Notas em Matemática Aplicada e-ISSN 2236-5915

Volume 68, 2012

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2012

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7), as figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
http://www.sbmac.org.br/p_notas.php

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

2012

INTRODUÇÃO AOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Edson Cataldo
ecataldo@im.uff.br

Departamento de Matemática Aplicada
Programa de Mestrado em Engenharia de Telecomunicações
Universidade Federal Fluminense

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2012

Coordenação Editorial: Elbert Einstein Nehrer Macau

Coordenação Editorial da Série: Rosana Sueli da Motta Jafelice

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Catalogação elaborada pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

Cataldo, Edson
Introdução aos Processos Estocásticos - São Carlos, SP : SBMAC, 2012, 106 p., 21.5 cm - (Notas em Matemática Aplicada; v. 68)

e-ISBN 978-85-8215-029-0

1. Processos Estocásticos 2. Probabilidade
3. Variáveis Aleatórias
I. Cataldo, Edson II. Título. III. Série

CDD - 51

Dedico
A Deus
e à minha família.
Em especial, à minha mãe, Maria Carlota, que me deu grandes ensinamentos, principalmente sobre a vida.

Conteúdo

Prefácio

Esse texto foi desenvolvido a partir de notas de aula da disciplina de Processos Estocásticos I, ministrada para o mestrado em Engenharia de Telecomunicações da Universidade Federal Fluminense todos os semestres. O texto faz uma compilação de outros textos relacionados ao assunto, adicionando a visão do autor sobre o tema. O objetivo do material aqui apresentado é relacionar conceitos básicos da teoria de probabilidade, variáveis aleatórias e processos estocásticos de modo que os leitores possam compreender o que é um processo estocástico e sua interpretação no domínio da frequência, através da densidade espectral de potência. Esse texto tem sido usado também como material didático em mini-cursos ministrados durante várias oportunidades em congressos e escolas de verão de cursos de pós-graduação.

Os pré-requisitos necessários para o entendimento da teoria aqui apresentada são Teoria de Conjuntos, os cursos iniciais de Cálculo Diferencial e Integral e Análise de Fourier. No texto, há um capítulo de revisão de série e transformada de Fourier.

Espero que esse livro seja bastante útil para os interesses dos que o buscam.

Um cordial abraço,

Rio de Janeiro, 30 de julho de 2012.

Edson Cataldo

Capítulo 1

Modelos

1.1 Introdução

Podemos dizer que um *modelo* (matemático, físico, econômico,...) é uma representação de uma situação existente. Seu objetivo é explicar um determinado comportamento prevendo o resultado de experimentos envolvendo a tal situação.

Nosso interesse aqui é o de estudar modelos probabilísticos, assim chamados por se basearem em teoria de probabilidades. Existem inúmeras aplicações de tais modelos nas mais diferentes áreas de conhecimento. Nas comunicações via telefone celular, no processamento digital de sinais (voz, imagem, vídeo, ...), nos sistemas de radar, nos investimentos na bolsa de valores, em sistemas biológicos, na dinâmica de sistemas mecânicos, ... Há, ainda, aplicações em Geometria Diferencial e Sistemas Dinâmicos, possibilitando aos leitores desse livro a continuação em estudos mais avançados relacionados ao Cálculo Estocástico e suas aplicações. Nesse caso, recomendamos as referências [3, 7, 8].

1.1.1 Modelos matemáticos

Modelos matemáticos são usados quando o fenômeno observado tem propriedades mensuráveis e consiste de um conjunto de considerações e relações matemáticas sobre o funcionamento do sistema em observação.

1.1.2 Simulação computacional

A simulação computacional é realizada através de programas que irão gerar os resultados previstos pelo modelo.

1.1.3 Modelos determinísticos

Em modelos determinísticos, as condições sob as quais um experimento é realizado determina o exato resultado desse experimento.

Nesses modelos, a solução de um conjunto de equações especifica o exato resultado do experimento.

1.2 Modelos probabilísticos

1.2.1 Definição

Definimos um experimento aleatório como aquele no qual os resultados variam, embora o experimento seja repetido sob as mesmas condições. Os modelos probabilísticos irão prever possíveis resultados ou faixa de resultados para os sistemas em que os resultados são aleatórios; isto é, embora as entradas sejam as mesmas, as saídas desses sistemas são diferentes.

1.2.2 Regularidade estatística

Muitos modelos probabilísticos são baseados no fato de que médias obtidas em longas sequências de repetições de experimentos aleatórios têm o mesmo valor. Esta propriedade é chamada de *regularidade estatística*.

Considere o seguinte exemplo:

"Uma bola é selecionada de uma urna contendo três bolas idênticas numeradas com os números 0,1 e 2. O número da bola é anotado e a bola é retornada à urna."

O resultado deste experimento é um número do conjunto $S = \{0, 1, 2\}$.

Suponha que o experimento seja repetido n vezes sob condições idênticas. Sejam $N_0(n)$, $N_1(n)$ e $N_2(n)$ o número de vezes no qual os resultados são os números 0, 1 e 2, respectivamente. Definimos a *frequência relativa* do resultado k, $k = 0, 1 \,\text{ou}\, 2$, por: $f_k(n) = \dfrac{N_k(n)}{n}$.

De acordo com o que chamamos de regularidade estatística, $f_k(n)$ varia menos, em torno de uma constante, à medida que n é tomado grande; isto é, $\lim_{n\to+\infty} f_k(n) = p_k$. A constante p_k é chamada de **probabilidade** do resultado k.

Em modelos probabilísticos, as condições sob as quais um experimento aleatório é realizado determina as **probabilidades** dos resultados do experimento.

Suponha que um experimento aleatório tenha K possíveis resultados; isto é, $S = \{1, 2, \ldots, K\}$. Suponha que o experimento tenha sido repetido n vezes e considere que $N_k(n)$ é o número de vezes em que o resultado obtido foi k, sendo $k = 1, 2, \ldots, K$.

Temos, $0 \leq N_k(n) \leq n \Rightarrow 0 \leq f_k(n) \leq 1$, $k = 1, 2, \ldots, K$.

Também, $\displaystyle\sum_{k=1}^{K} N_k(n) = n \Rightarrow \sum_{k=1}^{K} f_k(n) = 1$.

Algumas vezes estamos interessados na ocorrência de casos específicos relacionados com os resultados de um experimento. Por exemplo, considere ainda o exemplo da urna com as bolas e o caso em que “uma bola de número diferente de 1 é selecionada”. Se uma bola de número diferente de 1 é selecionada, significa que uma bola de número 0 ou 2 foi selecionada. A frequência relativa, neste caso, será obtida da seguinte forma:

$$N_{\text{caso}}(n) = N_0(n) + N_2(n) \Rightarrow f_{\text{caso}}(n) = \frac{N_0(n) + N_2(n)}{n}.$$

Portanto,

$$f_{\text{caso}}(n) = f_0(n) + f_2(n)\,.$$

1.2.3 Construção de um modelo probabilístico

Podemos dizer que para a construção de um modelo probabilístico devemos:

(i) definir o experimento aleatório correspondente;

(ii) especificar o conjunto de todos os possíveis resultados. Chamaremos esse conjunto de *espaço amostral*;

(iii) especificar uma associação de probabilidades para todos os *casos* de interesse. Definiremos mais adiante esses *casos* através do que chamaremos de *eventos*.

Capítulo 2

Conceitos Básicos da Teoria de Probabilidade

2.1 Especificação de experimentos aleatórios

Um experimento aleatório é um experimento no qual o resultado varia de forma, digamos, *imprevisível* quando o experimento é repetido sob as mesmas condições. Podemos dizer, de maneira informal, que um experimento aleatório é especificado pela implementação de um procedimento experimental e pela definição do que será considerado com resultado do experimento.

Exemplo 2.1. *Consideremos os seguintes experimentos aleatórios:*

(i) $\mathbf{E_1}$*: Selecione uma bola de uma urna contendo bolas numeradas de* 1 *a* 50*. Anote o número da bola.*

(ii) $\mathbf{E_2}$*: Lance uma moeda três vezes. Anote o número de caras.*

(iii) $\mathbf{E_3}$*: Transmita um bloco de informações através de um canal ruidoso, repetidamente, até que um bloco livre de erros chegue ao receptor. Conte o número de transmissões requeridas.*

(iv) $\mathbf{E_4}$*: Escolha um número real ao acaso entre zero e um. Anote esse número.*

2.2 O espaço amostral

Embora os resultados em experimentos aleatórios sejam *imprevisíveis*, é necessário determinar o conjunto de possíveis resultados.

Definimos *resultado* ou *ponto amostra* ou simplesmente *amostra* de um experimento aleatório como um resultado que não pode ser decomposto em outros resultados. Dessa forma, quando realizamos um experimento aleatório um, e somente um, resultado ocorre. Assim, os resultados são mutuamente exclusivos no sentido de que eles não podem ocorrer simultaneamente.

Definimos o espaço amostral S de um experimento aleatório como o conjunto de todos os resultados possíveis. Denotaremos um resultado de um experimento aleatório por ξ. Assim, ξ é um elemento de S.

Exemplo 2.2. *A seguir estão exemplos de espaços amostrais, relacionados com os experimentos* $\mathbf{E_1}$*,* $\mathbf{E_2}$*,* $\mathbf{E_3}$ *e* $\mathbf{E_4}$*, respectivamente.*

(i) $S_1 = \{1, 2, \ldots, 50\}$.

(ii) $S_2 = \{0, 1, 2, 3\}$.

(iii) $S_3 = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

(iv) $S_4 = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$.

Chamaremos S de espaço amostral discreto se S for contável, e chamaremos S de espaço amostral contínuo se S não for contável. Nos exemplos, S_1, S_2 e S_3 são discretos e S_4 é contínuo.

2.3 Eventos

Muitas vezes não estamos interessados apenas nos resultados de um experimento, mas se o resultado desse experimento satisfaz certas condições. As condições de interesse definem um subconjunto do espaço amostral; ou melhor, o conjunto de resultados (ξ) do espaço amostral (S) que satisfazem as condições dadas.

Neste texto, **evento** será definido simplesmente como um subconjunto do espaço amostral S. O evento chamado **evento certo** é o próprio conjunto S e consiste de todos os resultados possíveis e o **evento nulo** ou **impossível** não contém nenhum resultado possível.

Exemplo 2.3. *A seguir estão exemplos de eventos relacionados com os experimentos* $\mathbf{E_1}$*,* $\mathbf{E_2}$*,* $\mathbf{E_3}$ *e* $\mathbf{E_4}$*, respectivamente.*

(i) e_1 : *"um número par é selecionado"*
$e_1 = \{2, 4, \ldots, 48, 50\}$.

(ii) e_2 : *"o número de caras é igual ao número de coroas"*
$e_2 = \emptyset$.

(iii) e_3 *"menos que dez transmissões são requeridas"*
$e_3 = \{1, 2, \ldots, 9\}$.

(iv) e_4 : *"o número selecionado é não-negativo"*
$e_4 = S_4$.

2.4 Axiomas de probabilidade

Probabilidades são números associados a eventos que indicam quão "provável" é a ocorrência de um evento quando um experimento é realizado e uma "lei" de probabilidade é uma função que associa um número a um evento.

Seja **E** um experimento aleatório com espaço amostral S. Uma lei de probabilidade para o experimento **E** é uma "regra" que associa a cada evento A um número $P[A]$, chamado de probabilidade de A.

A lei de probabilidade deve satisfazer os seguintes axiomas:

(i) $P[A] \geq 0$.

(ii) $P[S] = 1$.

(iii) Se $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P[A \cup B] = P[A] + P[B]$.

(iii)' Se $A_1, A_2, \ldots$ é uma sequência de eventos tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todos $i \neq j$, então

$$P\left[\cup_{k=1}^{\infty} A_k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} P[A_k].$$

Corolário 2.1.

(i) $P[A^c] = 1 - P[A]$.

(ii) $P[A] \leq 1$.

(iii) $P[\emptyset] = 0$.

(iv) *Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são mutuamente exclusivos 2 a 2 então*

$$P\left[\cup_{k=1}^{n} A_k\right] = \sum_{k=1}^{n} P[A_k] \ , \ n \geq 2.$$

(v) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$.

(vi) $P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] + P[C] - P[A \cap B] - P[A \cap C] - P[B \cap C] + P[A \cap B \cap C]$.

(vii) $P[\cup_{k=1}^{n} A_k] = \sum_{j=1}^{n} P[A_j] - \sum_{j<k} P[A_j \cap A_k] + \ldots + (-1)^{n+1} P[A_1 \cap \ldots \cap A_n]$.

(viii) $P[A \cup B] \leq P[A] + P[B]$.

(ix) *Se* $A \subset B \Rightarrow P[A] \leq P[B]$.

2.5 Espaços amostrais discretos e contínuos

Considere $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um espaço amostral finito, sendo todos os eventos elementares são mutuamente exclusivos. Assim, a probabilidade de qualquer evento $B = \{a'_1, a'_2, \ldots, a'_n\}$ é dada por $P[B] = P[\{a'_1, a'_2, \ldots, a'_m\}] = P[\{a'_1\}] + P[\{a'_2\}] + \ldots + P[\{a'_m\}]$.

Considerando S um espaço amostral infinitamente contável, digamos $S = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$, a probabilidade do evento $D = \{b'_1, b'_2, \ldots\}$ é dada por $P[D] = P[\{b'_1\}] + P[\{b'_2\}] + \ldots$.

Se os resultados do espaço amostral discreto S são igualmente prováveis então a probabilidade de um evento é igual à razão entre o número de elementos do evento e o número total de elementos do espaço amostral.

Espaços amostrais contínuos aparecem em experimentos nos quais os resultados são números reais. Os eventos de interesse nesses experimentos consistem de intervalos da reta real e de complementos, uniões e interseções desses eventos. Por esta razão, leis de probabilidade em experimentos com espaços amostrais contínuos especificam uma regra para associar números a intervalos da reta real.

Considere o seguinte exemplo: "Tome um número x ao acaso entre zero e um". O espaço amostral S para esse experimento é o intervalo $[0, 1]$, que não é contável. Se nós supomos que todos os resultados de S são igualmente prováveis, então podemos pensar que a probabilidade de o resultado estar no intervalo $[0, 1/2]$ é a mesma de o resultado estar no intervalo $[1/2, 1]$ e seria igual a $\frac{1}{2}$. Porém, como há infinitos números (incontáveis) neste intervalo, a probabilidade de o resultado ser exatamente igual a $\frac{1}{2}$, por exemplo, seria zero.

2.6 Probabilidade condicional

Muitas vezes estamos interessados em determinar se dois eventos, digamos A e B, estão relacionados, no sentido de que o conhecimento da probabilidade associada a um deles altera a probabilidade associada ao outro.

Queremos encontrar a probabilidade $P[A|B]$, isto é, a probabilidade do evento A, conhecida a probabilidade do evento B. Em outras palavras, de uma maneira informal, queremos encontrar *a probabilidade do evento A, dado que o evento B ocorreu.*

Definição 2.1. *A probabilidade condicional $P[A|B]$ é definida por:*

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \ , \ P[B] > 0 \, . \tag{2.6.1}$$

Exemplo 2.4. *Uma urna contém duas bolas pretas numeradas (1 e 2) e duas bolas brancas, também numeradas (3 e 4). Retira-se uma bola da urna e anota-se seu número e sua cor. Assim, O espaço amostral desse experimento é $S = \{(1,p),(2,p),(3,b),(4,b)\}$, sendo os quatro resultados igualmente prováveis.*

Considere os seguintes eventos:

$A = \{(1,p),(2,p)\}$ - *bola preta selecionada*

$B = \{(2,p),(4,b)\}$ - *bola com número par selecionada*

$C = \{(3,b),(4,b)\}$ - *número da bola é maior que* 2

Determine:

(i) $P[A|B]$

(ii) $P[A|C]$

Solução:

(i) $P[A|B] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]} = \dfrac{1/4}{2/4} = \dfrac{1}{2} = P[A].$

(ii) $P[A|C] = \dfrac{P[A \cap C]}{P[C]} = \dfrac{0/4}{2/4} = 0 \neq P[A].$

Observe que em (i) o conhecimento de B não alterou a probabilidade de A $\left(P[A] = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}\right)$. Porém, no segundo caso, o conhecimento de C implicou que A não tinha ocorrido.
OBS: Em alguns problemas é conveniente usar a fórmula

$$P[A \cap B] = P[B|A]P[A] \text{ ou } P[A \cap B] = P[A|B]P[B] \, .$$

Exemplo 2.5. *Uma urna contém duas bolas pretas e três bolas brancas. Duas bolas são selecionadas ao acaso, sem reposição, e a sequência das bolas é anotada. Encontre a probabilidade de as duas bolas selecionadas serem pretas.*

Solução:

Considere os eventos: B_1 - a primeira bola é preta e B_2 - a segunda bola é preta.

Queremos calcular $P[B_1 \cap B_2]$.

Temos que, $P[B_1 \cap B_2] = P[B_2|B_1]P[B_1]$. Mas, $P[B_2|B_1] = \dfrac{1}{4}$ e $P[B_1] = \dfrac{2}{5}$.

Logo, $P[B_1 \cap B_2] = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{10}$.

Teorema 2.1. *Teorema da probabilidade total*

Sejam $B_1, B_2, \ldots, B_n$ eventos mutuamente exclusivos cuja união é igual ao espaço amostral S. Dizemos, neste caso, que fizemos uma partição no conjunto S.

Qualquer evento A, de S, pode ser representado por

$$\begin{aligned} A &= A \cap S = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) \\ &= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n). \end{aligned}$$

Assim,

$$P[A] = P[A \cap B_1] + P[A \cap B_2] + \ldots + P[A \cap B_n]$$

ou

$$P[A] = P[A|B_1]P[B_1] + P[A|B_2]P[B_2] + \ldots + P[A|B_n]P[B_n]. \tag{2.6.2}$$

Exemplo 2.6. *Considere uma urna contendo duas bolas pretas e três bolas brancas. Encontre a probabilidade de ao retirarmos duas bolas, ao acaso, sem reposição, a segunda ser branca.*

Solução:

Para usar o Teorema da probabilidade total, devemos encontrar uma partição do espaço amostral S. Consideremos os dois eventos seguintes:

A_1 - a primeira bola é preta e B_1 - a primeira bola é branca.

Observamos que $S = A_1 \cup B_1$.

Consideremos, então, o seguinte evento:

C - a segunda bola é branca.

Queremos calcular $P[C]$.

Pelo Teorema da probabilidade total, temos

$$P[C] = P[C|A_1]P[A_1] + P[C|B_1]P[B_1].$$

Portanto, $P[C] = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$.

2.6.1 Regra de Bayes

Considere $B_1, B_2, \ldots, B_n$ a partição de um espaço amostral S. Queremos calcular a probabilidade do evento B_j, dado que o evento A ocorreu, sendo A um evento qualquer.

