

**Volume 66, 2012**

**Editores**

**Cassio Machiaveli Oishi**

Universidade Estadual Paulista - UNESP  
Presidente Prudente, SP, Brasil

**Fernando Rodrigo Rafaeli**

Universidade Estadual Paulista - UNESP  
São José do Rio Preto, SP, Brasil

**Rosana Sueli da Motta Jafelice (Editor Chefe)**

Universidade Federal de Uberlândia - UFU  
Uberlândia, MG, Brasil

**Rubens de Figueiredo Camargo**

Universidade Estadual Paulista - UNESP  
Bauru, SP, Brasil

**Sezimária de Fátima P. Saramago**

Universidade Federal de Uberlândia - UFU  
Uberlândia, MG, Brasil

**Vanessa Avansini Botta Pirani (Editor Adjunto)**

Universidade Estadual Paulista - UNESP  
Presidente Prudente, SP, Brasil



A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7)**, as **figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página  
[http://www.sbmac.org.br/p\\_notas.php](http://www.sbmac.org.br/p_notas.php)



# MODELAGEM ESTOCÁSTICA E QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS

José Eduardo Souza de Cursi  
souza@insa-rouen.fr

Laboratoire d'Optimisation et Fiabilité en Mécanique des Structures  
Institut National des Sciences Appliquées de Rouen

Rubens Sampaio  
rsampaio@puc-rio.br

Departamento de Engenharia Mecânica  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil  
2012

Coordenação Editorial: Elbert Einstein Nehrer Macau

Coordenação Editorial da Série: Rosana Sueli da Motta Jafelice

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2012 by José Eduardo Souza de Cursi e Rubens Sampaio. Direitos reservados, 2012 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

**Catálogo elaborado pela Biblioteca do IBILCE/UNESP  
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner**

Souza de Cursi, José E.

Modelagem Estocástica e Quantificação de Incertezas -

São Carlos, SP :

SBMAC, 2012, 344 p., 21.5 cm - (Notas em Matemática Aplicada; v. 66)

e-ISBN 978-85-8215-024-5

1. Modelagem Estocástica 2. Quantificação de Incertezas  
3. Variabilidade

I. Souza de Cursi, José E. II. Sampaio, Rubens III. Título.  
IV. Série

CDD - 51

# Agradecimentos

Os autores agradecem ao Projeto de Cooperação Internacional Brasil-França, *Capes-Cofecub*, número 672/10, ao *Projeto Pro-Engenharia*, número 086/2008, ao *CNPq*, e a *FAPERJ* pelo suporte que possibilitou a preparação dessas Notas. Agradecem também ao INSA de Rouen e a PUC-Rio pelo suporte e a Roberta de Queiroz Lima pela ajuda na preparação do texto.



# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>13</b>
<b>1 Elementos de Teoria das Probabilidades e dos Processos Estocásticos</b>	<b>17</b>
1.1 Notação . . . . .	17
1.2 Características numéricas de populações finitas . . . . .	18
1.3 Duplas de características numéricas . . . . .	21
1.4 Propriedades hilbertianas das características numéricas . . . . .	25
1.4.1 Média e aproximação por uma constante . . . . .	26
1.4.2 Correlação linear e aproximação afim . . . . .	27
1.4.3 Esperança condicional e melhor aproximação . . . . .	27
1.5 Medida e Probabilidade . . . . .	29
1.6 Construção de medidas . . . . .	32
1.6.1 Conjuntos mensuráveis . . . . .	32
1.6.2 Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^p$ . . . . .	37
1.6.3 Funções equivalentes . . . . .	38
1.6.4 Integrais . . . . .	41
1.6.5 Medidas definidas por densidades . . . . .	46
1.7 Medidas, probabilidade e integrais em espaços de dimensão infinita	47
1.7.1 Medidas Finitas em Espaços de Hilbert de dimensão infinita	51
1.7.2 Integração com uma medida sobre um espaço de Hilbert de dimensão infinita . . . . .	55
1.8 Variáveis aleatórias . . . . .	57
1.8.1 Duplas de variáveis aleatórias . . . . .	65
1.9 Propriedades Hilbertianas . . . . .	67
1.9.1 Aproximação . . . . .	68
1.10 Seqüências de variáveis aleatórias . . . . .	72
1.10.1 Convergência em média quadrática . . . . .	72
1.10.2 Convergência em média . . . . .	73

1.10.3	Convergência em probabilidade . . . . .	73
1.10.4	Convergência quase certa . . . . .	74
1.10.5	Convergência em lei . . . . .	74
1.10.6	Relações entre as convergências . . . . .	75
1.11	Variáveis gaussianas . . . . .	75
1.11.1	Lei Uniforme . . . . .	75
1.11.2	Lei Normal . . . . .	76
1.11.3	Vetores gaussianos . . . . .	77
1.11.4	Amostras gaussianas . . . . .	81
1.12	Processos estocásticos . . . . .	86
1.13	Processo de Wiener . . . . .	90
1.14	Integrais de Ito . . . . .	92
1.14.1	Integrais com relação ao tempo . . . . .	92
1.14.2	Integrais com relação a um processo . . . . .	94
1.14.3	Integrais com relação a um processo de Wiener . . . . .	96
1.15	Cálculo de Ito . . . . .	98
1.15.1	Fórmula de Ito . . . . .	98
1.15.2	Difusões estocásticas de Ito . . . . .	102
<b>2</b>	<b>Máximo de Entropia e Informação</b>	<b>107</b>
2.1	Princípio da Máxima Entropia . . . . .	108
2.1.1	Variáveis aleatórias discretas . . . . .	109
2.1.2	Variáveis aleatórias contínuas . . . . .	113
2.1.3	Vetores aleatórios . . . . .	121
2.1.4	Matrizes aleatórias . . . . .	125
2.2	Geração de amostras de variáveis aleatórias, vetores aleatórios e processos estocásticos . . . . .	128
2.2.1	Processos estocásticos . . . . .	130
2.3	Expansão de Karhunen-Loève . . . . .	131
2.3.1	Expansão de KL aplicada a processos estocásticos gaussianos	134
2.3.2	Exemplos numéricos da expansão de KL . . . . .	134
2.3.3	O processo de discretização . . . . .	135
2.3.4	Estimativas de um processo estocástico . . . . .	135
2.3.5	Estimativas dos autovalores e autofunções da expansão de KL	137
2.3.6	Estimativas das variáveis aleatórias da expansão de KL . . .	141
2.4	Geração de realizações processos estocásticos a partir da expansão de KL . . . . .	141

<b>3</b>	<b>Representação de Variáveis Aleatórias</b>	<b>147</b>
3.1	Aproximações baseadas em propriedades hilbertianas . . . . .	147
3.1.1	Melhor aproximação de $Y$ por uma função arbitrária de $X$ : esperança condicional . . . . .	148
3.1.2	Aproximação por uma constante: média . . . . .	151
3.1.3	Aproximação afim: correlação linear . . . . .	153
3.1.4	Aproximação polinomial . . . . .	156
3.1.5	Aproximação em um subespaço de dimensão finita . . . . .	158
3.1.6	Aproximação através de uma família total . . . . .	162
3.2	Aproximações baseadas em propriedades estatísticas (ajuste de mo- mentos) . . . . .	172
3.3	Aproximações baseadas em interpolações (colocação) . . . . .	177
<b>4</b>	<b>Sistemas Lineares Incertos</b>	<b>179</b>
4.1	Representação de soluções de sistemas lineares incertos . . . . .	180
4.1.1	Caso de distribuições conhecidas. . . . .	181
4.1.2	Caso de distribuições desconhecidas . . . . .	186
4.2	Representação de autovalores e autovetores de matrizes incertas . . . . .	190
4.2.1	Determinação da distribuição de um autovalor ou autovetor por colocação . . . . .	191
4.2.2	Determinação da distribuição de autovetores ou autovalores por ajuste de momentos . . . . .	193
4.2.3	Representação dos autovalores extremos através de otimização	196
4.2.4	Potências iteradas . . . . .	197
4.2.5	Subespaços iterados, ou iterações de Krylov . . . . .	201
4.3	Métodos estocásticos para sistemas lineares determinísticos . . . . .	204
<b>5</b>	<b>Equações Algébricas Não Lineares com Parâmetros Aleatórios</b>	<b>209</b>
5.1	Sistemas de equações algébricas não lineares . . . . .	209
5.1.1	Colocação . . . . .	210
5.1.2	Ajuste de momentos . . . . .	213
5.1.3	Aproximação variacional . . . . .	215
5.1.4	Adaptação de métodos iterativos . . . . .	218
5.2	Resolução de sistemas de equações não lineares determinísticos . . . . .	222
<b>6</b>	<b>Equações Diferenciais com Incertezas</b>	<b>227</b>
6.1	Representação de soluções de equações diferenciais lineares . . . . .	228
6.2	Representação das soluções de equações diferenciais não lineares . . . . .	234
6.3	Representação de soluções de equações diferenciais parciais . . . . .	236
6.3.1	Equações lineares . . . . .	236
6.3.2	Equações não lineares . . . . .	238
6.3.3	Equações de evolução . . . . .	238

6.4	Redução de sistemas hamiltonianos . . . . .	240
6.4.1	Sistemas hamiltonianos . . . . .	240
6.4.2	Redução de sistemas hamiltonianos autônomos . . . . .	242
6.5	Solução local de Equações diferenciais determinísticos através de simulação estocástica . . . . .	244
6.5.1	Equações diferenciais ordinárias . . . . .	244
6.5.2	Equações diferenciais parciais elípticas . . . . .	247
6.5.3	Equações diferenciais parciais parabólicas . . . . .	249
6.5.4	Diferenças finitas . . . . .	250
6.6	Estatísticas de sistemas dinâmicos . . . . .	252
6.6.1	Cálculo de estatísticas do ciclo-limite . . . . .	254
<b>7</b>	<b>Otimização em Presença de Incertezas</b>	<b>257</b>
7.1	Representação de soluções em otimização sem restrições . . . . .	258
7.1.1	Colocação . . . . .	259
7.1.2	Ajuste de momentos . . . . .	261
7.1.3	Otimização estocástica . . . . .	262
7.1.4	Adaptação de métodos iterativos . . . . .	265
7.1.5	Equações do ponto de ótimo . . . . .	267
7.2	Métodos estocásticos para a otimização determinística . . . . .	268
7.2.1	Versão 1: descida estocástica . . . . .	271
7.2.2	Versão 2: dinâmica de Metropolis . . . . .	280
7.2.3	Versão 3: Métodos híbridos . . . . .	289
7.3	Métodos utilizando populações. . . . .	298
7.4	Determinação de pontos de partida . . . . .	299
<b>8</b>	<b>Otimização Baseada em Confiabilidade</b>	<b>309</b>
8.1	A situação-modelo . . . . .	310
8.2	Índice de confiabilidade . . . . .	312
8.3	FORM . . . . .	313
8.4	Método a dois níveis (bi-level ou double-loop) . . . . .	314
8.5	Método a um nível (one-level ou single-loop) . . . . .	315
8.6	Coefficientes de segurança ótimos . . . . .	317
<b>9</b>	<b>Exercícios</b>	<b>321</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>334</b>





# Prefácio

Durante muito tempo prevaleceu na Física uma visão determinística da natureza. Por exemplo, a Mecânica era completamente descrita pelas leis de Newton, de forma que conhecendo-se as condições iniciais do sistema mecânico seria possível descrever seu comportamento. Essa era a visão de Lagrange, que prevaleceu do século 18 até a metade do século 20. Essa visão panglossiana foi sendo, pouco a pouco, questionada, principalmente com o surgimento da Termodinâmica, que desconstrói a crença em reversibilidade e inicia o estudo de sistemas estocásticos complexos. Porém, foi a descoberta do caos que indiscutivelmente mostrou que a situação não era tão simples, mas ainda em um contexto determinístico. Ou seja, caos parece estocástico, mas não é. A teoria quântica, por outro lado, mostrou que, na sua essência, os processos da natureza não são determinísticos, mas sim probabilísticos. Essa mudança de paradigma ainda não foi inteiramente absorvida, como é bem descrito no livro de Thomas Kuhn, que discute aspectos sociológicos das ciências.

Por outro lado, modelagem estocástica começa com o estudo de jogos de azar (dados, baralho, roleta, etc). Os egípcios já jogavam dados. Porém nesse contexto modelagem estocástica se confunde com combinatória e não é nisso que estamos interessados. Nos interessa modelos contínuos.

Modelagem estocástica é mais difícil do que modelagem determinística, e a implementação dos modelos é muito mais custoso. Vejamos um pequeno exemplo: no caso mais simples de modelagem determinística os parâmetros do modelo são constantes. Seu equivalente em modelagem estocástica é transformar essas constantes em variáveis aleatórias. Para cada realização da variável aleatória o seu valor é uma constante, mas essa constante pode ser diferente para outras realizações e as realizações seguem uma distribuição de probabilidade. Ou seja, os objetos mais simples de um modelo estocástico, as variáveis aleatórias, são funções, portanto objetos de dimensão infinita. Em um modelo determinístico, se ele é coerente, temos uma solução uma vez fixadas condições suplementares. Em um modelo estocástico não é assim. Para cada realização dos parâmetros do modelo temos um modelo determinístico que tem uma solução, e temos que fazer estatísticas dessas

solução para sabermos como elas se distribuem; o que interessa em modelagem estocástica é a distribuição de probabilidade. Os valores obtidos para uma realização não representam o comportamento de um sistema estocástico. Para que verdades desse tipo fossem absorvidas pela indústria foram necessários anos de *controle de qualidade*, que não funcionava, até que a modelagem estocástica fosse promovida a ferramenta essencial de engenharia. Daí o grande interesse atual em Fiabilidade, que representa uma nova maneira de projetar sistemas levando em conta incertezas.

Ou seja, podemos pensar que a solução de um modelo probabilístico pode ser decomposta em três etapas: geração dos objetos estocásticos segundo as distribuições de probabilidade, solução de um modelo determinístico associado a cada realização e, finalmente, fazer estatísticas das soluções encontradas (por exemplo, construindo histogramas). Os histogramas representam a solução de um modelo estocástico. Quando se deseja uma aproximação da solução, muitas vezes, se pode fornecer, por exemplo, a média e a variância da distribuição de probabilidade (histograma). Em alguns casos, como os abordados no capítulo 8, se calcula apenas uma probabilidade, pois os momentos são muito complicados de calcular.

Essas Notas visam divulgar a Modelagem Estocástica e a Quantificação de Incertezas que, cada vez mais, vem crescendo em importância em todas as áreas. No capítulo 1 são discutidas as noções básicas da Teoria de Probabilidades em um contexto hilbertiano, esse capítulo deve ser usado para consulta. Os conceitos de variáveis aleatórias e processos estocásticos são discutidos. No capítulo 2 se discute a construção de um modelo estocástico usando o Princípio da Entropia Máxima, quando no modelo so temos variáveis e vetores aleatórios a construção é relativamente simples, se temos processos e campos estocásticos temos que aproximar esses objetos de dimensão infinita por outro de dimensão finita. Nesse capítulo a questão de geração é discutida, mas sem detalhes. Geração de variáveis e vetores aleatórios, e de processos e campos estocásticos é uma parte essencial de modelagem estocástica e esta ligada a programação.

No capítulo 3 se discute o problema de aproximação de variáveis aleatórias. Os capítulos seguintes são de aplicações. No capítulo 4 se discute sistemas lineares com incertezas, no capítulo 5 se discute sistema não-lineares com incertezas, no capítulo 6 se discute equações diferenciais, e nos dois capítulos seguintes, 7 e 8, se discute problemas de otimização com incertezas. Finalmente, no capítulo final, 9, alguns exercícios são propostos. Esses exercícios são parte integral do texto e devem ser trabalhados. Não foram propostos exercícios após cada capítulo pois não seria coerente com o espírito do livro; os exercícios propostos exigem que o aluno tenha compreendido vários capítulos.

O livro não corresponde ao que pode ser coberto em um mini-curso, ele é muito mais uma fonte de consulta pois os exemplos foram escolhidos para mostrar ideias, sem preocupação de eficiência numérica.

Saint-Etienne du Rouvray e Rio de Janeiro , 01 de abril de 2011.

Eduardo Souza de Cursi  
Rubens Sampaio



# Capítulo 1

## Elementos de Teoria das Probabilidades e dos Processos Estocásticos

A noção fundamental da teoria que apresentamos é aquela de *variável aleatória*, isto é, a de uma função para a qual os valores pontuais não são disponíveis ou não são o objeto de interesse.

Exemplos simples de variáveis aleatórias são fornecidos pelos *características numéricas de populações finitas*, rapidamente introduzidas na seção 1.2. A formulação geral é construída através das noções de *medida e probabilidade* (seção 1.5).

### 1.1 Notação

Seja  $\mathbb{N}$  o conjunto dos números naturais e  $\mathbb{N}^*$  o conjunto dos naturais estritamente positivos.  $\mathbb{R}$  é o conjunto dos números reais  $(-\infty, +\infty)$  e  $\mathbb{R}_e$  representa os reais estendidos:  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  representa um intervalo aberto de números reais.

Para um inteiro  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{R}^k = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) : x_n \in \mathbb{R}, 1 \leq n \leq k\}$  representa o conjunto das  $k$ -uplas de números reais. Utilizamos uma notação análoga para  $\mathbb{R}_e^k$ . Denotamos por  $|\bullet|_p$  a norma  $p$  usual de  $\mathbb{R}^k$ .

## 1.2 Características numéricas de populações finitas

Levantamentos de características numéricas de populações finitas são regularmente obtidos através de recenseamentos. Por exemplo, o número de habitantes, a renda familiar, o tipo de habitação e outros dados análogos podem ser periodicamente verificados.

Do ponto de vista matemático, uma característica numérica  $X$  da população finita  $\Omega$  é uma aplicação  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Uma particularidade importante dos recenseamentos reside no fato de que não estamos geralmente interessados no valor  $X(\omega)$  da característica numérica para um indivíduo particular  $\omega \in \Omega$ , mas em caracterizar *globalmente* o comportamento de  $X$  para a população  $\Omega$ : qual a porcentagem da população com idade inferior ou superior a certos limites, qual a fatia da população dispondo de uma certa renda, etc. Assim, encontramos frequentemente o seguinte quadro:

1.  $\Omega = \{\omega^1, \dots, \omega^N\}$  é uma população finita não vazia ( $N \geq 1$ )
2.  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma característica numérica tendo por imagem um conjunto de  $k$  valores distintos:  $X(\Omega) = \{X_1, \dots, X_k\}$ ,  $X_i \neq X_j$  para  $i \neq j$ . Como os valores são distintos, podem ser ordenados de forma estritamente crescente caso desejemos: caso necessário, podemos supor  $X_i < X_j$  para  $i < j$  sem perda de generalidade.
3. A pré-imagem do valor  $X_i \in X(\Omega)$  é a subpopulação  $H_i = X^{-1}(\{X_i\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = X_i\}$ . O número de elementos de  $H_i$  é  $\#(H_i) = n_i$  e a *freqüência relativa* ou *probabilidade* de  $X_i$  é  $P(X = X_i) = p_i = n_i/N$ .
4. Se  $A \subset \mathbb{R}$ , definimos  $P(A) = n_A/N$ , onde  $n_A = \#(X^{-1}(A))$  é o número de elementos de  $A$ .

Notemos que

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^k n_i = N.$$

**DEFINIÇÃO 1.2.1.** (MÉDIA, ESPERANÇA SOBRE UMA POPULAÇÃO FINITA) A média, ou esperança, de  $X$  é

$$E(X) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(\omega^n).$$

PROPOSIÇÃO 1.2.2. *A esperança é linear: se  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são duas características numéricas da população  $\Omega$  e  $\alpha, \beta$  são números reais, então*

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y).$$

DEMONSTRAÇÃO: Temos

$$E(\alpha X + \beta Y) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\alpha X(\omega^n) + \beta Y(\omega^n)),$$

de modo que

$$E(\alpha X + \beta Y) = \frac{\alpha}{N} \sum_{n=1}^N X(\omega^n) + \frac{\beta}{N} \sum_{n=1}^N Y(\omega^n) = \alpha E(X) + \beta E(Y).$$

■

DEFINIÇÃO 1.2.3. (VARIÂNCIA SOBRE UMA POPULAÇÃO FINITA) *A variância de  $X$  é*

$$V(X) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (X(\omega^n) - E(X))^2.$$

PROPOSIÇÃO 1.2.4. *Temos*

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

DEMONSTRAÇÃO: Temos

$$(X(\omega^n) - E(X))^2 = (X(\omega^n)^2) - 2E(X)X(\omega^n) + [E(X)]^2,$$

de modo que

$$V(X) = \frac{1}{N} \left[ \sum_{n=1}^N (X(\omega^n)^2) - 2E(X) \sum_{n=1}^N X(\omega^n) + [E(X)]^2 \sum_{n=1}^N 1 \right]$$

e

$$V(X) = E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

■

PROPOSIÇÃO 1.2.5.  $V(X) \geq 0$  e  $V(X) = 0$  se e somente se  $X$  é constante sobre  $\Omega$ .

