]n \\ &= A^{nn}(n \cdot n)n + A^{n\tau}(\tau \cdot n)n + A^{\tau n}(n \cdot n)\tau + A^{\tau\tau}(\tau \cdot n)\tau \\ &= A^{nn}n + A^{\tau n}\tau \\ \Rightarrow A^{nn} &= n \cdot An \quad \text{e} \quad A^{\tau n} = \tau \cdot An , \end{aligned} \quad (\text{B.4.48})$$

$$\begin{aligned} A\tau &= [A^{nn}(n \otimes n) + A^{n\tau}(n \otimes \tau) + A^{\tau n}(\tau \otimes n) + A^{\tau\tau}(\tau \otimes \tau)]\tau \\ &= A^{nn}(n \cdot \tau)n + A^{n\tau}(\tau \cdot \tau)n + A^{\tau n}(n \cdot \tau)\tau + A^{\tau\tau}(\tau \cdot \tau)\tau \\ &= A^{n\tau}n + A^{\tau\tau}\tau \\ \Rightarrow A^{n\tau} &= n \cdot A\tau \quad \text{e} \quad A^{\tau\tau} = \tau \cdot A\tau . \end{aligned} \quad (\text{B.4.49})$$

Do mesmo modo, o gradiente de um campo escalar  $\nabla\varphi$  definido sobre  $\partial\Omega$  pode ser decomposto como

$$\begin{aligned} \nabla\varphi &= (\nabla\varphi \cdot n)n + (\nabla\varphi \cdot \tau)\tau \\ &= (\partial_n\varphi)n + (\partial_\tau\varphi)\tau \end{aligned} \quad (\text{B.4.50})$$

$$\Rightarrow \partial_n\varphi = \nabla\varphi \cdot n \quad \text{e} \quad \partial_\tau\varphi = \nabla\varphi \cdot \tau , \quad (\text{B.4.51})$$

onde  $\partial_n\varphi$  e  $\partial_\tau\varphi$  são as derivadas normal e tangencial do campo escalar  $\varphi$ . Ademais, o gradiente do campo vetorial  $\nabla u$  definido sobre  $\partial\Omega$  pode ser decomposto como

$$\nabla u = \partial_n u^n(n \otimes n) + \partial_\tau u^n(n \otimes \tau) + \partial_n u^\tau(\tau \otimes n) + \partial_\tau u^\tau(\tau \otimes \tau) , \quad (\text{B.4.52})$$

cujas componentes  $\partial_n u^n$ ,  $\partial_\tau u^n$ ,  $\partial_n u^\tau$  e  $\partial_\tau u^\tau$  são definidas como

$$\begin{aligned} (\nabla u)n &= [\partial_n u^n(n \otimes n) + \partial_\tau u^n(n \otimes \tau) + \partial_n u^\tau(\tau \otimes n) + \partial_\tau u^\tau(\tau \otimes \tau)]n \\ &= (\partial_n u^n)n + (\partial_n u^\tau)\tau \\ \Rightarrow \partial_n u^n &= n \cdot (\nabla u)n \quad \text{e} \quad \partial_n u^\tau = \tau \cdot (\nabla u)n , \end{aligned} \quad (\text{B.4.53})$$

$$\begin{aligned} (\nabla u)\tau &= [\partial_n u^n(n \otimes n) + \partial_\tau u^n(n \otimes \tau) + \partial_n u^\tau(\tau \otimes n) + \partial_\tau u^\tau(\tau \otimes \tau)]\tau \\ &= (\partial_\tau u^n)n + (\partial_\tau u^\tau)\tau \\ \Rightarrow \partial_\tau u^n &= n \cdot (\nabla u)\tau \quad \text{e} \quad \partial_\tau u^\tau = \tau \cdot (\nabla u)\tau . \end{aligned} \quad (\text{B.4.54})$$

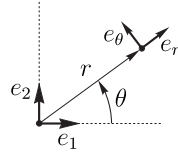


Figura B.2: Sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$ .

## B.5 Sistemas de Coordenadas Polares e Esféricas

Seja um *sistema de coordenadas polares* definido pelo par  $(r, \theta)$  com centro na origem  $\mathcal{O}$ , como mostrado na fig. B.2. A base orientada que define este sistema é denotada por  $e_r$  e  $e_\theta$ , com  $e_r \cdot e_\theta = 0$  e  $e_r \cdot e_r = e_\theta \cdot e_\theta = 1$ . Para este sistema tem-se as representações abaixo.