Pela definição de probabilidade condicional, temos:

$$P[B_j|A] = \frac{P[A \cap B_j]}{P[A]}.$$

Mas,

$$P[A|B_j] = \frac{P[A \cap B_j]}{P[B_j]} \Rightarrow P[A \cap B_j] = P[A|B_j]P[B_j].$$

Assim,

$$P[B_j|A] = \frac{P[A \cap B_j]}{P[A]} = \frac{P[A|B_j]P[B_j]}{P[A]}.$$

Portanto,

$$P[B_j|A] = \frac{P[A|B_j]P[B_j]}{\sum_{j=1}^{n} P[A|B_j]P[B_j]} \tag{2.6.3}$$

que é conhecida como Regra de Bayes.

Exemplo 2.7. *Quatro máquinas em uma fábrica produzem os mesmos componentes eletrônicos. Em determinado período, a produção foi a seguinte: A máquina* 1 *produziu* 2000 *componentes, sendo* 5% *defeituosos; a máquina* 2 *produziu* 500 *componentes, sendo* 40% *defeituosos e ass máquinas* 3 *e* 4 *produziram* 1000 *componentes cada, com* 10% *defeituosos. Escolhe-se um componente ao acaso.*

(i) Qual é a probabilidade de o componente escolhido ser defeituoso?

(ii) Examinamos o componente selecionado e comprovamos que é defeituoso. Qual é a probabilidade de ser da máquina 2?

Solução:

(i) Seja D o evento "componente defeituoso" e seja B_i o evento "componente da i-ésima máquina". Queremos calcular $P[D]$.

Assim,

$$P[D] = P[D|B_1]P[B_1] + P[D|B_2]P[B_2] + P[D|B_3]P[B_3] + P[D|B_4]P[B_4].$$

E,

$$P[D] = \frac{100}{2000} \times \frac{1}{4} + \frac{200}{500} \times \frac{1}{4} + \frac{100}{1000} \times \frac{1}{4} + \frac{100}{1000} \times \frac{1}{4} = 0,1625.$$

(ii)

$$P[B_2|D] = \frac{P[D|B_2]P[B_2]}{P[D]} = \frac{\frac{200}{500} \times \frac{1}{4}}{0,1625} = 0,615.$$

2.6.2 Eventos independentes

Se o conhecimento do evento B não altera a probabilidade do evento A, dizemos que o evento A é independente do evento B.

Nesse caso, escrevemos

$$P[A] = P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \Leftrightarrow P[A \cap B] = P[A]P[B].$$

Exemplo 2.8. *Uma bola é selecionada de uma urna contendo duas bolas pretas numeradas (*1 *e* 2*) e duas bolas brancas numeradas (*3 *e* 4*). Considere os seguintes eventos:*

A: *"bola preta selecionada"*

B: *"número par selecionado"*

C: *"número da bola maior que 2 (dois)"*

(i) Verifique se os eventos A e B são independentes.

(ii) Verifique se os eventos A e C são independentes.

Solução:

(i) $P[A] = P[B] = \dfrac{1}{2}$, $P[A \cap B] = \dfrac{1}{4}$, $P[A \cap B] = P[A]P[B]$.

Logo, os eventos A e B são independentes.

(ii) $P[A \cap C] = P[\emptyset] = 0 \neq P[A] = 0,5$.

Portanto, os eventos A e C não são independentes.

OBS: *Se dois eventos têm probabilidade não-nula e são mutuamente exclusivos então eles não podem ser independentes.* **Prove isso!**

2.6.3 A lei da probabilidade binomial

Considere a realização de um experimento e a verificação de um evento, digamos A. Dizemos que o resultado da chamada *tentativa de Bernouilli* é um *sucesso* se A ocorre e uma *falha* caso contrário. Estamos interessados em encontrar a probabilidade de k sucessos em n repetições independentes de tentativas de Bernouilli.

Teorema 2.2. *A probabilidade de k sucessos em n tentativas (independentes) de Bernouilli é dada pela lei de probabilidade binomial*

$$p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \ , \ k = 0, \ldots, n \tag{2.6.4}$$

sendo $p_n(k)$ a probabilidade de k sucessos em n tentativas, p a probabilidade de um sucesso e $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ o coeficiente binomial.

Exemplo 2.9. *Suponha que uma moeda viciada seja lançada três vezes. Considere que a probabilidade de se obter cara, em um lançamento, é p. Determine as probabilidades da sequência de caras e coroas.*

Solução:

$P[\text{três caras}] = C_3^3 p^3 (1-p)^0 = p^3$,

$P[\text{duas caras e uma coroa}] = C_3^2 p^2 (1-p)^1 = 3p^2(1-p)$,

$P[\text{duas coroas e uma cara}] = C_3^1 p^1 (1-p)^2 = 3p(1-p)^2$,

$P[\text{três coroas}] = C_3^0 p^0 (1-p)^3 = (1-p)^3$.

2.7 Exercícios

(1) Considere A e B dois eventos. Sabemos que $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois outros eventos tais que $\mathcal{A} = A - (A \cap B)$ e $\mathcal{B} = B - (A \cap B)$. Prove que $P[\mathcal{A} \cup \mathcal{B}] = P[A] + P[B] - 2P[A \cap B]$.

(2) Duas moedas M_1 e M_2 viciadas são tais que a probabilide de se obter cara ao jogar a moeda M_1 é p_1 e a probabilidade de se obter cara ao jogar a moeda M_2 é p_2. Escolhe-se uma das duas moedas, aleatoriamente, e essa moeda é jogada.

Determine:

(i) A probabilidade de o resultado obtido ser cara.

(ii) A probabilidade de que a moeda M_2 tenha sido usada, sabendo que o resultado obtido foi cara.

(3) Uma instalação industrial dispões de um sistema de segurança defeituoso: o alarme dispara com probabilidade $0,90$ quando há incêncio, e dispara com probabilidade $0,15$ mesmo quando não há incêncio. A probabilidade de que ocorra um incêndio neste tipo de instalação é de $0,05$. Sabendo que o alarme está soando, qual a probabilidade de que um incêndio esteja realmente ocorrendo?

(4) Considere a experiência que consiste no lançamento de um dado e assuma que os resultados sejam equiprováveis. Suponha que esta experiência seja repetida 10 vezes e determine a probabilidade de que um resultado não menor que 3 ocorra em 4 dessas 10 realizações da experiência.

Capítulo 3

Variáveis Aleatórias

3.1 Definição de variável aleatória

Definição 3.1. *Uma variável aleatória (real) é uma função (real) que associa um número real a cada resultado do espaço amostral de um experimento aleatório.*

Considerando X a variável aleatória, S o espaço amostral, e ξ cada resultado do espaço amostral, temos:

$$\begin{aligned} X : S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longrightarrow X(\xi)\,. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

O espaço amostral S é o domínio da variável aleatória e o conjunto S_X de todos os valores obtidos para X é a imagem da variável aleatória ($S_X \subset \mathbb{R}$).

Exemplo 3.1. *Uma moeda é lançada três vezes e a sequência de caras e coroas é anotada.*

O espaço amostral desse experimento é

$$S = \{ccc, cck, ckc, ckk, kcc, kck, kkc, kkk\}\,.$$

Seja X a variável aleatória correspondente ao número total de caras dos três lançamentos. Temos,

ξ :	ccc	cck	ckc	ckk	kcc	kck	kkc	kkk
$X(\xi)$:	3	2	2	1	2	1	1	0

Portanto, X é uma variável aleatória com valores em $S_X = \{0, 1, 2, 3\}$.

3.2 Função distribuição de probabilidade

Definição 3.2. *A função distribuição de probabilidade (F.D.P.), também chamada de função distribuição cumulativa, de uma variável aleatória X, é definida como a probabilidade do evento $\{X \leq x\}$. Devemos observar que, embora o correto seja escrever $X(\xi) \leq x$, a grande maioria dos textos que tratam do assunto escrevem, de maneira simplificada, $X \leq x$.*

Assim, $F_X(x) = P[X \leq x]\ ,\ x \in \mathbb{R}$.

Propriedade 3.1.

(i) $0 \leq F_X(x) \leq 1$.

(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

(iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

(iv) F_X *é não-decrescente.*

(v) F_X *é contínua à direita.*

(vi) $P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$.

Demonstração:

Temos, $\{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\} = \{X \leq b\}$. *Portanto,*

$F_X(a) + P[a < X \leq b] = F_X(b)$ *e* $P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$.

■

(vii) $P[X = b] = F_X(b) - F_X(b^-)$.

(viii) $P[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a^-)$.

(ix) $P[X > x] = 1 - F_X(x)$.

OBS:

(i) Definimos função de massa de probabilidade (FMP) de X, p_X, por

$$p_X(x_k) = P[X = x_k].$$

(ii) Se F_X é contínua então

$$P[a \leq X \leq b] = P[a < X < b] = P[a \leq X < b] = P[a < X \leq b].$$

Exemplo 3.2. *Considere o lançamento de uma moeda três vezes. Seja X a variável aleatória que associa o resultado com o número de caras obtido. Encontre a expressão da função distribuição de probabilidade F_X.*

Solução:

A definição da variável aleatória X é dada por:

$\xi \longrightarrow X(\xi)$
$ccc \longrightarrow 3$
$cck \longrightarrow 2$
$ckc \longrightarrow 2$
$ckk \longrightarrow 1$
$kcc \longrightarrow 2$
$kck \longrightarrow 1$
$kkc \longrightarrow 1$
$kkk \longrightarrow 0$

Portanto,
$P[X=0]=\frac{1}{8}$; $P[X=1]=\frac{3}{8}$; $P[X=2]=\frac{3}{8}$ e $P[X=3]=\frac{1}{8}$.

Assim, a função distribuição de probabilidade F_X é definida por:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0\ ,\ x<0 \\ \frac{1}{8}\ ,\ 0\leq x<1 \\ \frac{4}{8}=\frac{1}{2}\ ,\ 1\leq x<2 \\ \frac{7}{8}\ ,\ 2\leq x<3 \\ 1\ ,\ x\geq 3\,. \end{cases}$$

Podemos escrever

$$F_X(x)=0+\frac{1}{8}u(x)+\frac{3}{8}u(x-1)+\frac{3}{8}u(x-2)+\frac{1}{8}u(x-3)$$

ou

$$F_X(x)=p_X(0)u(x)+p_X(1)u(x-1)+p_X(2)u(x-2)+p_X(3)u(x-3)$$

sendo u a função degrau unitário definida por $u(x)=\begin{cases} 0\ ,\ x<0 \\ 1\ ,\ x\geq 0\,. \end{cases}$

A Fig. 3.1 mostra o esboço do gráfico de F_X.

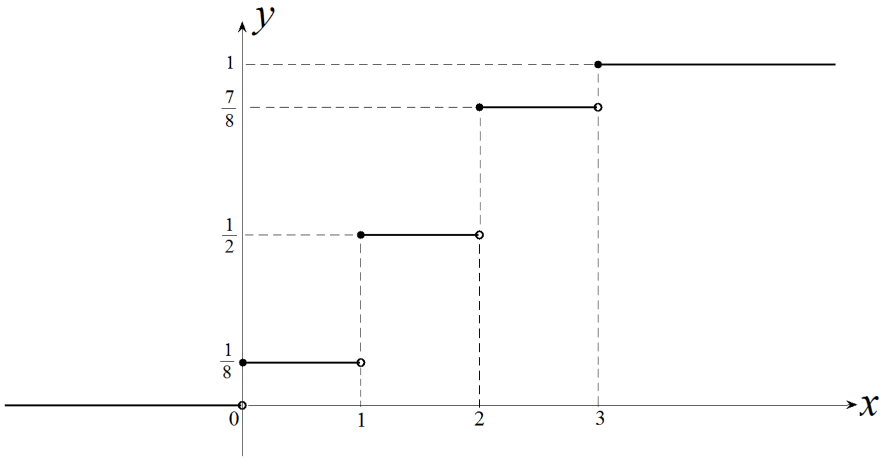

Figura 3.1: Gráfico da função distribuição de probabilidade F_X associada à variável aleatória X do exemplo.

Exemplo 3.3. *Seja T o tempo de transmissão de uma mensagem através de um sistema de comunicação. Considere que T obedece à seguinte lei de probabilidade:*

$$P[T > t] = e^{-\lambda t} \ , \ \lambda > 0 \ , \ t \geq 0.$$

Também, $P[T \leq t] = 0 \ , \ t < 0.$

(i) *Determine a expressão da F.D.P.* $F_T(t)$.

(ii) *Calcule* $P\left[\frac{1}{\lambda} < T \leq \frac{2}{\lambda}\right]$.

Solução:

(i) $F_T(t) = P[T \leq t] = \begin{cases} 0 \ , \ t < 0 \\ 1 - P[T > t] = 1 - e^{-\lambda t} \ , \ t \geq 0 \,. \end{cases}$

(ii)

$$\begin{aligned} P\left[\frac{1}{\lambda} < T \leq \frac{2}{\lambda}\right] &= F_T\left(\frac{2}{\lambda}\right) - F_T\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &= (1 - e^{-2}) - (1 - e^{-1}) \simeq 0,233. \end{aligned}$$

3.3 Tipos de variáveis aleatórias

3.3.1 Variável aleatória discreta

A F.D.P. de uma variável aleatória discreta pode ser escrita na forma

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{K} P[X = x_k]u(x - x_k) \tag{3.3.2}$$

sendo $K \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.4. *Uma fonte produz dois tipos de mensagens: M_1, com probabilidade p de ocorrer, e M_2, com probabilidade $1 - p$. Seja X a variável aleatória definida por*

$$X(\xi) = \begin{cases} 0 \ , \ \xi = M_1 \\ 1 \ , \ \xi = M_2 \, . \end{cases}$$

Encontre a expressão de $F_X(x)$.

Solução:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x < 0 \\ p \ , \ 0 \leq x < 1 \\ 1 \ , \ x \geq 1 \, . \end{cases}$$

Portanto,

$$F_X(x) = P[X = 0]u(x) + P[X = 1]u(x - 1) = pu(x) + (1 - p)u(x - 1) \, .$$

3.3.2 Variável aleatória contínua

Uma variável aleatória contínua X tem F.D.P. (F_X) contínua.

Exemplo 3.5. *Seja X a medida de tensão de ruído em um determinado ponto de um circuito com as seguintes probabilidades:*

$$P[\mid X \mid \leq V] = 1 \; e \, P[\mid X \mid > V] = 0.$$

Encontre a expressão da F.D.P. F_X da variável aleatória X, considerando que as probabilidades da variável X são uniformemente *distribuídas no intervalo $[-V, V]$.*

Solução:

Se $x < -V \Rightarrow P[X \leq x] = 0\,.$

Se $-V \leq x \leq V \Rightarrow P[X \leq x] = \displaystyle\int_{-V}^{x} \frac{1}{2V}\,dt = \frac{x+V}{2V}\,.$

Se $x > V \Rightarrow P[X \leq x] = \displaystyle\int_{-V}^{V} \frac{1}{2V}\,dt = 1\,.$

Assim,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0\ ,\ x < -V \\ \dfrac{x+V}{2V}\ ,\ -V \leq x \leq V \\ 1\ ,\ x > V\,. \end{cases}$$

Obs: Devemos observar que para variáveis aleatórias contínuas

$$P[X = x] = 0, \ \ \forall x.$$

3.3.3 Variável aleatória mista

Uma variável aleatória mista tem F.D.P. descontínua em um conjunto finito de pontos e é contínua em pelo menos um intervalo.

Exemplo 3.6. *Seja X a medida de tensão de ruído em um determinado ponto de um circuito, com as seguintes probabilidades:*

$P[X = -V] = P[X = V] = \dfrac{1}{8}$, $P[\mid X \mid < V] = \dfrac{3}{4}$ *e* $P[\mid X \mid > V] = 0.$

Escreva a expressão da F.D.P. (F_X) da variável aleatória X, considerando que a variável aleatória X é distribuída *uniformemente* em $(-V, V)$.

Solução:

Se $x < -V \Rightarrow F_X(x) = 0.$

Se $x = -V \Rightarrow F_X(x) = P[X \leq x] = \dfrac{1}{8}.$

Se $-V < x < V \Rightarrow F_X(x) = \dfrac{1}{8} + \displaystyle\int_{-V}^{x} \frac{3}{8V}\,dt = \frac{3}{8V}(x+V) + \frac{1}{8}.$

Se $x = V \Rightarrow F_X(x) = \dfrac{7}{8}.$

Se $x > V \Rightarrow F_X(x) = 1.$

Assim,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0\ ,\ x < -V \\ \dfrac{3}{8V}x + \dfrac{1}{2}\ ,\ -V \leq x < V \\ 7/8\ ,\ x = V \\ 1\ ,\ x \geq V\,. \end{cases}$$

OBS:

(i) Para v.a. contínua: $F_X(x^-) = F_X(x)$.

(ii) Para v.a. discreta: $F_X(x_i) - F_X(x_i^-) = P[X = x_i]$.

3.4 Função densidade de probabilidade

Seja X uma variável aleatória contínua com F.D.P. F_X.

Podemos escrever,

$$\begin{aligned} P[x < X \leq x + \Delta x] &= F_X(x + \Delta x) - F_X(x) \\ &= \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{\Delta x}\,\Delta x\,. \end{aligned}$$

Para Δx "pequeno", temos $P[x < X \leq x + \Delta x] \simeq F'_X(x)\,\Delta x$.

Logo, de modo informal, podemos dizer que a probabilidade de X estar próximo de x é $F'_X(x)\Delta x$.

Definição 3.3. *Definimos, então, a* densidade de probabilidade *da variável aleatória X, denotada por f_X, por:*

$$f_X(x) = F'_X(x)\,. \tag{3.4.3}$$

Também, de maneira informal, podemos interpretar a densidade de probabilidade da variável aleatória X como a *quantidade de probabilidade* por unidade de medida.

Propriedade 3.2.

(i) $f_X(x) \geq 0$.

(ii) $P[a \leq X \leq b] = \displaystyle\int_a^b f_X(x)dx$.

(iii) $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$

(iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1.$

Exemplo 3.7. *A f.d.p. de uma variável aleatória X é dada por*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \ , \ a \leq x \leq b \\ 0 \ , \ x < a \ e \ x > b \end{cases}$$

sendo $a\,,\, b \in \mathbb{R}$.
Escreva a expressão da F.D.P. F_X.

Solução:

Se $x < a \Rightarrow F_X(x) = 0\,.$

Se $a \leq x \leq b \Rightarrow F_X(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{1}{b-a}dt = \frac{x-a}{b-a}\,.$
Se $x > b \Rightarrow F_X(x) = 1\,.$

Assim,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \ , \ a \leq x \leq b \\ 1 \ , \ x > b\,. \end{cases}$$

Exemplo 3.8. *Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade f_X definida por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} A(x+5) \ , \ -5 \leq x \leq -4 \\ A \ , \ -4 < x < 4 \\ -A(x-5) \ , \ 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Sendo A uma constante positiva.