DEMONSTRAÇÃO: A primeira asserção é imediata, pois trata-se de uma soma de termos não negativos (soma de quadrados). Para a segunda, basta notar que a soma de quadrados só pode ser nula se cada um de seus termos for nulo, de modo que  $X(\omega^n) = E(X)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . ■

COROLÁRIO 1.2.6.  $E(X^2) \geq 0$  e  $E(X^2) = 0$  se e somente se  $X = 0$ .

DEMONSTRAÇÃO: Temos  $E(X^2) = V(X) + [E(X)]^2$ . Assim, por um lado,  $E(X^2) \geq 0$  e, por outro lado,  $E(X^2) = 0$  se e somente se  $V(X) = 0$  e  $E(X) = 0$ . ■

DEFINIÇÃO 1.2.7. (MOMENTOS SOBRE UMA POPULAÇÃO FINITA) O momento de ordem  $p$  de  $X$  é

$$M_p(X) = E(X^p) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (X(\omega^n))^p.$$

Podemos sintetizar a informação sobre o comportamento global de uma característica numérica  $X$  através de uma tabela:

$X_1$	$X_2$	...	$X_k$	ou	$X_1$	$X_2$	...	$X_k$
$p_1$	$p_2$	...	$p_k$		$n_1$	$n_2$	...	$n_k$

**Tabela 1.1** Caracterização global de  $X$  através de uma tabela

Estas tabelas não contém mais informação sobre o valor de  $X$  para um  $\omega \in \Omega$  em particular, mas somente a informação global sobre  $\Omega$ . Entretanto, elas permitem o cálculo de grandezas globais de funções de  $X$  sobre toda a população. Por exemplo,

LEMA 1.2.8. Seja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $Z = g(X)$ . Então

$$E(Z) = \sum_{i=1}^k p_i g(X_i). \quad (1.2.1)$$

DEMONSTRAÇÃO: Como  $\bigcup_{i=1}^k H_i = \Omega$ , temos

$$E(Z) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \left( \sum_{\omega \in H_i} \underbrace{Z(\omega)}_{g(X_i) \text{ sobre } H_i} \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i g(X_i) = \sum_{i=1}^k p_i g(X_i).$$

■

PROPOSIÇÃO 1.2.9.  $M_p(X) = \sum_{i=1}^k p_i X_i^p$ . Em particular,  $E(X) = \sum_{i=1}^k p_i X_i$  e  $E(X^2) = \sum_{i=1}^k p_i X_i^2$ .

DEMONSTRAÇÃO: Basta aplicar o lema precedente. ■

A informação destas tabelas pode ser dada também através de uma *função de repartição* ou *função cumulativa*:

$$F(x) = P(X < x) = P(X \in (-\infty, x)).$$

$x$	$x < X_1$	$x < X_2$	$x < X_3$	...	$x < X_k$	$x < +\infty$
$F(x)$	0	$p_1$	$p_1 + p_2$	...	$p_1 + \dots + p_{k-1}$	1

**Tabela 1.2** Caracterização global de  $X$  através de uma função de repartição

Notemos que  $F$  é derivável no sentido das distribuições e que  $f = F'$  é uma soma de  $k$  massas de Dirac:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k p_i \delta(x - X_i).$$

$f$  é a *densidade de probabilidade* de  $X$ : neste caso, trata-se de uma distribuição - estudaremos mais tarde situações onde esta densidade é uma função usual.

### 1.3 Duplas de características numéricas

Consideremos uma dupla  $(X, Y)$  de duas características numéricas  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $X(\Omega) = \{X_1, \dots, X_k\}$  e  $Y(\Omega) = \{Y_1, \dots, Y_m\}$ . De maneira análoga, a pré-imagem de  $(X_i, Y_j)$  é

$$H_{ij} = X^{-1}(\{X_i\}) \cap Y^{-1}(\{Y_j\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = X_i \text{ e } Y(\omega) = Y_j\}$$

e o número de elementos de  $H_{ij}$  é  $\#(H_{ij}) = n_{ij}$ . A probabilidade de  $(X_i, Y_j)$  é  $P(X = X_i, Y = Y_j) = p_{ij} = n_{ij}/N$ . Podemos sintetizar a informação sobre o comportamento global da dupla  $(X, Y)$  através de uma das seguintes tabelas:

	$Y_1$	...	$Y_m$			$Y_1$	...	$Y_m$
$X_1$	$p_{11}$	...	$p_{1m}$	ou	$X_1$	$n_{11}$	...	$n_{1m}$
...	...	...	...		...	...	...	...
$X_k$	$p_{k1}$	...	$p_{km}$		$X_k$	$n_{k1}$	...	$n_{km}$

**Tabela 1.3** Caracterização global de  $X$  através de tabelas

Neste caso,

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_{ij} = N.$$

Como no caso precedente, estas tabelas permitem o cálculo de somas globais de funções da dupla sobre toda a população:

LEMA 1.3.1. *Seja  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $Z = g(X, Y)$ . Então*

$$E(Z) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m p_{ij} g(X_i, Y_j) . \quad (1.3.2)$$

DEMONSTRAÇÃO: Como  $\bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^m H_{ij} = \Omega$ , temos:

$$\sum_{n=1}^N g(X(\omega^n), Y(\omega^n)) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \left( \sum_{\substack{\omega \in H_{ij} \\ = (X_i, Y_j) \text{ sobre } H_{ij}}} g(X(\omega), Y(\omega)) \right),$$

de modo que

$$\sum_{n=1}^N g(X(\omega^n), Y(\omega^n)) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m p_{ij} g(X_i, Y_j) .$$

■

Temos

$$X^{-1}(\{X_i\}) = H_{i\bullet} = \bigcup_{j=1}^m H_{ij} ; \quad Y^{-1}(\{Y_j\}) = H_{\bullet j} = \bigcup_{i=1}^k H_{ij} ,$$

de modo que

$$P(X = X_i) = p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^m p_{ij} ; \quad P(Y = Y_j) = p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^k p_{ij} .$$

Por conseguinte:

$$E(X) = \sum_{i=1}^k p_{i\bullet} X_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m p_{ij} X_i ;$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^m p_{\bullet j} Y_j = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m p_{ij} Y_j .$$

De maneira análoga

$$V(X) = \sum_{i=1}^k p_{i\bullet} (X_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m p_{ij} (X_i - E(X))^2 ;$$

$$V(Y) = \sum_{j=1}^m p_{\bullet j} (Y_j - E(Y))^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m p_{ij} (Y_j - E(Y))^2 ;$$

$$M_p(X) = \sum_{i=1}^k p_{i\bullet} X_i^p = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m p_{ij} X_i^p ;$$

$$M_p(Y) = \sum_{j=1}^m p_{\bullet j} Y_j^p = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m p_{ij} Y_j^p .$$

Para uma dupla, a função de repartição é

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = P((X, Y) \in (-\infty, x) \times (-\infty, y))$$

e a densidade de probabilidade é

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) .$$

DEFINIÇÃO 1.3.2. (COVARIÂNCIA DE UMA POPULAÇÃO FINITA) A covariância de  $X$  e  $Y$  é

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (X(\omega^n) - E(X))(Y(\omega^n) - E(Y)) .$$

PROPOSIÇÃO 1.3.3. Temos

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) .$$

DEMONSTRAÇÃO: Temos

$$\begin{aligned} & (X(\omega^n) - E(X))(Y(\omega^n) - E(Y)) = \\ & X(\omega^n)Y(\omega^n) - E(X)Y(\omega^n) - E(Y)X(\omega^n) + E(X)E(Y) , \end{aligned}$$

de modo que

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{N} \left[ \sum_{n=1}^N X(\omega^n) Y(\omega^n) - E(X) \sum_{n=1}^N Y(\omega^n) - E(Y) \sum_{n=1}^N X(\omega^n) + E(X) E(Y) \sum_{n=1}^N 1 \right]$$

e

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) \\ &+ E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y) . \end{aligned}$$

■

PROPOSIÇÃO 1.3.4. *Temos*

$$V(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 V(X) + \beta^2 V(Y) + 2\alpha\beta Cov(X, Y) .$$

DEMONSTRAÇÃO: *Temos*

$$(\alpha X + \beta Y)^2 = \alpha^2 X^2 + \beta^2 Y^2 + 2\alpha\beta XY ,$$

$$E\left((\alpha X + \beta Y)^2\right) = \alpha^2 E(X^2) + \beta^2 E(Y^2) + 2\alpha\beta E(XY) .$$

Além disto,

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y) ,$$

de modo que

$$E[(\alpha X + \beta Y)]^2 = \alpha^2 [E(X)]^2 + \beta^2 [E(Y)]^2 + 2\alpha\beta E(X)E(Y) .$$

e

$$\begin{aligned} V(\alpha X + \beta Y) &= \alpha^2 \left( E(X^2) - [E(X)]^2 \right) + \\ &\beta^2 \left( E(Y^2) - [E(Y)]^2 \right) + 2\alpha\beta \left( E(XY) - E(X)E(Y) \right) , \end{aligned}$$

de onde se conclue o resultado enunciado.

■

COROLÁRIO 1.3.5. *Sejam  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  duas características numéricas sobre  $\Omega$ . Então*

$$|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)} .$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Consideremos o polinômio do segundo grau  $f(\alpha) = \alpha^2 V(X) + 2\alpha \text{Cov}(X, Y) + V(Y)$ . Da proposição precedente:  $f(\alpha) = V(\alpha X + Y) \geq 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Assim,

$$\Delta = [2\text{Cov}(X, Y)]^2 - 4V(X)V(Y) \leq 0,$$

de modo que

$$[\text{Cov}(X, Y)]^2 \leq V(X)V(Y)$$

e temos o resultado enunciado. ■

## 1.4 Propriedades hilbertianas das características numéricas

Consideremos o conjunto das características numéricas sobre  $\Omega$  :

$$\mathcal{C}(\Omega) = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

O conjunto das *características numéricas simples* em  $\Omega$  é:

$$\mathcal{V}(\Omega) = \{X \in \mathcal{C}(\Omega) : X(\Omega) \text{ é finito}\}.$$

Como  $\Omega$  é finito, temos  $\mathcal{V}(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)$ . Veremos a seguir situações mais gerais nas quais estes conjuntos não coincidem.

Para  $X, Y \in \mathcal{V}(\Omega)$  consideremos

$$(X, Y) = E(XY). \quad (1.4.3)$$

Então:

LEMA 1.4.1.  $(\bullet, \bullet)$  é um produto escalar em  $\mathcal{V}(\Omega)$ .

DEMONSTRAÇÃO: Trata-se de uma forma bilinear e simétrica.

Além disto,  $(X, X) = E(X^2) \geq 0$  para todo  $X \in \mathcal{V}(\Omega)$ . Enfim, se  $(X, X) = E(X^2) = 0$ , então  $X = 0$ , de modo que a forma é positiva e definida. ■

Seja  $L^2(\Omega)$  o complemento de  $\mathcal{V}(\Omega)$  para o produto escalar definido na equação (1.4.3):  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert para o produto escalar (1.4.3). A norma de um elemento  $X \in L^2(\Omega)$  é

$$\|X\| = \sqrt{E(X^2)}. \quad (1.4.4)$$

A estrutura hilbertiana de  $L^2(\Omega)$  torna possível a utilização de toda teoria de Espaços de Hilbert e dos resultados associados. Utilizaremos no que segue em particular a noção de *projeção ortogonal em um subespaço vetorial* :

DEFINIÇÃO 1.4.2. Sejam  $S \subset L^2(\Omega)$  um subespaço vetorial não vazio e  $X \in L^2(\Omega)$ . A projeção ortogonal  $X$  em  $S$  é o elemento  $PX \in S$  tal que

$$PX = \arg \min \{ \|X - s\| : s \in S \} .$$

Temos

PROPOSIÇÃO 1.4.3. Se  $S$  é fechado então  $PX$  existe e é unico.

DEMONSTRAÇÃO: Cf. [27]. ■

COROLÁRIO 1.4.4. Se  $S$  é de dimensão finita então  $PX$  existe e é unico.

DEMONSTRAÇÃO: Como  $S$  é de dimensão finita, também é fechado (Cf. [27]) ■

PROPOSIÇÃO 1.4.5.  $PX$  é a projeção ortogonal  $X$  em  $S$  se e somente se  $PX \in S$  e  $X - PX$  é ortogonal a  $S$ , isto é,

$$PX \in S \quad e \quad (X - PX, s) = 0, \forall s \in S.$$

DEMONSTRAÇÃO: Cf. [27]. ■

### 1.4.1 Média e aproximação por uma constante

Quando desejamos aproximar o valor de  $X$  por uma constante, podemos buscar o valor de  $m \in \mathbb{R}$  tal que

$$m = \arg \min \{ \|X - \lambda\| : \lambda \in \mathbb{R} \} .$$

Trata-se de uma projeção ortogonal, onde  $S$  é o subespaço vetorial de dimensão 1:

$$S = \{ Z \in L^2(\Omega) : Z \text{ é constante: } Z(\omega) = \lambda \in \mathbb{R}, \forall \omega \in \Omega \}$$

Temos:

$$(X - m, \lambda) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

de modo que

$$\lambda E(X) = \lambda m, \forall \lambda \in \mathbb{R} \iff m = E(X) .$$

Temos

$$\|X - m\| = \sqrt{E((X - E(X))^2)} = \sqrt{V(X)} ,$$

de modo que a norma do erro cometido nesta aproximação é a raiz quadrada da *variância* de  $X$ .

### 1.4.2 Correlação linear e aproximação afim

Quando desejamos aproximar o valor de  $Y$  por uma função afim de outra característica numérica  $X$ , podemos buscar os valores dos parâmetros  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que

$$aX + b = \arg \min \{ \|Y - Z\| : Z = \alpha X + \beta; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} .$$

Trata-se mais uma vez de uma projeção ortogonal, onde  $S$  é o subespaço vetorial de dimensão 2:

$$S = \{ s \in L^2(\Omega) : s = \alpha X + \beta; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} ,$$

Temos:

$$(Y - aX - b, \alpha X + \beta) = 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} .$$

Tomando sucessivamente  $(\alpha, \beta) = (1, 0)$  e  $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ , obtemos

$$aE(X^2) + bE(X) = E(XY) \quad ; \quad aE(X) + b = E(Y) .$$

A solução deste sistema linear é

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \quad ; \quad b = E(Y) - aE(X) .$$

Neste caso,

$$\|Y - aX - b\| = \sqrt{V(Y) \left(1 - [\rho(X, Y)]^2\right)} ,$$

onde

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} .$$

$\rho(X, Y)$  é o *coeficiente de correlação linear* entre  $X$  e  $Y$ . Temos  $|\rho(X, Y)| \leq 1$  e o erro se anula quando  $|\rho(X, Y)| = 1$ .

### 1.4.3 Esperança condicional e melhor aproximação

Quando desejamos aproximar o valor de  $Y$  por uma função genérica de outra característica numérica  $X$ , devemos determinar

$$g(X) = \arg \min \{ \|Y - Z\| : Z = \varphi(X); \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \} .$$

Trata-se ainda de uma projeção ortogonal, onde

$$S = \{ s \in L^2(\Omega) : s = \varphi(X); \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \} .$$

Neste caso, temos:

$$(Y - g(X), \varphi(X)) = 0, \forall \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m p_{ij} (Y_j - g(X_i)) \varphi(X_i) = 0, \forall \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (1.4.5)$$

Sejam  $g_i = g(X_i) \in \mathbb{R}$ ,  $G = (g_1, \dots, g_k) \in \mathbb{R}^k$ ,  $\varphi_i = \varphi(X_i) \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \mathbb{R}^m$ . A equação (1.4.5) se escreve:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m p_{ij} (Y_j - g_i) \varphi_i = 0, \forall \Phi \in \mathbb{R}^m.$$

Consideremos  $\Phi$  tal que  $\varphi_i = 0$  se  $i \neq \ell$  e  $\varphi_\ell = 1$ : temos

$$\sum_{j=1}^m p_{\ell j} (Y_j - g_\ell) = 0 \implies g_\ell = \sum_{j=1}^m p_{\ell j} Y_j / \sum_{j=1}^m p_{\ell j} = \sum_{j=1}^m p_{\ell j} Y_j / p_{\ell \bullet}.$$

A função  $g$  assim definida é chamada de *esperança condicional de  $Y$  com relação a  $X$* . Utilizaremos as notações  $E(Y|X)$  para designar a característica numérica  $Z = g(X)$  e  $E(Y|X = X_\ell)$  para designar o valor de  $g_\ell$ . O erro cometido na aproximação é  $\|Y - E(Y|X)\|$ .

A expressão de  $g_\ell$  faz aparecer o termo  $p_{\ell j}/p_{\ell \bullet}$ , que define a *lei condicional* de  $Y$  com relação a  $X$ :

$$P(Y = Y_j | X = X_i) = \begin{cases} P(X = X_i, Y = Y_j) / P(X = X_i) \\ \quad , \text{ se } P(X = X_i) \neq 0 \\ \\ 0, \text{ nos outros casos.} \end{cases}$$

Temos

$$E(Y | X = X_i) = \sum_{j=1}^m P(Y = Y_j | X = X_i) Y_j.$$

De maneira análoga, a *lei condicional* de  $X$  com relação a  $Y$  é:

$$P(X = X_i | Y = Y_j) = \begin{cases} P(X = X_i, Y = Y_j) / P(Y = Y_j) \\ \quad , \text{ se } \\ \quad P(Y = Y_j) \neq 0 \\ \\ 0, \text{ nos outros casos.} \end{cases}$$

e temos

$$E(X | Y = Y_j) = \sum_{i=1}^k P(X = X_i | Y = Y_j) X_i .$$

As duas características numéricas são *independentes* se e somente se

$$\forall i, j : P(X = X_i | Y = Y_j) = P(X = X_i) \quad \text{ou} \\ P(Y = Y_j | X = X_i) = P(Y = Y_j) ,$$

ou seja

$$\forall i, j : P(X = X_i, Y = Y_j) = P(X = X_i) P(Y = Y_j) .$$

Quando  $X$  e  $Y$  são independentes, temos  $E(Y | X) = E(Y)$  e  $E(X | Y) = E(X)$ .

## 1.5 Medida e Probabilidade

A generalização a universos  $\Omega$  mais gerais (por exemplo infinitos, eventualmente não enumeráveis) é feita através da noção de medida: seja  $\mathbb{R}_e = \mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty \}$  o conjunto dos «reais estendidos». Manipularemos os elementos de  $\mathbb{R}_e$  utilizando as seguintes regras:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \quad \text{e} \\ x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : x - (+\infty) = -(+\infty) + x = -\infty \quad \text{e} \\ x - (-\infty) = -(-\infty) + x = +\infty$$

$$\forall x > 0 : x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty \quad \text{e} \\ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$$

$$\forall x < 0 : x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty \quad \text{e} \\ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$$

$$0 \cdot (+\infty) = 0 \cdot (-\infty) = (+\infty) \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0 \\ (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty ; (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty ; \\ (-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty \\ (+\infty) + (+\infty) = +\infty ; (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

As expressões  $(+\infty) - (+\infty)$ ,  $(-\infty) - (-\infty)$ ,  $(-\infty) + (+\infty)$ ,  $(+\infty) + (-\infty)$  são indeterminadas. Utilizaremos também as relações de ordem:

$$-\infty < +\infty \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R} : x < +\infty \text{ e } x > -\infty$$

DEFINIÇÃO 1.5.1. (MEDIDA)- *Seja  $\Omega$  um conjunto não vazio e  $\mathcal{P}(\Omega)$  o conjunto das partes de  $\Omega$ . Uma medida em  $\Omega$  é uma aplicação  $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_e$  tal que*

(i)  $\mu$  é positiva:  $\mu(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega$ ;

(ii)  $\mu$  é enumeravelmente aditiva, isto é, aditiva para toda família enumerável disjunta:

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n), \forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$$

tal que  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j, \forall i, j \in \mathbb{N}$ ;

(iii)  $\mu(\emptyset) = 0$ .

Diremos que  $\mu$  é uma medida finita em  $\Omega$  quando, além disto,  $\mu(\Omega) \in \mathbb{R}$ , isto é,  $\mu(\Omega) < +\infty$ .

Temos:

PROPOSIÇÃO 1.5.2. *Então  $\mu(\bigcup_{i=1}^n B_i) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i)$  para toda família finita disjunta ( $B_i \cap B_j = \emptyset$  para  $i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$ ).*

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos a família  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  dada por

$$A_i = B_i, i \leq n \quad ; \quad A_i = \emptyset, i > n.$$

Então  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j, \forall i, j \in \mathbb{N}$ , de modo que

$$\begin{aligned} \mu \left( \bigcup_{i=1}^n B_i \right) &\stackrel{\underbrace{=}}{A_k = \emptyset, k > n} \mu \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = \\ &\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) \stackrel{\underbrace{=}}{\mu(A_k) = 0, k > n} \sum_{i=1}^n \mu(B_i) . \end{aligned}$$

■

COROLÁRIO 1.5.3. *Seja  $\mu$  uma medida em  $\Omega$ . Se  $A \subset B \subset \Omega$ , então  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam  $B_1 = A$  e  $B_2 = B - A$ . Então,  $B = B_1 \cup B_2$  e  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ , de modo que

$$\begin{aligned} \mu \left( \bigcup_{i=1}^n B_i \right) &\stackrel{A_k = \emptyset, k > n}{=} \mu \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = \\ &\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) \stackrel{\mu(A_k) = 0, k > n}{=} \sum_{i=1}^n \mu(i) . \end{aligned}$$

■

PROPOSIÇÃO 1.5.4. *Seja  $\mu$  uma medida em  $\Omega$ . Se  $A \subset \Omega$  verifica  $\mu(A) < +\infty$ , então  $\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$ ,  $\forall B \subset \Omega$ .*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam  $B_1 = A - B$  e  $B_2 = A \cap B$ . Então,  $A = B_1 \cup B_2$  e  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ , de modo que

$$\mu(A) = \mu(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2) = \mu(A - B) + \mu(A \cap B) .$$

Ora,  $A - B \subset A$  e  $A \cap B \subset A$ , de forma que

$$\mu(A - B) \leq \mu(A) < +\infty \text{ e } \mu(A \cap B) \leq \mu(A) < +\infty,$$

o que mostra o resultado enunciado.