- Gradiente de um campo escalar  $\varphi$ :

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}e_\theta. \quad (\text{B.5.55})$$

- Laplaciano de um campo escalar  $\varphi$ :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}. \quad (\text{B.5.56})$$

- Gradiente de um campo vetorial  $v$ :

$$\begin{aligned} \nabla v &= \frac{\partial v^r}{\partial r}e_r \otimes e_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v^r}{\partial\theta} - v^\theta\right)e_r \otimes e_\theta \\ &+ \frac{\partial v^\theta}{\partial r}e_\theta \otimes e_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v^\theta}{\partial\theta} + v^r\right)e_\theta \otimes e_\theta. \end{aligned} \quad (\text{B.5.57})$$

- Divergência de um campo vetorial  $v$ :

$$\text{div}(v) = \frac{\partial v^r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v^\theta}{\partial\theta} + v^r\right). \quad (\text{B.5.58})$$

- Divergência de um campo tensorial de segunda ordem  $T$ :

$$\begin{aligned} \text{div}(T) &= \left(\frac{\partial T^{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T^{\theta r}}{\partial\theta} + \frac{T^{rr} - T^{\theta\theta}}{r}\right)e_r \\ &+ \left(\frac{\partial T^{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{T^{r\theta} + T^{\theta r}}{r}\right)e_\theta. \end{aligned} \quad (\text{B.5.59})$$

- Transformação de um vetor  $v$  a partir do sistema de coordenadas cartesianas para polares:

$$\begin{pmatrix} v^r \\ v^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5.60})$$

onde  $v^i = v \cdot e_i$  são as componentes do vetor  $v$  no sistema de coordenadas cartesianas.

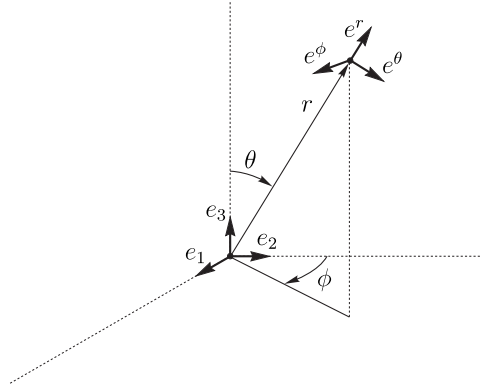


Figura B.3: Sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ .

- Transformação do tensor de segunda ordem  $T$  de coordenadas cartesianas para polares:

$$\begin{pmatrix} T^{rr} & T^{r\theta} \\ T^{\theta r} & T^{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} \\ T^{21} & T^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5.61})$$

onde  $T^{ij} = e_i \cdot T e_j$  são as componentes do tensor  $T$  no sistema de coordenadas cartesianas.

Considerando uma bola  $B_\rho(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^2$  de raio  $\rho$  e centro na origem  $\mathcal{O}$ , cujo contorno é denotado por  $\partial B_\rho$ . Então, a integral de um campo escalar  $\varphi$  em  $B_\rho$  é avaliada como

$$\int_{B_\rho} \varphi = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\rho \varphi(r, \theta) r dr \right) d\theta. \quad (\text{B.5.62})$$

A integral de  $\varphi$  sobre a fronteira  $\partial B_\rho$  é escrita como

$$\int_{\partial B_\rho} \varphi = \rho \int_0^{2\pi} \varphi(\rho, \theta) d\theta. \quad (\text{B.5.63})$$

Considerando um *sistema de coordenadas esféricas* centrado na origem  $\mathcal{O}$  dado por  $(r, \theta, \phi)$ , como mostrado em fig. B.3, é definida uma base orientada para o sistema da forma  $e_r, e_\theta$  e  $e_\phi$ , com  $e_r \cdot e_\theta = e_r \cdot e_\phi = e_\theta \cdot e_\phi = 0$  e  $e_r \cdot e_r = e_\theta \cdot e_\theta = e_\phi \cdot e_\phi = 1$ . Tendo em conta esse sistema, tem-se as representações seguintes:

- Gradiente de um campo escalar  $\varphi$ :

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} e_\phi. \quad (\text{B.5.64})$$

- Laplaciano de um campo escalar  $\varphi$ :

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}. \quad (\text{B.5.65})$$

- Transformação de um vetor  $v$  a partir do sistema de coordenadas cartesianas para esféricas:

$$\begin{pmatrix} v^r \\ v^\theta \\ v^\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5.66})$$

onde  $v^i = v \cdot e_i$  são as componentes de um vetor  $v$  no sistema cartesiano de coordenadas.