(i) *Faça um esboço do gráfico de f_X.*

(ii) *Determine o valor da constante A.*

(iii) *Determine a expressão da Função Distribuição de Probabilidade da variável aleatória X.*

(iv) *Faça um esboço do gráfico de F_X.*

(v) *Determine a probabilidade $P[X > 4]$.*

Solução:
(i) O esboço do gráfico de f_X está mostrado na Fig. 3.2.

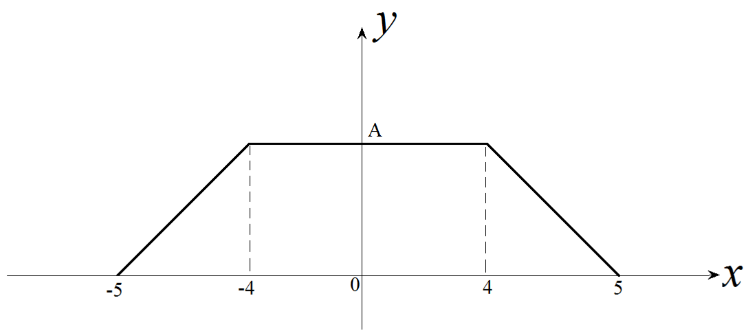

Figura 3.2: Gráfico da função densidade de probabilidade f_X associada à variável aleatória X do exemplo.

(ii) Temos que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \Leftrightarrow \frac{(10+8)\times A}{2} = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{9}$.
(iii) A expressão da F.D.P. da variável aleatória X será dada por:
Se $x < -5 \Leftrightarrow F_X(x) = 0$
Se $-5 \leq x < -4 \Leftrightarrow F_X(x) = \int_{-5}^{x} \frac{1}{9}(t+5)dt = \frac{x^2}{18} + \frac{5x}{9} + \frac{25}{18}$
Se $-4 \leq x < 4 \Leftrightarrow F_X(x) = \frac{1}{18} + \int_{-4}^{x} \frac{1}{9}dt = \frac{1}{18} + \frac{x+4}{9}$
Se $4 \leq x < 5 \Leftrightarrow F_X(x) = \frac{1}{18} + \frac{8}{9} + \int_{4}^{x} -\frac{1}{9}(t-5)dt = -\frac{x^2}{18} + \frac{5x}{9} - \frac{7}{18}$
Se $x \geq 5 \Leftrightarrow F_X(x) = 1$
(iv) A Fig. 3.3 mostra um esboço do gráfico de F_X.
(v) Temos que $P[X > 4] = 1 - P[X \leq 4] = 1 - F_X(4) = 1 - \frac{17}{18} = \frac{1}{18}$.

OBS:

Quando F_X não é contínua, podemos estender a definição de f.d.p. usando a distribuição delta de Dirac, denotada por δ.

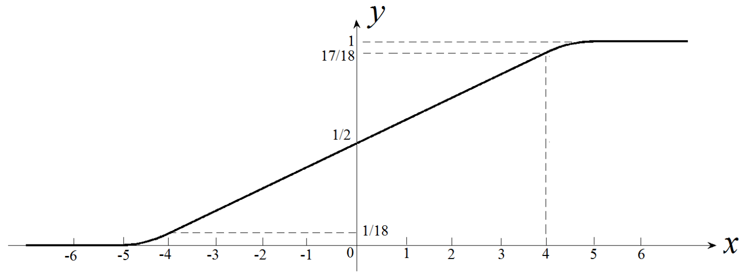

Figura 3.3: Gráfico da função distribuição de probabilidade F_X associada à variável aleatória X do exemplo.

Usamos o fato de que, no sentido das distribuições, $\dfrac{d}{dx}[u(x)] = \delta(x)$, sendo u a distribuição degrau unitário e δ a distribuição delta de Dirac.

Assim, se X é uma variável aleatória discreta, temos

$$F_X(x) = \sum_k P[X = x_k]u(x - x_k)$$

e

$$f_X(x) = \sum_k P[X = x_k]\delta(x - x_k).$$

3.5 Exemplos de variáveis aleatórias

3.5.1 Variáveis aleatórias discretas

Variável aleatória de Bernouilli

Seja A um evento relacionado aos resultados de algum experimento aleatório. A função indicatriz do evento A, denotada por I_A, é definida por:

$$I_A(\xi) = \begin{cases} 0\ , & \text{se } \xi \notin A \\ 1\ , & \text{se } \xi \in A\,. \end{cases}$$

Definimos uma variável aleatória $X = I_A$ e chamamos essa variável aleatória de variável aleatória de Bernouilli. Observamos que $S_X = \{0, 1\}$.

Escolhendo, por exemplo, $P[X = 0] = p$ e $P[X = 1] = 1 - p$, temos

$$F_X(x) = pu(x) + (1 - p)u(x - 1) \tag{3.5.4}$$

e

$$f_X(x) = p\delta(x) + (1-p)\delta(x-1). \tag{3.5.5}$$

Variável aleatória binomial

Considere que um experimento aleatório seja repetido n vezes. Considere A um evento, ξ_j o resultado para cada repetição do experimento; isto é, $j = 1, \ldots, n$. Seja X o número de vezes que $\xi_j \in A$. Portanto, X é uma variável aleatória com $S_X = \{0, 1, \ldots, n\}$.

Considerando I_j a função indicatriz para o evento A na j-ésima tentativa, temos $X = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$.

A variável aleatória X é chamada de variável aleatória binomial.

Pelo Teorema Binominal, sabemos que

$P[X = k] = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, \ldots, n.$,

sendo $P[X = k]$ a probabilidade de obter k sucessos em n tentativas.

Assim,

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k (1-p)^{n-k} u(x-k) \tag{3.5.6}$$

e

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k (1-p)^{n-k} \delta(x-k). \tag{3.5.7}$$

Essa variável aleatória surge em aplicações onde há apenas dois tipos de resultados para cada experimento, por exemplo, cara/coroa, certo/errado, bom/defeituoso, etc.

Variável aleatória geométrica

Seja X a variável aleatória correspondente ao número de tentativas de um experimento até a ocorrência de um sucesso. A variável aleatória X é chamada *variável aleatória geométrica* e $S_X = \{1, 2, \ldots\}$.

Temos, $P[X = k] = (1-p)^{k-1} p$, $k = 1, 2, \ldots$ sendo p a probabilidade de sucesso em cada tentativa (chamada de tentativa de Bernouilli).

Assim,

$$F_X(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p u(x-k) \tag{3.5.8}$$

e

$$f_X(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p \delta(x-k). \tag{3.5.9}$$

Variável aleatória de Poisson

A variável aleatória de Poisson X é definida por

$P[X = k] = \dfrac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, sendo α uma constante.

Assim,

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} u(x-k) \tag{3.5.10}$$

e

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} \delta(x-k). \tag{3.5.11}$$

OBS:

Se n é grande, p pequeno e $\alpha = np$, podemos usar a aproximação

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} \simeq \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}.$$

3.5.2 Variáveis aleatórias contínuas

Variável aleatória uniforme

A f.d.p. de uma variável aleatória uniforme é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \ , \ a \leq x \leq b \\ 0 \ , \ x < a \text{ ou } x > b \end{cases} \tag{3.5.12}$$

sendo $a, b \in \mathbb{R}$ e

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \ , \ a \leq x \leq b \\ 1 \ , \ x > b\,. \end{cases} \tag{3.5.13}$$

Essa variável aleatória aparece quanto todos os valores na reta real, no intervalo $[a, b]$, são igualmente prováveis.

As Figs. 3.4 e 3.5 mostram os esboços dos gráficos de f_X e F_X, respectivamente.

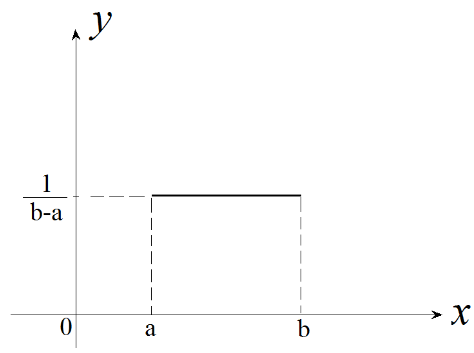

Figura 3.4: Gráfico da função densidade de probabilidade f_X associada à variável aleatória uniforme X.

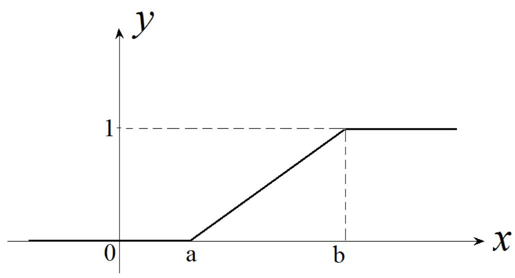

Figura 3.5: Gráfico da função distribuição de probabilidade F_X associada à variável aleatória uniforme X.

Variável aleatória exponencial

A f.d.p. da variável aleatória exponencial é definida por

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \ , \ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \ , \ x \geq 0 \, . \end{cases} \tag{3.5.14}$$

Sendo λ um número real.

As Figs. 3.6 e 3.7 mostram os esboços dos gráficos de f_X e F_X, respectivamente.

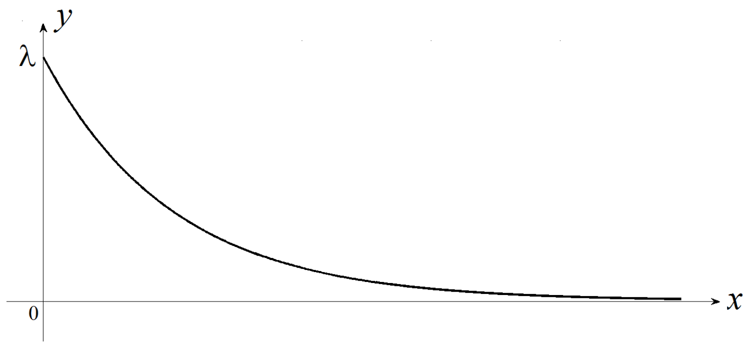

Figura 3.6: Gráfico da função densidade de probabilidade f_X associada à variável aleatória exponencial X.

Variável aleatória gaussiana

A f.d.p. de uma variável aleatória gaussiana é definida por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \ , \ x \in \mathbb{R} \, , \tag{3.5.15}$$

sendo m e σ números reais.

Consideremos a função Φ definida por:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \, . \tag{3.5.16}$$

Observamos que a função Φ é a F.D.P. da variável aleatória gaussiana para $m = 0$ e $\sigma = 1$.

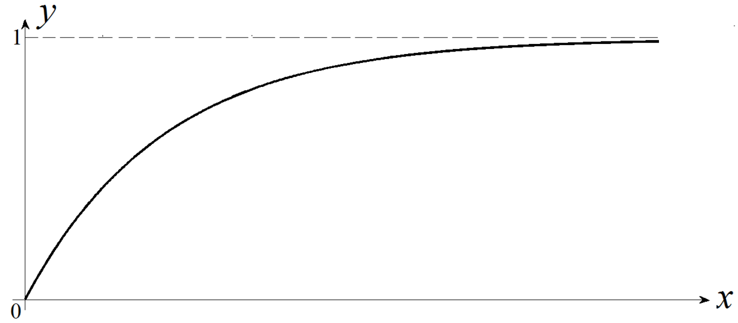

Figura 3.7: Gráfico da função distribuição de probabilidade F_X associada à variável aleatória exponencial X.

Assim, a F.D.P. da variável aleatória gaussiana X é dada por

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) . \tag{3.5.17}$$

Definindo, ainda, a função *erf* por

$$erf(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \tag{3.5.18}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \,. \end{aligned} \tag{3.5.19}$$

A Fig. 3.8 mostra o esboço do gráfico da função erf.
Devemos observar que a função erf é ímpar; isto é,

$$erf(x) = -erf(-x).$$

Portanto,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + erf(x)$$

e

$$\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} + erf\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

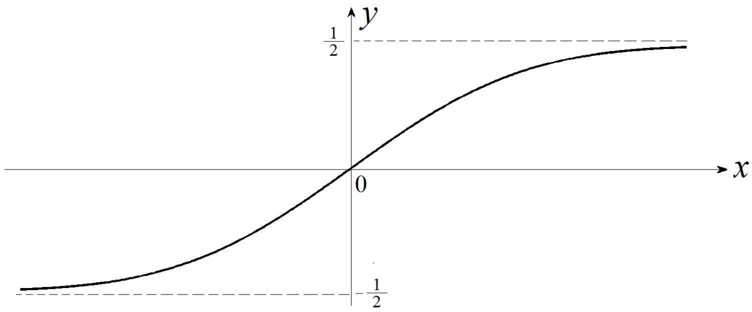

Figura 3.8: Esboço do gráfico da função erf.

Resumindo, se X é a variável aleatória gaussiana de f.d.p. f_X definida por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \,, \; x \in \mathbb{R} \,, \tag{3.5.20}$$

então sua F.D.P. F_X é dada por

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + erf\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \,. \tag{3.5.21}$$

As Figs. 3.9 e 3.10 mostram os esboços dos gráficos de f_X e F_X, respectivamente.

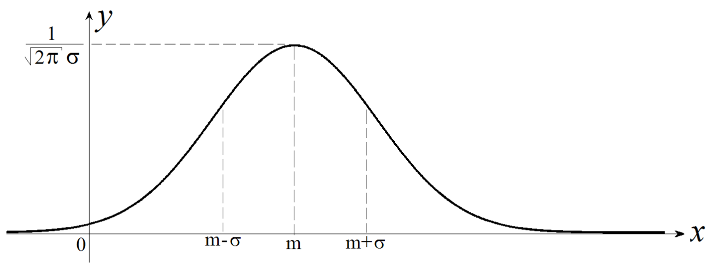

Figura 3.9: Gráfico da função densidade de probabilidade f_X associada à variável aleatória gaussiana X.

Há várias outras variáveis aleatórias igualmente importantes, dependendo da área de aplicação, como, por exemplo, as variáveis aleatórias de Rayleigh, RICE, Nakagami, Gamma e outras. E, ainda, variáveis aleatórias provenientes de variáveis

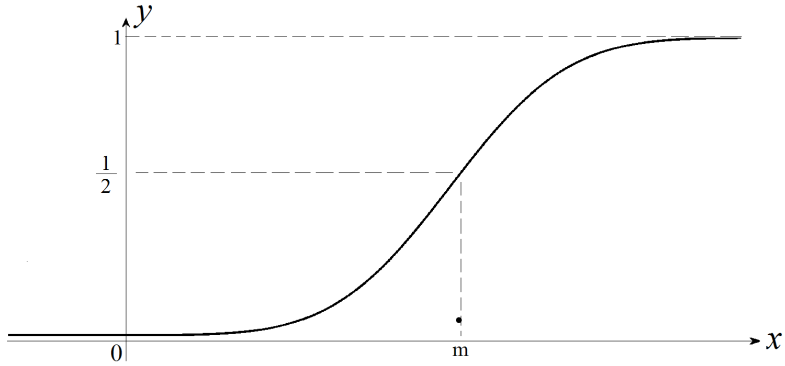

Figura 3.10: Gráfico da função distribuição de probabilidade F_X associada à variável aleatória gaussiana X.

aleatórias conhecidas, como a lognormal e a logRayleigh. Discutiremos algumas dessas variáveis aleatórias nos exercícios e nos capítulos seguintes.

3.6 Funções de variáveis aleatórias

Seja X uma variável aleatória e seja g uma função real de variável real. A função definida por $Y = g(X)$ é também uma variável aleatória. Queremos então encontrar a função densidade de probabilidade de Y, conhecida a função densidade de probabilidade de X.

Consideremos $f_Y(y) = \dfrac{d}{dy}F_Y(y) = \dfrac{d}{dy}P[Y \leq y]$.

Exemplo 3.9. *Seja Y uma variável aleatória definida por $Y = aX + b$ sendo $a\,,\, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e suponha que X tenha F.D.P. F_X. Encontre expressões para F_Y e para f_Y.*

Solução:

Temos que,

$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[aX + b \leq y] = P[aX \leq y - b]$.

Se $a > 0 \Rightarrow F_Y(y) = P\left[X \leq \dfrac{y-b}{a}\right] = F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$.

$$\begin{aligned}\text{Se}\, a<0 \Rightarrow F_Y(y) &= P\left[X \geq \frac{b-y}{-a}\right] \\ &= P\left[X \geq \frac{y-b}{a}\right] = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right).\end{aligned}$$

Assim,

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & ,\ a>0 \\ 1-F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & ,\ a<0\,. \end{cases}$$

E, $f_Y = \dfrac{dF}{dy} = \dfrac{dF}{du}\dfrac{du}{dy}$ sendo $u = \dfrac{y-b}{a}$.

Logo,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & ,\ a>0 \\ \dfrac{1}{-a} f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & ,\ a<0 \end{cases}$$

De forma compacta, $f_Y(y) = \dfrac{1}{\mid a \mid} f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$.

Exemplo 3.10. *Considere a variável aleatória $Y = X^2$ sendo X uma variável aleatória contínua. Ache a f.d.p. e a F.D.P. de Y, em termos da f.d.p. e da F.D.P. de X.*

Solução:

Temos,

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[X^2 \leq y] = P[-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}]\,.$$

Logo,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 \ ,\ y<0 \\ \\ F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \ y \geq 0 \end{cases}$$

Assim, $f_Y(y) = \dfrac{dF_Y}{dy} = \dfrac{dF}{du}\dfrac{du}{dy}$. E,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 \ ,\ y<0 \\ \dfrac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \dfrac{f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \ ,\ y>0\,. \end{cases}$$

Exemplo 3.11. *Seja $Y = cosX$ sendo X uma v.a. uniforme no intervalo $[0, 2\pi]$. Ache a f.d.p. e a F.D.P. de Y.*

Solução:
Temos que, $F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[cosX \leq y]$.
Se $cosX \leq y \Rightarrow arccos\, y \leq X \leq 2\pi - arccosy$.
Assim, $P[cosX \leq y] = P[X \leq 2\pi - arccosy] - P[X \leq arccosy]$.
Também,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(2\pi - arccosy)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - f_X(arccosy)\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}\,,\ -1 < y < 1\,. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0\ ,\ y < -1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{arcseny}{\pi}\ ,\ \ -1 \leq y \leq 1 \\ 1\ ,\ y > 1\,. \end{cases}$$

3.7 Exercícios

(1) Considere o lançamento de dois dados e a experiência cujo resultado consiste na soma dos números obtidos com os dois dados. Defina esta soma como uma variável aleatória X.

(i) Encontre a expressão da Função distribuição de probabilidade da variável aleatória X.

(ii) Calcule a probabilide de X assumir um valor no intervalo $[7, 9]$.

(2) Suponha que um ponto (X, Y) seja selecionado ao acaso do interior de um círculo unitário e considere a variável aleatória R dada pela distância do ponto à origem.

(i) Escreva a expressão da Função distribuição de probabilidade da variável aleatória R.

(ii) Escreva a expressão da função densidade de probabilidade da variável aleatória R.

(3) Seja X uma variável aleatória e g uma função bijetora e diferenciável tal que $Y = g(X)$. Considere f_X e f_Y as funções densidade de probabilidade de X e Y, respectivamente. Prove que $f_X(x)dx = f_Y(y)dy$.