■

PROPOSIÇÃO 1.5.5. *Sejam  $\mu$  uma medida em  $\Omega$  e  $A, B \subset \Omega$ . Se um dos dois conjuntos tem medida finita ( $\mu(A) < +\infty$  ou  $\mu(B) < +\infty$ ), então  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ .*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $\mu(A) < +\infty$ . Consideremos  $B_1 = A - B$ ,  $B_2 = B$ . Então,  $A \cup B = B_1 \cup B_2$  e  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ , de modo que

$$\mu(A \cup B) = \mu(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2) = \mu(A - B) + \mu(B)$$

e o resultado decorre da proposição precedente. A prova é análoga se supomos  $\mu(B) < +\infty$  (basta considerar  $B_1 = B - A$ ,  $B_2 = A$ ).

■

DEFINIÇÃO 1.5.6. *Seja  $\mu$  uma medida em  $\Omega$  e  $A \subset \Omega$ . Diremos que  $A$  é de  $\mu$ -medida nula se e somente se  $\mu(A) = 0$ . Neste caso, diremos que  $x \in A$  é  $\mu$ -quase nunca satisfeito ou satisfeito  $\mu$ -quase nenhuma parte em  $\Omega$ . De forma recíproca, diremos que  $x \in A$  é  $\mu$ -quase sempre satisfeito em  $\Omega$  ou satisfeito  $\mu$ -quase toda parte em  $\Omega$  se e somente se  $\Omega - A$  é de  $\mu$ -medida nula.*

Quando nenhuma confusão é possível, a medida  $\mu$  não é mencionada e diz-se simplesmente «medida nula», «quase sempre», «quase toda parte», «quase nunca», «quase nenhuma parte». Estas expressões também são freqüentemente abreviadas por «q.s.» para «quase sempre», «q.t.p.» para «quase toda parte», «q.n.» para «quase nunca», «q.n.p.» para «quase nenhuma parte».

Estamos interessados em um tipo particular de medida:

**DEFINIÇÃO 1.5.7.** (PROBABILIDADE)– *Seja  $\mu$  uma medida em  $\Omega$ . Diremos que  $\mu$  é uma probabilidade em  $\Omega$  se e somente se  $\mu(\Omega) = 1$ . Diremos então que  $\mu$  é a distribuição de probabilidade e que a medida  $\mu(A)$  associada ao conjunto  $A$  é a probabilidade de  $A$ , para a qual utilizaremos a notação  $P(x \in A)$  ou simplesmente  $P(A)$  :*

$$P(x \in A) = P(A) = \mu(A) .$$

Toda medida finita  $\nu$  tal que  $\nu(\Omega) > 0$  gera uma probabilidade através da relação:  $\mu(A) = \nu(A) / \nu(\Omega)$ .

Em probabilidades, utiliza-se uma terminologia particular: por exemplo, uma parte  $A \subset \Omega$  é dita um *evento*. As propriedades *quase toda parte* e *quase nenhuma parte* são freqüentemente mencionadas – por exemplo, em enunciados ou demonstrações – sob a forma seguinte:

**DEFINIÇÃO 1.5.8.** *Seja  $P$  uma probabilidade em  $\Omega$  e  $A \subset \Omega$  um evento. Diremos que  $A$  é  $P$ -desprezível ou  $P$ -quase impossível se e somente se  $P(A) = 0$ . De maneira recíproca, diremos que  $A$  é  $P$ -quase certo se e somente se  $\Omega - A$  é  $P$ -desprezível (ou, de forma equivalente,  $P(A) = 1$ ).*

Como para o caso geral, a probabilidade  $P$  nem sempre é mencionada e por vezes diz-se simplesmente «desprezível», «quase impossível», «quase certo». Estas expressões também podem ser abreviadas: «q.i.» para «quase impossível», «q.c.» para «quase certo».

## 1.6 Construção de medidas

### 1.6.1 Conjuntos mensuráveis

Na prática, não é possível definir uma medida utilizando a definição dada na seção precedente pois seria necessário atribuir uma medida a todo subconjunto de  $\Omega$ : por exemplo, para definir uma medida correspondendo à área em  $\mathbb{R}^2$ , torna-se necessário definir *a priori* a área de uma região arbitrária do plano - isto é, temos que calcular a área de uma figura geométrica arbitrária antes de definir o que é a área.

Por esta razão, um procedimento mais eficiente consiste em definir a medida para uma família particular  $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  de subconjuntos de  $\Omega$  e em seguida estender a definição a outras partes de  $\Omega$  utilizando operações de reunião, intersecção e complementos de elementos de  $\mathfrak{B}$ , assim como as propriedades demonstradas na seção precedente. Formalmente, utilizamos uma  $\sigma$ -álgebra :

DEFINIÇÃO 1.6.1.  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$  se e somente se:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ;
- (ii)  $A \in \mathcal{A} \implies \Omega - A \in \mathcal{A}$ ;
- (iii) a reunião de toda família enumerável de elementos de  $\mathcal{A}$  pertence a  $\mathcal{A}$ :  
 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ .

Segue-se desta definição que: se  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são  $\sigma$ -álgebras em  $\Omega$  então  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$ . Esta propriedade se estende a coleções arbitrárias de  $\sigma$ -álgebras em  $\Omega$ : a intersecção de uma coleção de  $\sigma$ -álgebras em  $\Omega$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$ .

Para todo  $\Omega$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $V$ . Assim, para toda família  $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  de subconjuntos de  $\Omega$ , existe pelo menos uma  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$  contendo  $\mathfrak{B}$  (trivialmente,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  satisfaz esta condição). Por conseguinte, podemos considerar a família não vazia das  $\sigma$ -álgebras em  $\Omega$  contendo  $\mathfrak{B}$ . O lema de Zorn (Cf. [27]) mostra que esta família possui um elemento minimal  $\sigma(\mathfrak{B})$ : a menor  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$  contendo  $\mathfrak{B}$ , isto é, a álgebra de Borel  $\Sigma(\Omega, \mathfrak{B})$ , em a qual a medida será formalmente definida, através de uma extensão baseada nas noções de *medida externa* e *medida interna*:

DEFINIÇÃO 1.6.2. Seja  $\mu : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- (i)  $\mu$  é positiva:  $\mu(A) \geq 0, \forall A \in \mathfrak{B}$ ;
- (ii)  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- (iii)  $\mu(\Omega) < +\infty$ .

Seja  $A \subset \Omega$ . A medida externa de  $A$  é

$$\mu^e(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\mathcal{B}_n) : A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n \text{ e } \forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{B}_n \in \mathfrak{B} \right\}$$

A medida interna de  $A$  é

$$\mu^i(A) = \mu(\Omega) - \mu^e(\Omega - A)$$

Diremos que  $A$  é mensurável se e somente se  $\mu_i(A) = \mu_e(A)$  e, neste caso, diremos que esse valor comum é a medida de  $A$ , denotada por  $\mu(A)$ .

Temos:

PROPOSIÇÃO 1.6.3. *Seja  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma(\Omega, \mathfrak{B})$ . Então,*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma(\Omega, \mathfrak{B}) \text{ e } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma(\Omega, \mathfrak{B}).$$

DEMONSTRAÇÃO:  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma(\Omega, \mathfrak{B})$  pela definição de  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$ . De maneira análoga,  $\{\Omega - A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma(\Omega, \mathfrak{B})$ , de modo que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\Omega - A_n) \in \Sigma(\Omega, \mathfrak{B})$  e, por conseguinte,

$$\Omega - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\Omega - A_n) \in \Sigma(\Omega, \mathfrak{B}).$$

Ora,

$$\Omega - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\Omega - A_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [\Omega - (\Omega - A_n)] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

de onde o resultado enunciado. ■

COROLÁRIO 1.6.4. *Seja  $\{B_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \Sigma(\Omega, \mathfrak{B})$ . Então,*

$$\bigcup_{i=1}^n B_i \in \Sigma(\Omega, \mathfrak{B}) \text{ e } \bigcap_{i=1}^n B_i \in \Sigma(\Omega, \mathfrak{B}).$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $A_i = B_i$ , para  $1 \leq i \leq n$  e  $A_i = \emptyset$ , para  $i > n$ . Então  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma(\Omega, \mathfrak{B})$ , de forma que

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma(\Omega, \mathfrak{B}).$$

Seja  $A_i = B_i$ , para  $1 \leq i \leq n$  e  $A_i = \Omega$ , para  $i > n$ . Então  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma(\Omega, \mathfrak{B})$ , de forma que  $\bigcap_{i=1}^n B_i = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma(\Omega, \mathfrak{B})$ . ■

Notemos que este procedimento não conduz obrigatoriamente à definição de uma medida a todas as partes de  $\Omega$ , mas somente à «aderência» da família  $\mathfrak{B}$  através das operações citadas de reunião, intersecção e complemento: certos subconjuntos «patológicos» não fazem parte desta «aderência» e são ditos «não mensuráveis», em oposição aos membros da «aderência»- os conjuntos «mensuráveis». Em outros termos, temos sempre  $\Sigma(\Omega, \mathfrak{B}) \subset \mathcal{P}(\Omega)$ , mas podemos ter  $\mathcal{P}(\Omega) \not\subset \Sigma(\Omega, \mathfrak{B})$ .

Para garantir a igualdade  $\mathcal{P}(\Omega) = \Sigma(\Omega, \mathfrak{B})$ , é preciso garantir que toda parte aberta  $A \subset \Omega$  pode ser obtida através de uma seqüência de operações de reunião,

intersecção e complemento sobre elementos de  $\mathfrak{B}$  : por exemplo,  $\mathfrak{B}$  deve conter uma base topológica, isto é, uma família de abertos capaz de gerar todos os abertos de  $\Omega$  através de operações de reunião.

Ora, a construção prática de uma base topológica pode tornar-se equivalente a construir diretamente a medida através da definição: por exemplo, sobre  $\mathbb{R}^2$ , é necessário definir a priori como construir uma figura geométrica arbitrária utilizando reuniões de elementos de  $\mathfrak{B}$ , o que é equivalente a definir a priori a área de uma figura geométrica arbitrária.

Assim, o procedimento prático mais freqüente para a definição de medidas consiste em considerar uma família geometricamente simples  $\mathfrak{B}$  (por exemplo, os retângulos de  $\mathbb{R}^2$ ), mesmo se esta não é uma base topológica. Como já observamos, certos subconjuntos «patológicos» não serão membros de  $\Sigma(\Omega, \mathfrak{B})$ . Tais subconjuntos estão excluídos da teoria que construímos no que segue, a qual se limita ao conjunto das partes  $\mu$ -mensuráveis de  $\Omega$ :

$$\mathfrak{M}(\mu, \Omega) = \{ A \subset \Omega : \mu^e(A) = \mu^i(A) \} .$$

Esta exclusão é geralmente utilizada de maneira implícita: escreve-se simplesmente « $A \subset \Omega$ » em lugar de « $A \in \mathfrak{M}(\mu, \Omega)$ ». Porém, é preciso notar que a exclusão de certos conjuntos tem um impacto sobre certas noções, tais como a de conjunto de medida nula, evento quase certo ou desprezível e, por conseguinte, sobre toda a construção apresentada no que segue.

Uma das propriedades notáveis das medidas assim construídas é a seguinte:

PROPOSIÇÃO 1.6.5. *Sejam  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ,  $\mathfrak{B}_1 \subset \mathcal{P}(\Omega_1)$ ,  $\mathfrak{B}_2 \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$ ,  $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$ ,  $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}_2 \implies \Omega_1 \cap \mathcal{B} \in \mathfrak{B}_1$ ,  $\mu_1$  associada a  $\mathfrak{B}_1$ ,  $\mu_2$  associada a  $\mathfrak{B}_2$  tais que  $\mu_1 = \mu_2$  sobre  $\mathfrak{B}_1$ . Então,*

$$\mu_1^e(A) = \mu_2^e(A) \text{ e } \mu_1^i(A) = \mu_2^i(A), \text{ para todo } A \subset \Omega_1.$$

DEMONSTRAÇÃO: Com efeito, é imediato que  $\mu_1^e(A) \geq \mu_2^e(A)$ , dado que  $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$ . Por outro lado, dado que  $A \subset \Omega_1 \subset \Omega_2$ ,

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n \iff A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\Omega_1 \cap \mathcal{B}_n)$$

Assim

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\mathcal{B}_n) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\Omega_1 \cap \mathcal{B}_n) \geq \mu_1(A)$$

e temos também  $\mu_2(A) \geq \mu_1(A)$ , de onde a igualdade. Por outro lado,  $\Omega_2 - A = (\Omega_2 - \Omega_1) \cup (\Omega_1 - A)$ , de modo que

$$\mu_2(\Omega_2 - A) = \mu_2(\Omega_2 - \Omega_1) + \mu_2(\Omega_1 - A)$$

e

$$\mu_2(\Omega_2 - A) = \mu_2(\Omega_2) - \mu_2(\Omega_2 \cap \Omega_1) + \mu_2(\Omega_1 - A)$$

ou seja

$$\mu_2(\Omega_2 - A) = \mu_2(\Omega_2) - \mu_2(\Omega_1) + \mu_2(\Omega_1 - A)$$

e

$$\mu_2(\Omega_2) - \mu_2(\Omega_2 - A) = \mu_2(\Omega_1) - \mu_2(\Omega_1 - A)$$

Como  $\mu_2(\Omega_1) = \mu_1(\Omega_1)$  e  $\mu_2(\Omega_1 - A) = \mu_1(\Omega_1 - A)$ , temos o resultado enunciado. ■

As propriedades das  $\sigma$ -álgebras se encontram em  $\mathfrak{M}(\mu, \Omega)$ :

1. Se  $A \in \mathfrak{M}(\mu, \Omega)$  então  $\Omega - A \in \mathfrak{M}(\mu, \Omega)$ :  $\mu(\Omega - A) = \mu(\Omega) - \mu(A)$ ;
2. Se  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}(\mu, \Omega)$  verifica  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$  então  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}(\mu, \Omega)$ :  $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ .
3. Se  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}(\mu, \Omega)$  verifica  $A_i \subset A_j$  para  $i \leq j$  então  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}(\mu, \Omega)$ :  $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \limsup \mu(A_n)$ .
4. Se  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}(\mu, \Omega)$  verifica  $A_i \subset A_j$  para  $i \geq j$  então  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}(\mu, \Omega)$ :  $\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \liminf \mu(A_n)$ .

Temos

PROPOSIÇÃO 1.6.6. *Se  $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathfrak{M}(\mu, \Omega)$  então  $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ .*

DEMONSTRAÇÃO: Como  $A_n \in \mathfrak{M}(\mu, \Omega)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}(\mu, \Omega).$$

Seja  $B_0 = A_0$  e, para  $n \geq 1$ ,  $B_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i$ .

Temos  $B_n \in \mathfrak{M}(\mu, \Omega)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Além disto,  $B_i \cap B_j = \emptyset$  para  $i \neq j$  e  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ . Assim,

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) .$$

Ora,

$$\mu(B_n) = \mu\left(A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i\right) \leq \mu(A_n),$$

o que demonstra o resultado enunciado. ■

COROLÁRIO 1.6.7. Se  $\forall n \in \mathbb{N} : \mu(A_n) = 0$ , então  $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 0$ .

DEMONSTRAÇÃO: Como  $\mu(A_n) = 0$ , temos

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = 0.$$

■

### 1.6.2 Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^p$

Sejam  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ . O conjunto

$$\mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : a_n < x_n < b_n, 1 \leq n \leq p\} = \prod_{n=1}^p (a_n, b_n)$$

é um «retângulo» aberto de  $\mathbb{R}^p$ .

Consideremos  $M \in \mathbb{R}$  e

$$\Omega_M = (-M, M)^p = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : -M < x_n < M, 1 \leq n \leq p\}.$$

O conjunto dos «retângulos» abertos de  $\Omega_M$  é :

$$\mathfrak{R}(\Omega_M) = \{\mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : \mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \Omega_M\}.$$

A medida de um elemento de  $\mathfrak{R}(\Omega_M)$  pode ser definida como (medida de Borel):

$$\ell_M(\mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \prod_{n=1}^p (b_n - a_n).$$

$\ell_M$  pode estendida a  $\Sigma(\Omega_M, \mathfrak{R}(\Omega_M))$  através das noções de medida externa e medida interna, como indicado na subseção precedente. Uma propriedade notável de  $\ell_M$  é a seguinte:

PROPOSIÇÃO 1.6.8. Sejam  $N \geq M > 0$  e  $A \subset \Omega_M$ . Então,

$$\ell_M^e(A) = \ell_N^e(A) \quad e \quad \ell_M^i(A) = \ell_N^i(A).$$

DEMONSTRAÇÃO: Trata-se de uma conseqüência imediata da última proposição da subseção precedente. ■

A medida assim definida é a *medida de Lebesgue*, para a qual utilizamos a notação  $\ell$ , dada sua invariância com relação à  $M$ . O conjunto das partes *mensuráveis no sentido de Lebesgue* ou *Lebesgue-mensuráveis* de  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$  é

$$\mathfrak{M}(\ell, \Omega) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathfrak{M}(\ell_n, \Omega) .$$

Uma das propriedades interessantes da medida de Lebesgue é a possibilidade de decomposição em um produto de medidas: a medida de Borel pode ser escrita sob a forma de um *produto de medidas de intervalos*

$$\ell_M(\mathcal{R}(\mathbf{m}, \mathbf{M})) = \prod_{n=1}^p \ell_M((m_n, M_n)) .$$

Assim, a medida sobre  $\mathbb{R}^p$  pode ser considerado como um produto de  $p$  medidas sobre  $\mathbb{R}^p$ . Esta propriedade é utilizada no *teorema de Fubini*.

### 1.6.3 Funções equivalentes

Convém introduzirmos desde o momento presente uma das pedras fundamentais da construção que estamos apresentando: a noção de funções  $\mu$ -equivalentes.

DEFINIÇÃO 1.6.9. (FUNÇÕES  $\mu$ -EQUIVALENTES) *Sejam  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  duas funções. Diremos que  $f$  e  $g$  são  $\mu$ -equivalentes se e somente se*

$$A = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq g(\omega)\} \text{ é de } \mu\text{-medida nula.}$$

Esta definição introduz uma relação de equivalência entre as funções

$$f \approx_{\mu} g \iff f \text{ e } g \text{ são } \mu\text{-equivalentes.}$$

Com efeito,

$$f \approx_{\mu} f ; f \approx_{\mu} g \implies g \approx_{\mu} f ; f \approx_{\mu} g \text{ e } g \approx_{\mu} h \implies f \approx_{\mu} h .$$

A classe de equivalência de  $f$  é

$$[f]_{\mu} = \{g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p : g \approx_{\mu} f\} .$$

Os membros de  $[f]_{\mu}$  são geralmente identificados a  $f$ , dado que só diferem em um conjunto de medida nula. Por exemplo – como veremos abaixo – todos os membros de  $[f]_{\mu}$  possuem a mesma integral, de forma que a integral é a integral da classe  $[f]_{\mu}$  e não somente de  $f$ .