Considerando uma bola  $B_\rho(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^3$  de raio  $\rho$  e centro na origem  $\mathcal{O}$ , com contorno denotado por  $\partial B_\rho$ , a integral de um campo escalar  $\varphi$  em  $B_\rho$  é avaliada como

$$\int_{B_\rho} \varphi = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \left( \int_0^\rho \varphi(r, \theta, \phi) r^2 dr \right) \sin \theta d\theta \right) d\phi. \quad (\text{B.5.67})$$

A integral de  $\varphi$  sobre a fronteira  $\partial B_\rho$  é dada por

$$\int_{\partial B_\rho} \varphi = \rho^2 \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \varphi(\rho, \theta, \phi) \sin \theta d\theta \right) d\phi. \quad (\text{B.5.68})$$

## B.6 Exercícios

1. Obtenha as fórmulas de derivação apresentadas na Seção B.2.
2. Derive as identidades integrais apresentadas na Seção B.3.

Dica: consulte o livro de Gurtin, 1981 [37].



# Bibliografia

- [1] ALLAIRE, G. et al. Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method. *Control and Cybernetics*, v. 34, n. 1, p. 59–80, 2005.
- [2] ALLAIRE, G.; JOUVE, F.; Van Goethem, N. Damage and fracture evolution in brittle materials by shape optimization methods. *Journal of Computational Physics*, v. 230, n. 12, p. 5010–5044, 2011.
- [3] AMMARI, H.; KANG, H. *Polarization and moment tensors with applications to inverse problems and effective medium theory*. New York: Springer-Verlag, 2007. (Applied Mathematical Sciences vol. 162).
- [4] AMSTUTZ, S. *Aspects théoriques et numériques en optimisation de forme topologique*. Tese (Ph.D. Thesis) — Institut National des Sciences Appliquées, Toulouse, France, 2003.
- [5] AMSTUTZ, S. Sensitivity analysis with respect to a local perturbation of the material property. *Asymptotic Analysis*, v. 49, n. 1-2, p. 87–108, 2006.
- [6] AMSTUTZ, S. A penalty method for topology optimization subject to a pointwise state constraint. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, v. 16, n. 3, p. 523–544, 2010.
- [7] AMSTUTZ, S.; ANDRÄ, H. A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *Journal of Computational Physics*, v. 216, n. 2, p. 573–588, 2006.
- [8] AMSTUTZ, S. et al. Topological derivative for multi-scale linear elasticity models applied to the synthesis of microstructures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 84, p. 733–756, 2010.
- [9] AMSTUTZ, S.; HORCHANI, I.; MASMOUDI, M. Crack detection by the topological gradient method. *Control and Cybernetics*, v. 34, n. 1, p. 81–101, 2005.
- [10] AMSTUTZ, S.; NOVOTNY, A. A. Topological optimization of structures subject to von Mises stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 41, n. 3, p. 407–420, 2010.
- [11] AMSTUTZ, S.; NOVOTNY, A. A.; NETO, E. A. de S. Topological derivative-based topology optimization of structures subject to Drucker-Prager stress constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 233–236, p. 123–136, 2012.