(4) Os valores das resistências de um lote de resistores seguem uma distribuição gaussiana com $m = 1000\,\Omega$ e $\sigma = 200\,\Omega$. Qual é a probabilidade de ao escolher um resistor ao acaso sua resistência estar entre 900Ω e 1100Ω?

Capítulo 4

Vetores de Variáveis Aleatórias

4.1 Introdução

Definição 4.1. *Um vetor de variáveis aleatórias (ou um vetor aleatório) $\vec{X}$ é uma função (vetorial) que associa a cada resultado ξ do espaço amostral S um vetor $\vec{X}(\xi)$.*

Exemplo 4.1. *Considere o experimento de selecionar o nome de um estudante de uma urna e seja ξ o resultado deste experimento. Denotemos*

$A(\xi)$ = altura do estudante; $P(\xi)$ = peso do estudante; $I(\xi)$ = idade do estudante.

O vetor $\vec{X} = (A(\xi), P(\xi), I(\xi))$ é, então, um vetor de variáveis aleatórias e, portanto, um vetor aleatório.

Exemplo 4.2. *Considere ξ o registro de tensão de ruído em um ponto de um circuito, durante um determinado intervalo de tempo. Portanto, $\xi = f_\xi(t)$. Consideremos a variável aleatória $X_k = f_\xi(kT)$, sendo $k = 1, 2, \ldots, N$. O vetor $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ é, portanto, um vetor aleatório.*

4.2 Eventos associados a vetores aleatórios

O conjunto denotado por $\{\vec{X} \leq \vec{x}\}$ representa, de forma compacta, o conjunto

$$\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n\}.$$

Esse conjunto é um evento para todo $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

4.3 Independência

Dizemos que as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independentes se

$$P[X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n] = P[X_1 \in A_1] \ldots P[X_n \in A_n]$$

onde A_k é um evento que envolve X_k somente.

4.4 Função distribuição de probabilidade conjunta

Definição 4.2. *A Função Distribuição de Probabilidade associada a um vetor aleatório $\vec{X}$, chamada de F.D.P. conjunta, é definida por:*

$$\begin{aligned} F_{\vec{X}}: \quad & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \vec{x} \longrightarrow F_{\vec{X}}(\vec{x}) = P[\vec{X} \leq \vec{x}] \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

sendo $F_{\vec{X}}(\vec{x}) = P[\vec{X} \leq \vec{x}] = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n]$.
Podemos representar $F_{\vec{X}}(\vec{x})$ por $F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Consideremos o caso particular, bidimensional, com a F.D.P. conjunta das variáveis aleatórias X e Y, F_{XY}, dada por

$$F_{XY}(x, y) = P[X \leq x \,\mathrm{e}\, Y \leq y].$$

Podemos escrever $F_{XY}(x, y) = P[X \leq x \cap Y \leq y]$.

Exemplo 4.3. *Bits são transmitidos através de um canal de comunicações com probabilidades de erro dadas de acordo com o esquema a seguir:*

(i) Se o bit 1 for enviado, a probabilidade de o bit 1 ser recebido é p e, consequentemente, a probabilidade de o bit 0 ser recebido é $1 - p$.
(ii) Se o bit 0 for enviado, a probabilidade de o bit 0 ser recebido é p e, consequentemente, a probabilidae de o bit 1 ser recebido é $1 - p$.

Consideremos a variável aleatória X representando os bits enviados e a variável aleatória Y representando os bits recebidos. Tomemos, $P[X = 0] = P[X = 1] = \dfrac{1}{2}$.

Temos,

$$P[Y = 0|X = 0] = p\,,$$

$$P[Y = 1|X = 0] = 1 - p\,,$$

$$P[Y = 0|X = 1] = 1 - p\,,$$

$$P[Y = 1|X = 1] = p\,.$$

Lembremos que, pela regra de Bayes, $P[A \cap B] = P[A|B]P[B]$.
Assim,

$$P[Y=0 \text{ e } X=0] = P[Y=0|X=0]P[X=0] = \frac{p}{2},$$

$$P[Y=1 \text{ e } X=0] = P[Y=1|X=0]P[X=0] = \frac{1-p}{2},$$

$$P[X=1 \text{ e } Y=0] = P[Y=0|X=1]P[X=1] = \frac{1-p}{2},$$

$$P[Y=1 \text{ e } X=1] = P[Y=1|X=1]P[X=1] = \frac{p}{2}.$$

A F.D.P. F_{XY} será, então, definida por:

Se $x > 1$ e $y > 1 \Longrightarrow F_{XY}(x,y) = 1$.

Se $x < 0$ e $y \in \mathbb{R} \Longrightarrow F_{XY}(x,y) = 0$.

Se $y < 0$ e $y \in \mathbb{R} \Longrightarrow F_{XY}(x,y) = 0$.

Se $x > 1$ e $y < 1 \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} F_{XY}(x,y) &= P[X=1 \cap Y=0] + P[X=0 \cap Y=0] \\ &= \frac{1-p}{2} + \frac{p}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}.$$

Se $x > 1$ e $y \geq 1 \Longrightarrow F_{XY}(x,y) = 1$.

Se $x < 1$ e $y \geq 1 \Longrightarrow F_{XY}(x,y) = \frac{1}{2}$.

Se $x < 1$ e $y < 1 \Longrightarrow F_{XY}(x,y) = \frac{p}{2}$.

Propriedade 4.1. *Consideremos o caso particular para a F.D.P. conjunta de duas variáveis aleatórias, digamos X e Y. Temos,*

(i) F_{XY} *é não-decrescente; isto é,*
se $x_1 \geq x_2$ *e* $y_1 \geq y_2 \Rightarrow F_{XY}(x_1,y_1) \geq F_{XY}(x_2,y_2)$.

(ii) $F_{XY}(-\infty, y_1) = F_{XY}(x_1, -\infty) = 0$.

(iii) $F_{XY}(+\infty, +\infty) = 1$.

(iv) $F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) = P[X \leq x, y < +\infty] = P[X \leq x]$.

(v) $F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y) = P[Y \leq y]$.

4.5 Função densidade de probabilidade conjunta

Definição 4.3. *Seja $\vec{X}$ um vetor aleatório de dimensão n com F.D.P. $F_{\vec{X}}$ diferenciável. Definimos a f.d.p. conjunta $f_{\vec{X}}$ do vetor aleatório $\vec{X}$ por*

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)\,.$$

4.5.1 Propriedades da f.d.p. conjunta

Consideremos, primeiro, o caso particular de um vetor aleatório bidimensional, digamos de coordenadas X e Y. Temos, então, os seguintes resultados:

Propriedade 4.2.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = 1\,.$

(ii) $\displaystyle P[(X,Y) \in \Omega] = \int \int_{\Omega} f_{XY}(x,y)dxdy\,.$

(iii) $\displaystyle F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)dvdu\,.$

(iv) $\displaystyle f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}\,.$

(v) $\displaystyle f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy\,.$

(vi) $\displaystyle f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx\,.$

OBS: f_X e f_Y são chamadas, nesse caso, de funções densidade de probabilidade marginais.

Generalizando, para um vetor com n coordenadas, temos:

Propriedade 4.3.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n = 1\,.$

(ii) $\displaystyle P[\vec{X} \in \Omega] = \int_{\Omega} f_{\vec{X}}(\vec{x})d\vec{x}\,.$

(iii) $F_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1 \ldots X_n}(u_1, \ldots, u_n) du_n \ldots du_1 \, .$

(iv)

$$f_{X_i}(x_i) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1 \ldots X_n}(u_1, \ldots, u_n) du_1 \ldots du_n$$

**consideramos $n-1$ integrais.*

4.5.2 Caso de vetor aleatório discreto

Consideremos um vetor aleatório discreto bidimensional de coordenadas X e Y. Temos,

Propriedade 4.4.

(i) $P[(X, Y) \in \Omega] = \sum \sum f_{XY}(x_j, y_k) \; , \; (x_j, y_k) \in \Omega$

(ii) $\sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f_{XY}(x_j, y_k) = 1$

(iii) $f_X(x_j) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_{XY}(x_j, y_k)$

(iv) $f_Y(y_k) = \sum_{j=1}^{+\infty} f_{XY}(x_j, y_k)$

Exemplo 4.4. *Um trem chega a uma estação e para por cinco minutos antes de prosseguir. O instante de chegada do trem, contado a partir das $9\,h$, em minuto, pode ser modelado pela v.a. T, com f.d.p. $f_T(t) = 0{,}15e^{-0{,}15t}u(t)$.*

(i) *Calcule a probabilidade de o trem chegar na estação até as $9:20h$.*

(ii) *Determine o maior atraso que um usuário pode ter de modo que a probabilidade de ele pegar o trem seja maior que $0{,}5$.*

(iii) *Considere que o instante de chegada de um estudante à estação (contado a partir das $9h$, em minuto) é uma v.a. X e que a f.d.p. conjunta de X e T é:*

$$f_{XT}(x, t) = 0{,}06e^{-(0{,}15t + 0{,}4x)}u(t)u(x) \, .$$

Calcule a probabilidade de o estudante pegar o trem.

Solução:

(i) $P[T < 20] = \int_{-\infty}^{20} f_T(t)dt = \int_0^{20} 0,15e^{-0,15t}dt \simeq 0,95\,.$

(ii) $P[T > a - 5] = \int_{a-5}^{+\infty} f_T(t)dt > 0,5 \Longrightarrow a < 9,621\,.$

(iii)

$$\begin{aligned} P[T > X - 5] &= P[X < T + 5] = P[(X,T) \in A] \\ &= \int\int_A f_{XY}(x,y)dxdy\,. \end{aligned}$$

Temos,

$$P[(X,T) \in A] = \int_0^{+\infty}\int_0^{t+5} 0,06e^{-(0,15t+0,4x)}dxdt \simeq 0,946.$$

Exemplo 4.5. *O sinal recebido em uma transmissão via rádio pode ser modelado por*

$$r(t) = Acos(\omega_0 t + \Theta)\ ,\ A > 0 \quad ou \quad r(t) = Xcos\omega_0 t + Ysen\omega_0 t$$

sendo X e Y variáveis aleatórias com f.d.p. conjunta f_{XY} definida por

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}\,.$$

(i) *Determine a probabilidade de a amplitude A ser maior que* 1.

(ii) *Encontre a expressão de $f_X(x)$.*

Solução:

(i)

$$\begin{aligned} P[A > 1] &= [\sqrt{X^2+Y^2} > 1] = P[X^2 + Y^2 > 1] \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rdrd\theta = \ldots = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}\,. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+v^2}{2\sigma^2}}dy \\ &= \ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,. \end{aligned}$$

4.6 Funções distribuição e densidade condicionais

Definição 4.4. *A função distribuição de probabilidade de uma v.a. X, condicionada à ocorrência de um evento M é definida por*

$$F_{X|M}(x) = P[X \leq x|M] = \frac{P[X \leq x \cap M]}{P[M]} \;;\; P[M] \neq 0\,. \tag{4.6.2}$$

Se $F_{X|M}$ é diferenciável $\Longrightarrow f_{X|M}(x) = \frac{d}{dx}F_{X|M}(x)$.
O evento M também poderia ser descrito em termos da v.a. Y. Nesse caso, $M = \{Y \leq y\} = \{\xi \in \Omega | Y(\xi) \leq y\}$.

Assim, $F_{X|Y\leq y}(x) = \dfrac{F_{XY}(x,y)}{F_Y(y)}$.

Pois,
$F_{X|Y\leq y}(x) = P[X \leq x|Y \leq y] = \dfrac{P[X \leq x \cap Y \leq y]}{P[Y \leq y]}$.

Também, $f_{X|Y\leq y}(x) = \dfrac{\frac{d}{dx}F_{XY}(x,y)}{F_Y(y)}$.
Poderíamos tentar definir

$$F_{X|Y=y}(x) = \frac{P[X \leq x \cap Y = y]}{P[Y = y]}.$$

Mas, $P[Y = y] = 0$.

Dessa forma, definimos $F_{X|Y=y}$ por um processo de limite. Com isso, chegamos ao resultado:

$$F_{X|Y=y}(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(u,y)du}{f_Y(y)} \tag{4.6.3}$$

e

$$f_{X|Y}(x) = f_{x|Y=y}(x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}\,. \tag{4.6.4}$$

Analogamente,

$$f_{Y|X}(y) = f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}\,. \tag{4.6.5}$$

Resumo:

- $F_{X|Y\leq y}(x) = \dfrac{F_{XY}(x,y)}{F_Y(y)}$.

- $F_{X|Y}(x) = F_{X|Y=y}(x) = \dfrac{\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(u,y)\,du}{f_Y(y)}\,.$

- $f_{X|Y}(x) = f_{X|Y=y}(x) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}\,.$

- $F_{Y|X}(y) = F_{Y|X=x}(y) = \dfrac{\displaystyle\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,v)\,dv}{f_X(x)}\,.$

- $f_{Y|X}(x) = f_{Y|X=x}(y) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}\,.$

4.6.1 Independência entre duas variáveis aleatórias

Duas variáveis aleatórias X e Y são independentes se qualquer evento A_1 definido em termos de X é independente de qualquer evento A_2 definido em termos de Y. Isto é, $P[X \in A_1, Y \in A_2] = P[X \in A_1]P[Y \in A_2]$.

Podemos mostrar que as variáveis aleatórias X e Y são independentes se, e só se,

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \tag{4.6.6}$$

para todos x e y.
Se F_X e F_Y são diferenciáveis, então $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$.
Observemos que, neste caso, $f_{X|Y}(x) = f_X(x)$ e $f_{Y|X}(x) = f_Y(y)$.

Demonstração:
Os eventos A e B são independentes se $P[AB] = P[A]P[B]$.
Temos,
$F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ ou
$P[\{X \le x\} \cap \{Y \le y\}] = P[\{X \le x\}]P[Y \le y]$.
E,

$$\begin{aligned} f_{XY}(x,y) &= \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 [F_X(x)F_Y(y)]}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}F_X(x)\frac{\partial}{\partial y}F_Y(y) = f_X(x)f_Y(y)\,. \end{aligned}$$

Também,
$F_X(X|Y \le y) = \dfrac{F_{XY}(x,y)}{F_Y(y)} = F_X(x)\,.$
Consequentemente, $f_X(x|Y \le y) = f_X(x)$ e $f_Y(y|X \le x) = f_Y(y)\,.$

■

Generalizando, as variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ são independentes quando

$$F_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i). \tag{4.6.7}$$

E, no caso das funções F_{X_i} serem diferenciáveis, temos

$$f_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)\,. \tag{4.6.8}$$

Exemplo 4.6. *Considere X e Y duas variáveis aleatórias com f.d.p. conjunta f_{XY} dada por:*

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}}\,.$$

Determine:

(i) $f_X(x)$ *e* $f_Y(y)$. *(f.d.p.'s marginais)*

(ii) $f_{Y|X}(y)$, *concluindo sobre a independência das variáveis aleatórias X e Y.*

Solução:

(i)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{=1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} f_y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}_{=1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\,. \end{aligned}$$

(ii) Observamos, do item **(i)**, que $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Portanto,

$$f_{Y|X}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = f_Y(y)\,.$$

Concluímos que X e Y são variáveis aleatórias independentes.

Exemplo 4.7. *Um painel controla as durações X e Y de duas ligações telefônicas. Essas durações podem ser modeladas por duas variáveis aleatórias com f.d.p. conjunta*

$$f_{XY}(x,y) = 10e^{-(2x+5y)}u(x)u(y)\,.$$

O painel indica o número de ligações $(0, 1$ *ou* $2)$ *cuja duração ultrapassa o valor* $T = 0,5$*. Deste modo, a indicação do painel pode ser modelada como uma variável aleatória Z definida da seguinte forma:*

- $Z = 0$*, se nenhuma das ligações tem duração maior que T.*
- $Z = 1$*, se apenas uma das ligações tem duração maior que T.*
- $Z = 2$*, se as duas ligações têm duração maior que T.*

(i) *Determine $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ e conclua sobre a independência das variáveis aleatórias.*
(ii) *Determine a expressão de $f_Z(z)$ e de $F_Z(z)$. Esboce os gráficos de f_Z e de F_Z.*
(iii) *Dado que apenas uma das chamadas teve duração maior que T, determine a probabilidade de que a duração X da primeira chamada exceda T.*

(iv) *Dado que ambas as chamadas tiveram duração superior a T, determine a probabilidade de que a duração Y da segunda chamada exceda o valor* 1.

Solução:
(i) $f_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,v)dv = 2e^{-2x}$.
Analogamente, $f_Y(y) = 5e^{-5y}$.
Assim, $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$.
Logo, X e Y são variáveis aleatórias independentes.
(ii)

$$\begin{aligned} P[Z=0] &= P[X<T, Y<T] \\ &= \int_{-\infty}^{0,5}\int_{-\infty}^{0,5} f_{XY}(x,y)dxdy \simeq 0,58\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[Z=2] &= P[X>T, Y>T] \\ &= \int_{0,5}^{+\infty}\int_{0,5}^{+\infty} 2e^{-2x}5e^{-5y}dxdy = 0,03\,, \end{aligned}$$

e

$$P[Z=1] = 1 - P[Z=0] - P[Z=2] = 0,39\,.$$

Assim,
$F_Z(z) = 0,58u(z) + 0,39u(z-1) + 0,03u(z-2)$ e

$f_Z(z) = 0,58\delta(z) + 0,39\delta(z-1) + 0,03\delta(z-2)\,.$

(iii)

$$\begin{aligned} P[X>0,5|Z=1] &= \frac{P[X>0,5 \text{ e } Z=1]}{P[Z=1]} \\ &= \frac{P[X>0,5 \text{ e } Y<0,5]}{P[Z=1]} = 0,87\,. \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} P[Y>1|Z=2] &= \frac{P[Y>1 \text{ e } Z=2]}{P[Z=2]} \\ &= \frac{P[Y>1 \text{ e } X>0,5]}{P[Z=2]} = 0,37\,. \end{aligned}$$

4.7 Exercícios

(1) Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade conjunta f_{XY} dada por

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} A(x+y)\ ,\ 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1 \\ 0\ ,\ \text{caso contrário} \end{cases}$$

sendo A uma constante.

(i) Determine o valor de A.

(ii) Encontre as expressões das funções densidade de probabilidade marginais f_X e f_Y.

(2) Considere X e Y variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade conjunta f_{XY} dada por

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \ , \ x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ y > 0 \\ 0 \ , \ \text{caso contrário} \end{cases}$$

(i) Encontre as expressões das funções densidade de probabilidade marginais f_X e f_Y .

(ii) Calcule $P[X > Y]$.

(3) Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$.

(i) Determine $P[X + Y \leq 1]$.

(ii) Considere a variável aleatória $Z = X + Y$. Determine a função distribuição de probabilidade F_Z, da variável aleatória Z.