A seguir manipularemos alguns conjuntos particulares de funções:

DEFINIÇÃO 1.6.10. (FUNÇÃO MENSURÁVEL)– *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  uma função. Diremos que  $f$  é  $\mu$ -mensurável sobre  $\Omega$  se e somente se  $f^{-1}(\mathfrak{M}(\ell, \mathbb{R}^p)) \subset \mathfrak{M}(\mu, \Omega)$ , isto é, se  $f$  transforma conjuntos mensuráveis em conjuntos mensuráveis. O conjunto das funções  $\mu$ -mensuráveis sobre  $\Omega$  tomando valores em  $\mathbb{R}^p$  é denotado*

$$\mathcal{M}(\mu, \Omega, \mathbb{R}^p) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p : \\ A \in \mathfrak{M}(\ell, \mathbb{R}^p) \implies f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}(\mu, \Omega)\} .$$

DEFINIÇÃO 1.6.11. (FUNÇÃO SIMPLES)– *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  uma função. Diremos que  $f$  é uma função simples ou função elementar sobre  $\Omega$  se e somente se*

$$f \in \mathcal{M}(\mu, \Omega, \mathbb{R}^p) \quad e \quad f(\Omega) \quad \text{é finito} ,$$

*isto é,  $f$  é uma função mensurável tomando um número finito de valores. O conjunto das funções simples sobre  $\Omega$  é*

$$\mathcal{E}(\mu, \Omega, \mathbb{R}^p) = \{f \in \mathcal{M}(\mu, \Omega, \mathbb{R}^p) : f(\Omega) \text{ é finito}\} .$$

Para todo  $e \in \mathcal{E}(\mu, \Omega, \mathbb{R}^p)$ , definimos

$$e^*(\Omega) = e(\Omega) - \{0\} = \{\alpha \in \mathbb{R}^p : \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha \in e(\Omega)\} .$$

Como  $e$  é  $\mu$ -mensurável, temos :

$$\forall y \in e^*(\Omega) \quad : \quad e^{-1}(\{y\}) \quad \text{é } \mu\text{-mensurável} .$$

Eliminando de  $e^*(\Omega)$  as partes de medida nula, obtemos

$$e_\mu^*(\Omega) = \{\alpha \in e^*(\Omega) : \mu(e^{-1}(\{\alpha\})) > 0\} .$$

DEFINIÇÃO 1.6.12. (FUNÇÃO CARACTERÍSTICA DE UM SUBCONJUNTO)– *Seja  $A \subset \Omega$ . Utilizaremos a notação  $1_A$  para designar a função característica de  $A$ , dada por*

$$1_A(\omega) = 1, \text{ se } \omega \in A \quad ; \quad 1_A(\omega) = 0, \text{ se } \omega \notin A .$$

Não se deve confundir a função característica de um subconjunto com a função característica de uma variável aleatória: esta última é a transformada de Fourier da distribuição de probabilidade da variável aleatória (Cf. seção 1.8).

PROPOSIÇÃO 1.6.13. *Temos:*

$$(i) \quad A \in \mathfrak{M}(\mu, \Omega) \text{ se e somente se } 1_A \in \mathcal{M}(\mu, \Omega) ;$$

(ii) Se  $e \in \mathcal{E}(\mu, \Omega, \mathbb{R}^p)$ ,  $e^*(\Omega)$  possui exatamente  $n$  elementos e  $e^*(\Omega) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ,  $A_i = e^{-1}(\{\alpha_i\})$ , então  $e = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$ ;

(iii) Se  $e \in \mathcal{E}(\mu, \Omega, \mathbb{R}^p)$ ,  $e_\mu^*(\Omega)$  possui exatamente  $m$  elementos e  $e_\mu^*(\Omega) = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}_{B_i}$ ,  $B_i = e^{-1}(\{\beta_i\})$ , então  $e \approx_\mu \sum_{i=1}^m \beta_i 1_{B_i}$ .

DEMONSTRAÇÃO:

(i) é imediato, dado que  $1_A(\Omega) = \{0, 1\}$ ,  $(1_A)^{-1}(\{0\}) = \Omega - A$  e  $(1_A)^{-1}(\{1\}) = A$ .

(ii) temos

$$\omega \in \Omega \implies \text{ou } e(\omega) = 0 \text{ ou } \omega \in \bigcup_{i=1}^n A_i .$$

Como  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ , temos o resultado enunciado.

(iii) é imediato. ■

Quando  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , podemos considerar as funções simples retangulares:

DEFINIÇÃO 1.6.14. (FUNÇÃO SIMPLES RETANGULAR)– *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $f \in \mathcal{M}(\mu, \Omega, \mathbb{R}^p)$ . Diremos que  $f$  é uma função simples retangular sobre  $\Omega$  se e somente se  $f \in \mathcal{E}(\mu, \Omega, \mathbb{R}^p)$  e*

$$A = f^{-1}(\{\alpha\}) \in \mathfrak{A}(\Omega), \forall \alpha \in e^*(\Omega) ,$$

*isto é, a pré-imagem  $f^{-1}(\{\alpha\})$  de todo valor não nulo  $\alpha$  da imagem de  $f$  é um retângulo. O conjunto das funções simples retangulares sobre  $\Omega$  é*

$$\mathcal{E}_R(\mu, \Omega, \mathbb{R}^p) = \{f \in \mathcal{E}(\mu, \Omega, \mathbb{R}^p) : A = f^{-1}(\{\alpha\}) \in \mathfrak{A}(\Omega), \forall \alpha \in e^*(\Omega)\} .$$

Como veremos no que segue,  $\mathcal{E}_R(\mu, \Omega, \mathbb{R}^p)$  desempenha um papel importante na construção de integrais, devido às suas propriedades de densidade, sobretudo quando  $\Omega = \mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \mathbb{R}^n$ .

Quando  $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$  é um intervalo de números reais,  $f$  é uma função simples retangular se e somente se existem  $n > 0$ ,  $(f_1, \dots, f_n) \in [\mathbb{R}^p]^n$  e  $n$  subintervalos  $A_i = (a_i, b_i) \subset (a, b)$ ,  $1 \leq i \leq n$  tais que

$$f = \sum_{i=1}^m f_i 1_{A_i} .$$

Em tal caso, podemos considerar somente as funções simples geradas por partições:

DEFINIÇÃO 1.6.15. (PARTIÇÃO DE UM INTERVALO)– *Seja  $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ . Uma  $n$ -partição de  $\Omega$  é um elemento  $t = (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tal que*

$$t_0 = a, t_n = b, t_{i-1} < t_i \text{ para } 1 \leq i \leq n .$$

O diâmetro da partição é

$$\delta(t) = \max \{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq n\} .$$

O conjunto das  $n$ -partições de  $\Omega$  é

$$\mathfrak{Part}_n(\Omega) = \{t = (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \text{ é uma } n\text{-partição de } \Omega\}$$

e o conjunto das partições de  $\Omega$  é

$$\mathfrak{Part}(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathfrak{Part}_n(\Omega) .$$

DEFINIÇÃO 1.6.16. (FUNÇÃO SIMPLES DEFINIDA POR UMA PARTIÇÃO)– *Sejam  $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$  e  $f \in \mathcal{M}(\mu, \Omega, \mathbb{R}^p)$ . Diremos que  $f$  é uma função simples definida por uma partição se e somente se existe uma  $n$ -partição  $t \in \mathfrak{Part}(\Omega)$  e  $(f_1, \dots, f_n) \in [\mathbb{R}^p]^n$  tais que*

$$t = (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} , f = \sum_{i=1}^n f_i 1_{A_i} \text{ e } A_i = (t_{i-1}, t_i) .$$

O conjunto das funções simples definidas por partições é denotado por  $\mathcal{E}_P(\mu, \Omega, \mathbb{R}^p)$ .

#### 1.6.4 Integrais

A definição de medidas visa geralmente a manipulação de integrais: busca-se dar um sentido a expressões da forma  $\int_{\Omega} f$ , onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$  é mensurável e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função. De maneira informal, uma tal integral é o limite de uma seqüência de somas finitas, podendo ser aproximada por

$$\int_{\Omega} f \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \ell(A_i) ; \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega ; x_i \in A_i \text{ para } 1 \leq i \leq n$$

e correspondendo ao limite destas somas finitas para  $n \rightarrow +\infty$  e, ao mesmo tempo, o diâmetro máximo dos subconjuntos  $A_i$  tendendo a zero.

Para uma definição formal, o ponto de partida é a definição dos integrais para um conjunto de *funções simples*. Por exemplo,

DEFINIÇÃO 1.6.17. (INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO SIMPLES)– Para  $e \in \mathcal{E}(\mu, \Omega, \mathbb{R})$  tal que  $e^*(\Omega)$  possui exatamente  $n$  elementos e  $e^*(\Omega) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , definimos

$$\int_{\Omega} e \mu(dx) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) \ ; \ A_i = e^{-1}(\{\alpha_i\}) \ \text{para } 1 \leq i \leq n.$$

A definição sobre  $\mathcal{E}(\mu, \Omega, \mathbb{R})$  se estende primeiro ao conjunto das funções mensuráveis positivas

$$\mathcal{M}_+(\mu, \Omega, \mathbb{R}) = \{m \in \mathcal{M}(\mu, \Omega, \mathbb{R}) : m \geq 0\}$$

da maneira seguinte: sejam  $f \in \mathcal{M}_+(\mu, \Omega, \mathbb{R})$  e

$$\mathcal{E}_+(\mu, \Omega, f) = \{e \in \mathcal{E}(\mu, \Omega, \mathbb{R}) : 0 \leq e \leq f\} .$$

$\mathcal{E}_+(\mu, \Omega, f)$  é o conjunto das funções simples positivas e limitadas superiormente por  $f$ . Definimos

$$\int_{\Omega} f \mu(dx) = \sup \left\{ \int_{\Omega} e \mu(dx) : e \in \mathcal{E}_+(\mu, \Omega, f) \right\} .$$

Em seguida, para uma função  $f \in \mathcal{M}(\mu, \Omega, \mathbb{R})$  de sinal arbitrário, utilizamos a decomposição

$$f = f^+ - f^- \ , \quad \begin{aligned} f^+(x) &= \max\{f(x), 0\}, \\ f^-(x) &= \max\{-f(x), 0\}, \end{aligned}$$

e definimos

$$\int_{\Omega} f \mu(dx) = \int_{\Omega} f^+ \mu(dx) - \int_{\Omega} f^- \mu(dx) .$$

Notemos que o membro da direita está bem definido, dado que  $f^+$  e  $f^-$  são elementos de  $\mathcal{M}_+(\mu, \Omega, \mathbb{R})$ . Por vezes, utilizaremos uma das notações  $\int_{\Omega} f \mu(x \in dx)$ ,  $\int_{\Omega} f d\mu$  ou  $\int_{\Omega} f d\mu(x)$  em lugar de  $\int_{\Omega} f \mu(dx)$ .

Esta definição leva às propriedades usuais das integrais. Por exemplo, para  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;  $f, g \in \mathcal{M}(\mu, \Omega, \mathbb{R})$ :

$$\int_{\Omega} (\alpha f + \beta g) \mu(dx) = \alpha \int_{\Omega} f \mu(dx) + \beta \int_{\Omega} g \mu(dx) \ ;$$

$$\int_{\Omega} f \mu(dx) = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f \mu(dx) , \text{ se}$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega \text{ e } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para } i \neq j ;$$

$$f \leq g \text{ } \mu\text{-q.t.p. sobre } \Omega \implies \int_{\Omega} f \mu(dx) \leq \int_{\Omega} g \mu(dx) ;$$

$$\left| \int_{\Omega} f \mu(dx) \right| \leq \int_{\Omega} |f| \mu(dx) ;$$

$$\left| \int_{\Omega} f \mu(dx) \right| \leq \int_{\Omega} |f| \mu(dx) ;$$

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_{\Omega} 1_A \mu(dx) = \int_A 1 \mu(dx) = \\ &= \int_A \mu(dx), \forall A \in \mathfrak{M}(\mu, \Omega) . \end{aligned}$$

Temos também a *desigualdade de Jensen*: se  $\mu$  é uma probabilidade,  $f \in \mathcal{M}(\mu, \Omega, \mathbb{R})$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e *convexa* tal que  $g(f)$  é mensurável, temos

$$g\left(\int_{\Omega} f \mu(dx)\right) \leq \int_{\Omega} g(f) \mu(dx) .$$

Uma conseqüência imediata da desigualdade de Jensen é

PROPOSIÇÃO 1.6.18.  $|E(U)|_p \leq E(|U|_p)$ , para todo  $1 \leq p \leq \infty$  tal que  $|U|_p$  é mensurável.

DEMONSTRAÇÃO: Basta aplicar (1.6.4) a  $g(\xi) = |\xi|_p$ . ■

Temos:

PROPOSIÇÃO 1.6.19. Seja  $f \in \mathcal{M}(\mu, \Omega)$  tal que  $\forall A \in \mathfrak{M}(\mu, \Omega) : \int_A f \mu(dx) = 0$ . Então  $f = 0$   $\mu$ -q.t.p. sobre  $\Omega$ .

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $A = \{\omega \in \Omega : |f| > 0\}$ .

Mostremos que  $\mu(A) = 0$ .

Sejam  $n, k > 0$ . Consideremos

$$A_k = \left\{ x \in \Omega : |f(x)| > \frac{1}{k} \right\}$$

e

$$A_{n,k} = \left\{ x \in \Omega : n > |f(x)| > \frac{1}{k} \right\} .$$

Temos  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  e  $A_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,k}$ .

Por outro lado,  $(\frac{1}{k}, n) \subset \mathbb{R}$  é mensurável, de modo que  $A_{n,k} = f^{-1}((\frac{1}{k}, n))$  é mensurável. Temos

$$0 = \int_{A_{n,k}} f \mu(dx) \geq \frac{1}{k} \int_{A_{n,k}} \mu(dx) = \frac{1}{k} \mu(A_{n,k}) .$$

Assim,  $\mu(A_{n,k}) \leq 0 \implies \mu(A_{n,k}) = 0$ . Logo,  $A_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,k}$  é de medida nula, o que implica por sua vez que  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  é de medida nula. ■

**COROLÁRIO 1.6.20.** *Seja  $f \in \mathcal{M}(\mu, \Omega)$  tal que*

$$\forall g \text{ tal que } fg \in \mathcal{M}(\mu, \Omega) : \int_{\Omega} fg \mu(dx) = 0 .$$

*Então  $f = 0$   $\mu$ -q.t.p. sobre  $\Omega$ .*

**DEMONSTRAÇÃO:** Seja  $A \in \mathfrak{M}(\mu, \Omega)$ . Temos

$$\int_A f \mu(dx) = \int_{\Omega} f 1_A \mu(dx) = 0 .$$

Como  $A$  é arbitrário, o resultado decorre da proposição precedente. ■

**COROLÁRIO 1.6.21.** *Seja  $f \in \mathcal{M}(\mu, \Omega)$  tal que  $f \geq 0$ . Se*

$$\int_{\Omega} f \mu(dx) = 0,$$

*então,  $f = 0$   $\mu$ -q.t.p. sobre  $\Omega$ .*

**DEMONSTRAÇÃO:** Seja  $A \in \mathfrak{M}(\mu, \Omega)$ . Temos

$$0 \leq \int_A f \mu(dx) = \int_{\Omega} f \mu(dx) - \int_{\Omega-A} f \mu(dx) \leq \int_{\Omega} f \mu(dx) = 0 .$$

Como  $A$  é arbitrário, o resultado decorre da proposição precedente. ■

Finalmente, definimos

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f \ell(dx) .$$

Assim, quando a medida não é indicada, trata-se da medida de Lebesgue.

A seguir utilizaremos a notação usual  $L^1(\Omega)$  para designar o conjunto das *classes de equivalência*  $[f]_\ell$  de funções Lebesgue-mensuráveis:

$$L^1(\Omega) = \{[f]_\ell : f \in \mathcal{M}(\ell, \Omega, \mathbb{R})\} .$$

De maneira informal,  $L^1(\Omega)$  é o conjunto das *funções* Lebesgue-mensuráveis: identifica-se  $[f]_\ell$  a  $f$ . Esta identificação é justificada pelo fato que a integral toma o mesmo valor para funções equivalentes:

$$g \approx_\mu f \implies \int_\Omega g \mu(dx) = \int_\Omega f \mu(dx) ,$$

de modo que podemos considerar a integral da função como a integral da classe:

$$\int_\Omega [f]_\mu \mu(dx) = \int_\Omega f \mu(dx) .$$

Além disso, o último resultado acima mostra que

$$g \approx_\mu f \iff \int_\Omega |f - g| \mu(dx) = 0 .$$

De maneira análoga, utilizaremos a notação

$$L^p(\Omega) = \{f : |f|^p \in L^1(\Omega)\} .$$

Como já observamos, a medida sobre  $\mathbb{R}^p$  pode ser considerado como um produto de  $p$  medidas sobre  $\mathbb{R}^p$ . Na verdade, não se trata de um produto ordinário, mas da igualdade

$$\int_{\mathbb{R}} f d\ell = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}}}_{p \text{ vezes}} f d\ell(x_1) d\ell(x_2) \dots d\ell(x_p)$$

Esta decomposição leva ao *teorema de Fubini*:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f d\ell &= \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\ell(x) \right] d\ell(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\ell(y) \right] d\ell(x) . \end{aligned}$$

Enfim, as definições dadas se estendem à situação em que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  é uma função tomando valores em  $\mathbb{R}^p$  através de um cálculo componente por componente:

$$\begin{aligned} f = (f_1, \dots, f_p) \implies \\ \int f \mu(dx) = \left( \int f_1 \mu(dx), \dots, \int f_p \mu(dx) \right) . \end{aligned}$$

### 1.6.5 Medidas definidas por densidades

Quando  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ , podemos construir medidas a partir de *densidades*: de maneira informal, uma medida  $\mu$  é definida por uma densidade  $m$  quando  $\mu(x \in dx) = m(x) dx$ . Uma tal medida pode ser vista como uma transformação da medida de Lebesgue, gerando os mesmos conjuntos mensuráveis. De maneira mais formal,

DEFINIÇÃO 1.6.22. *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$  e  $\mu$  tal que  $\mathfrak{M}(\mu, \Omega) = \mathfrak{M}(\ell, \Omega)$  (neste caso,  $\mathcal{M}(\mu, \Omega) = \mathcal{M}(\ell, \Omega)$ ). Diremos que  $\mu$  é definida pela densidade  $m$  se e somente se  $m$  é uma função Lebesgue-mensurável e*

$$\int_{\Omega} f \mu(dx) = \int_{\Omega} f m, \quad \forall f \in \mathcal{M}(\mu, \Omega) = \mathcal{M}(\ell, \Omega).$$

A existência de densidades é estudada pelo *teorema de Radon-Nikodym*:  $\ell$  deve ser dominante com relação a  $\mu$  (isto é,  $\ell(A) = 0 \implies \mu(A) = 0$ ). Não abordaremos este teorema aqui.

Temos

LEMA 1.6.23. *Se  $\mu$  é definida pela densidade  $m$  então*

$$\mu(A) = \int_A m, \quad \forall A \in \mathfrak{M}(\ell, \Omega).$$

DEMONSTRAÇÃO: Basta considerar a função característica de  $A$ :  $f = 1_A$ . Temos  $1_A(\Omega) = \{0, 1\}$ , de modo que  $1_A \in \mathcal{M}(\ell, \Omega)$  (pois  $(1_A)^{-1}(\{0\}) = \Omega - A$  e  $(1_A)^{-1}(\{1\}) = A$ ). Assim:

$$\mu(A) = \int_A \mu(dx) = \int_{\Omega} 1_A \mu(dx) = \int_{\Omega} 1_A m = \int_A m.$$

■

PROPOSIÇÃO 1.6.24. *Se  $\mu$  é definida pela densidade  $m$  então  $m \geq 0$   $\mu$ -q.t.p. e Lebesgue-q.t.p. sobre  $\Omega$ .*

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $A = \{\omega \in \Omega : m(\omega) < 0\}$ : mostremos que  $\mu(A) = \ell(A) = 0$ .

Sejam  $n, k > 0$ . Consideremos

$$A_k = \left\{ \omega \in \Omega : m(\omega) \leq -\frac{1}{k} \right\}$$

e

$$A_{n,k} = \left\{ \omega \in \Omega : -n < m(\omega) < -\frac{1}{k} \right\}.$$

Temos  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  e  $A_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,k}$ .  $(-n, -\frac{1}{k}) \subset \mathbb{R}$  é mensurável, de modo que  $A_{n,k} = m^{-1}((-\frac{1}{k}))$  é mensurável. Temos

$$0 \leq \mu(A_{n,k}) = \int_{A_{n,k}} m \leq -\frac{1}{k} \int_{A_{n,k}} 1 = -\frac{1}{k} \ell(A_{n,k}) .$$

Assim, por um lado,  $\ell(A_{n,k}) \leq 0 \implies \ell(A_{n,k}) = 0$  e, por outro lado,  $\mu(A_{n,k}) = 0$ . Por conseguinte,  $A_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,k}$  é de medida nula, o que implica por sua vez que  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  é de medida nula. ■

## 1.7 Medidas, probabilidade e integrais em espaços de dimensão infinita

Sejam  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}_e^k$  e  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}_e^k$ . Um retângulo aberto de  $\mathbb{R}^k$  é descrito pela notação

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k(\mathbf{m}, \mathbf{M}) : \mathcal{R}_k(\mathbf{m}, \mathbf{M}) &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k : m_n < x_n < M_n, 1 \leq n \leq k \} \\ &= \prod_{n=1}^k (m_n, M_n) . \end{aligned}$$

O conjunto dos retângulos abertos de  $\mathbb{R}^k$  é :

$$\mathfrak{R}_k = \{ \mathcal{R}_k(\mathbf{m}, \mathbf{M}) : \mathbf{m} \in \mathbb{R}_e^k \text{ and } \mathbf{M} \in \mathbb{R}_e^k \} .$$

Um retângulo fechado é descrito pela notação  $\overline{\mathcal{R}}_k(\mathbf{m}, \mathbf{M})$  e o conjunto de todos os retângulos fechados de  $\mathbb{R}^k$  é  $\mathfrak{R}_k$ . Pode ser útil lembrar que  $\mathbb{R}^k$  pode ser coberto por subconjuntos finitos ou enumeráveis de  $\mathfrak{R}_k$  ou  $\mathfrak{R}_k$ . Por exemplo, para  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathcal{R}_k(-\infty, \varepsilon) \cup \mathcal{R}_k(-\varepsilon, +\infty) = \overline{\mathcal{R}}_k(-\infty, \mathbf{0}) \cup \overline{\mathcal{R}}_k(\mathbf{0}, +\infty) = \mathbb{R}^k .$$

Coberturas mais úteis podem ser obtidas usando translações de um retângulo fixo, de maneira a obter uma cobertura formada de retângulos idênticos. Esta propriedade é freqüentemente utilizada em aplicações numéricas.