- [12] AMSTUTZ, S.; NOVOTNY, A. A.; Van Goethem, N. Topological sensitivity analysis for elliptic differential operators of order  $2m$ . *Journal of Differential Equations*, v. 256, p. 1735–1770, 2014.
- [13] AUROUX, D.; MASMOUDI, M.; BELAID, L. Image restoration and classification by topological asymptotic expansion. In: *Variational formulations in mechanics: theory and applications*. Barcelona, Spain: [s.n.], 2007.
- [14] BELAID, L. J. et al. Application of the topological gradient to image restoration and edge detection. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 32, p. 891–899, 2008.
- [15] BOJCZUK, D.; MRÓZ, Z. Topological sensitivity derivative and finite topology modifications: application to optimization of plates in bending. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 39, p. 1–15, 2009.
- [16] BURGER, M.; HACKL, B.; RING, W. Incorporating topological derivatives into level set methods. *Journal of Computational Physics*, v. 194, n. 1, p. 344–362, 2004.
- [17] CANELAS, A.; LAURAIN, A.; NOVOTNY, A. A. A new reconstruction method for the inverse potential problem. *Journal of Computational Physics*, v. 268, p. 417–431, 2014.
- [18] CANELAS, A.; NOVOTNY, A. A.; ROCHE, J. R. A new method for inverse electromagnetic casting problems based on the topological derivative. *Journal of Computational Physics*, v. 230, p. 3570–3588, 2011.
- [19] CÉA, J. Problems of shape optimal design. *Optimization of Distributed Parameters Structures*, II, p. 1005–1048, 1981.
- [20] CÉA, J. et al. The shape and topological optimizations connection. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 188, n. 4, p. 713–726, 2000.
- [21] DELFOUR, M. C.; ZOLÉSIO, J. P. *Shapes and Geometries. Advances in Design and Control*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2001.
- [22] ESCHENAUER, H. A.; KOBELLEV, V. V.; SCHUMACHER, A. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural Optimization*, v. 8, n. 1, p. 42–51, 1994.
- [23] ESHELBY, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society: Section A*, v. 241, p. 376–396, 1957.
- [24] ESHELBY, J. D. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society: Section A*, v. 252, p. 561–569, 1959.
- [25] ESHELBY, J. D. The elastic energy-momentum tensor. *Journal of Elasticity*, v. 5, n. 3-4, p. 321–335, 1975.
- [26] FARIA, J. R. de; NOVOTNY, A. A. On the second order topological asymptotic expansion. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 39, n. 6, p. 547–555, 2009.



- [27] FARIA, J. R. de et al. First and second order topological sensitivity analysis for inclusions. *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 17, n. 5, p. 665–679, 2009.
- [28] FEIJÓO, G. R. A new method in inverse scattering based on the topological derivative. *Inverse Problems*, v. 20, n. 6, p. 1819–1840, 2004.
- [29] FEIJÓO, R. A. et al. The topological derivative for the Poisson’s problem. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 13, n. 12, p. 1825–1844, 2003.
- [30] GARREAU, S.; GUILLAUME, P.; MASMOUDI, M. The topological asymptotic for PDE systems: the elasticity case. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 39, n. 6, p. 1756–1778, 2001.
- [31] GIUSTI, S. M.; NOVOTNY, A. A.; NETO, E. A. de S. Sensitivity of the macroscopic response of elastic microstructures to the insertion of inclusions. *Proceeding of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 466, p. 1703–1723, 2010.
- [32] GIUSTI, S. M. et al. Sensitivity of the macroscopic elasticity tensor to topological microstructural changes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 57, n. 3, p. 555–570, 2009.
- [33] GIUSTI, S. M. et al. Sensitivity of the macroscopic thermal conductivity tensor to topological microstructural changes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, n. 5–8, p. 727–739, 2009.
- [34] GIUSTI, S. M.; NOVOTNY, A. A.; PADRA, C. Topological sensitivity analysis of inclusion in two-dimensional linear elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 32, n. 11, p. 926–935, 2008.
- [35] GIUSTI, S. M.; NOVOTNY, A. A.; SOKOŁOWSKI, J. Topological derivative for steady-state orthotropic heat diffusion problem. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 40, n. 1, p. 53–64, 2010.
- [36] GUILLAUME, P.; IDRIS, K. S. The topological asymptotic expansion for the Dirichlet problem. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 41, n. 4, p. 1042–1072, 2002.
- [37] GURTIN, M. E. *An introduction to continuum mechanics*. New York: Academic Press, 1981. (Mathematics in Science and Engineering vol. 158).
- [38] GURTIN, M. E. *Configurational forces as basic concept of continuum physics*. New York: Springer-Verlag, 2000. (Applied Mathematical Sciences vol. 137).
- [39] GUZINA, B. B.; BONNET, M. Small-inclusion asymptotic of misfit functionals for inverse problems in acoustics. *Inverse Problems*, v. 22, n. 5, p. 1761–1785, 2006.
- [40] HASLINGER, J.; NEITTAANMÄKI, P. *Finite Element Approximation for Optimal Shape Design: Theory and Applications*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1988.
- [41] HAUG, E. J.; CÉA, J. *Optimization of Distributed Parameters Structures*. Iowa, USA: Nijhoff, 1981.