(4) Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com funções densidade de probabilidade dadas, respectivamente, por:

$$f_X(x) = e^{-x}u(x) \text{ e } f_Y(y) = e^{-y}u(y) \ .$$

Determine a expressão da função densidade de probabilidade da variável aleatória $Z = \dfrac{X}{Y}$.

Capítulo 5

Momentos de Variáveis Aleatórias

5.1 Valor esperado (ou média) de uma variável aleatória

Seja X uma v.a. discreta que assume os valores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Suponha que a experiência associada a esta v.a. tenha sido realizada N vezes e que $n(x_i)$ represente o número de vezes em que o evento $\{X = x_i\}$ ocorreu, sendo $i = 1, \ldots, k$.

De acordo com o conceito de frequência relativa, temos

$$P[X = x_i] = \frac{n(x_i)}{N} \ , \ \ i = 1, \ldots, k\,.$$

Assim, a média aritmética dos N resultados da experiência é dada por

$$m_X = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{n(x_i)}{N}\,. \tag{5.1.1}$$

Definição 5.1. *O* valor esperado *ou* média *ou* esperança matemática *da variável aleatória X é então definido por*

$$E[X] = \sum_{i=1}^{k} x_i P[X = x_i]\,. \tag{5.1.2}$$

Definição 5.2. *No caso de variáveis aleatórias contínuas, definimos*

$$m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \,. \tag{5.1.3}$$

Exemplo 5.1. *Seja X uma v.a. distribuída uniformemente no intervalo $[a, b]$. Calcule m_X.*

Solução:

$$m_X = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

Exemplo 5.2. *Seja X uma v.a. com f.d.p. gaussiana*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}} \,.$$

Calcule m_X.
Solução:

$$m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}} dx = \ldots = m \,.$$

5.2 Variância

Definição 5.3. *A variância da variável aleatória discreta X é definida por*

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - m_X)^2 \overbrace{\frac{n(x_i)}{N}}^{P[X=x_i]} \,. \tag{5.2.4}$$

Observamos que a variância de uma v.a. nada mais é do que a média aritmética dos quadrados dos desvios $(x_i - m_X)$, em relação à média, dos N resultados da experiência. Isto mostra que a variância de uma v.a. mede sua dispersão em torno da média.

Definição 5.4. *Se X é uma v.a. contínua então*

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx \,. \tag{5.2.5}$$

Exemplo 5.3. *Calcule a variância de uma v.a. X uniformemente distribuída no intervalo $[a, b]$.*

Solução:

$$\sigma_X^2 = \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}dx = \frac{(b-a)^2}{12}\,.$$

Obs: Se considerarmos duas variáveis aleatórias uniformes, a de menor variância terá sua f.d.p. mais concentrada em torno de sua média.

Exemplo 5.4. *Calcule a variância de uma v.a. gaussiana*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Solução:

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \ldots = \sigma^2\,.$$

5.3 Momentos

5.3.1 Momentos de ordem k

Definição 5.5. *O momento de ordem k de uma v.a. contínua X é definido por*

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)dx\,. \tag{5.3.6}$$

Definição 5.6. *Se X é uma v.a. discreta então*

$$E[X^k] = \sum_{i=1}^{N} x_i^k P[X = x_i].$$

OBS: Se $k = 0 \Rightarrow E[X^o] = 1$ e se $k = 1 \Rightarrow E[X] = m_X$.

5.3.2 Momento central de ordem k

Definição 5.7. *O momento central de ordem k, de uma v.a. X, é definido por*

$$E[(X - m_X)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^k f_X(x)dx\,. \tag{5.3.7}$$

5.3.3 Valor esperado de um vetor aleatório e matriz covariância

Definição 5.8. *O valor esperado de um vetor aleatório* $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *é definido por*

$$E[\vec{X}] = m_{\vec{X}} = (E[X_1], E[X_2], \ldots, E[X_n]) \, . \tag{5.3.8}$$

Definição 5.9. *A matriz covariância* K_X *de um vetor aleatório* $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *é definida por*

$$K_X = E[(\vec{X} - m_{\vec{X}})(\vec{X} - m_{\vec{X}})^T] \, . \tag{5.3.9}$$

Assim,

$$\Delta_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} E[(X_1 - m_{X_1})^2] & \ldots & E[(X_1 - m_{X_1})(X_n - m_{X_n})] \\ E[(X_2 - m_{X_2})(X_1 - m_{X_1}) & \ldots & E[(X_2 - m_{X_2})(X_n - m_{X_n})] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_n - m_{X_n})(X_1 - m_{X_1}) & \ldots & E[(X_n - m_{X_n})^2] \end{pmatrix} . \tag{5.3.10}$$

5.4 Momentos conjuntos

5.4.1 Definições

Definição 5.10. *Os momentos conjuntos das variáveis aleatórias* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *são definidos por* $E[X_1^{k_1} X_2^{k_2} \ldots X_n^{k_n}]$ *e a ordem do momento conjunto é dada por* $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Definição 5.11. *Os momentos conjuntos de segunda ordem* $E[X_i X_j]$ *recebem o nome de correlação das variáveis aleatórias* X_i *e* X_j.

Definição 5.12. *Os momentos conjuntos centrais das variáveis aleatórias*

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

são definidos por $E[(X_1 - m_{X_1})^{k_1}(X_2 - m_{X_2})^{k_2} \ldots (X_n - m_{X_n})^{k_n}]$. *A soma*

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n$$

é chamada ordem do momento conjunto central.

Definição 5.13. *Os momentos conjuntos centrais de segunda ordem*

$$E[(X_i - m_{X_i})(X_j - m_{X_j})]$$

recebem o nome de covariância quando $i \neq j$ *e variância quando* $i = j$.

Definição 5.14. *A matriz Covariância de um vetor aleatório contém todos os momentos conjuntos centrais de segunda ordem das componentes do vetor. Ela contém na sua diagonal principal as variâncias e os elementos fora da diagonal principal são as covariâncias.*

Resumindo, temos,

(i) Correlação: $E[X_1X_2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2f_{X_1X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2$

(ii) Momentos conjuntos:

De ordem $k_1 + k_2$:

$$E[X_1^{k_1}X_2^{k_2}] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{k_1}x_2^{k_2}f_{X_1X_2}(x_1,x_2)d_{x_1}d_{x_2}$$

De ordem $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$:

$$E[X_1^{k_1}X_2^{k_2}\ldots X_n^{k_n}] = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)d_{x_1}d_{x_2}\ldots d_{x_n}$$

(iii) Covariância: $E[(X_i - m_{X_i})(X_j - m_{X_j})]$

Se $m = 0 \Rightarrow$ covariância = correlação.

(iv) Variância: $E[(X - m_X)^2]$

5.4.2 Coeficiente de correlação

Definição 5.15. *O coeficiente de correlação entre as variáveis aleatórias* X *e* Y *é definido por*

$$\rho_{XY} = \frac{E[(X - m_X)(Y - m_Y)]}{\sqrt{E[(X - m_X)^2]E[(Y - m_Y)^2]}}\,. \qquad (5.4.11)$$

Pode-se provar que $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.

5.4.3 Variáveis aleatórias não correlatas

Duas variáveis aleatórias X e Y são ditas não correlatas quando ocorre uma das seguintes condições (equivalentes):

(i) $\rho_{XY} = 0$

(ii) $E[XY] = E[X]E[Y]$

(iii) $E[(X - m_X)(Y - m_Y)] = 0$

OBS: Se duas variáveis aleatórias são independentes então elas são não-correlatas, mas a recíproca não é verdadeira.

5.4.4 Variáveis aleatórias ortogonais

Definição 5.16. *Duas variáveis aleatórias X e Y são ditas ortogonais quando $E[XY] = 0$.*

Exemplo 5.5. *Seja $Y = acos(\omega t + \Theta)$, sendo a, ω e t constantes e Θ uma variável aleatória uniforme em $[0, 2\pi]$.*

(i) Calcule $E[Y]$

(ii) Calcule $E[Y^2]$

Solução:

(i) $E[Y] = E[acos(\omega t + \Theta)] = \displaystyle\int_0^{2\pi} acos(\omega t + \theta)\frac{d\theta}{2\pi} = 0\,.$

(ii) $E[Y^2] = \ldots = \dfrac{a^2}{2}\,.$

Exemplo 5.6. *Sejam X e Y duas variáveis aleatórias definidas por $X = cos\Theta$ e $Y = sen\Theta$, sendo Θ uma variável aleatória uniformemente distribuída em $[0, \pi]$.*

Determine:

(i) $E[X]$

(ii) $E[Y]$

(iii) $E[XY]$

(iv) $E[X^2]$

(v) $E[Y^2]$

(vi) $E[X^2Y^2]$

Solução:

(i)

$$E[X] = \int_0^{\pi} cos\theta \, \frac{1}{\pi} \, d\theta = 0 \, .$$

(ii)

$$E[Y] = \int_0^{\pi} sen\theta \, \frac{1}{\pi} \, d\theta = \frac{2}{\pi} \, .$$

(iii)

$$E[XY] = \int_0^{\pi} sen\theta \, cos\theta \, \frac{1}{\pi} \, d\theta = 0 \, .$$

(iv)

$$E[X^2] = \int_0^{\pi} cos^2\theta \, \frac{1}{\pi} \, d\theta = \frac{1}{2} \, .$$

(v)

$$E[Y^2] = \int_0^{\pi} sen^2\theta \, \frac{1}{\pi} \, d\theta = \frac{1}{2} \, .$$

(vi)

$$E[X^2Y^2] = \int_0^{\pi} sen^2\theta \, cos^2\theta \, \frac{1}{\pi} \, d\theta = \frac{1}{8} \, .$$

Devemos observar que, embora $E[XY] = E[X]E[Y]$, temos que

$$E[X^2Y^2] \neq E[X^2]E[Y^2].$$

Logo, X e Y não são variáveis aleatórias independentes.

5.5 Exercícios

(1) Calcule a média e a variância da variável aleatória exponencial X com função densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x) = ae^{-ax}u(x)$$

sendo a uma constante real positiva.

(2) Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade f_X dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 2\ , & 0 \leq x \leq 0,5 \\ 0\ , & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Considere a variável aleatória $Y = X(1-X)$ e determine $E[Y]$.

(3) Sejam $X = cos\Theta$ e $Y = sen\Theta$ duas variáveis aleatórias sendo Θ uma variável aleatória uniformemente distribuída em $[0, 2\pi]$. Prove que X e Y são não correlatas, mas não são independentes.

(4) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias tais que $Y = aX + b$, onde a e b são constantes reais, sendo $a \neq 0$. Considere ρ_{XY} o coeficiente de correlação entre as variáveis aleatórias X e Y. Prove que $\rho_{XY} = 1$, se $a > 0$ e $\rho_{XY} = -1$, se $a < 0$.

Capítulo 6

Processos Estocásticos

6.1 Introdução

Considere um experimento aleatório especificado pelos resultados ξ de algum espaço amostral S, pelos eventos definidos em S e pelas probabilidades desses eventos.

Suponha que para todo resultado $\xi \in S$ exista uma função X dada por $X(t, \xi)$ para todo t pertencente a um intervalo I e $\xi \in S$.

Para ξ fixo, $X(t, \xi)$ é chamada de função amostra. Por outro lado, para cada t fixo, $X(t, \xi)$ é uma variável aleatória.

Dessa forma, criamos uma família, indexada, de variáveis aleatórias

$$\{X(t, \xi)\ ,\ t \in I\}.$$

Esta família recebe o nome de **Processo Estocástico** (ou processo aleatório). Normalmente, denotamos o processo estocástico por $X(t)$, omitindo o argumento ξ.

Um processo estocástico é dito discreto se o conjunto I dos índices for contável. Quando tratamos de processos estocásticos discretos usamos, normalmente, n para denotar o índice e X_n para denotar o processo estocástico.

Se o conjunto I dos índices for contínuo então o processo estocástico é dito contínuo.

Processos estocásticos aparecem em sistemas de reconhecimento de fala, sistemas de processamento de imagens, sistemas de filas, ruído térmico nos terminais de um resistor e outros.

Exemplo 6.1. *Sequência binária aleatória*

Seja ξ um número selecionado, ao acaso, do intervalo $S = [0,1]$ e seja $b_1 b_2 \dots$ a expansão binária de ξ.

Assim, $\xi = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i 2^{-i}$, $b_i \in \{0,1\}$.

Defina o processo estocástico $X_n = X(n, \xi)$ por $X_n = b_n$, $n = 1, 2, \dots$, onde b_n é o n-ésimo número da expansão binária de ξ.

Exemplo 6.2. *Senóides com amplitudes aleatórias*

Seja ξ um número selecionado ao acaso do intervalo $[-1,1]$. Defina o processo aleatório $X(t,\xi)$ por

$$X(t,\xi) = \xi sen(2\pi t) \ , \ t \in \mathbb{R} \, .$$

As amostras desse processo são senóides com amplitude ξ.

Exemplo 6.3. *Senóides com fase aleatória*

Seja ξ um número selecionado ao acaso do intervalo $(-\pi, \pi)$ e seja $Y(t,\xi) = cos(2\pi t + \xi)$. As amostras do processo estocástico Y são versões de $cos 2\pi t$ deslocadas no tempo.

6.2 Especificação de um processo estocástico

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_k$ variáveis aleatórias obtidas pela amostragem do processo $X(t,\xi)$ em $t_1, t_2, \dots, t_k$. Assim,

$$X_1 = X(t_1,\xi), X_2 = X(t_2,\xi), \dots, X_k = X(t_k,\xi).$$

Um processo estocástico é especificado pela coleção de funções de distribuição de probabilidade conjunta de k-ésima ordem:

$$F_{X_1 X_2 \dots X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = P[X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_k \le x_k]$$

para todo k e qualquer escolha dos instantes $t_1, t_2, \dots, t_k$.

Se o processo estocástico for discreto então uma coleção de funções de massa de probabilidade

$$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k] \tag{6.2.1}$$

pode ser usada para especificar o processo.

E se o processo for contínuo então uma coleção de funções densidade de probabilidade

$$f_{X_1 X_2 \ldots X_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \tag{6.2.2}$$

pode ser usada para especificar o processo.

Ao fixarmos um valor para o parâmetro t de um processo estocástico $X(t, \xi)$, obtemos uma variável aleatória X com F.D.P. $F_{X(t)}(x) = P[X(t) \leq x]$. A f.d.p. correspondente é $f_{X(t)}(x) = \dfrac{\partial}{\partial x} F_{X(t)}(x)$.

Para cada t teremos uma variável aleatória $X(t)$ distinta.

Quando, para qualquer t , conhecemos $f_{X(t)}(x)$ ou $F_{X(t)}(x)$, dizemos que o processo estocástico $X(t, \xi)$ está especificado até a primeira ordem.

Um processo estocástico $X(t)$ fica especificado até a segunda ordem se, para qualquer par de instantes (t_1, t_2), a f.d.p. $f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2)$ das variáveis aleatórias $X(t_1)$ e $X(t_2)$ é conhecida.

Um processo estocástico $X(t)$ está especificado até a ordem m, quando é conhecida a f.d.p. conjunta das m variáveis aleatórias $X(t_i)$ para qualquer conjunto de valores $\{t_i, i = 1, \ldots, m\}$.

Em outras palavras, quando se conhece

$$f_{X(t_1)X(t_2)\ldots X(t_m)}(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Dizemos que um processo estocástico está especificado completamente se ele está especificado até a ordem m para qualquer valor de m.

Exemplo 6.4. *Considere ξ um número selecionado do intervalo $[0, 1]$ e escreva*

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} b_i 2^{-i} \ , \ b_i \in \{0, 1\} \, .$$

Defina o processo $X(n, \xi) = X_n = b_n$, sendo b_n o n-ésimo número da expansão binária.

Determine:

(i) $P[X(1, \xi) = 0]$

(ii) $P[X(1, \xi) = 0 \text{ e } X(2, \xi) = 1]$

Solução:

(i) $X(1, \xi) = b_1$. Logo, $P[b_1 = 0] = P[0 \leq \xi < 1/2] = 1/2$.

(ii) $P[b_1 = 0 \text{ e } b_2 = 1] = P[1/4 \leq \xi < 1/2] = 1/4$.

Exemplo 6.5. *Seja* ξ *um número escolhido no intervalo* $[-1,1]$ *e seja* $X(t)$ *o processo estocástico definido por*

$$X(t,\xi) = \xi cos(2\pi t)\ ,\ t \in \mathbb{R}$$

Ache a f.d.p. de $X_0 = X(t_0,\xi)$.

Solução:

Temos que $X_0 = X(t_0,\xi) = \xi cos(2\pi t_0)$.

Como ξ é uniformemente distribuída em $[-1,1]$, temos que X_0 será uniformemente distribuída em $[-cos(2\pi t_0), cos(2\pi t_0)]$ com t_0 sendo tal que $cos 2\pi t_0 \neq 0$.

Assim,

$$f_{X_0}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2cos 2\pi t_0}\ ,\ -cos 2\pi t_0 < x < cos 2\pi t_0 \\ \\ 0\ ,\ \text{caso contrário}\,. \end{cases}$$

Porém, se t_0 for tal que $cos 2\pi t_0 = 0$, então $f_{X_0}(t) = \delta(t)$.

6.3 Momentos

Os momentos (ou estatísticas) de um processo estocástico são os momentos das variáveis aleatórias definidas em quaisquer instantes do processo.

6.3.1 Média

Definição 6.1. *O valor esperado (ou média) de um processo estocástico* $X(t)$ *é definido por*

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x) dx\,. \tag{6.3.3}$$

6.3.2 Autocorrelação

Uma das características mais importantes de um processo estocástico é, sem dúvida, sua *função autocorrelação*, que nos levará a conhecer a sua *densidade espectral*. O conteúdo de frequências de um processo estocástico depende da velocidade com que a amplitude muda com o tempo. Isso pode ser medido pela correlação entre as amplitudes em t_1 e em $t_1 + \tau$.

Se as amplitudes de um processo $X(t)$ (das amostras de $X(t)$) são similares nos instantes t_1 e $t_1 + \tau$; dizemos que as respectivas variáveis aleatórias têm *forte correlação*. Por outro lado, se as amplitudes em t_1 e em $t_1 + \tau$ forem diferentes, dizemos que as respectivas variáveis aleatórias têm *fraca correlação*.

Definição 6.2. *A autocorrelação de um processo estocástico $X(t)$ é definido como o momento conjunto das variáveis aleatórias $X(t_1)$ e $X(t_2)$ definidas para todo par (t_1, t_2); isto é,*

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X(t_1)X(t_2)} dxdy \qquad (6.3.4)$$

sendo $f_{X(t_1)X(t_2)}(x, y)$ a f.d.p. de segunda ordem de $X(t)$.