Utilizaremos a notação  $\mathbb{R}^\infty$  para o espaço das seqüências de números reais:

$$\mathbb{R}^\infty = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots) : x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* \} .$$

Pode ser interessante considerar  $\mathbb{R}^\infty$  como um produto cartesiano enumerável:

$$\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots = \prod_{n=1}^{+\infty} \mathbb{R} .$$

Utilizamos uma notação análoga para  $\mathbb{R}_\varepsilon^\infty$ . Um retângulo aberto de  $\mathbb{R}^k$  é denotado por  $\mathcal{R}_\infty(\mathbf{m}, \mathbf{M})$ , onde  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}_\varepsilon^\infty$  e  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}_\varepsilon^\infty$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\infty(\mathbf{m}, \mathbf{M}) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty : m_n < x_n < M_n, \forall n \in \mathbb{N}^*\} \\ &= \prod_{n=1}^{+\infty} (m_n, M_n).\end{aligned}$$

O conjunto dos retângulos abertos de  $\mathbb{R}^\infty$  é :

$$\mathfrak{R}_\infty = \{\mathcal{R}_\infty(\mathbf{m}, \mathbf{M}) : \mathbf{m} \in \mathbb{R}_\varepsilon^\infty \text{ and } \mathbf{M} \in \mathbb{R}_\varepsilon^\infty\}$$

Como em dimensão finita,  $\mathbb{R}^\infty$  pode ser coberto por subconjuntos finitos ou enumeráveis de  $\mathfrak{R}_\infty$ . Por exemplo,

$$\mathcal{R}_\infty(-\infty, \varepsilon) \cup \mathcal{R}_\infty(-\varepsilon, +\infty) = \overline{\mathcal{R}_\infty}(-\infty, \mathbf{0}) \cup \overline{\mathcal{R}_\infty}(\mathbf{0}, +\infty) = \mathbb{R}^\infty.$$

Esta propriedade também é utilizada em aplicações numéricas.

A notação  $\mathbb{R}_0^\infty$  descreve o subconjunto de  $\mathbb{R}^\infty$  formado pelas seqüências contendo *somente um número finito de elementos não nulos*, i. e., tais que o conjunto  $e(\mathbf{x}) = \{n \in \mathbb{N}^*, x_n \neq 0\}$  possui um número finito de elementos:

$$\mathbb{R}_0^\infty = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty : \text{card}(e(\mathbf{x})) = k \in \mathbb{N}\}.$$

Aqui,  $\text{card}(\bullet)$  é a cardinalidade (número de elementos).  $\mathbb{R}_0^\infty$  também pode ser identificado a  $\Pi = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} ((\mathbb{N}^*)^k \times \mathbb{R}^k)$ : seja  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^\infty$  e  $e(\mathbf{x}) = \{n_1, \dots, n_k\}$ .

A aplicação

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \xrightarrow{\pi} (n_1, \dots, n_k, x_{n_1}, \dots, x_{n_k}) \in \Pi$$

é uma bijeção entre  $\mathbb{R}_0^\infty$  e  $\Pi$ .  $\Pi$  não possui retângulos abertos, dado que  $(\mathbb{N}^*)^k$  é um espaço discreto, mas um papel análogo é desempenhado pelo conjunto

$$\mathfrak{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} ((\mathbb{N}^*)^k \times \mathfrak{R}_k)$$

Estas propriedades serão utilizadas no que segue.

Consideremos um *espaço de Hilbert separável*  $(V, (\bullet, \bullet))$ , i. e.,  $V$  é um espaço vetorial;  $(\bullet, \bullet)$  é um produto escalar sobre  $V$ ;  $V$  é completo para a norma  $\|\bullet\|$  associada ao produto escalar ( $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ ); existe um subconjunto *contável*  $\mathcal{S} \subset V$  que é *dense* em  $(V, \|\bullet\|)$ . Como um dos nossos objetivos é a aplicação da teoria a problemas de otimização - logo, de Cálculo das Variações - nosso modelo para  $V$  é um espaço funcional de tipo Sobolev : os

elementos de  $V$  tomam seus valores em  $\mathbb{R}^d$  para algum  $d \in \mathbb{N}^*$ . A teoria pode ser estendida a espaços de Banach como  $[L^p(\Omega)]^d$ , mas tal não é nosso objetivo.

Para aliviar a notação,  $(\bullet, \bullet)$  e  $\|\bullet\|$  são usados para indicar vários produtos escalares e normas em diferentes espaços - desde que nenhuma confusão seja possível: em caso de necessidade, indicaremos o espaço através da notação  $\|\bullet\|_V$ .

Como  $V$  é separável, este espaço possui uma base de Schauder, i.e., uma família enumerável  $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset V$  tal que todo  $v \in V$  pode ser representado por

uma única série convergente  $v = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \varphi_n$ . Se conveniente, podemos supor que

esta base é ortonormal, isto é, que se trata de uma base hilbertiana: toda base de Schauder pode ser transformada em uma base hilbertiana por ortogonalização de Gram-Schmidt.

$V$  pode ser identificado a um subconjunto de  $\mathbb{R}^\infty$ : cada  $v \in V$  é totalmente caracterizado pelos coeficientes  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$  que são únicos. Sejam

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots) : \|\mathbf{a}\| < \infty\}; \quad \|\mathbf{a}\| = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \right)^{1/2} .$$

Consideremos a aplicação  $\mathbf{I} : V \rightarrow \mathcal{V}$  dada por

$$v = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \varphi_n \xrightarrow{\mathbf{I}} \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots)$$

e

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n .$$

Como

$$(\mathbf{I}(v), \mathbf{I}(w)) = (v, w),$$

$\mathbf{I}$  é uma bijeção isométrica entre  $V$  e  $\mathcal{V}$ ;  $(\mathcal{V}, (\bullet, \bullet))$  é um espaço de Hilbert.

Esta identificação leva à construção de bases topológicas e medidas sobre  $V$  através do uso dos mesmos objetos sobre  $\mathcal{V}$ . Por exemplo, podemos utilizar as bases topológicas  $\mathfrak{B}_\infty = \mathfrak{R}_\infty \cap \mathcal{V}$  formadas pelos retângulos abertos de  $\mathcal{V}$ :

$$\mathfrak{B}_\infty = \{\mathcal{R}_\infty(\mathbf{m}, \mathbf{M}) : \mathbf{m} \in \mathcal{V} \text{ and } \mathbf{M} \in \mathcal{V}\} \subset \mathfrak{R}_\infty .$$

A versão  $\mathfrak{B}_k$  de  $\mathfrak{B}_\infty$  em dimensão finita e associada a  $\mathbb{R}^k$  é simplesmente  $\mathfrak{B}_k = \mathfrak{R}_k$ .

Para fins práticos, tais como aproximações numéricas, consideramos também uma família enumerável  $\Psi = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$  tal que o espaço vetorial das combinações lineares finitas de elementos de  $\Psi$ ,

$$\mathcal{D} = [\Psi] = \left\{ \sum_{i=1}^k a_{n_i} \psi_{n_i} : k \in \mathbb{N}^*, a_{n_i} \in \mathbb{R}, \text{ for } 1 \leq i \leq k \right\}$$

é denso em  $V$ , *i. e.*,

$$\forall v \in V : \forall \varepsilon > 0 : \exists v_\varepsilon \in \mathcal{D} \text{ such that } \|v - v_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

$\mathcal{D}$  pode ser identificado a um subconjunto  $\mathcal{V}_0$  de  $\mathcal{V}$  formado pelas seqüências  $\mathbf{a}$  contendo somente um número finito de elementos não nulos, *i. e.*,

$$\mathcal{V}_0 = \{\mathbf{a} \in \mathcal{V} : \mathbf{a} \in \mathbb{R}_0^\infty\}.$$

Assim,  $\mathbf{I} \circ \boldsymbol{\pi}$  é uma bijeção entre  $\mathcal{D}$  e  $\mathfrak{V}_0 = \boldsymbol{\pi}(\mathcal{V}_0)$ . Esta propriedade leva à construção de medidas sobre  $\mathcal{D}$ .

A introdução da família  $\Psi$  leva a uma extensão da teoria a espaços de Banach separáveis.

Seja  $(W, (\cdot, \cdot))$  outro espaço de Hilbert. ( $W$  também é um espaço funcional e os elementos de  $W$  tomam seus valores em  $\mathbb{R}^d$  para algum  $d \in \mathbb{N}^*$ , analogamente a  $V$ ). Utilizamos a notação  $\mathcal{L}(V, W)$  para o conjunto das aplicações lineares contínuas  $\ell : V \rightarrow W$ :

$$\mathcal{L}(V, W) = \{\ell : V \rightarrow W : \ell \text{ é linear contínua}\}.$$

Para  $\ell \in \mathcal{L}(V, W)$ ,

$$\|\ell\| = \sup\{\|\ell(v)\| : \|v\| \leq 1\} < \infty.$$

Assim, existe um número real  $M \in \mathbb{R}$  tal que

$$\forall v \in V : \|\ell(v)\| \leq M \|v\|. \quad (1.7.6)$$

No caso particular onde  $W = \mathbb{R}^d$ , existe um número real  $M_p \in \mathbb{R}$  tal que

$$\forall v \in V : |\ell(v)|_p \leq M_p \|v\|. \quad (1.7.7)$$

Para um subconjunto  $A \subset V$ ,  $\mathcal{P}(A)$  é o conjunto das partes de  $A$ , *i. e.*, o conjunto dos subconjuntos de  $A$ .

### 1.7.1 Medidas Finitas em Espaços de Hilbert de dimensão infinita

A forma usual para introduzir e manipular medidas em espaços de Banach ou Hilbert gerais consiste em utilizar *medidas cilíndricas*. De forma «ingênua», um *conjunto cilíndrico* de  $V$  é um subconjunto de um subespaço de dimensão finita de  $V$  e uma *medida cilíndrica* é uma medida definida sobre os conjuntos cilíndricos de  $V$ , *i. e.*, uma aplicação  $\mu : \mathfrak{C} \rightarrow \mathbb{R}_e$ , onde  $\mathfrak{C} \subset \mathcal{P}(V)$  é o conjunto de todos os conjuntos cilíndricos de  $V$ . Para uma definição formal, consideramos  $k \in \mathbb{N}$  e definimos  $\mathfrak{C}$  como a reunião de todas as pré-imagens de partes mensuráveis de  $\mathbb{R}^k$  através de elementos de  $\mathcal{L}(V, \mathbb{R}^k)$  para  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\mathfrak{C} = \{C : C = \ell^{-1}(A), \ell \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^k), k \in \mathbb{N}, \\ \text{A parte mensurável de } \mathbb{R}^k\} \subset \mathcal{P}(V) .$$

Uma medida cilíndrica é uma aplicação  $\mu : \sigma(\mathfrak{C}) \rightarrow \mathbb{R}_e$  tal que  $\mu_\ell = \mu \circ \ell^{-1}$  é uma medida sobre  $\mathbb{R}^k$ ,  $\forall \ell \in \mathcal{L}(V, k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (logo,  $\mu_\ell(A) = \mu(\ell^{-1}(A))$ ,  $A$  subconjunto mensurável de  $\mathbb{R}^k$ ). A restrição de uma medida de Radon a  $\mathfrak{C}$  define uma medida cilíndrica: em Análise, este procedimento constitui uma maneira usual para manipular medidas em espaços de dimensão infinita.

*Adotaremos aqui um procedimento diferente.* Como já vimos, medidas sobre  $\mathbb{R}$  são definidas a partir de bases topológicas  $\mathfrak{B}_1$ :  $\Sigma(\mathbb{R}) = \sigma(\mathfrak{B}_1)$ . Do ponto de vista prático, podemos definir uma medida  $\nu$  sobre  $\mathbb{R}$  utilizando uma densidade  $f$ , *i. e.*, uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \geq 0$  sobre  $\mathbb{R}$ ,  $\int_{\mathbb{R}} f < \infty$  e  $d\nu = f(x) dx$ . Assim,

$$\nu((a, b)) = \int_a^b f.$$

Tratando-se de probabilidades,  $f$  é a densidade de probabilidade e  $\int_{\mathbb{R}} f = 1$ . Assim,

$$P(dx) = P(x \in dx) = d\nu = f(x) dx .$$

Este procedimento é facilmente estendido a  $\mathbb{R}^k$  através da base topológica  $\mathfrak{R}_k$ :  $\Sigma(\mathbb{R}^k) = \sigma(\mathfrak{R}_k)$ . Uma forma prática de gerar medidas sobre  $\mathbb{R}^k$  consiste em usar produtos de medidas: sejam  $(\nu_1, \dots, \nu_k)$  medidas sobre  $\mathbb{R}$ . Então

$$\nu(\mathcal{R}_k(\mathbf{m}, \mathbf{M})) = \prod_{n=1}^k \nu_n((m_n, M_n))$$

define uma medida sobre  $\mathbb{R}^k$ . Analogamente a  $\mathbb{R}$ ,  $\nu$  pode ser definida por uma densidade  $f$ , isto é, por uma função  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \geq 0$  sobre  $\mathbb{R}^k$ ,  $\int_{\mathbb{R}^k} f < \infty$  e  $d\nu = f(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_k$ . Assim,

$$\nu(\mathcal{R}_k(\mathbf{m}, \mathbf{M})) = \int_{\mathcal{R}_k(\mathbf{m}, \mathbf{M})} f.$$

Tratando-se de probabilidades,  $f$  é a densidade de probabilidade e  $\int_{\mathbb{R}^k} f = 1$ . Assim,

$$P(d\mathbf{x}) = P(\mathbf{x} \in d\mathbf{x}) = d\nu = f(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_k.$$

Densidades também podem ser geradas por produtos: se, para  $1 \leq n \leq k$ ,  $d\nu_n = f_n(t) dt$ , então  $f = \prod_{n=1}^k f_n$  e

$$\nu(\mathcal{R}_k(\mathbf{m}, \mathbf{M})) = \prod_{n=1}^k \left( \int_{m_n}^{M_n} f_n(x_n) dx_n \right) = \int_{\mathcal{R}_k(\mathbf{m}, \mathbf{M})} f.$$

Este procedimento pode ser estendido a  $\mathbb{R}^\infty$ : de forma «ingênua», uma seqüência  $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de medidas sobre  $\mathbb{R}$  pode gerar uma medida  $\nu$  sobre  $\mathbb{R}^\infty$  usando

$$\nu(A_1 \times A_2 \times \dots) = \nu_1(A_1) \nu_2(A_2) \dots$$

Para uma definição formal, utiliza-se a base topológica  $\mathfrak{R}_\infty$ :

$$\nu(\mathcal{R}_\infty(\mathbf{m}, \mathbf{M})) = \prod_{n=1}^{+\infty} \nu_n((m_n, M_n)).$$

define uma medida sobre  $\mathcal{V}$ . Como observado previamente, do ponto de vista prático, pode ser mais conveniente utilizar densidades: se  $d\nu_n = f_n(t) dt$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , então

$$\nu_n((m_n, M_n)) = \int_{m_n}^{M_n} f_n(x_n) dx_n$$

e

$$\nu(\mathcal{R}_\infty(\mathbf{m}, \mathbf{M})) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left( \int_{m_n}^{M_n} f_n(x_n) dx_n \right).$$

De forma «ingênua», este procedimento corresponde à construção de uma densidade  $f : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $d\nu = f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \dots$ , i. e., a uma densidade

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{n=1}^{+\infty} f_n(x_n).$$

O mesmo procedimento permite a construção de medidas finitas sobre  $\Pi$ : para cada  $k \in \mathbb{N}^*$ , consideremos uma medida finita  $\nu_k$  sobre  $\mathbb{R}^k$  e  $k$  seqüências de números reais estritamente positivos cujas somas são inferiores a 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k &= (\mathbf{q}_{k,1}, \dots, \mathbf{q}_{k,k}) \in (\mathbb{R}^\infty)^k, \quad \mathbf{q}_{k,i} = (q_{k,i,1}, q_{k,i,2}, q_{k,i,3}, \dots), \\ q_{k,i,n} &\geq 0, \text{ para } k, i, n \in \mathbb{N}^*; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} q_{k,i,n} = Q_{k,i} \leq 1. \end{aligned} \quad (1.7.8)$$

Supondo que  $\nu_k$ :

$$\nu_k(\mathbb{R}^k) = N_k \leq 1$$

Seja  $(n_1, \dots, n_k) \times \mathcal{R}_k(\mathbf{m}, \mathbf{M}) \in (\mathbb{N}^*)^k \times \mathfrak{R}_k$  um elemento de  $\mathfrak{P}$  e uma seqüência somável de números reais estritamente positivos:

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, \dots) \in \mathbb{R}^\infty; \quad p_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = p \geq 0 \quad (1.7.9)$$

Definimos

$$\eta((n_1, \dots, n_k) \times \mathcal{R}_k(\mathbf{m}, \mathbf{M})) = p_k \nu_k(\mathcal{R}_k(\mathbf{m}, \mathbf{M})) \prod_{i=1}^k q_{k,i,n_i}.$$

Então  $\eta$  é uma medida finita sobre  $\mathfrak{P}$ . Como usualmente, podemos utilizar densidades em lugar de medidas:

$$\eta((n_1, \dots, n_k) \times \mathcal{R}_k(\mathbf{m}, \mathbf{M})) = p_k \prod_{i=1}^k q_{k,i,n_i} \left( \int_{m_i}^{M_i} f_{k,i,n_i}(x_{n_i}) dx_{n_i} \right),$$

onde

$$f_{k,i,n} \geq 0 \text{ sobre } \mathbb{R} \text{ e } \int_{\mathbb{R}} f_{k,i,n} \leq 1, \text{ para } k, i, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.7.10)$$

Este procedimento gera uma medida finita sobre  $\mathbb{R}_0^\infty : \nu = \eta \circ \pi$  (i.e.,  $\nu(A) = \eta(\pi(A))$ ) é uma medida finita sobre  $\mathbb{R}_0^\infty$ .

Se  $V$  possui uma base, a identificação entre  $V$  e  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^\infty$  pode ser combinada com tal procedimento: se  $\nu$  é uma medida finita sobre  $\mathbb{R}^\infty$ , então  $\mu = \nu \circ \mathbf{I}$  (i. e.,  $\mu(A) = \nu(\mathbf{I}(A))$ ) é uma medida finita sobre  $V$ . De forma análoga, podemos definir  $\mu = \eta \circ \pi \circ \mathbf{I}$  (i. e.,  $\mu(A) = \eta(\pi(\mathbf{I}(A)))$ ):  $\mu$  é uma medida finita sobre  $[\mathcal{D}]$ .

Uma construção alternativa é a seguinte: consideremos a situação onde o espaço é  $\mathbb{R}^k$ . Seja  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)$  um vetor de reais positivos ( $p_n \geq 0$ , para  $1 \leq n \leq k$ ) e  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)$  um conjunto limitado de funções positivas e integráveis sobre  $\mathbb{R}$  (i. e.,  $f_n \geq 0$  sobre  $\mathbb{R}$  for  $1 \leq n \leq k$  e existe  $\Lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\int_{\mathbb{R}} f_n \leq \Lambda$ , para  $1 \leq n \leq k$ ). Podemos utilizar  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{f}$  para definir uma medida finita sobre  $\mathbb{R}^k$ :

$$\nu(\mathcal{R}_k(\mathbf{m}, \mathbf{M})) = \sum_{n=1}^k p_n \left( \int_{m_n}^{M_n} f_n(x_n) dx_n \right).$$

$\nu$  é uma medida finita sobre  $\mathbb{R}^k$ :  $\nu \geq 0$ ,  $\nu(\emptyset) = 0$ ,  $\nu$  é enumeravelmente aditiva,  $\nu(\mathbb{R}^k) \leq \Lambda \sum_{n=1}^k p_n < \infty$ .

Este procedimento alternativo se estende a  $\mathbb{R}^\infty$  através de uma seqüência  $\mathbf{p}$  verificando (1.7.9) e uma seqüência limitada

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, \dots)$$

de funções positivas e integráveis sobre  $\mathbb{R}$  (i. e.,  $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \geq 0$  sobre  $\mathbb{R}$  e existe  $\Lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\int_{\mathbb{R}} f_n \leq \Lambda, \forall n \in \mathbb{N}$ ). Definimos

$$\nu(\mathcal{R}_\infty(\mathbf{m}, \mathbf{M})) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \left( \int_{m_n}^{M_n} f_n(x_n) dx_n \right).$$

Esta série é convergente para  $\mathcal{R}_\infty(\mathbf{m}, \mathbf{M}) \in \mathfrak{R}_\infty$ : por exemplo, temos

$$\left| \sum_{n=k}^{+\infty} p_n \int_{m_n}^{M_n} f_n(x_n) dx_n \right| \leq \sum_{n=k}^{+\infty} p_n \left| \int_{m_n}^{M_n} f_n(x_n) dx_n \right| \leq \Lambda \sum_{n=k}^{+\infty} p_n \rightarrow 0, \text{ for } k \rightarrow +\infty.$$

Como no caso em dimensão finita, onde o espaço é  $\mathbb{R}^k$ ,  $\nu$  é uma medida finita sobre  $\mathbb{R}^\infty$  :  $\nu \geq 0$ ,  $\nu(\emptyset) = 0$ ,  $\nu$  é enumeravelmente aditiva,  $\nu(\mathbb{R}^\infty) \leq p\Lambda < \infty$ .