- [42] HENROT, A.; PIERRE, M. *Variation et optimisation de formes*. Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. (Mathématiques et applications, v. 48).
- [43] HINTERMÜLLER, M. Fast level set based algorithms using shape and topological sensitivity. *Control and Cybernetics*, v. 34, n. 1, p. 305–324, 2005.
- [44] HINTERMÜLLER, M.; LAURAIN, A. Electrical impedance tomography: from topology to shape. *Control and Cybernetics*, v. 37, n. 4, p. 913–933, 2008.
- [45] HINTERMÜLLER, M.; LAURAIN, A. Multiphase image segmentation and modulation recovery based on shape and topological sensitivity. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, v. 35, p. 1–22, 2009.
- [46] HINTERMÜLLER, M.; LAURAIN, A.; NOVOTNY, A. A. Second-order topological expansion for electrical impedance tomography. *Advances in Computational Mathematics*, v. 36, n. 2, p. 235–265, 2012.
- [47] HLAVÁČEK, I. et al. On topological derivatives for elastic solids with uncertain input data. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 141, n. 3, p. 569–595, 2009.
- [48] IL'IN, A. M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1992. x+281 p. (Translations of Mathematical Monographs, vol. 102).
- [49] JACKOWSKA-STRUMILLO, L. et al. On numerical solution of shape inverse problems. *Computational Optimization and Applications*, v. 23, n. 2, p. 231–255, 2002.
- [50] KACHANOV, M.; SHAFIRO, B.; TSUKROV, I. *Handbook of Elasticity Solutions*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [51] KAMOTSKI, I. V.; NAZAROV, S. A. Spectral problems in singular perturbed domains and self adjoint extensions of differential operators. *Trudy St.-Petersburg Mat. Obshch.*, v. 6, p. 151–212, 1998. (English transl. in Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society, 6:127–181, 2000. Amer. Math. Soc. Transl. (Ser. 2), 199, Amer. Math. Soc., Providence, RI).
- [52] KHLUDNEV, A. M. et al. Shape and topology sensitivity analysis for cracks in elastic bodies on boundaries of rigid inclusions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 57, n. 10, p. 1718–1732, 2009.
- [53] KOBELEV, V. Bubble-and-grain method and criteria for optimal positioning inhomogeneities in topological optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 40, n. 1-6, p. 117–135, 2010.
- [54] KOGUT, P. I.; LEUGERING, G. *Optimal Control Problems for Partial Differential Equations on Reticulated Domains: Approximation and Asymptotic Analysis*. [S.l.]: Springer, 2011.
- [55] KOZLOV, V. A.; MAZ'YA, V. G.; MOVCHAN, A. B. *Asymptotic analysis of fields in multi-structures*. Oxford: Clarendon Press, 1999.
- [56] LAGNESE, J. E.; LEUGERING, G. *Domain decomposition methods in optimal control of partial differential equations*. Basel: Birkhäuser Verlag, 2004. (International Series of Numerical Mathematics, v. 148).