6.3.3 Autocovariância

Definição 6.3. *A (função) autocovariância de um processo $X(t)$ é definida como o momento conjunto central das variáveis aleatórias $X(t_1)$ e $X(t_2)$ para quaiquer (t_1, t_2); isto é,*

$$C_X(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))] \ , \ \forall (t_1, t_2) \qquad (6.3.5)$$

Temos que $C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)\,.$

Demonstração:

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= E[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))] \\ &= E[X(t_1)X(t_2)] - m_X(t_2)E[X(t_1)] \\ &\quad -m_X(t_1)E[X(t_2)] + m_X(t_1)m_X(t_2) \\ &= R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) \end{aligned}$$

Consequentemente, $\sigma_X^2(t) = C_X(t, t) = R_X(t, t) - m_X^2(t)\,.$

∎

6.3.4 Coeficiente de correlação de $X(t)$

Definição 6.4. *O coeficiente de correlação do processo estocástico $X(t)$ é definido como o coeficiente de correlação entre as variáveis aleatórias $X(t_1)$ e $X(t_2)$, $\forall t_1, t_2$. Isto é,*

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sqrt{C_X(t_1, t_1)}\sqrt{C_X(t_2, t_2)}} \qquad (6.3.6)$$

com $| \rho_X(t_1, t_2) | \leq 1$.

Exemplo 6.6. *Seja A uma variável aleatória e seja $X(t) = Acos2\pi t$ um processo estocástico.*
(i) *Determine a média de $X(t)$, em função da média da variável aleatória A.*

(ii) *Determine $R_X(t_1, t_2)$.*

Solução:

(i) $m_X(t) = E[X(t)] = E[Acos2\pi t] = cos2\pi tE[A]$.

(ii) $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[A^2]cos2\pi t_1 cos2\pi t_2$.

Exemplo 6.7. *Seja $X(t) = cos(\omega t + \Theta)$ um processo estocástico onde Θ é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $(-\pi, \pi)$.*

(i) Determine a média de $X(t)$

(ii) Determine a autocorrelação de $X(t)$

Solução:

(i) $m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} cos(\omega t + \theta) f_\Theta(\theta) d\theta = 0.$

(ii)
$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[cos(\omega t_1 + \Theta)cos(\omega t_2 + \Theta)] \\ &= \frac{1}{2}E[cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\theta) + cos(\omega(t_1 - t_2)] \\ &= \frac{1}{2}cos(\omega(t_1 - t_2)). \end{aligned}$$

6.4 Processos estocásticos (estritamente) estacionários

Definição 6.5. *Seja $X(t)$ um processo estocástico. Se, para qualquer inteiro n, a f.d.p. conjunta de ordem n não varia com um deslocamento no tempo; isto é,*

$$f_{X(t_1)\ldots X(t_n)}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X(t_1+\tau)\ldots X(t_n+\tau)}(x_1, \ldots, x_n) \ , \ \forall \tau$$

então o processo estocástico é dito estritamente estacionário até a ordem n.

OBS:

(i) A mesma definição vale se considerarmos a F.D.P. conjunta.

(ii) $m_X(t) = E[X(t)] = m$ para todo t.

(iii) $\sigma^2_{X(t)} = E[(X(t) - m)^2] = \sigma^2$.

(iv) Um processo estocástico é estacionário até a primeira ordem se, e só se,

$$f_{X(t)}(x) = f_{X(t+\tau)}(x) \ , \ \forall t, \tau.$$

(v) Um processo estocástico é estacionário até a segunda ordem se, e só se,

$$f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) = f_{X(t_1+\tau)X(t_2+\tau)}(x_1, x_2) \ , \ \forall \tau \, .$$

(vi) Se $X(t)$ é estacionário até a n-ésima ordem então também será até a ordem k, $k < n$.

(vii) A verificação de estacionariedade estrita é uma tarefa difícil, motivando a verificação de formas mais fracas de estacionariedade.

6.5 Processos estocásticos estacionários no sentido amplo

Definição 6.6. *Um processo estocástico $X(t)$ é dito estacionário no sentido amplo se sua média for constante; isto é, $m_X(t) = m$, $\forall t$ e se a sua autocorrelação é função, apenas, da diferença entre dois instantes; isto é,*

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau) \ , \ \tau = t_1 - t_2 \ , \ \forall t_1, t_2 \, . \tag{6.5.7}$$

OBS: Se um processo estocástico é estritamente estacionário até a segunda ordem então ele é estacionário no sentido amplo. Porém, a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 6.8. *Considere o processo estocástico $X(t) = Asen(\omega t + \Theta)$ sendo Θ uma variável aleatória uniformemente distribuída em $[0, 2\pi]$. Verifique se este processo é estacionário no sentido amplo.*

Solução:

$$m_X(t) = \int_0^{2\pi} Asen(\omega t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

e

$$R_X(t_1, t_2) = \ldots = \frac{A^2}{2} cos[\omega(t_1 - t_2)] \, .$$

Propriedade 6.1.

(i) $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

(ii) $R_X(0) = E[X^2(t)]$

(iii) *Se* $X(t) = X(t + nT)$, $n \in \mathbb{Z}$ *então* $R_X(\tau) = R_X(\tau + nT)$

(iv) $| \, R_X(\tau) \, | \leq R_X(0)$, $\forall \tau$

6.6 Estatísticas conjuntas de processos estocásticos

6.6.1 Especificação conjunta

Definição 6.7. *Dois processos estocásticos, digamos $X(t)$ e $Y(t)$, estão conjuntamente especificados até a ordem $m+n$, quando é conhecida a f.d.p. conjunta das $m+n$ variáveis aleatórias $\{X(t_i), Y(t_j)\}$ para quaisquer conjuntos de valores. Isto é,*

$$f_{X(t_1)X(t_2)\ldots X(t_m)Y(t'_1)Y(t'_2)\ldots Y(t'_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

para todos $t_1, t_2, \ldots, t_m, t'_1, t'_2, \ldots, t'_n$.

6.6.2 Momentos conjuntos

6.6.3 Correlação cruzada

Definição 6.8. *A função correlação cruzada de dois processos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$, representada por $R_{XY}(t_1, t_2)$, é o momento conjunto das variáveis aleatórias $X(t_1)$ e $Y(t_2)$ definidas para quaisquer pares (t_1, t_2); isto é,*

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)Y(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X(t_1)Y(t_2)}(x, y)dxdy\,. \end{aligned} \tag{6.6.8}$$

Covariância cruzada

Definição 6.9. *A função covariância cruzada de dois processos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$, representada por $C_{XY}(t_1, t_2)$, é o momento conjunto central das variáveis aleatórias $X(t_1)$ e $Y(t_2)$ definidas para qualquer par (t_1, t_2); isto é,*

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][Y(t_2) - m_Y(t_2)] \tag{6.6.9}$$

Podemos mostrar que $C_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2)$.

6.6.4 Processos estocásticos conjuntamente estacionários

Definição 6.10. *Dois processos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ são ditos conjuntamente estacionários até a ordem $k+\ell$ se a f.d.p. conjunta das $k+\ell$ variáveis aleatórias $\{X(t_i), Y(t'_j)\,,\ i = 1, 2, \ldots, k; j = 1, 2, \ldots, \ell\}$ não varia com um deslocamento no tempo; isto é,*

$$f_{X(t_1)\ldots X(t_k)Y(t'_1)\ldots Y(t'_\ell)} = f_{X(t_1+\tau)\ldots X(t_k+\tau)Y(t'_1+\tau)\ldots Y(t'_\ell+\tau)} \tag{6.6.10}$$

Definição 6.11. *Dois processos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ são ditos conjuntamente estacionários no sentido amplo quando cada um deles é estacionário no sentido amplo e $R_{XY}(t_1, t_2)$ só depende da diferença $(t_1 - t_2)$; isto é,*

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1 - t_2) = R_{XY}(\tau) \ , \ \tau = t_1 - t_2 \tag{6.6.11}$$

Propriedade 6.2. *Propriedades da função correlação cruzada de dois processos estocásticos conjuntamente estacionários*

(i) $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$.

(ii) $R^2_{XY}(\tau) \leq R_X(0)R_Y(0)$.

(iii) $2 \mid R_{XY}(\tau) \mid \leq R_X(0) + R_Y(0)$.

6.6.5 Independência, não-correlação e ortogonalidade

Definição 6.12. *Dois processos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ são estatisticamente independentes quando para quaisquer m e n a f.d.p. conjunta de ordem $m+n$ pode ser escrita como o produto da f.d.p. de ordem m do processo $X(t)$ pela f.d.p. de ordem n do processo $Y(t)$; isto é,*

$$\begin{aligned} &f_{X(t_1)\ldots X(t_m)Y(t'_1)\ldots Y(t'_n)}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = \\ &f_{X(t_1)\ldots X(t_m)}(x_1, \ldots, x_m) f_{Y(t'_1)\ldots Y(t'_n)}(y_1, \ldots, y_n) . \end{aligned} \tag{6.6.12}$$

Definição 6.13. *Dois processos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$, conjuntamente estacionários no sentido amplo são ditos não-correlatos quando $C_{XY}(\tau) = 0$.*

$$C_{XY}(\tau) = 0 \Leftrightarrow R_{XY}(\tau) = m_X m_Y . \tag{6.6.13}$$

Definição 6.14. *Dois processos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$, conjuntamente estacionários no sentido amplo são ortogonais quando $R_{XY}(\tau) = 0$.*

Exemplo 6.9. *Sejam $X(t)$ e $Y(t)$ processos estocásticos dados por $X(t) = cos(\omega t + \Theta)$ e $Y(t) = sen(\omega t + \Theta)$, sendo Θ uma v.a. uniformemente distribuída no intervalo $[-\pi, \pi]$. Ache $C_{XY}(t_1, t_2)$.*

Solução:

$C_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2)$.

Mas, $m_X(t_1) = m_Y(t_2) = 0$.

E, $R_{XY}(t_1, t_2) = -\dfrac{1}{2} sen(\omega(t_1 - t_2))$.

Logo,
$C_{XY}(t_1,t_2) = -\frac{1}{2} sen(\omega(t_1 - t_2))$.

Exemplo 6.10. *Seja $Y(t) = X(t) + N(t)$, onde $X(t)$ é um sinal desejado e $N(t)$ um ruído.*

Ache $R_{XY}(t_1,t_2)$ supondo que $X(t)$ e $N(t)$ são processos estocásticos independentes.

Solução:

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1,t_2) &= E[X(t_1)Y(t_2)] = E[X(t_1)X(t_2)] + E[X(t_1)N(t_2)] \\ &= R_X(t_1,t_2) + m_X(t_1)m_N(t_2)\,. \end{aligned}$$

6.6.6 Processos Ergódicos

Vimos que a caracterização completa de um processo estocástico exige o conhecimento de todas as suas funções amostra. Esta caracterização permitiu a determinação de diversas estatísticas de processos como, por exemplo, sua média e sua função autocorrelação. Para alguns processos estocásticos, entretanto, estas estatísticas podem ser determinadas a partir de apenas uma função amostra do processo. Esses processos estocásticos são determinados ergódicos.

Para processos ergódicos, os valores médios e os momentos podem ser determinados através de médias temporais.

Assim,

$$E[X^n(t)] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [X(t)]^n \, dt \qquad (6.6.14)$$

onde $X(t)$ é uma função amostra típica do processo.

A autocorrelação será dada por

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)X(t+\tau)\, dt\,. \qquad (6.6.15)$$

6.7 Processos estocásticos gaussianos

Definição 6.15. *Um processo $X(t)$ é um processo estocástico gaussiano se as amostras $X_1 = X(t_1)$, $X_2 = X(t_2)$, $\ldots$, $X_k = X(t_k)$ são variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas para todo k e todas as escolhas de $t_1,\ldots,t_k$.*

Assim, a f.d.p. tem a forma

$$f_{X_1 X_2 \ldots X_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{m})^T K^{-1}(\vec{x}-\vec{m})}}{(2\pi)^{k/2} \mid K \mid^{1/2}} \tag{6.7.16}$$

onde

$$\vec{m} = \begin{bmatrix} m_X(t_1) \\ m_X(t_2) \\ \ldots \\ m_X(t_k) \end{bmatrix}$$

e

$$K = \begin{pmatrix} C_X(t_1, t_1) & C_X(t_1, t_2) & \ldots & C_X(t_1, t_k) \\ C_X(t_2, t_1) & C_X(t_2, t_2) & \ldots & C_X(t_2, t_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_X(t_k, t_1) & C_X(t_k, t_2) & \ldots & C_X(t_k, t_k) \end{pmatrix}.$$

Observamos que processos estocásticos gaussianos têm a propriedade que suas f.d.p.'s conjunas são completamente especificadas pela média do processo $m_X(t)$ e pela função covariância $C_X(t_1, t_2)$.

Se um processo gaussiano é estacionário no sentido amplo então sua média é constante e sua autocovariância só depende da diferença entre dois instante. Além disso, ele será também estritamente estacionário.

Exemplo 6.11. *Seja $X(t)$ um processo gaussiano com função média e função autocorrelação dadas por $m_X(t) = 1$ e $R_X(\tau = t_1 - t_2) = 2^{-|t_1 - t_2|} + 1$. Determine $P[1 < X(4) < 3]$.*

Solução:

$X(4) = X_4$ é uma variável aleatória gaussiana com $E[X_4] = 1$ e $\sigma^2_{X_4} = E[X_4^2] - [E(X_4)]^2 = R_X(0) - m_X^2(4) = 2 - 1 = 1$.

Assim, $P[1 < X_2 < 3] = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X_4 - 1)^2}{2}} dX_4 \simeq 0,477$.

6.8 Exercícios

(1) Considere o processo estocástico $X(t) = At^2 + B$, onde A é uma variável aleatória gaussiana de média nula e variância unitária e B é uma constante qualquer.

Determine:

(i) A expressão da função densidade de probabilidade $f_{X(t)}(x)$

(ii) A média de $X(t)$

(iii) A autocorrelação de $X(t)$

(2) Seja Y uma variável aleatória uniforme no intervalo $[0, 1]$. Considere o processo estocástico $X(t) = e^{-Yt}$.

Determine:

(i) A expressão da função densidade de probabilidade $f_{X(t)}(x)$

(ii) A média de $X(t)$

(iii) A autocorrelação de $X(t)$

(3) Considere o processo estocástico $X(t) = Acos\omega t + Bsen\omega t$, onde A e B são variáveis aleatórias de média nula e variância unitária. Verifique se $X(t)$ é um processo estocástico estacionário no sentido amplo.

(4) Dado um processo estocástico $X(t)$ com média nula e função autocorrelação $R_X(\tau)$, considere o processo estocástico $Y(t) = X(t) + F(t)$, onde F é uma função determinística. Encontre a expressão a autocorrelação de Y $(R_Y(t_1, t_2))$.

Capítulo 7

Revisão de Análise de Fourier

7.1 Série de Fourier

Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz as seguintes condições:

- **(i)** f é periódica de período T;
- **(ii)** f é de classe C^2 por partes em $(t_0, t_0 + T)$.

Denotando S_f como a Série de Fourier de f, temos que em todo ponto de continuidade de f, podemos escrever:

$$S_f(t) = f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n sen\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right] \tag{7.1.1}$$

onde

$$\begin{cases} a_o = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{t_o}^{t_o+T} f(t)dt, \\[2ex] a_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{t_o}^{t_o+T} f(t) cos\left(\dfrac{2n\pi t}{T}\right) dt \quad \text{e} \\[2ex] b_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{t_o}^{t_o+T} f(t) sen\left(\dfrac{2n\pi t}{T}\right) dt. \end{cases} \tag{7.1.2}$$

Em um ponto de descontinuidade, o lado esquerdo de 7.1.1 é substituído por:

$$\lim_{\varepsilon \to o^+} \frac{1}{2}[f(t+\varepsilon) + f(t-\varepsilon)]. \tag{7.1.3}$$

A série 7.1.1 com coeficientes dados por 7.1.2 é chamada de **série de Fourier de f na forma trigonométrica**.

As condições (i) e (ii) são muitas vezes chamadas condições de Dirichlet e são suficientes (mas não necessárias) para a convergência da série de Fourier.

Em notação exponencial (ou complexa) a série de Fourier de f pode ser escrita como

$$S_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{j\frac{2n\pi t}{T}} \tag{7.1.4}$$

onde

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} f(t)e^{-j\frac{2n\pi t}{T}}dt. \tag{7.1.5}$$

Fazendo $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$, temos

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} f(t)e^{-jn\omega_o t}dt. \tag{7.1.6}$$

Observamos que, conhecido f, os coeficientes de 7.1.4 podem ser calculados e, reciprocamente, conhecidos os coeficientes $\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, f pode ser sintetizada por 7.1.4. Dessa forma, f e $\{F_n\}_{n\in\mathcal{F}}$ fornecem a mesma informação. Muda só o ponto de vista : um temporal, outro freqüencial.

Exemplo 7.1. *Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período 2, dada por*

$$f(t) = t\,,\, 0 \leq t < 2. \tag{7.1.7}$$

O gráfico dessa função é mostrado na figura 7.1.

7.1.1 Série de Fourier de f na forma trigonométrica

Cálculo dos coeficientes

$$a_o = \frac{2}{T}\int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 tdt = 2.$$

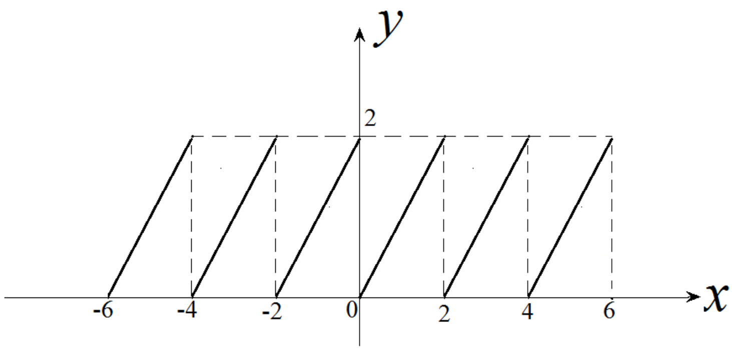

Figura 7.1: Gráfico da função periódica do exemplo.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^2 f(t)cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt = \int_0^2 tcos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt \\
&= \int_0^2 tcos\left(n\pi t\right)dt = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^2 f(t)sen\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt = \int_0^2 tsen\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt \\
&= \int_0^2 tsen(n\pi t)dt = -\frac{2}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$S_f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2}{n\pi}sen(n\pi t).$$

7.1.2 Série de Fourier de f na forma exponencial

Cálculo dos coeficientes

$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{T}\int_0^2 f(t)e^{-j\frac{2n\pi t}{T}}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 te^{-jn\pi t}dt \\
&= \frac{1}{n\pi}j \quad , n \neq 0
\end{aligned}$$

e

$$F_o = \frac{1}{T}\int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^2 tdt = 1.$$

Assim,

$$F_n = \begin{cases} 1\ , & n = 0 \\ \dfrac{1}{n\pi}j\ , & n \neq 0. \end{cases}$$

Temos,

$$S_f(t) = 1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n\pi} j e^{jn\pi t}\ , n \neq 0.$$

7.1.3 O espectro complexo de Fourier

A expansão em Série de Fourier de uma função periódica é a decomposição da função em termos das suas componentes de várias frequências. Uma função periódica de período T tem componentes de frequênccia dadas por $n\nu$, sendo $\nu = \frac{1}{T}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Em termos das frequências angulares (ou pulsações), as componentes são dadas por $n\omega_o$ onde $\omega_o = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ e $n \in \mathbb{Z}$. Chamamos de espectro da função f o conjunto de todos os coeficientes de Fourier F_n , $n \in \mathbb{Z}$. Se especificarmos f podemos encontrar seu espectro. Reciprocamente, se o espectro for conhecido podemos encontrar a função f correspondente. Portanto, podemos especificar f de duas formas: a representação no domínio do tempo, onde f é expressa como função do tempo e a representação no domínio da freqüência, onde o espectro é especificado.