De forma análoga, podemos aplicar este procedimento a  $\mathbb{R}_0^\infty$  : suponhamos que  $\mathbf{p}$  verifica (1.7.9),  $\mathbf{q}_k$  satisfaz (1.7.8),  $f_{k,i,n}$  verifica (1.7.10) e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q_{k,i,n} = Q_{k,i} \quad , \quad \sum_{i=1}^k Q_{k,i} = Q_k \leq \Lambda \in \mathbb{R} \quad ,$$

onde  $\Lambda$  é independente de  $k$ . Para

$$(n_1, \dots, n_k) \times \mathcal{R}_k(\mathbf{m}, \mathbf{M}) \in (\mathbb{N}^*)^k \times \mathfrak{R}_k \subset \mathfrak{P},$$

definimos

$$\eta((n_1, \dots, n_k) \times \mathcal{R}_k(\mathbf{m}, \mathbf{M})) = p_k \sum_{i=1}^k q_{k,i,n_i} \left( \int_{m_i}^{M_i} f_{k,i,n_i}(x_{n_i}) dx_{n_i} \right).$$

Então  $\eta$  é uma medida finita sobre  $\Pi$ :  $\eta \geq 0$ ,  $\eta(\emptyset) = 0$ ,  $\eta$  é enumeravelmente aditiva,  $\eta(\Pi) \leq p\Lambda < \infty$ . Assim,  $\nu = \eta \circ \pi$  é uma medida finita sobre  $\mathbb{R}_0^\infty$ .

Analogamente à situação precedente,  $\mu = \nu \circ \mathbf{I}$  é uma medida finita sobre  $V$  - se  $V$  possui uma base - e  $\mu = \eta \circ \pi \circ \mathbf{I}$  é uma medida finita sobre  $[\mathcal{D}]$ .

### 1.7.2 Integração com uma medida sobre um espaço de Hilbert de dimensão infinita

Como indicado no que precede, nosso objetivo é a aplicação da teoria a problemas do Cálculo das Variações: assim,  $V$  e  $W$  são espaços funcionais reais, tais como, por exemplo,  $[L^p(\Omega)]^n$  ou os espaços de Sobolev usuais, e seus elementos tomam valores em  $\mathbb{R}^k$  para algum  $k > 0$ . Em tal caso, a extensão da noção de integral se efetua de maneira natural, embora envolvendo um espaço de dimensão infinita. Por exemplo, estamos interessados no cálculo de  $E(U)$  sobre  $S \subset V$  para uma variável aleatória  $U$  definida sobre  $V$ , i. e., na média sobre  $S$  de uma função  $U : V \rightarrow W$ , associando a cada  $v \in V$  um elemento  $U(v) \in W$ . Temos

$$E(U) = \int_S U d\mu / \mu(S)$$

A avaliação prática de  $\int_S U(v) d\mu$  envolve uma integração não usual, pois trata-se de uma medida  $\mu$  sobre um espaço de dimensão infinita. Entretanto, a definição formal é idêntica à já introduzida em dimensão finita: por exemplo, consideremos a situação onde os elementos de  $W$  são seja números reais, seja funções reais (i. e.,  $W = \mathbb{R}$  ou  $W = L^p(\Omega)$ ).

De maneira análoga à utilizada em dimensão finita, seja  $\mathcal{M}$  o conjunto das *funções mensuráveis*, isto é, das funções que transformam conjuntos mensuráveis em conjuntos mensuráveis. Consideremos o conjunto das *funções mensuráveis com imagem finita*:

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{M} : f(V) \text{ é um conjunto finito}\}.$$

Para  $F \in \mathcal{F}$ , definimos

$$R^*(f, S) = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha \in f(S)\}.$$

O conjunto das *funções elementares* é :

$$E(U) = \frac{\int_S U d\mu}{\mu(S)}$$

Se  $\mu$  é uma medida *finita*, temos  $\mathcal{E}(\mu, S) = \mathcal{F}$ . Para  $e \in \mathcal{E}(\mu, S)$  tal que  $R^*(e, S) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , a integral é definida como

$$\int_S e d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i); A_i = e^{-1}(\{\alpha_i\}) \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

Esta definição se estende ao conjunto das *funções mensuráveis positivas*  $\mathcal{M}_+ = \{m \in \mathcal{M} : m \geq 0\}$  da forma seguinte: seja  $U \in \mathcal{M}_+$ . Consideramos as *funções elementares positivas limitadas superiormente*  $U$ :

$$\mathcal{E}_+(\mu, S, U) = \{e \in \mathcal{E}(\mu, S) : 0 \leq e \leq U\}$$

e definimos

$$\int_S U d\mu = \sup \left\{ \int_S e : e \in \mathcal{E}_+(\mu, S, U) \right\}.$$

Finalmente, uma função arbitrária  $U \in \mathcal{M}$  se decompõe em

$$U = U^+ - U^-, U^+(x) = \max\{U(x), 0\}, U^-(x) = \max\{-U(x), 0\}$$

e definimos

$$\int_S U d\mu = \int_S U^+ d\mu - \int_S U^- d\mu.$$

O membro da direita está bem definido, pois  $U^+$  e  $U^-$  são elementos de  $\mathcal{M}_+$ . Esta definição induz a desigualdade clássica:

$$\left| \int_S U d\mu \right| \leq \int_S |U| d\mu,$$

a qual corresponde a uma forma particular da desigualdade de Jensen: para uma função *convexa*  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(U)$  é mensurável, temos  $g(E(U)) \leq E(g(U))$ . A extensão à situação onde os elementos de  $W$  são seja vetores reais, seja funções tomando valores num espaço de vetores reais (*i. e.*,  $W = \mathbb{R}^d$  or  $W = [L^p(\Omega)]^d$ ) é efetuada através dos componentes de  $U$ : para  $U = (U_1, \dots, U_d)$ , definimos

$$\int_S U d\mu = \left( \int_S U_1 d\mu, \dots, \int_S U_d d\mu \right).$$

Ainda temos a desigualdade de Jensen: se  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função *convexa e contínua* tal que  $g(U)$  é mensurável, temos

$$g\left(\int_S U d\mu\right) \leq \int_S g(U) d\mu.$$

e também

$$|E(U)|_p \leq E(|U|_p), \text{ para todo } 1 \leq p \leq \infty$$

tal que  $|U|_p$  é mensurável.

Como é usual, a integral de  $U : V \rightarrow W$  sobre  $S \subset V$  pode ser aproximada por

$$\int_S U d\mu \approx \sum_{i=1}^n U(x_i) \mu(A_i); \bigcup_{i=1}^n A_i = S; x_i \in A_i \text{ para } 1 \leq i \leq n \quad (1.7.11)$$

e corresponde ao limite para  $n \rightarrow +\infty$ , com o diâmetro dos subconjuntos  $A_i$  tendendo a zero. Em nossos cálculos, não utilizaremos a aproximação (1.7.11), mas sim uma *aproximação de Monte Carlo*: geraremos uma amostra  $U_1, \dots, U_{nr}$  de  $nr$  valores da distribuição  $\mu$  e aproximaremos

$$E(U) \approx \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^{nr} U_i. \quad (1.7.12)$$

Este procedimento é mais conveniente para as situações estudadas: somente utilizaremos distribuições usuais, tais como gaussianas e poissonianas, para as quais existem métodos eficientes de geração.

## 1.8 Variáveis aleatórias

Consideremos  $\Omega$  não vazio e uma probabilidade  $P$  sobre  $\Omega$ .

Uma *variável aleatória*  $X$  sobre  $\Omega$  é uma aplicação *mensurável*  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Trata-se de uma generalização da noção de característica numérica. A imagem de  $X$  é  $I = X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ . Para toda parte  $J \subset \mathbb{R}$ , definimos:

$$P(X \in J) = P(X^{-1}(J)) .$$

Como  $X$  é mensurável, a probabilidade acima está definida para toda parte mensurável de  $\mathbb{R}$  - em particular, para os intervalos de  $\mathbb{R}$ . Assim, podemos caracterizar o comportamento global de  $X$  utilizando sua *função de repartição*, isto é

$$F(x) = P(X < x) = P(X \in (-\infty, x)) .$$

Dizemos então que  $X$  segue a lei  $F$ . Temos

PROPOSIÇÃO 1.8.1. *Seja  $F$  a função de repartição de  $X$ . Então*

(i)  $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ;

(ii)  $F$  é monótonicamente não-decrescente:  $a \leq b \implies F(a) \leq F(b)$ ;

(iii)  $P(X \geq x) = 1 - F(x)$  e  $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$ ;

(iv)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  ;

(v)  $F$  é contínua à esquerda:

$$F(x-) = F(x) \left( F(x-) = \lim_{h \rightarrow 0+} F(x-h) \right);$$

(vi)  $F$  é uma função a variação limitada e sua variação total é igual a 1;

(vii)  $P(X = x) = F(x+) - F(x-)$   $\left( F(x+) = \lim_{h \rightarrow 0+} F(x+h) \right)$ .

DEMONSTRAÇÃO:

(i) Dado que  $P$  é uma probabilidade e  $F(x) = P(X < x)$ , temos  $0 \leq F(x) \leq 1$ .

(ii) Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $a \leq b$ . Então:

$$F(b) = P(X \in (-\infty, b)) = P(X \in (-\infty, a) \cup [a, b]),$$

de modo que

$$\begin{aligned} F(b) &= \underbrace{P(X \in (-\infty, a))}_{F(a)} + P(X \in [a, b]) = \\ &F(a) + \underbrace{P(X \in [a, b])}_{\geq 0} \end{aligned}$$

e temos  $F(b) \geq F(a)$ .

(iii) Dado que

$$F(b) = F(a) + P(X \in [a, b]),$$

temos

$$P(X \in [a, b]) = F(b) - F(a).$$

Além disto,

$$P(X \in (-\infty, +\infty)) = 1,$$

de modo que

$$\underbrace{P(X \in (-\infty, x))}_{F(x)} + P(X \in [x, +\infty)) = 1$$

e temos

$$P(X \geq x) = P(X \in [x, +\infty)) = 1 - F(x).$$

(iv) Dado que  $F$  é não decrescente e  $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = a \leq 1.$$

Suponhamos  $a < l$ : seja  $a_n = F(n) = P(X < n)$ . Então

$$a_n \rightarrow a \text{ quando } n \rightarrow +\infty \text{ e } \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq 1.$$

Seja  $b_n = F(n+1) - F(n) = P(n \leq X < n+1)$ . Então

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq b_n \leq 1$$

e

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : 1 - a_n = P(X \geq n) = \\ \sum_{i=n}^{+\infty} P(n \leq X < n+1) = \sum_{i=n}^{+\infty} b_i. \end{aligned}$$

Neste caso,

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < 1 - a \leq 1 - a_n = \sum_{i=n}^{+\infty} b_i.$$

Decorre desta desigualdade que  $\sum_{i=0}^{+\infty} b_i = +\infty$ , pois trata-se de uma série de termos não negativos cuja série de restos não tende a zero. Mas então

$$1 - a_0 = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i = +\infty,$$

o que é absurdo, pois  $0 \leq a_0 \leq 1$ . Assim,  $a = 1$ .

Consideremos  $Y = -X$ . Seja  $G$  a função de repartição de  $Y$ : como acabamos de demonstrar:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} G(y) = 1.$$

Ora:  $P(Y < y) = P(X > -y) \leq P(X \geq -y) = 1 - F(-y)$ , de modo que

$$F(-y) = 1 - G(y) .$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} F(-y) = 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} G(y) = \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

(v) Seja  $f(h) = F(x) - F(x-h) = P(x-h \leq X < x)$ . Basta mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(h) = 0.$$

$f$  é não decrescente e limitada sobre os reais positivos:

$$\text{se } 0 \leq h_1 \leq h_2 \text{ então } 0 \leq f(h_1) \leq f(h_2) \leq 1.$$

Logo, existe un número real  $a \geq 0$  tal que  $a = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(h)$ .

Suponhamos  $a > 0$ : seja  $a_p = f\left(\frac{1}{p+1}\right)$ . Então

$$a_p \rightarrow a \text{ quando } p \rightarrow +\infty \text{ e } \forall p \in \mathbb{N} : 0 \leq a \leq a_p \leq 1.$$

Consideremos o evento

$$A_n = \left\{ \omega \in \Omega : x - \frac{1}{n+1} \leq X(\omega) < x - \frac{1}{n+2} \right\} .$$

Temos  $A_i \cap A_j = \emptyset$  quando  $i \neq j$ , de forma que  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  verifica:

$$P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) .$$

Ora,

$$A = \{\omega \in \Omega : x - 1 \leq X(\omega) < x\},$$

de modo que

$$F(x) - F(x - 1) = P(x - 1 \leq X < x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Por outro lado, consideremos  $p > 0$  e  $B_n = A_{n+p}$ . Temos ainda  $B_i \cap B_j = \emptyset$  quando  $i \neq j$ , de forma que  $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$  verifica:

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_{n+p}) = \sum_{n=p}^{+\infty} P(A_n).$$

Ora,

$$B = \left\{ \omega \in \Omega : x - \frac{1}{n+p} \leq X(\omega) < x \right\},$$

de modo que  $P(B) = a_p$ . Por conseguinte,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} P(A_n) = a_p \geq a > 0.$$

Decorre desta desigualdade que  $\sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i) = +\infty$ , pois trata-se de uma série de termos não negativos cuja série de restos não tende a zero. Mas então

$$F(x) - F(x - 1) = +\infty,$$

o que é absurdo, pois  $F(x) - F(x - 1) = P(x - 1 \leq X < x) \leq 1$ . Logo,  $a = 0$ , de modo que temos o resultado enunciado.

(vi) é imediato.

(vii) Temos  $F(x + h) - F(x) = P(x < X < x + h) + P(X = x)$ . Logo, basta mostrar que  $f(h) = P(x < X < x + h)$  verifica

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(h) = 0.$$

$f$  é não decrescente e limitada sobre os reais positivos:

$$\text{se } 0 \leq h_1 \leq h_2 \text{ então } 0 \leq f(h_1) \leq f(h_2) \leq 1.$$

Logo, existe um número real  $a \geq 0$  tal que  $a = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(h)$ .

Suponhamos  $a > 0$ : seja  $a_p = f\left(\frac{1}{p+1}\right)$ . Então

$$a_p \longrightarrow a \text{ quando } p \longrightarrow +\infty \text{ e } \forall p \in \mathbb{N} : 0 \leq a \leq a_p \leq 1.$$

Seja

$$A_n = \left\{ \omega \in \Omega : x + \frac{1}{n+2} \leq X(\omega) < x + \frac{1}{n+1} \right\}.$$

Temos  $A_i \cap A_j = \emptyset$  quando  $i \neq j$ , de forma que  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  verifica:

$$P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Ora,

$$A = \{\omega \in \Omega : x < X(\omega) < x+1\},$$

de modo que

$$F(x+1) - F(x) = P(x \leq X < x+1) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Assim,  $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$  é convergente e a sua série dos restos verifica

$$\sum_{n=p}^{+\infty} P(A_n) \longrightarrow 0 \text{ quando } p \longrightarrow +\infty.$$

Ora,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} P(A_n) = P\left(x < X < x + \frac{1}{p+1}\right) = f\left(\frac{1}{p+1}\right) = a_p,$$

de forma que  $a_p \longrightarrow 0$  e, por conseguinte,  $a = 0$ . ■

A função de repartição pode ser utilizada para definir uma medida de probabilidade sobre  $\mathbb{R}$ : para todo retângulo  $(a, b)$ ,

$$\mu_F((a, b)) = F(b) - F(a).$$

$\mu_F$  é estendida aos conjuntos mensuráveis de  $\mathbb{R}$  pelo procedimento descrito no capítulo precedente. Quando  $\mu_F$  é definida pela densidade  $f$ , dizemos que  $f$  é a *densidade de probabilidade* de  $X$ . Neste caso, temos, em particular,

$$P(X \in J) = \mu_F(J) = \int_J f \text{ para todo } J \subset \mathbb{R}$$

Neste caso,

$$\forall a, x \in \mathbb{R} : F(x) - F(a) = \int_a^x f \iff F' = f,$$

de forma que a densidade de probabilidade é a derivada da função de repartição.

Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. A média ou esperança de  $Y = g(X)$  é

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g \mu_F(dx) .$$

Por vezes utiliza-se a notação  $\int_{\mathbb{R}} g P(dx)$  ou  $\int_{\mathbb{R}} g P(X \in dx)$ . Quando  $\mu_F$  é definida pela densidade  $f$ , temos

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g f .$$

Dois casos particulares destas expressões são a *média* ou *esperança* de  $X$ , dada por

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \mu_F(dx)$$

e o *momento de ordem  $p$*  de  $X$ , dado por

$$M_p(X) = E(X^p) = \int_{\mathbb{R}} x^p \mu_F(dx) .$$

Quando  $\mu_F$  é definida pela densidade  $f$ , temos

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f \quad ; \quad M_p(X) = \int_{\mathbb{R}} x^p f .$$

A *variância* de  $X$  é

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - [E(X)]^2 .$$

As propriedades demonstradas para populações finitas continuam válidas: por exemplo,  $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$ . Temos também

PROPOSIÇÃO 1.8.2.  $V(X) \geq 0, \forall X$ . Além disto,  $V(X) = 0$  se e somente se  $X = E(X)$  *P-q.c.* .

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $g(X) = (X - E(X))^2$ . Como  $g(X) \geq 0$ , temos  $\int_{\mathbb{R}} g \mu_F(dx) \geq 0$ .

Suponhamos  $\int_{\mathbb{R}} g \mu_F(dx) = 0$ .

Seja  $A = \{\omega \in \Omega : g(X(\omega)) > 0\}$ .

Mostremos que  $P(A) = 0$ .

Sejam  $n, k > 0$ . Consideremos

$$A_k = \left\{ \omega \in \Omega : g(X(\omega)) > \frac{1}{k} \right\}$$

e

$$A_{n,k} = \left\{ \omega \in \Omega : n > g(X(\omega)) > \frac{1}{k} \right\}.$$

$X(A_{n,k})$  é uma reunião finita de intervalos, de modo que  $X(A_{n,k})$  é  $\mu_F$ -mensurável e  $P(A_{n,k}) = \mu_F(X(A_{n,k}))$ .

Ora, por um lado,

$$0 \leq \int_{X(A_{n,k})} g \mu_F(dx) = \int_{\mathbb{R}} g \mu_F(dx) - \underbrace{\int_{\mathbb{R}-X(A_{n,k})} g \mu_F(dx)}_{\geq 0} \leq \int_{\mathbb{R}} g \mu_F(dx) = 0.$$

e, por outro lado,

$$\int_{X(A_{n,k})} g \mu_F(dx) \geq \frac{1}{k} \int_{X(A_{n,k})} \mu_F(dx) = \frac{1}{k} \mu(X(A_{n,k})).$$

Assim,  $\mu(X(A_{n,k})) = 0$ . Além disto, temos  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  e  $A_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,k}$ . Por conseguinte,  $A_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,k}$  é desprezível, o que implica por sua vez que  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  é desprezível. ■

**COROLÁRIO 1.8.3.**  $E(X^2) \geq 0, \forall X$ . Além disto,  $E(X^2) = 0$  se e somente se  $X = 0$  *P-q.c.*

**DEMONSTRAÇÃO:** Temos  $E(X^2) = V(X) + [E(X)]^2$ . Assim, por um lado,  $E(X^2) \geq 0$  e, por outro lado,  $E(X^2) = 0$  se e somente se  $V(X) = 0$  e  $E(X) = 0$ . ■

A *função característica* de  $X$  é

$$\varphi(t) = E(e^{itX}).$$

$\varphi$  possui numerosas propriedades úteis. Por exemplo:

- $\varphi$  é uniformemente contínua em  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi(0) = 1$  e  $|\varphi(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$ .

- Se  $M_p(X) < \infty$  então  $\varphi^{(p)}$  (derivada de ordem  $p$  de  $\varphi$ ) satisfaz  $\varphi^{(p)}(t) = i^p E(X^p e^{itX})$ . Em particular,  $\varphi^{(p)}(0) = i^p M_p(X)$ ;
- Se  $M_p(X) < \infty, \forall p \in \mathbb{N}$  e a série  $S(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(it)^n}{n!} M_n(X)$  tem um raio de convergência não nulo então  $\varphi(t) = S(t)$ ;
- Se  $X$  e  $Y$  são independentes e  $Z = X + Y$ , então

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t);$$

- Se  $Y = aX + b, a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$ , então  $\varphi_Y(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$ ;
- Se existe  $t \neq 0$  tal que  $|\varphi(t)| = 1$ , então existem  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$  tais que  $J = \{an + b : n \in \mathbb{Z}\}$  verifique  $P(X \in J) = 1$ ;
- Se  $f$  é a *densidade de probabilidade* de  $X$  então

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f = TF(f),$$

isto é,  $\varphi$  é a transformada de Fourier de  $f$ . De maneira recíproca, se  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ , então  $f = TF^{-1}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi$ .