- [57] LARRABIDE, I. et al. Topological derivative: a tool for image processing. *Computers & Structures*, v. 86, n. 13–14, p. 1386–1403, 2008.
- [58] LAURAIN, A. *Singularly perturbed domains in shape optimisation*. Tese (Ph.D. Thesis) — University Henri Poincaré, Nancy, France, 2006.
- [59] LEUGERING, G. et al. The eshelby theorem and application to the optimization of an elastic patch. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 72, n. 2, p. 512–534, 2012.
- [60] LEUGERING, G.; SOKOŁOWSKI, J. Topological derivatives for elliptic problems on graphs. *Control and Cybernetics*, v. 37, p. 971–998, 2008.
- [61] LEWINSKI, T.; SOKOŁOWSKI, J. Energy change due to the appearance of cavities in elastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, v. 40, n. 7, p. 1765–1803, 2003.
- [62] LITTLE, R. W. *Elasticity*. New Jersey: Prentice-Hall, 1973.
- [63] MASMOUDI, M.; POMMIER, J.; SAMET, B. The topological asymptotic expansion for the Maxwell equations and some applications. *Inverse Problems*, v. 21, n. 2, p. 547–564, 2005.
- [64] MAZJA, W. G.; NASAROW, S. A.; PLAMENEWSKI, B. A. *Asymptotics of solutions to elliptic boundary-value problems under a singular perturbation of the domain*. Tbilisi: Tbilisi University, 1981. (in Russian).
- [65] MAZ'YA, V.; NAZAROV, S.; PLAMENEVSKIJ, B. On the singularities of solutions of the Dirichlet problem in the exterior of a slender cone. *Mat. sbornik.*, v. 122, n. 4, p. 435–456, 1983.
- [66] MAZ'YA, V. G.; NAZAROV, S. A. The asymptotic behavior of energy integrals under small perturbations of the boundary near corner points and conical points. *Trudy Moskov. Mat. Obshch.*, v. 50, p. 79–129, 1987. (English transl.: *Trans. Mosc. Math. Soc.* 50:77–127, 1988).
- [67] MAZ'YA, V. G.; NAZAROV, S. A.; PLAMENEVSKIJ, B. A. On the asymptotic behavior of solutions of elliptic boundary value problems with irregular perturbations of the domain. *Probl. Mat. Anal. Leningrad: Leningrad University*, v. 8, p. 72–153, 1981. (in Russian).
- [68] MAZ'YA, V. G.; NAZAROV, S. A.; PLAMENEVSKIJ, B. A. Asymptotic expansions of the eigenvalues of boundary value problems for the Laplace operator in domains with small holes. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, v. 48, n. 2, p. 347–371, 1984. (English transl.: *Math. USSR Izvestiya*. 24:321–345, 1985).
- [69] MAZ'YA, V. G.; NAZAROV, S. A.; PLAMENEVSKIJ, B. A. *Asymptotische theorie elliptischer randwertaufgaben in singular gestörten gebieten, vol. 1*. Berlin: Akademie-Verlag, 1991. (English transl.: *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains, vol. 1*, Basel: Birkhäuser Verlag, 2000).
- [70] MOVCHAN, A. B.; MOVCHAN, N. V. *Mathematical modelling of solids with nonregular boundaries*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1995. (CRC Mathematical Modelling Series).

- [71] MURA, T. *Micromechanics of defects in solids*. Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1987.
- [72] NAZAROV, S. A. Asymptotic conditions at a point, self-adjoint extensions of operators and the method of matched asymptotic expansions. *Trudy Moskov. Mat. Obshch.*, v. 5, p. 112–183, 1996. (English transl.: *Trans. Am. Math. Soc.* 193:77–126, 1999).
- [73] NAZAROV, S. A. Elasticity polarization tensor, surface enthalpy and Eshelby theorem. *Probl. Mat. Analiz.*, v. 41, p. 3–35, 2009. (English transl.: *Journal of Math. Sci.* 159(1–2):133–167, 2009).
- [74] NAZAROV, S. A. The Eshelby theorem and a problem on an optimal patch. *Algebra i Analiz.*, v. 21, n. 5, p. 155–195, 2009. (English transl.: *St. Petersburg Math. J.* 21(5):791–818, 2009).
- [75] NAZAROV, S. A.; PLAMENEVSKIJ, B. A. *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*. Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1994. (de Gruyter Expositions in Mathematics, v. 13).
- [76] NAZAROV, S. A.; SOKOŁOWSKI, J. Asymptotic analysis of shape functionals. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, v. 82, n. 2, p. 125–196, 2003.
- [77] NAZAROV, S. A.; SOKOŁOWSKI, J. Self-adjoint extensions of differential operators in application to shape optimization. *Comptes Rendus Mécanique*, v. 331, p. 667–672, 2003.
- [78] NAZAROV, S. A.; SOKOŁOWSKI, J. Singular perturbations in shape optimization for the Dirichlet laplacian. *C. R. Mécanique*, v. 333, p. 305–310, 2005.
- [79] NAZAROV, S. A.; SOKOŁOWSKI, J. Self-adjoint extensions for the Neumann laplacian and applications. *Acta Mathematica Sinica (English Series)*, v. 22, n. 3, p. 879–906, 2006.
- [80] NOVOTNY, A. A. *Análise de sensibilidade topológica*. Tese (Ph.D. Thesis) — Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, Brazil, 2003.
- [81] NOVOTNY, A. A. et al. Topological sensitivity analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, n. 7–8, p. 803–829, 2003.
- [82] NOVOTNY, A. A. et al. Topological derivative for linear elastic plate bending problems. *Control and Cybernetics*, v. 34, n. 1, p. 339–361, 2005.
- [83] NOVOTNY, A. A. et al. Topological sensitivity analysis for three-dimensional linear elasticity problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, n. 41–44, p. 4354–4364, 2007.
- [84] NOVOTNY, A. A.; SOKOŁOWSKI, J. *Topological derivatives in shape optimization*. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013. 324 p. (Interaction of Mechanics and Mathematics).
- [85] NOVOTNY, A. A.; SOKOŁOWSKI, J.; NETO, E. A. de S. Topological sensitivity analysis of a multi-scale constitutive model considering a cracked microstructure. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, v. 33, n. 5, p. 676–686, 2010.