Observamos que o espectro de uma função periódica não é uma curva contínua, mas existe apenas para valores discretos de ω, múltiplos de uma frequência básica $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$($\omega = n\omega_o, n \in \mathbb{Z}$). Os coeficientes F_n são complexos e, são descritos por uma magnitude e uma fase.

Exemplo 7.2. *Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período T, dada por :*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & \frac{\tau}{2} < t < T - \frac{\tau}{2}. \end{cases} \tag{7.1.8}$$

Essa função é conhecida como função porta periódica. Mostramos o seu gráfico na figura 7.2.

Os coeficientes F_n da série de Fourier na forma exponencial são dados por:

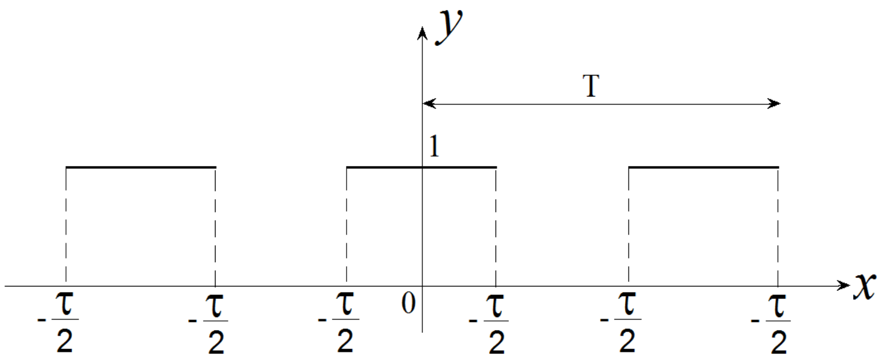

Figura 7.2: Gráfico da função porta periódica.

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{T-\tau/2} f(t)e^{-j\frac{2n\pi t}{T}}dt = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jn\omega_o t}dt \\ &= \frac{\tau}{T}[\frac{sen(n\omega_o\tau/2)}{n\omega_o\tau/2}] \quad ,n \neq 0, \end{aligned} \tag{7.1.9}$$

e

$$F_o = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{T-\frac{\tau}{2}} f(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dt = \frac{\tau}{T}. \tag{7.1.10}$$

Dessa forma,

$$F_n = \begin{cases} \dfrac{\tau}{T}, & n = 0 \\ \dfrac{\tau}{T}\left[\dfrac{sen(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}\right], & n \neq 0. \end{cases} \tag{7.1.11}$$

Definindo a função Sa, conhecida como função de amostragem, por

$$\begin{aligned} &Sa : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &t \to \begin{cases} 1\,, & t = 0 \\ \dfrac{sent}{t}, & t \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{7.1.12}$$

e fazendo $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, temos,

$$F_n = \frac{\tau}{T}S_a\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right). \tag{7.1.13}$$

A frequência fundamental é $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$. Se $\omega = n\omega_o$ então

$$F_n = \frac{\tau}{T}Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right). \tag{7.1.14}$$

Mostramos o gráfico de F_n em termos da frequência ω na Fig. 7.3.

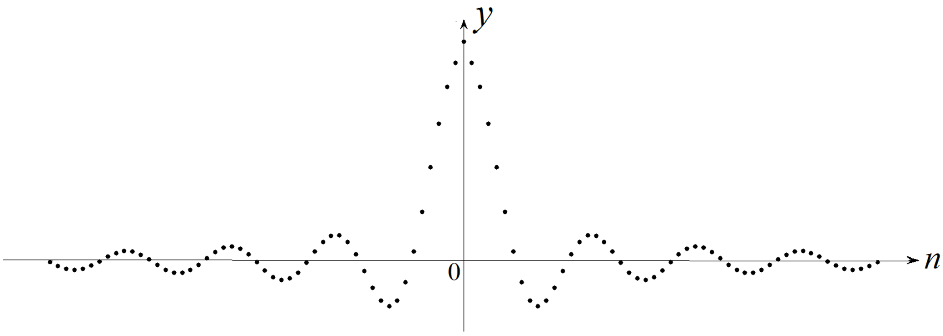

Figura 7.3: Representação do espectro da função porta periódica.

Podemos observar que à medida que T aumenta, a frequência fundamental $\frac{2\pi}{T}$ se torna menor e o espectro torna-se, então, mais denso. Intuitivamente, somos levados a pensar que quando T tende ao infinito temos, no domínio do tempo, um único pulso retangular de largura τ e no domínio da frequência um espectro contínuo com componentes em todas as freqüências. Isso pode ser provador rigorosamente.

7.2 Transformada de Fourier

Quando o sinal com o qual estamos trabalhando for não-periódico ele pode ser expresso como uma soma contínua (integral) de sinais exponenciais, em contraste com sinais periódicos, que podem ser representados por uma soma discreta de sinais exponenciais (série de Fourier - como já visto). Vejamos uma motivação para essa afirmação.

Consideremos uma função f cujo esboço do gráfico é mostrado na Fig. 7.4 .

Construímos uma nova função, periódica, f_T com período T, de acordo com a figura 7.5.

Tornamos o período T grande o suficiente para que não haja superposição entre os pulsos da forma de f. Essa nova função f_T é uma função periódica e pode ser representada por uma série exponencial de Fourier.

Numa topologia adequada, quando $T \to \infty$, $f_T \to f$. Desse modo, a série de Fourier que representa f_T também representará f.

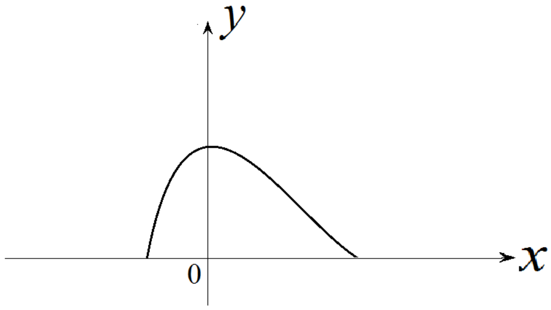

Figura 7.4: Esboço do gráfico da função f.

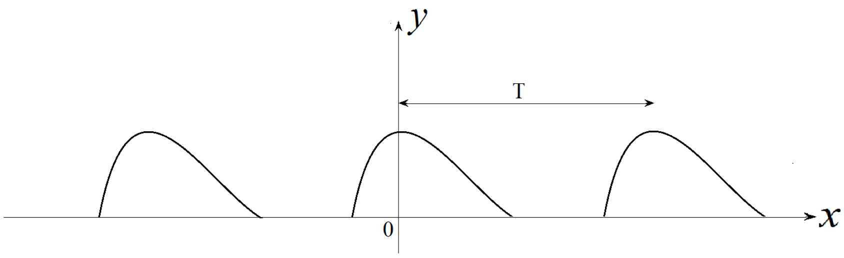

Figura 7.5: Construção de uma função periódica a partir da função f dada.

A série de Fourier de f_T é dada por

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \, e^{jn\omega_o t} \tag{7.2.15}$$

onde $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$ e

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_o t} dt. \tag{7.2.16}$$

Façamos $n\omega_o = \omega_n$. Assim, $F_n = F_n(\omega_n)$.

Consideremos $TF_n(\omega_n) = F(\omega_n)$, que é obviamente limitado (por construção). Temos,

$$f_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t}. \tag{7.2.17}$$

Substituindo $T = \dfrac{2\pi}{\omega_o}$ em 7.2.17 temos

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \omega_o. \tag{7.2.18}$$

Quando $T \to \infty$, $f_T \to f$ e obtemos :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{7.2.19}$$

e

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \tag{7.2.20}$$

O espectro de f será contínuo e representado pela função F.

A equação 7.2.20 é conhecida como transformada (direta) de Fourier de f e a equação 7.2.19 como transformada inversa de Fourier de F.

Simbolicamente podemos escrever

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \tag{7.2.21}$$

e

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]. \tag{7.2.22}$$

Fazendo $\omega = 2\pi\nu$ em 7.2.19 e 7.2.20 chegamos a uma formulação simétrica, o fator 2π não aparece.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathrm{F}}(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu \tag{7.2.23}$$

e

$$\hat{\mathrm{F}}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\nu t} dt. \tag{7.2.24}$$

Existência da transformada de Fourier

O espaço $L^1(R)$

O espaço $L^1(R)$ é o espaço de todas as funções $f : I\!\!R \to C$ tais que

$$\int_R |f| dt < \infty. \tag{7.2.25}$$

OBS: Se $f(x + yi) = u + iv \Rightarrow |f| = \sqrt{u^2 + v^2}$.

O espaço $L^2(R)$

O espaço $L^2(R)$ é o espaço de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, tais que

$$\int_R |f|^2 dt < \infty. \tag{7.2.26}$$

Teorema 7.1. *Se a função f pertence ao espaço $L^1(R)$ então a transformada de f existe.*

Teorema 7.2. *Se a função f pertence ao espaço $L^2(R)$ então a transformada F, de f, existe e $F \in L^2(R)$.*

Exemplo 7.3. *Consideremos a função G_τ (conhecida como função porta) definida por*

$$G_\tau(t) = \begin{cases} 1, & | t | \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & | t | > \frac{\tau}{2}. \end{cases} \tag{7.2.27}$$

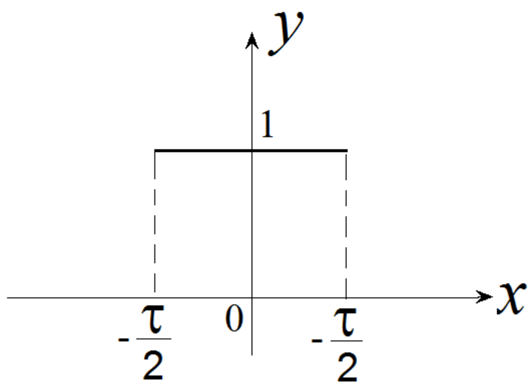

Figura 7.6: função porta.

Calculando a transformada de Fourier dessa função, temos :

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{G_\tau(t)\} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{\tau Sen(\frac{\omega\tau}{2})}{\frac{\omega\tau}{2}} \quad , \omega \neq 0. \tag{7.2.28}$$

Para $\omega = 0$ temos :

$$\mathcal{F}\{G_\tau(t)\} \mid_{\omega=0} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt = \tau.$$

Logo,

$$\mathcal{F}\{G_\tau(t)\} = \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2}).$$

A figura 7.7 mostra a representação do espectro da função porta. Neste caso F é uma função real.

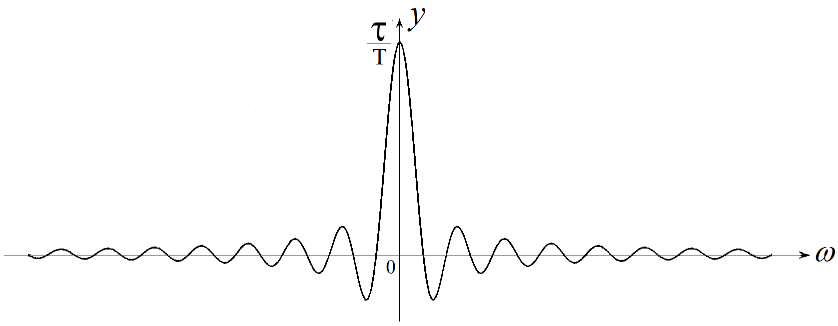

Figura 7.7: Representação do espectro da função porta.

Exemplo 7.4. *Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(t) = e^{-|t|}.$$

Calculando sua transformada de Fourier, obtemos :

$$\mathcal{F}\{e^{-|t|}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}e^{-j\omega t}dt = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Exemplo 7.5. *Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

A sua transformada de Fourier é dada por:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{1+j\omega}.$$

Exemplo 7.6. *Consideremos a função $G_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$G_\tau(\omega) = \begin{cases} 1, & \mid \omega \mid \leq \tau/2 \\ 0, & \mid \omega \mid > \tau/2. \end{cases}$$

Desejamos calcular sua tranformada de Fourier inversa. Assim,

$$\mathcal{F}^{-1}\{G_\tau(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\tau}{2\pi}\frac{Sen(\frac{t\tau}{2})}{\frac{t\tau}{2}} \quad , t \neq 0.$$

Para $t = 0$ temos :

$$\mathcal{F}^{-1}\{G_\tau(\omega)\} \mid_{t=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\omega = \frac{1}{2\pi}\tau.$$

Assim,

$$\mathcal{F}^{-1}\{G_\tau(\omega)\} = \frac{\tau}{2\pi} Sa(\frac{\tau t}{2}).$$

Logo, a transformada de $f(t) = Sa(\frac{t\tau}{2})$ é igual a $\frac{2\pi}{\tau}G_\tau(\omega)$. Em particular,

$$\mathcal{F}\{Sa(t)\} = \pi G_2(\omega).$$

Propriedade 7.1. *As propriedades da transformada de Fourier estão apresentadas na seguinte tabela 7.1.*

7.3 Convolução

Dadas duas funções f_1 e f_2 formamos a integral

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau. \tag{7.3.29}$$

Essa integral define a convolução das funções f_1 e f_2. Simbolicamente escrevemos

$$f = f_1 * f_2.$$

Veremos que convolução está intimamente associado a produto.

Propriedade 7.2.

Comutatividade

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1. \tag{7.3.30}$$

Distributividade

$$f_1 * [f_2 + f_3] = f_1 * f_2 + f_1 * f_3. \tag{7.3.31}$$

	FUNÇÃO	TRANSFORMADA
	$f(t)$	$F(w)$
Simetria	$F(t)$	$2\pi f(-w)$
Linearidade	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(w) + a_2 F_2(w)$
Mudança de escala	$f(at)$	$\frac{1}{\mid a \mid} F\left(\frac{w}{a}\right)$
Translação em freq.	$f(t)e^{jw_0 t}$	$F(w - w_0)$
	$f(t)\cos(w_0 t)$	$\frac{1}{2}[F(w + w_0) + F(w - w_0)]$
	$f(t) sen(w_0 t)$	$\frac{j}{2}[F(w + w_0) - F(w - w_0)]$
Translação no tempo	$f(t - t_0)$	$e^{-jwt_0} F(w)$
Dualidade	$F(t)$	$f(w)$
Conjugação	$f^*(t)$	$F^*(-w)$
Diferenciação no tempo	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$(jw)^n F(w)$
Integração no tempo	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{jw} F(w)$
Diferenciação na freq.	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n f}{dw^n}$
Simetria	$f(t)$ real	$F(w) = F^*(-w)$
	$f(t)$ real	$\mathrm{R}\{F(w)\} = \mathrm{R}\{F^*(-w)\}$
	$f(t)$ real	$\mathrm{I}\{F(w)\} = -\mathrm{I}\{F^*(-w)\}$
	$f(t)$ real	$\|F(w)\| = \|F(-w)\|$
	$f(t)$ real	$\angle F(w) = -\angle F(-w)$

Tabela 7.1: Propriedades da transformada de Fourier

Associatividade

$$f_1 * [f_2 * f_3] = [f_1 * f_2] * f_3. \tag{7.3.32}$$

Teorema da convolução no tempo

Se $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ *e* $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$ *então*

$$f_1 * f_2 \leftrightarrow F_1 F_2. \tag{7.3.33}$$

Se $f_1(t) \leftrightarrow \hat{F}_1(\nu)$ *e* $f_2(t) \leftrightarrow \hat{F}_2(\nu)$ *então*

$$f_1 * f_2 \leftrightarrow \hat{F}_1 \hat{F}_2. \tag{7.3.34}$$

FUNÇÃO	TRANSFORMADA
$f(t)$	$F(w)$
A	$2\pi A\delta$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$(t)=sen(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$

Tabela 7.2: Algumas tranformadas que envolvem o impulso unitário.

Teorema da convolução na frequência

Se $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ *e* $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$ *então*

$$f_1 f_2 \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}[F_1 * F_2]. \tag{7.3.35}$$

Se $f_1(t) \leftrightarrow \hat{F}_1(\nu)$ *e* $f_2(t) \leftrightarrow \hat{F}_2(\nu)$ *então*

$$f_1 f_2 \leftrightarrow \hat{F}_1 * \hat{F}_2. \tag{7.3.36}$$

Apresentamos na tabela 7.2 algumas transformadas que envolvem o impulso unitário (Delta de Dirac) denotado por δ.

7.4 Exercícios

(1) Seja f uma função periódica de período 2π tal que

$$f(t) = \begin{cases} Asen\, t\ , & 0 < t < \pi \\ 0\ , & -\pi \leq t \leq 0 \end{cases}$$

Escreva a expressão da Série de Fourier de f, na forma complexa.

(2) Use $G_\tau(t) = \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ e encontre a transformada de Fourier da função f definida por

$$f(t) = \begin{cases} 1\ , & -10 \leq t \leq -6 \\ 1\ , & 6 \leq t \leq 10 \\ 0\ , & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(3) Use convolução e encontre $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(1+i\omega)^2}\right\}$.

(4) Obtenha a transformada de Fourier da função f dada por $f(t) = Sa(t)$.

Capítulo 8

Análise e Processamento de Sinais Aleatórios

8.1 Introdução

Definição 8.1. *Seja $X(t)$ um processo estocástico estacionário no sentido amplo, com média m_X e função autocorrelação $R_X(\tau)$. A densidade espectral de potência de $X(t)$ é definida por*

$$S_X(\omega) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\,.$$

Consequentemente, $R_X(\tau) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$.

Apresentaremos, a seguir, alguns conceitos, e justificaremos as fórmulas acima.

8.2 Alguns conceitos sobre sinais determinísticos

8.2.1 Energia e Potência de um sinal

Seja $x = x(t)$ um sinal determinístico. Se x for um sinal real, definimos a *energia* (E_x) do sinal x por:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt \tag{8.2.1}$$

e a *potência* por

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \,. \tag{8.2.2}$$

Se x for um sinal complexo,

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mid x(t) \mid^2 \, dt \tag{8.2.3}$$

e

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mid x(t) \mid^2 \, dt \,. \tag{8.2.4}$$

OBS:

(i) As definições acima só fazem sentido quando as integrais convergem.

(ii) *Energia* e *potência*, neste caso, são definições e não têm, necessariamente, unidades de energia (JOULE) e de potência (WATT).

(iii) Podemos assumir a potência (ou a energia) dissipada em um carga de 1Ω para as fórmulas apresentadas.