### 1.8.1 Duplas de variáveis aleatórias

Estas duplas generalizam as duplas de características numéricas.

Consideremos  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . A função de repartição de  $(X, Y)$  é

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) .$$

Ela tem as seguintes propriedades:

- $F \geq 0$ ;
- $F(-\infty, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$ ;
- $F(x, -\infty) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ;
- $F(+\infty, +\infty) = 1$ ;
- Se  $x_1 \leq x_2$  e  $y_1 \leq y_2$  então

$$0 \leq F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \leq 1.$$

A lei de  $X$  é chamada de *lei marginal* de  $X$  e é dada por

$$F_X(x) = P(X < x, Y < +\infty) = F(x, +\infty).$$

De maneira análoga, a lei de  $Y$  é chamada de *lei marginal* de  $Y$  e é dada por  $F_Y(x) = F(+\infty, y)$ .

A função de repartição  $F$  pode ser utilizada para definir uma medida sobre  $\mathbb{R}^2$ : para um retângulo

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x \leq x_2 \text{ e } y_1 \leq y \leq y_2\},$$

temos

$$\mu_F(\mathcal{R}) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1).$$

$\mu_F$  é estendida aos conjuntos mensuráveis de  $\mathbb{R}^2$  como no caso de uma variável aleatória única (procedimento do capítulo precedente). De maneira análoga à do caso de uma só variável aleatória, diremos que  $f$  é a *densidade de probabilidade* do par  $(X, Y)$  quando  $\mu_F$  é definida pela densidade  $f$ . Neste caso,

$$P((X, Y) \in J) = \mu_F(J) = \int_J f \text{ para todo } J \subset \mathbb{R}^2,$$

a densidade de probabilidade de  $X$  é  $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$  e a densidade de probabilidade de  $Y$  é  $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$ .

Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. A média ou esperança de  $Z = g(X, Y)$  é

$$E(Z) = E(g(X, Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g d\mu_F.$$

Quando  $\mu_F$  é definida pela densidade  $f$ , temos

$$E(Z) = E(g(X, Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g f.$$

Dois casos particulares destas expressões são a *média* ou *esperança* de  $X$  e  $Y$ , dadas por

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}^2} x d\mu_F \quad ; \quad E(Y) = \int_{\mathbb{R}^2} y d\mu_F$$

e os *momentos de ordem  $p$*  de  $X$  e  $Y$ , dados por

$$M_p(X) = E(X^p) = \int_{\mathbb{R}^2} x^p d\mu_F ;$$

$$M_p(Y) = E(Y^p) = \int_{\mathbb{R}^2} y^p d\mu_F .$$

Quando  $\mu_F$  é definida pela densidade  $f$ , temos

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}^2} x f \ ; \ M_p(X) = \int_{\mathbb{R}^2} x^p f \ ;$$

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}^2} y f \ ; \ M_p(Y) = \int_{\mathbb{R}^2} y^p f \ .$$

A *variância* de  $X$  é

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

e a *variância* de  $Y$  é

$$V(Y) = E\left((Y - E(Y))^2\right) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 \ .$$

A *covariância* de  $X$  e  $Y$  é

$$Cov(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) =$$

$$E(XY) - E(X)E(Y) \ .$$

As propriedades demonstradas para populações finitas continuam válidas: por exemplo,

$$V(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 V(X) + \beta^2 V(Y) + 2\alpha\beta Cov(X, Y) \ .$$

e

$$|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)} \ .$$

## 1.9 Propriedades Hilbertianas

Como as características numéricas apresentadas anteriormente, as variáveis aleatórias possuem uma estrutura hilbertiana. A principal diferença com relação ao caso de uma população finita reside na utilização da medida de probabilidade  $P$ , definida em  $\Omega$  e que serve de base à construção:  $P$  define os conjuntos de medida nula, os eventos quase-certos e quase-impossíveis.  $P$  serve de base à construção, mas é uma probabilidade abstrata, intervindo somente nas definições iniciais e não nos cálculos práticos e nos resultados mais avançados da teoria. A intervenção fundamental de  $P$  é a definição da equivalência entre duas variáveis aleatórias: como definido precedentemente (seção 1.5), temos

$$X \approx Y \iff A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \neq Y(\omega)\} \text{ é } P\text{-quase impossível.}$$

Consideremos o conjunto das variáveis aleatórias sobre  $\Omega$  :

$$\mathcal{C}(\Omega) = \{X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\} \ .$$

e o subespaço vetorial das *variáveis aleatórias simples* sobre  $\Omega$  :

$$\mathcal{V}(\Omega) = \{X \in \mathcal{C}(\Omega) : X(\Omega) \text{ é finito}\} .$$

A relação  $\approx$  é uma relação de equivalência sobre  $\mathcal{C}(\Omega)$  :

$$X \approx X ; X \approx Y \implies Y \approx X ; X \approx Y \text{ e } Y \approx Z \implies X \approx Z .$$

A classe de equivalência de  $X$  é

$$\tilde{X} = \{Y \in \mathcal{C}(\Omega) : Y \approx X\}$$

Denotemos  $\mathcal{C}(\Omega, P)$  o conjunto das classes de equivalência:

$$\mathcal{C}(\Omega, P) = \{\tilde{X} : X \in \mathcal{C}(\Omega)\}$$

e por  $\mathcal{V}(\Omega, P)$  o conjunto das classes de equivalência das variáveis aleatórias simples:

$$\mathcal{V}(\Omega, P) = \{\tilde{X} \in \mathcal{C}(\Omega, P) : X \in \mathcal{V}(\Omega)\}$$

Para  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{V}(\Omega, P)$  consideremos

$$(\tilde{X}, \tilde{Y}) = E(XY) . \quad (1.9.13)$$

Então:

PROPOSIÇÃO 1.9.1.  $(\bullet, \bullet)$  é um produto escalar sobre  $\mathcal{V}(\Omega, P)$ .

DEMONSTRAÇÃO: Trata-se de uma forma bilinear e simétrica.

Além disto,  $(\tilde{X}, \tilde{X}) = E(X^2) \geq 0$  para todo  $\tilde{X} \in \mathcal{V}(\Omega, P)$ .

Enfim, se  $(\tilde{X}, \tilde{X}) = E(X^2) = 0$ , então  $\tilde{X} = \tilde{0}$ , de modo que a forma é positiva e definida. ■

Seja  $L^2(\Omega, P)$  o completamento de  $\mathcal{V}(\Omega, P)$  para o produto escalar definido na equação (1.4.3):  $L^2(\Omega, P)$  é um espaço de Hilbert para o produto escalar (1.4.3). A norma de um elemento  $X \in L^2(\Omega, P)$  é

$$\|X\| = \sqrt{E(X^2)} . \quad (1.9.14)$$

### 1.9.1 Aproximação

Como observamos no caso de populações finitas, a estrutura hilbertiana de  $L^2(\Omega)$  torna possível a utilização dos resultados associados aos Espaços de Hilbert, em particular aqueles associados à *projeção ortogonal sobre um subespaço vetorial*. Os resultados enunciados na seção sobre populações finitas continuam válidos.

### Aproximação por uma constante

Quando desejamos aproximar o valor de  $X$  por uma constante, utilizamos a mesma estratégia utilizada para populações finitas e buscamos a projeção ortogonal sobre o subespaço vetorial de dimensão 1:

$$S = \{Z \in L^2(\Omega, P) : Z \text{ é constante: } Z(\omega) = s \in \mathbb{R}, \forall \omega \in \Omega\}$$

A solução é ainda  $PX = E(X)$  e o erro cometido na aproximação é  $\|X - PX\| = \sqrt{V(X)}$ .

### Aproximação afim

Quando desejamos aproximar o valor de  $Y$  por uma função afim de outra característica numérica  $X$ , também utilizamos a mesma estratégia utilizada para populações finitas e buscamos a projeção ortogonal sobre o subespaço vetorial de dimensão 2:

$$S = \{s \in L^2(\Omega, P) : s = \alpha X + \beta; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

A solução é ainda  $PX = aX + b$ , onde

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} ; b = E(Y) - aE(X).$$

Também temos

$$\|PX - aX - b\| = \sqrt{V(Y) (1 - [\rho(X, Y)]^2)},$$

onde

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)V(Y)}$$

é o *coeficiente de correlação linear* entre  $X$  e  $Y$ . Temos  $|\rho(X, Y)| \leq 1$  e o erro se anula quando  $|\rho(X, Y)| = 1$ .

### Melhor aproximação por uma função de X

Quando desejamos aproximar o valor de  $Y$  por uma função genérica de  $X$ , devemos determinar a projeção ortogonal sobre

$$S = \{s \in L^2(\Omega, P) : s = \varphi(X); \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Neste caso, temos:

$$(Y - g(X), \varphi(X)) = 0, \forall \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (y - g(x)) \varphi(x) d\mu_F = 0, \forall \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

onde  $\mu_F$  é a função de repartição do par  $(X, Y)$ . Quando  $\mu_F$  é definida por uma densidade  $f$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (y - g(x)) \varphi(x) f(x, y) = 0, \forall \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.9.15)$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^2} yf(x, y) \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x) f(x, y) \varphi(x), \forall \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

e,  $\forall \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} yf(x, y) d\ell(y) \right\} \varphi(x) d\ell(x) = \\ \int_{\mathbb{R}} \left\{ \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\ell(y) \right] g(x) \right\} \varphi(x) d\ell(x) . \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}} yf(x, y) d\ell(y) = \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\ell(y) \right] g(x) \quad \text{q.c.}$$

Supondo  $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\ell(y) \neq 0$  para todo  $x$ , a solução desta equação é:

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} yf(y | X = x) d\ell(y)$$

onde

$$f(y | X = x) = f(x, y) / \int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\ell(y) = f(x, y) / f_X(x) .$$

A função  $g$  assim definida é chamada de *esperança condicional de  $Y$  com relação a  $X$* , denotada  $E(Y | X)$  (isto é,  $g(x) = E(Y | X = x)$ ).

$f(y | X = x)$  é a *distribuição de probabilidade de  $Y$  condicional a  $X$* . De maneira análoga, a *distribuição de probabilidade de  $X$  condicional a  $Y$*  é:

$$f(x | Y = y) = f(x, y) / \int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\ell(x) = f(x, y) / f_Y(y) .$$

e temos

$$E(X | Y = y) = \int_{\mathbb{R}} xf(x | Y = y) d\ell(x) .$$

As duas variáveis aleatórias são *independentes* se e somente se

$$\forall x, y : f(x | Y = y) = f_X(x) \quad \text{ou} \quad f(y | X = x) = f_Y(y) ,$$

ou seja

$$\forall x, y : f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) .$$

PROPOSIÇÃO 1.9.2. *Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias independentes tais que a densidade do par  $(X, Y)$  é  $f$ . Então, para  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :*

$$E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)) .$$

DEMONSTRAÇÃO: Temos  $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ , de modo que

$$\begin{aligned} E(g(X)h(Y)) &= \int_{\mathbb{R}^2} g(x)h(y)f(x, y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g(x)h(y)f_X(x)f_Y(y) , \end{aligned}$$

de modo que o teorema de Fubini mostra que

$$\begin{aligned} E(g(X)h(Y)) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \left[ \int_{\mathbb{R}} h(y)f_Y(y) d\ell(y) \right] \right\} g(x)f_X(x) d\ell(x) , \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} E(g(X)h(Y)) &= \\ &= \left[ \int_{\mathbb{R}} h(y)f_Y(y) d\ell(y) \right] \left[ \int_{\mathbb{R}} g(x)f_X(x) d\ell(x) \right] = \\ &= E(g(X))E(h(Y)) . \end{aligned}$$

■

COROLÁRIO 1.9.3. *Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias independentes tais que a densidade de probabilidade do par  $(X, Y)$  é  $f$  e sua função característica é  $\varphi$ . Então:*

- (i)  $E(XY) = E(X)E(Y)$  e  $Cov(X, Y) = 0$ ;
- (ii)  $E(Y | X = x) = E(Y)$  e  $E(X | Y = y) = E(X)$  para todo  $(x, y)$ ;
- (iii)  $\varphi(t) = \varphi_X(t_1)\varphi_Y(t_2)$ ,  $\forall t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ .

DEMONSTRAÇÃO: O resultado é imediato. ■

PROPOSIÇÃO 1.9.4. *Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias tais que a densidade do par  $(X, Y)$  é  $f$  e sua função característica é  $\varphi$ . Então  $X$  e  $Y$  são independentes se e somente se  $\varphi(t) = \varphi_X(t_1) \varphi_Y(t_2)$ ,  $\forall t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ .*

DEMONSTRAÇÃO: ( $\implies$ ) decorre do corolário precedente.

( $\impliedby$ ) Temos

$$\varphi_X(t_1) \varphi_Y(t_2) = \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{it_2 y} f_Y(y) d\ell(y) \right] \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{it_1 x} f_X(x) d\ell(x) \right],$$

de modo que

$$\varphi_X(t_1) \varphi_Y(t_2) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{it_2 y} f_Y(y) d\ell(y) \right] \right\} e^{it_1 x} f_X(x) d\ell(x)$$

e o teorema de Fubini mostra que

$$\varphi_X(t_1) \varphi_Y(t_2) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(t_1 x + t_2 y)} f_X(x) f_Y(y) .$$

Como  $\varphi_X(t_1) \varphi_Y(t_2) = \varphi(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^2$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{i(t_1 x + t_2 y)} f_X(x) f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(t_1 x + t_2 y)} f(x, y) ,$$

de modo que a injetividade da transformação de Fourier implica que

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \text{ sobre } \mathbb{R}^2.$$

■

## 1.10 Sequências de variáveis aleatórias

### 1.10.1 Convergência em média quadrática

A estrutura hilbertiana do conjunto  $L^2(\Omega, P)$  induz uma primeira noção de convergência, ligada à norma e ao produto escalar deste espaço: diremos que a sequência  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $U$  em média quadrática se e somente se

$$\|U_n - U\| = \sqrt{E((U_n - U)^2)} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow +\infty .$$

Esta convergência é denotada  $U_n \rightarrow U$  m.q. . Ela é o equivalente da *convergência forte* de funções de quadrado integrável (espaço  $L^2$ ) e possui as mesmas propriedades. Por exemplo:

$$U_n \rightarrow U \text{ m.q.} \implies \|U_n\| = \sqrt{E(U_n^2)} \rightarrow \|U\| = \sqrt{E(U^2)};$$

$$U_n \rightarrow U \text{ m.q.} \implies E(U_n^2) \rightarrow E(U^2) \text{ e } E(U_n) \rightarrow E(U) .$$

### 1.10.2 Convergência em média

Uma segunda noção de convergência forte é a seguinte: diremos que a seqüência  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $U$  em média se e somente se

$$E(|U_n - U|) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty .$$

Esta convergência é denotada  $U_n \rightarrow U$  m. . Ela é o equivalente da *convergência forte* de funções integráveis (espaço  $L^1$ ) e possui as mesmas propriedades. Por exemplo:

$$U_n \rightarrow U \text{ m.} \implies E(U_n) \rightarrow E(U) .$$

### 1.10.3 Convergência em probabilidade

Diremos que a seqüência  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $U$  em probabilidade se e somente se

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|U_n - U| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$$

Esta convergência é denotada  $U_n \rightarrow U$  p. . Ela é o equivalente da *convergência em medida* usualmente introduzida no estudo de espaços mesuráveis e possui as mesmas propriedades. Notemos que esta convergência se traduz em termos de eventos: seja

$$E_n(\varepsilon) = \text{" } |U_n - U| \geq \varepsilon \text{"} = \{\omega \in \Omega : |U_n(\omega) - U(\omega)| \geq \varepsilon\} .$$

Então

$$U_n \rightarrow U \text{ p.} \iff \forall \varepsilon > 0 : P(E_n(\varepsilon)) \rightarrow 0 \\ \text{quando } n \rightarrow +\infty .$$

### 1.10.4 Convergência quase certa

Diremos que a seqüência  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $U$  *quase certamente* se e somente se

$$P(U_n \rightarrow U) = 1.$$

Esta convergência é denotada  $U_n \rightarrow U$  *q.c.* . Ela é o equivalente da *convergência quase certa* usualmente introduzida no estudo de espaços mesuráveis e possui as mesmas propriedades. Notemos que esta convergência se traduz em termos de eventos: seja

$$E = "U_n \rightarrow U" = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\} .$$

Então

$$U_n \rightarrow U \text{ q.c.} \iff P(E) = 1.$$

ou seja,  $E$  é *quase certo*.

### 1.10.5 Convergência em lei

Seja  $C_l(\mathbb{R}) = \{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ é contínua e limitada}\}$ . Diremos que a seqüência  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $U$  *em lei* se e somente se

$$\forall \varphi \in C_l(\mathbb{R}) : E(\varphi(U_n)) \rightarrow E(\varphi(U)) \text{ quando } n \rightarrow +\infty .$$

Esta convergência é denotada  $U_n \rightarrow U$  *L*. Temos

**TEOREMA 1.10.1.** *Seja  $F_n$  a função de repartição de  $U_n$  e  $F$  a função de repartição de  $U$ . Então*

$$U_n \rightarrow U \text{ L.} \iff F_n(x) \rightarrow F(x) \text{ quando } n \rightarrow +\infty \\ \text{em todo } x \text{ onde } F \text{ é contínua.}$$

Temos também

**TEOREMA 1.10.2.** *Seja  $F_n$  a função de repartição de  $U_n$  e  $F$  a função de repartição de  $U$ . Então  $U_n \rightarrow U$  *L* se e somente se as duas condições abaixo são verificadas:*

$$(i) \langle 1_{\mathbb{R}}, F_n \rangle \rightarrow \langle 1_{\mathbb{R}}, F \rangle \text{ quando } n \rightarrow +\infty$$

- (ii)  $\forall \varphi \in C_s(\mathbb{R}) : \langle \varphi, F_n \rangle \rightarrow \langle \varphi, F \rangle$  quando  $n \rightarrow +\infty$  ( $C_s(\mathbb{R}) = \{ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ é contínua e de suporte limitado, } 1_{\mathbb{R}} \text{ é a função constante e igual a } 1 \}$ ).

TEOREMA 1.10.3. (TEOREMA DE LÉVY)– *Seja  $\varphi_n$  a função característica de  $U_n$  e  $\varphi$  a função característica de  $U$ .  $U_n \rightarrow U$  L se e somente se  $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$  q.t.p. em  $\mathbb{R}$ .*

### 1.10.6 Relações entre as convergências

As relações entre as convergências são as seguintes:

TEOREMA 1.10.4.

- 1-  $U_n \rightarrow U$  m.q.  $\implies U_n \rightarrow U$  m.
- 2-  $U_n \rightarrow U$  m.  $\implies U_n \rightarrow U$  p.
- 3-  $U_n \rightarrow U$  p.  $\implies U_{n(k)} \rightarrow U$  q.c. para uma subsequência
- 4-  $U_n \rightarrow U$  m.  $\implies U_{n(k)} \rightarrow U$  q.c. para uma subsequência
- 5-  $U_n \rightarrow U$  q.c.  $\implies U_n \rightarrow U$  p.
- 6-  $U_n \rightarrow U$  p.  $\implies U_n \rightarrow U$  L.

## 1.11 Variáveis gaussianas

### 1.11.1 Lei Uniforme

DEFINIÇÃO 1.11.1. (LEI UNIFORME)– *Sejam  $X$  uma variável aleatória e  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $a < b$ . Diremos que  $X$  segue a lei de Uniforme  $U(a, b)$  ou que  $X$  segue a lei uniforme em  $(a, b)$  se e somente se sua densidade de probabilidade é*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } x \in (a, b) \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Temos  $E(X) = (a + b)/2$  e  $V(X) = (b - a)^2/12$ . A função característica de uma lei  $U(a, b)$  é

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{\exp(ibt) - \exp(iat)}{i(b-a)t} = \\ &= \frac{2}{(b-a)} \left[ \frac{\sin((b-a)t)}{t} \right] \exp\left(i\left(\frac{b+a}{2}\right)t\right). \end{aligned}$$

De maneira mais sintética, podemos dizer que  $X$  segue  $U(a, b)$  ou que  $X \sim U(a, b)$ .

### 1.11.2 Lei Normal

DEFINIÇÃO 1.11.2. (LEI NORMAL, LEI DE GAUSS)– Sejam  $m \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}$  tal que  $\sigma \geq 0$ . Diremos que uma variável aleatória  $X$  segue a lei de Gauss  $N(m, \sigma)$  ou que  $X$  segue a lei normal  $N(m, \sigma)$  se e somente se sua função característica é

$$\varphi(t) = \exp\left(imt - \frac{\sigma^2}{2}t^2\right).$$

De maneira mais sintética, podemos dizer que  $X$  segue  $N(m, \sigma)$  ou que  $X \sim N(m, \sigma)$ .

$N(m, \sigma)$  possui momentos de ordem arbitrária e temos  $E(X) = m, V(X) = \sigma^2$ .