- [86] OZAWA, S. An asymptotic formula for the eigenvalues of the laplacian in a three-dimensional domain with a small hole. *Journal of the Faculty of Science. University of Tokyo. Section IA. Mathematics*, v. 30, n. 2, p. 243–257, 1983.
- [87] OZAWA, S. Asymptotic property of an eigenfunction of the Laplacian under singular variation of domains—the Neumann condition. *Osaka Journal of Mathematics*, v. 22, n. 4, p. 639–655, 1985.
- [88] PLOTNIKOV, P.; SOKOŁOWSKI, J. *Compressible Navier-Stokes Equations. Theory and shape optimization*. Basel: Springer-Verlag, 2012.
- [89] SOKOŁOWSKI, J.; ŻOCHOWSKI, A. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 37, n. 4, p. 1251–1272, 1999.
- [90] SOKOŁOWSKI, J.; ŻOCHOWSKI, A. Topological derivatives of shape functionals for elasticity systems. *Mechanics of Structures and Machines*, v. 29, n. 3, p. 333–351, 2001.
- [91] SOKOŁOWSKI, J.; ŻOCHOWSKI, A. Optimality conditions for simultaneous topology and shape optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 42, n. 4, p. 1198–1221, 2003.
- [92] SOKOŁOWSKI, J.; ŻOCHOWSKI, A. Modelling of topological derivatives for contact problems. *Numerische Mathematik*, v. 102, n. 1, p. 145–179, 2005.
- [93] SOKOŁOWSKI, J.; ŻOCHOWSKI, A. Topological derivatives for optimization of plane elasticity contact problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 32, n. 11, p. 900–908, 2008.
- [94] SOKOŁOWSKI, J.; ZOLÉSIO, J. P. *Introduction to shape optimization - shape sensitivity analysis*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1992.
- [95] SZULC, K. *Quelques méthodes numériques en optimisation de formes*. Tese (Ph.D. Thesis) — Institut Elie Cartan, Université Henrie Poincaré Nancy1, France, 2010.
- [96] TAROCO, E.; FEIJÓO, R. A. Shape sensitivity analysis and the energy momentum tensor for the kinematic and static models of torsion. *International Journal Of Solids and Structures*, v. 43, n. 7–8, p. 1908–1927, 2006.
- [97] TUREVSKY, I.; GOPALAKRISHNAN, S. H.; SURESH, K. An efficient numerical method for computing the topological sensitivity of arbitrary-shaped features in plate bending. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 79, n. 13, p. 1683–1702, 2009.
- [98] Van Goethem, N.; NOVOTNY, A. A. Crack nucleation sensitivity analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, v. 33, n. 16, p. 197–1994, 2010.
- [99] ZOLÉSIO, J. P. The material derivative (or speed) method for shape optimization. In: *Optimization of Distributed Parameters Structures*. Iowa, USA: [s.n.], 1981.