(iv) P_x é o valor médio quadrático de x e, portanto, $\sqrt{P_x}$ é o valor *rms* (*root mean square*).

8.2.2 Algumas fórmulas relacionadas a sinais determinísticos

(i) $\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} x(t) dt = X(\omega) \,.$

(ii) $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} X(\omega) d\omega \,.$

(iii) $x^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \,.$

(iv) $X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} x^*(t) dt$. Se $x(t)$ for real, $X^*(\omega) = X(-\omega) \,.$

8.2.3 Teorema de Parseval

Teorema 8.1. *Seja $x(t)$ um sinal determinístico, complexo, cuja transformada de Fourier é dada por $X(\omega)$. Assim,*

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |\, x(t)\,|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\, X(\omega)\,|^2 \, d\omega \tag{8.2.5}$$

<u>Demonstração</u>:

$$\begin{aligned}
E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega)e^{-i\omega t}d\omega dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)X^*(\omega)e^{-i\omega t}d\omega dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega)X(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\, X(\omega)\,|^2 \, d\omega\,.
\end{aligned}$$

■

OBS:

Se x for real, $E_x = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\, X(\omega)\,|^2 \, d\omega.$

8.2.4 Densidade espectral de energia e de potência

Definição 8.2. *Como $E_x = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\, X(\omega)\,|^2 \, d\omega$, definimos a* densidade espectral de energia *do sinal x por:*

$$S_x(\omega) = |\, X(\omega)\,|^2 \tag{8.2.6}$$

e

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega)\, d\omega\,. \tag{8.2.7}$$

Definimos, também, *densidade espectral de potência* do sinal x por:

$$S_x(\omega) = \lim_{T\to+\infty}\left[\frac{|\, \mathcal{F}\{x(t)G_T(t)\}\,|^2}{T}\right] \tag{8.2.8}$$

sendo G_T a função porta de largura T.
A potência do sinal x será dada por

$$P_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega)\, d\omega\,. \tag{8.2.9}$$

8.3 Correlação cruzada e autocorrelação

8.3.1 Introdução

Considere $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ dois vetores e θ o ângulo entre eles. Temos,

$$cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\parallel \vec{\mathbf{u}} \parallel\, \parallel \vec{\mathbf{v}} \parallel}$$

À medida que $\vec{\mathbf{u}}$ se *aproxima* de $\vec{\mathbf{v}}$, o produto escalar $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$ se torna maior.

Analogamente, tratamos com funções. Sejam f e g duas funções, o produto interno entre elas é definido por:

$$< f, g >= \int_{t_1}^{t_2} f(t)\cdot g(t)dt\,.$$

Assim, quanto mais *semelhantes* forem f e g, maior será o valor de $< f, g >$.

Definição 8.3. *Sejam $x = x(t)$ e $y = y(t)$ sinais determinísticos. Definimos, a correlação cruzada dos sinais x e y por*

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)\, dt \tag{8.3.10}$$

Definição 8.4. *A autocorrelação do sinal x é definida por*

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt\,. \tag{8.3.11}$$

Observe que $R_{xy}(\tau) = R_{xy}(-\tau)$ e $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$.

Temos,

$$\begin{aligned} ll\mathcal{F}\{R_x(\tau)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dtd\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau}x(t)x(t+\tau)d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau}x(t+\tau)d\tau dt\,. \end{aligned}$$

Fazendo $u = t + \tau \Longrightarrow du = d\tau$, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{R_x(\tau)\} &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{i\omega t}dt\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega u}x(u)du\right)\\ &= X(-\omega)X(\omega) = X^*(\omega)X(\omega) = \mid X(\omega)\mid^2\end{aligned}$$

OBS:

A convolução entre as funções f e g é dada por

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\,.$$

Consideremos $f(t) = x(t)$ e $g(t) = x(-t)$.

Assim,

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(-(t-\tau))d\tau\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(\tau - t)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(t+\tau)d\tau\\ &= R_x(t)\,.\end{aligned}$$

8.4 Densidade espectral de potência para sinais aleatórios

Definição 8.5. *Definimos a densidade espectral de potência de um processo estocástico $X(t)$ como a média das densidades espectrais de potência de todas as funções amostra. Isto é,*

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to+\infty} E\left[\frac{\mid \widehat{X}_T(\omega)\mid^2}{T}\right] \qquad (8.4.12)$$

sendo $\widehat{X_T}(\omega) = \mathcal{F}\{X_T(t)\}$, com $X_T(t) = X(T)G_T(t)$. G_T a função porta de largura T.

Teorema 8.2. *Seja $X(t)$ um processo estocástico estacionário no sentido amplo. Vamos provar que $S_x(\omega) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$.*

Demonstração:

Temos,

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to+\infty} E\left[\frac{\mid \widehat{X}_T(\omega)\mid^2}{T}\right]\,.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
|\ \widehat{X}_T(\omega)\ |^2 &= \widehat{X}_T(\omega)\widehat{X}_T(-\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t_1} x_T(t_1)dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t_2} x_T(t_2)dt_2 \\
&= \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t_1} x(t_1)dt_1 \int_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega t_2} x(t_2)dt_2 \\
&= \int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega(t_1-t_2)} x(t_1)x(t_2)dt_1 dt_2\,.
\end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to+\infty} E\left[\frac{|\ X_T(\omega)\ |^2}{T}\right] &= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega(t_1-t_2)} E[x(t_1)x(t_2)]dt_1 dt_2 \\
&= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega(t_1-t_2)} R_x(t_1-t_2)dt_1 dt_2\,.
\end{aligned}$$

Façamos $\tau = t_1 - t_2 \Rightarrow d\tau = dt_1$ e, depois, $t_2 = t$. Obtemos, assim,

$$\begin{aligned}
S_X(\omega) &= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{(-T/2)-t}^{(T/2)-t} e^{-i\omega\tau}R_x(\tau)d\tau dt \\
&\quad ***\text{mudando a ordem de integração}*** \\
&= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\left[\int_{-T}^{0}\int_{(-T/2)-\tau}^{T/2} e^{-i\omega\tau}R_x(\tau)dtd\tau + \int_{0}^{T}\int_{-T/2}^{(T/2)-\tau} e^{-i\omega\tau}R_x(\tau)dtd\tau\right] \\
&= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\left[\int_{-T}^{0} e^{-i\omega\tau}R_x(\tau)(T+\tau)d\tau + \int_{0}^{T} e^{-i\omega\tau}R_x(\tau)(T-\tau)d\tau\right] \\
&= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} e^{-i\omega\tau}R_x(\tau)(T-\mid\tau\mid)d\tau \\
&= \lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T} e^{-i\omega\tau}R_x(\tau)\left(1-\mid\frac{\tau}{T}\mid\right)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}\,.
\end{aligned}$$

OBS: Devemos observar que potência média de $X(t)$ é o seu segundo momento e é dada por

$$E[X^2(t)] = R_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{S_X(\omega)}{2\pi}d\omega\ .$$

Temos,

$$R_X(\tau) = C_X(\tau) + m_X^2 \Rightarrow S_X(\omega) = \mathcal{F}\{C_X(\tau)\} + m_X^2\cdot 2\pi\delta(\omega)$$

Observe que m_X é a componente "dc"de $X(t)$.

Para processos estocásticos conjuntamente estacionários no sentido amplo, definimos a densidade espectral cruzada por $S_{XY}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{XY}(\tau)\}$, onde

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t+\tau)Y(t)].$$

Exemplo 8.1. *Considere o processo estocástico* $X(t) = acos(\omega_0\, t + \Theta)$, *sendo* Θ *uma variável aleatória uniformemente distribuída em* $[0, 2\pi]$.

Determine:

(i) $R_X(\tau)$
(ii) $S_X(\omega)$
(iii) *A potência média do sinal*

Solução:

(i) Primeiro, vamos verificar que o processo estocástico $X(t)$ é estacionário no sentido amplo. Temos,

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E[acos(\omega_0\, t + \Theta)] = \int_0^{2\pi} acos(\omega_0 t + \theta)\frac{1}{2\pi}\, d\theta \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= E[acos(\omega_0\, t_1 + \Theta)acos(\omega_0\, t_2 + \Theta)] \\ &= \frac{a^2}{2}E[cos(\omega_0(t_1+t_2) + 2\Theta) + cos(\omega_0(t_1 - t_2))] \\ &= \frac{a^2}{2}cos(\omega_0(t_1 - t_2)) \\ &= \frac{a^2}{2}cos(\omega_0\tau)\ ,\ \tau = t_1 - t_2\,. \end{aligned}$$

Como $E[X(t)] =$ constante $= 0$ e $R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau)$, $X(t)$ é um processo estocástico estacionário no sentido amplo.

Também, $R_X(\tau) = \dfrac{a^2}{2}cos(\omega_0\tau)$.

(ii) Temos,

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \frac{a^2}{2}cos(\omega_0\tau) \Rightarrow S_X(\omega) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\} \\ &= \frac{a^2}{2}\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]\,. \end{aligned}$$

(iii) A potência média do sinal é dada por

$$E[X^2(t)] = R_X(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)d\omega = \frac{a^2}{2}\,.$$

Exemplo 8.2. *A densidade espectral de potência de um processo chamado de "processo de ruído branco", estacionário no sentido amplo, com componentes de freqüência limitadas em $-\Omega \leq \omega \leq \Omega$ é dada por:*

$$S_X(\omega) = \frac{N_0}{2}\ ,\ -\Omega \leq \omega \leq \Omega$$

Determine:

(i) *A potência média do processo*
(ii) *A função autocorrelação do processo*
(iii) *A autocorrelação quando $\Omega \to +\infty$.*

Solução:
(i) A potência média do processo é dada por

$$\begin{aligned} E[X^2(t)] &= R_X(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega}^{+\omega} \frac{N_0}{2}d\omega = \frac{N_0\Omega}{2\pi} \end{aligned}$$

(ii) Temos,

$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\frac{N_0}{2}G_{2\Omega}(\omega)\}\,.$$

sendo $G_{2\Omega} = \begin{cases} 1\ ,\ -\Omega < \omega < \Omega \\ 0\ ,\ \text{caso contrário} \end{cases}$

Sabemos que $\mathcal{F}\{G_{2\Omega}\}(t) = 2\Omega Sa(\omega\Omega)$, sendo

$$Sa(x) = \begin{cases} \dfrac{senx}{x}\ ,\ x \neq 0 \\ 1\ ,\ x = 0\,. \end{cases}$$

Assim, $\mathcal{F}\{2\Omega Sa(\tau\Omega)\} = 2\pi G_{2\Omega}(-\omega) = 2\pi G_{2\Omega}(\omega)$.

Portanto, $\mathcal{F}\left\{\frac{N_0\Omega}{2}Sa(\tau\Omega)\right\} = \frac{N_0}{2}\pi G_{2\Omega}(\omega)$.

Logo, $R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\frac{N_0}{2}\pi G_{2\Omega}(\omega)\} = \frac{N_0\Omega}{2}Sa(\Omega\tau)$.

(iii) Quando $\Omega \to +\infty$, temos que $S_X(\omega) \to \dfrac{N_0}{2}$.

Consequentemente, $R_X(\tau) \to \dfrac{N_0\delta(\tau)}{2}$.

8.5 Resposta de sistemas lineares a sinais aleatórios

Considere um sistema com sinal de entrada $X(t)$ e saída $Y(t)$ tal que $Y(t) = T[X(t)]$, sendo T uma transformação linear e invariante no tempo.

OBS:
(i) T linear $\Rightarrow T[\alpha X_1 + \beta X_2] = \alpha T[X_1] + \beta T[X_2]$

(ii) T invariante no tempo $\Rightarrow T[X(t-s)] = Y(t-s)$.

A resposta ao impulso deste sistema é definida por $h(t) = T[\delta(t)]$ e a resposta a uma entrada arbitrária $X(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} Y(t) &= h(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)X(t-s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s)X(s)ds\,. \end{aligned}$$

A função resposta em frequência é dada por

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt\,.$$

Se a entrada do sistema linear invariante no tempo for um processo estocástico $X(t)$ então

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)X(t-s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s)X(s)ds.$$

E a média de $Y(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)X(t-s)ds\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)E[X(t-s)]ds \Rightarrow m_Y(t) = m_X(t) * h(t)\,. \end{aligned}$$

Devemos observar que se $X(t)$ é estacionário no sentido amplo então $m_Y(t) = H(0)m_X$.

A função autocorrelação de $Y(t)$ (estacionário no sentido amplo) é dada por

$$\begin{aligned}
R_Y(t_1,t_2) &= E[Y(t_1)Y(t_2)] = E[Y(t)Y(t+\tau)] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t-s)h(s)ds \int_{-\infty}^{+\infty} X(t+\tau-r)h(r)dr\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)h(r)E[X(t-s)X(t+\tau-r)]drds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)h(r)R_X(\tau+s-r)dsdr\,.
\end{aligned}$$

Considerando $X(t)$ estacionário no sentido amplo, R_X dependerá só de τ e, consequentemente, $E[Y(t)Y(t+\tau)]$ dependerá só de τ.

Como $E[Y(t)]$ é constante, concluímos que $Y(t)$ é estacionário no sentido amplo.

A densidade espectral de $Y(t)$ é dada por

$$\begin{aligned}
S_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_Y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)h(r)R_X(u)e^{-j\omega(u-s+r)}dsdrdu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)e^{j\omega s}ds \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)e^{-j\omega r}dr \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(u)e^{-j\omega u}du \\
&= H^*(\omega)H(\omega)S_X(\omega) = \mid H(\omega)\mid^2 S_X(\omega)\,.
\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
R_{YX}(\tau) &= E[Y(t+\tau)X(t)] = E\left[X(t)\int_{-\infty}^{+\infty} X(t+\tau-r)h(r)dr\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t)X(t+\tau-r)]h(r)dr \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau-r)h(r)dr = R_X(\tau) * h(\tau)
\end{aligned}$$

E, $S_{YX}(\omega) = H(\omega)S_X(\omega)$.

Como $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$, temos:

$$S_{XY}(\omega) = S^*_{YX}(\omega) = H^*(\omega)S_X(\omega)\,.$$

Resumo:

(i) $S_X(\omega) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}$

(ii) $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$

(iii) $m_Y(t) = m_X(t) * h(t)$

(iv) $S_Y(\omega) =\mid H(\omega)\mid^2 S_X(\omega) = H^*(\omega)H(\omega)S_X(\omega)$

(v) $S_{XY}(\omega) = S^*_{YX}(\omega) = H^*(\omega)S_X(\omega)$

(vi) $S_{YX}(\omega) = H(\omega)S_X(\omega)$

Exemplo 8.3. *Encontre a densidade espectral da saída de um sistema linear invariante no tempo,c om função resposta em freqüência $H(\omega)$, cuja entrada é um processo de ruído branco, com densidade espectral de potência $\dfrac{N_0}{2}$.*

Solução:

Temos, $S_X(\omega) = \dfrac{N_0}{2}$, $\forall\omega$. Logo, $S_Y(\omega) =\mid H(\omega)\mid^2 \dfrac{N_0}{2}$.

Exemplo 8.4. *Ache a função resposta ao impulso de um filtro causal que pode ser usado para gerar um processo aleatório gaussiano com função autocorrelação dada por $R_Y(\tau) = \dfrac{\sigma^2}{2\alpha}e^{-\alpha|\tau|}$.*

Solução:

Temos, $R_Y(\tau) = \dfrac{\sigma^2}{2\alpha}e^{-\alpha|\tau|} \Rightarrow S_Y(\omega) = \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2+\omega^2}$.

Podemos escrever $S_Y(\omega) = \dfrac{1}{(\alpha+j\omega)(\alpha-j\omega)}\sigma^2$.

Como, $S_Y(\omega) = H(\omega)H(-\omega)S_X(\omega)$, temos $H(\omega) = \dfrac{1}{\alpha+j\omega}$ ..

Consequentemente, $h(t) = e^{-\alpha t}$, $t \geq 0$.

8.6 Exercícios

(1) Seja $A(t)$ um processo estocástico estacionário no sentido amplo. Considere $X(t)$ o processo estocástico dado por $X(t) = A(t)cos(\omega_c t + \Theta)$, onde Θ é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[0, 2\pi]$ e que as variáveis aleatórias Θ e $A(t)$ são independentes. Calcule $R_X(\tau)$ e $S_X(\omega)$, em função de $R_A(\tau)$ e de $S_A(\omega)$.

(2) Considere $X(t)$ um processo estocástico estacionário no sentido amplo e $Y(t) = X(t-d)\,,\ d > 0$.

(i) Prove que $Y(t)$ também é estacionário no sentido amplo.

(ii) Prove que $X(t)$ e $Y(t)$ são conjuntamente estacionários no sentido amplo.

(iii) Determine as expressões de $R_{YX}(\tau)$, $S_{YX}(\omega)$, $R_Y(\tau)$ e $S_Y(\omega)$.

(3) Um processo estocático $X(t)$ com função autocorrelação dada por

$$R_X(\tau) = e^{-4\pi\tau^2}$$

é a entrada de um filtro linear e invariante no tempo com função resposta em frequência dada por

$$H(\omega) = \begin{cases} 1\ ,\ 0 \leq \mid \omega \mid \leq 2 \\ 0\ ,\ \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine:

(i) A potência média de $X(t)$

(ii) A densidade espectral da saída $S_Y(\omega)$

(iii) A potência média da saída $Y(t)$

(4) Considere $X(t)$ e $Y(t)$ processos estocásticos estacionários no sentido amplo. Prove que a densidade espectral cruzada $S_{YX}(\omega)$ satisfaz:

$$S_{YX}(\omega) = S_{XY}(-\omega) = [S_{XY}(\omega)]^*$$

sendo $*$ denotando o conjugado.

Bibliografia

[1] A. Leon-Garcia, "Probability and Random Processes for Electrical Engineering", second edition, Addinson-Wesley Publishing Company, 1994.

[2] A. Papoulis e S. U. Pillai, "Probability, Random Variables, and Stochastic Processes", Ed. McGraw-Hill Education, fourth edition, 2002.

[3] B. Oksendal, "Stochastic Differential Equations, an Introduction with Applications", sixth edition, Univsersitext, Springer-Verlag, 2003.

[4] B. P. Lathi, "Sistemas de Comunicação", Editora Guanabara, 1979.

[5] H. P. Hsu, "Probability, random variables and stochastic processes", Ed. McGraw-Hill, 1996.

[6] J. P. de A. e Albuquerque, J. M. P. Fortes e W. A. Finamore, "Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos", Editora PUC-Rio, Editor Interciência, 2008.

[7] L. Arnold, "Random Dynamical Systems", Springer-Verlag, 1998.

[8] M. Emery, "Stochastic calculus in manifolds", Universitext, Springer Verlag, 1990.

[9] M. R. Spiegel, "Probabilidade e estatística", Ed. McGraw-Hill, 1978.

[10] W. B. Davenport Jr., "Probability and random processes, an introduction for applied scientists and engineers", Ed. McGraw-Hill, 1987.

Índice