# Índice

- análise de Fourier, 83, 88
- ansatz
  - elasticidade tridimensional, 72
  - problema acoplado, 91
  - problema de Laplace
    - estado adjunto, 62
    - estado direto, 61
  - problema de Navier, 34
  - problema de Poisson
    - Dirichlet, 16
    - Neumann, 16
- balanço configuracional, 109
- coercividade, 32, 37, 49, 50, 66
- condição de transmissão
  - problema de Laplace, 57
  - problema de Navier, 31
- configuração espacial, 96
- configuração material, 96
- contraste, 29
- derivada material
  - divergente de campo vetorial, 107
  - gradiente de campo escalar, 106
  - gradiente de campo vetorial, 106
  - gradiente de segunda ordem de campo escalar, 107
  - gradiente simétrico de campo vetorial, 106
  - Laplaciano de campo escalar, 107
- derivada topológica
  - definição alternativa, 46
  - definição geral, 2, 3
  - elasticidade tridimensional, 77
  - problema acoplado, 93
  - problema de Laplace, 65
  - problema de Navier, 38
  - problema de Poisson
    - Dirichlet, 21
    - Neumann, 19
    - resumo dos resultados, 26
    - Robin, 26
- derivada topológica de segunda ordem
  - definição, 12, 22
  - problema de Poisson
    - Dirichlet, 22
- derivadas material e espacial
  - relação, 99, 105
    - campo escalar, 105
    - campo vetorial, 105
- descrição espacial
  - campo de velocidade, 98
  - campo material, 97
- descrição material
  - campo de velocidade, 97
  - campo espacial, 97
- desigualdades
  - Cauchy-Schwarz, 32, 37, 39, 40, 49, 50, 66
  - Hölder, 49
- diferenciabilidade em relação à forma, 3
- divergente superficial da velocidade, 106
- domínio de referência, 3
- exemplos
  - equação de quarta ordem, 6
  - equação de segunda ordem, 5
  - mínimo global, 7
  - perturbação do termo fonte, 48
  - perturbação regular, 4
  - perturbação singular, 4
  - regra de cálculo diferencial, 5
  - relação entre derivadas de forma e topológica, 45
  - tensor de Eshelby, 107
- expansão assintótica topológica, 2
  - elasticidade tridimensional, 77
  - problema acoplado, 93
  - problema de Navier, 38
  - problema de Poisson
    - Dirichlet, 22
    - Neumann, 19
    - Robin, 26

- expansão da solução
  - elasticidade tridimensional, 73
  - problema de Laplace
    - estado adjunto, 64
    - estado direto, 62
  - problema de Navier, 34
  - problema de Poisson
    - Dirichlet, 18
    - Neumann, 16
    - Robin, 26
- forças configuracionais, 109
- função característica, 2
- função correção de primeira ordem, 2
- função correção de segunda ordem, 22
- gradiente de forma
  - distribuído, 108
- Lipschitz contínuo, 4, 5, 12
- medida de Lebesgue, 2
- operador Steklov-Poincaré, 83
  - expansão, 88
  - não perturbado, 84
  - perturbado, 85
- perturbação topológica, 3
- problema adjunto
  - acoplado, 84
  - Laplace
    - modificado, 58
    - original, 58
- problema exterior
  - elasticidade tridimensional, 73
  - Laplace
    - estado adjunto, 63
    - estado direto, 62
  - Navier, 34
  - Poisson
    - Dirichlet, 17
    - Neumann, 16
- problema modelo
  - acoplado, 85
  - elasticidade tridimensional, 71
  - Laplace, 57
  - Navier, 31
  - Poisson, 14
- problema remanescente
  - elasticidade tridimensional, 73
  - Laplace
    - estado adjunto, 63
    - estado direto, 62
  - Navier, 36
  - Poisson
    - Dirichlet, 18
    - Neumann, 16
- regularidade elíptica, 17–19, 32, 37, 39, 40, 52, 65, 66, 93
- série de Fourier, 89, 90
- sistema de coordenadas
  - esféricas, 119
  - Eulerianas, 96
  - Lagrangeanas, 96
  - polares, 118
- solução fundamental
  - problema de Poisson, 17
- técnica de decomposição de domínio, 83
- tensor de Eshelby, 107, 108
  - problema de Laplace, 59
- tensor de polarização
  - elasticidade tridimensional, 77
  - problema de Navier, 38
- tensor Jacobiano, 96
- teorema
  - Eshelby, 35
  - função implícita, 51
  - Hadamard, 109, 112
  - imersão de Sobolev, 49
  - traço, 37, 66
  - transporte de Reynolds, 105
    - campos descontínuos, 106
    - integrais de contorno, 104, 106
    - integrais de domínio, 102, 105
- termo remanescente, 2