Para  $\sigma = 0$ , a lei é *degenerada*: sua densidade de probabilidade  $f$  é uma massa de Dirac  $f(x) = \delta(x - m)$ , de modo que  $P(X = m) = 1$  e, o valor  $m$  é quase certo, enquanto que todo outro valor é desprezível.

Para  $\sigma > 0$ , a densidade de probabilidade de  $N(m, \sigma)$  é

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right).$$

A importância das leis de Gauss é ligada ao *teorema do limite central*: a lei da média empírica de uma variável aleatória de quadrado integrável pode ser aproximada por uma lei normal.

Quando  $m = 0$  e  $\sigma = 1$ , dizemos que se trata de uma lei reduzida, isto é, que  $X$  segue a lei de Gauss reduzida ou simplesmente que  $X$  é *gaussiana reduzida*. A lei gaussiana reduzida é denotada  $N(0, 1)$  (por exemplo, diremos que  $X$  segue  $N(0, 1)$  ou que  $X \sim N(0, 1)$ ) e sua densidade de probabilidade é

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

e sua função característica é

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Temos  $E(X) = 0$  e  $V(X) = 1$  para a lei reduzida. Os momentos da lei reduzida são dados por:

$$M_p(X) = 0, \text{ se } p = 2n + 1 \text{ (ímpar)} ;$$

$$M_p(X) = \frac{(2n)!}{n!2^n}, \text{ se } p = 2n \text{ (par)} .$$

### 1.11.3 Vetores gaussianos

No que segue, utilizaremos a notação  $(\bullet, \bullet)_k$  para o produto escalar de  $\mathbb{R}^k$ :

$$(a, b)_k = \sum_{i=1}^k a_i b_i .$$

DEFINIÇÃO 1.11.3. (VETOR GAUSSIANO)– *Seja  $X = (X_1, \dots, X_k)$  um vetor aleatório. Diremos que  $X$  é um vetor gaussiano de lei  $N(m, C)$  se e somente se sua função característica é*

$$\varphi(t) = \exp\left(i(t, m)_k - \frac{1}{2}(t, Ct)_k\right) ,$$

onde  $m_i = E(X_i)$  e  $C = (C_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$  é a matriz de covariância de  $X$ :

$$C_{ij} = Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i) E(X_j) .$$

A esperança de  $X$  é  $E(X) = m = (m_1, \dots, m_k)$ . Temos  $V(X_i) = C_{ii}$ .

Os vetores gaussianos também podem ser caracterizados da forma seguinte:

PROPOSIÇÃO 1.11.4.  *$X = (X_1, \dots, X_k)$  é um vetor gaussiano se e somente se toda combinação linear dos componentes de  $X$  segue uma lei normal, isto é,*

$$\forall t \in \mathbb{R}^k : (t, X)_k \text{ segue uma lei normal.}$$

DEMONSTRAÇÃO: : Sejam  $t \in \mathbb{R}^k$ ,  $Z(t) = (t, X)_k$ . A função característica de  $Z(t)$  é

$$\varphi_Z(u) = \exp(iuZ) = \exp\left(iu \sum_{i=1}^k t_i X_i\right) = \varphi_X(ut) .$$

Seja  $C = (C_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$  a matriz de covariância de  $X$ :  $C_{ij} = Cov(X_i, X_j)$ .

( $\implies$ ) Suponhamos  $X$  gaussiano de lei  $N(m, C)$ . Então

$$\varphi_X(ut) = \exp\left(iu(t, m)_k - \frac{1}{2}u^2(t, Ct)_k\right) ,$$

de modo que

$$\varphi_Z(u) = \exp\left(im_z u - \frac{1}{2}\sigma_Z^2 u^2\right) ,$$

onde  $m_Z \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma_Z \in \mathbb{R}$  tal que  $\sigma_Z \geq 0$  e

$$m_z = (t, m)_k , \sigma_Z^2 = (t, Ct)_k = \sum_{i, j=1}^k C_{ij} t_i t_j \geq 0$$

( $C$  é positiva: Cf. resultados do capítulo precedente).  
Logo  $Z(t)$  é gaussiana de lei  $N(m_z, \sigma_Z)$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos  $Z(t)$  gaussiana para todo  $t \in \mathbb{R}^k$ . Então

$$\varphi_Z(u) = \exp\left(im_z u - \frac{1}{2}\sigma_Z^2 u^2\right)$$

Tomando  $t = e_i$ , onde  $\{e_1, \dots, e_k\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^k$ , temos  $Z(e_i) = X_i$ , de modo que cada  $X_i$  é gaussiana. Seja  $N(m_i, \sigma_i)$  a lei de  $X_i$ . Então, por um lado,

$$\begin{aligned} m_z &= E(Z(t)) = E\left(\sum_{i=1}^k t_i X_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^k t_i E(X_i) = \sum_{i=1}^k t_i m_i = (t, m)_k ; \end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\sigma_Z^2 = V(Z(t)) = \sum_{i,j=1}^k C_{ij} t_i t_j = (t, Ct)_k ,$$

pois

$$\begin{aligned} E\left(\left(\sum_{i=1}^k t_i X_i\right)^2\right) &= E\left(\sum_{i=1}^k t_i X_i \cdot \sum_{j=1}^k t_j X_j\right) = \\ &= E\left(\sum_{i,j=1}^k t_i t_j X_i X_j\right) = \sum_{i,j=1}^k t_i t_j E(X_i X_j) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left[E\left(\sum_{i=1}^k t_i X_i\right)\right]^2 &= \left(\sum_{i=1}^k t_i m_i\right)^2 = \sum_{i,j=1}^k t_i t_j m_i m_j = \\ &= \sum_{i,j=1}^k t_i t_j E(X_i) E(X_j) , \end{aligned}$$

de modo que

$$\varphi_Z(u) = \exp\left(i(t, m)_k u - \frac{1}{2}(t, Ct)_k u^2\right).$$

Por conseguinte,

$$\varphi_X(t) = \varphi_Z(1) = \exp\left(i(t, m)_k - \frac{1}{2}(t, Ct)_k\right)$$

e  $X$  é gaussiano de lei  $N(m, C)$ . ■

Para construir um vetor gaussiano, basta considerar variáveis gaussianas independentes:

**PROPOSIÇÃO 1.11.5.** *Se  $X_i \sim N(m_i, \sigma_i)$  e as variáveis  $X_1, \dots, X_k$  são duas a duas independentes, então  $X = (X_1, \dots, X_k)$  é um vetor gaussiano e sua matriz de covariância  $C$  verifica*

$$C_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j \quad ; \quad C_{ii} = \sigma_i^2 = V(X_i) \quad .$$

Este resultado é uma consequência do seguinte lema:

**LEMA 1.11.6.** *Seja  $X = (X_1, \dots, X_k)$  um vetor aleatório formado de variáveis gaussianas ( $X_i \sim N(m_i, \sigma_i)$ ) duas a duas independentes.*

*Então, para todo  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ :*

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i \text{ é gaussiana de lei } N(m, \sigma);$$

$$m = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2 .$$

**DEMONSTRAÇÃO:** Seja  $Y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ . A função característica de  $Y$  é:

$$\varphi(t) = E(\exp(itY)) = \exp(i\alpha_0 t) E\left(\exp\left(it \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i\right)\right) .$$

Como as variáveis são independentes:

$$\varphi(t) = \exp(i\alpha_0 t) \prod_{i=1}^n E(\exp(i\alpha_i t X_i)) = \exp(i\alpha_0 t) \prod_{i=1}^n \varphi_i(\alpha_i t) ,$$

onde  $\varphi_i$  é a função característica de  $X_i$ . Assim,

$$\varphi(t) = \exp\left(imt - \frac{\sigma^2}{2}t^2\right) ; \quad m = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i \quad \text{e}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2 ,$$

de forma que  $Y$  é gaussiana. ■

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO : É uma consequência imediata do lema precedente. ■

Temos também

PROPOSIÇÃO 1.11.7. *Seja  $X = (X_1, X_2)$  um vetor aleatório tal que  $X_i \sim N(m_i, \sigma_i)$ . Então as variáveis  $X_1$  e  $X_2$  são independentes se e somente se a função característica de  $X$  é*

$$\varphi(t) = \exp\left(i(t_1 m_1 + t_2 m_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2 + \sigma_2^2 t_2^2)\right).$$

DEMONSTRAÇÃO:  $X_1$  e  $X_2$  são independentes se e somente se

$$\varphi(t) = \varphi_{X_1}(t_1) \varphi_{X_2}(t_2),$$

de onde o resultado enunciado. ■

COROLÁRIO 1.11.8. *Seja  $X = (X_1, \dots, X_k)$  um vetor aleatório tal que  $X_i \sim N(m_i, \sigma_i)$ . Então as variáveis são duas a duas independentes se e somente se a função característica de  $X$  é*

$$\varphi(t) = \exp\left(i \sum_{i=1}^k t_i m_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 t_i^2\right).$$

DEMONSTRAÇÃO: Trata-se de uma consequência imediata do resultado precedente. ■

COROLÁRIO 1.11.9. *Seja  $X = (X_1, \dots, X_k)$  um vetor aleatório gaussiano. Então as variáveis são duas a duas independentes se e somente se  $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$  para  $i \neq j$ .*

DEMONSTRAÇÃO: ( $\implies$ ) é imediata, pois a independência implica que

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = 0 \quad (\text{Cf. resultados precedentes}).$$

( $\impliedby$ ) Seja  $\varphi$  a função característica de  $X$  e  $X_i \sim N(m_i, \sigma_i)$ . Se  $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$  para  $i \neq j$ , temos

$$\varphi(t) = \exp\left(i \sum_{i=1}^k t_i m_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 t_i^2\right),$$

de forma que  $X$  é um vetor aleatório gaussiano. ■

**COROLÁRIO 1.11.10.** *Seja  $X = (X_1, \dots, X_k)$  um vetor aleatório gaussiano e  $Y$  uma variável aleatória gaussiana tal que  $\text{Cov}(Y, X_i) = 0$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Então  $Y$  é independente de  $X$  e  $Z = (Y, X_1, \dots, X_k)$  é um vetor aleatório gaussiano.*

**DEMONSTRAÇÃO:** Denotemos por  $m_A$  a média de  $A$  e por  $C_A$  a matriz de covariância de  $A$ . Decorre do resultado precedente que  $Y$  é independente de  $X$ . Por conseguinte, para  $\tau = (t_0, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k+1}$ :

$$E(\exp(i(\tau, Z)_{k+1})) = E(\exp(it_0 Y)) E\left(\exp\left(i \sum_{i=1}^k t_i X_i\right)\right),$$

de modo que

$$\varphi_Z(\tau) = \varphi_Y(t_0) \varphi_X(t)$$

e

$$\varphi_Z(\tau) = \exp\left(it_0 m_Y - \frac{1}{2} \sigma_Y^2 t^2 + i(t, m_X)_k - \frac{1}{2}(t, C_X t)_k\right),$$

isto é,

$$\varphi_Z(\tau) = \exp\left(i(\tau, m_Z)_{k+1} - \frac{1}{2}(\tau, C_Z \tau)_{k+1}\right).$$

Logo,  $Z$  é um vetor gaussiano. ■

Quando a matriz  $C$  é inversível, a densidade de probabilidade de  $X$  é

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} |\det(C)|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - m, C^{-1}(x - m))\right)$$

#### 1.11.4 Amostras gaussianas

**DEFINIÇÃO 1.11.11.** (AMOSTRA GAUSSIANA)– *Seja  $X = (X_1, \dots, X_k)$  um vetor aleatório. Diremos que  $X$  é uma amostra de  $N(m, \sigma)$  se e somente se todos os componentes são dois a dois independentes e seguem a mesma lei  $N(m, \sigma)$ .*

Uma amostra de  $N(a, \sigma)$  é um vetor gaussiano para o qual  $m = (a, \dots, a) = a\mathbf{1}$  e  $C = \sigma^2 Id$ .

Lembremos que uma transformação  $T: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  possui uma transformação associada  $T^t$  definida por

$$(T(x), y)_k = (x, T^t(y))_k, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k.$$

Temos  $(T^t)^t = T$ , dado que

$$(T^t(x), y)_k = (y, T^t(x))_k = (T(y), x)_k = (x, T(y))_k.$$

Uma transformação  $T$  é ortogonal se e somente se  $T^{-1} = T^t$ . Neste caso,

$$\|T(x)\|_k^2 = (T(x), T(x))_k = (x, T^t(T(x)))_k = (x, x)_k = \|x\|_k^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^k.$$

Se  $T$  é ortogonal, então  $T^t$  é ortogonal, dado que  $(T^t)^t = T = (T^{-1})^{-1} = (T^t)^{-1}$ .

Se  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_k\}$  e  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\}$  são bases ortonormais de  $\mathbb{R}^k$ , então a aplicação de mudança de base

$$T(x) = \alpha \quad ; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^k x_j (e_i, b_j)_k e_i$$

é ortogonal e

$$T^t(y) = \beta \quad ; \quad \beta_i = \sum_{j=1}^k y_j (b_i, e_j)_k b_i :$$

basta constatar que

$$(\alpha, y)_k = \sum_{i,j=1}^k x_j (e_i, b_j)_k y_i = (x, \beta)_k,$$

de modo que

$$(T(x), y)_k = (\alpha, y)_k = (x, \beta)_k = (x, T^t(y))_k.$$

Temos:

**PROPOSIÇÃO 1.11.12.** *Seja  $X = (X_1, \dots, X_k)$  uma amostra de  $N(0, \sigma)$ . Então:*

- (i) *Se  $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  é uma transformação ortogonal então  $T(X)$  é uma amostra de  $N(0, \sigma)$ ;*
- (ii) *Os componentes de  $X$  em qualquer base ortonormada de  $\mathbb{R}^k$  formam uma amostra de  $N(0, \sigma)$ ;*
- (iii) *Seja  $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$  uma decomposição de  $\mathbb{R}^k$  em  $p$  subespaços ortogonais e  $P_i(X)$  a projeção ortogonal de  $X$  em  $E_i$ . Então cada  $P_i(X)$  é uma amostra de  $N(0, \sigma)$  e, além disto,  $P_i(X)$  e  $P_j(X)$  são independentes para  $i \neq j$ .*

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $\varphi$  a função característica de  $N(0, \sigma)$ . Dado que os componentes de  $X$  são independentes, temos

$$\varphi_X(t) = \prod_{i=1}^k \varphi(t_i) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} \|t\|_k^2\right).$$

Seja  $T: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  uma transformação ortogonal e  $Y = T(X)$ . Temos

$$(t, Y)_k = (t, T(X))_k = (T^t(t), X)_k$$

de modo que

$$\varphi_Y(t) = E(\exp(i(t, Y)_k)) = E(\exp(i(T^t(t), X)_k))$$

e

$$\varphi_Y(t) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} \|T^t(t)\|_k^2\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} \|t\|_k^2\right) = \varphi_X(t),$$

de onde (i).

(ii) decorre de (i): a transformação de mudança de base é ortogonal.

Enfim, (iii) decorre de (ii): seja  $\mathcal{B}_i$  uma base ortonormada de  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Então  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$  é uma base ortonormada de  $\mathbb{R}^k$  e os componentes de  $X$  na base  $\mathcal{B}$  formam uma amostra de  $N(0, \sigma)$ , de onde o resultado. ■

TEOREMA 1.11.13. *Seja  $(Y, X_1, \dots, X_n)$  um vetor gaussiano. Denotemos  $X = (X_1, \dots, X_n)$ . Então existe  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tal que*

$$E(Y | X) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i.$$

Além disto,  $Y - E(Y | X)$  é gaussiana, de média nula, independente de  $X$  e de  $E(Y | X)$ .

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos o subespaço auxiliar:

$$W = \left\{ Z \in L^2(\Omega, P) : Z = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i X_i; (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \right\}.$$

$W$  é um subespaço vetorial de dimensão finita ( $\dim(W) = n + 1$ ), de forma que a projeção ortogonal  $P_W(Y)$  de  $Y$  em  $W$  existe e é única. Além disto, ela é caracterizada por

$$P_W(Y) \in W \text{ e } E((Y - P_W(Y))Z) = 0, \forall Z \in W.$$

Como  $P_W(Y) \in S$ , existe  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tal que

$$P_W(Y) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i .$$

$P_W(Y)$  é gaussiana (Cf. resultados precedentes), de forma que  $Y - P_W(Y)$  também é gaussiana. Como  $Z = 1 \in W$  (corresponde a  $\beta_0 = 1, \beta_i = 0, i > 0$ ), temos

$$E(Y - P_W(Y)) = E((Y - P_W(Y))1) = 0 ,$$

de modo que  $Y - P_W(Y)$  tem média nula. Como  $X_i \in W$ , temos também  $E((Y - P_W(Y))X_i) = 0$ , de modo que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y - P_W(Y), X_i) &= \\ \underbrace{E((Y - P_W(Y))X_i)}_{=0} - \underbrace{E(Y - P_W(Y))E(X_i)}_{=0} &= 0 . \end{aligned}$$

Decorre desta igualdade que  $Y - P_W(Y)$  é independente de  $X_i$  (pois ambas são gaussianas). Como  $i$  é qualquer,  $Y - P_W(Y)$  é independente de  $X$  e

$$(Y - P_W(Y), X_1, \dots, X_n)$$

é um vetor gaussiano. Temos também

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y - P_W(Y), P_W(Y)) &= \\ \underbrace{E((Y - P_W(Y))P_W(Y))}_{=0} - \underbrace{E(Y - P_W(Y))E(P_W(Y))}_{=0} &= 0 , \end{aligned}$$

de forma que  $Y - P_W(Y)$  é independente de  $P_W(Y)$  (pois ambas são gaussianas). Seja

$$Z \in S = \{s \in L^2(\Omega, P) : s = \varphi(X); \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\}$$

Temos

$$\begin{aligned} E((Y - P_W(Y))(P_W(Y) - Z)) &= \\ \underbrace{E((Y - P_W(Y))P_W(Y))}_{=0} - E((Y - P_W(Y))Z) , \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} E((Y - P_W(Y))(P_W(Y) - Z)) &= -E((Y - P_W(Y))Z) \\ &\stackrel{\text{independentes}}{=} - \underbrace{E(Y - P_W(Y))E(Z)}_{=0} \end{aligned}$$

e, por conseguinte  $E((Y - P_W(Y))(P_W(Y) - Z)) = 0$ . Assim,

$$E((Y - Z)^2) = E((Y - P_W(Y) + P_W(Y) - Z)^2)$$

verifica

$$E((Y - Z)^2) = E((Y - P_W(Y))^2) + E((P_W(Y) - Z)^2) \geq E((Y - P_W(Y))^2),$$

de forma que

$$P_W(Y) = \arg \min \{\|s - Y\| : Y \in S\}$$

e  $P_W(Y)$  é a projeção ortogonal de  $Y$  em  $S$ . Assim,

$$P_W(Y) = E(Y | X).$$

■

PROPOSIÇÃO 1.11.14. *Seja  $U = (U_1, U_2)$  um par de variáveis aleatórias independentes de mesma lei  $U(0, 1)$ . Sejam*

$$X_1 = \sqrt{-2 \log(U_1)} \sin(2\pi U_2); \quad X_2 = \sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2).$$

*Então  $X = (X_1, X_2)$  é um par de variáveis aleatórias independentes de mesma lei  $N(0, 1)$ .*

DEMONSTRAÇÃO: O jacobiano da transformação  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\psi(U_1, U_2) = (X_1, X_2)$  é

$$J = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{-1}{U_1 \sqrt{-2 \log(U_1)}} \sin(2\pi U_2) & 2\pi \sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2) \\ \frac{-1}{U_1 \sqrt{-2 \log(U_1)}} \cos(2\pi U_2) & -2\pi \sqrt{-2 \log(U_1)} \sin(2\pi U_2) \end{pmatrix} \right|,$$

isto é,

$$J = \frac{2\pi}{U_1}.$$

Por outro lado,

$$X_1^2 + X_2^2 = -2 \log(U_1) \implies U_1 = \exp\left(-\frac{1}{2} \|X\|_2^2\right)$$

e

$$\sin(2\pi U_2) = \frac{X_1}{\|X\|_2} \quad \text{e} \quad \cos(2\pi U_2) = \frac{X_2}{\|X\|_2} \implies U_2 = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{X_1}{X_2}\right).$$

A densidade de probabilidade de  $U$  é:

$$f(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } u \in (0, 1) \times (0, 1) \\ 0, & \text{senão.} \end{cases}$$

e a densidade de probabilidade de  $X$  é  $g(x) = f(\psi^{-1}(x)) / J$  (Cf. [23]), isto é

$$g(x) = \frac{U_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} \|X\|_2^2\right).$$

Decorre desta igualdade que  $X = (X_1, X_2)$  é um par de variáveis aleatórias independentes de mesma lei  $N(0, 1)$ . ■

## 1.12 Processos estocásticos

Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias dependentes de um parâmetro:  $X = \{X(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ , onde cada  $X(\lambda)$  é uma variável aleatória em um mesmo  $\Omega$ . Assim, um processo estocástico indexado por  $\Lambda$  é simplesmente uma função  $X : \Lambda \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Estamos interessados em processos estocásticos indexados pelo tempo, de modo que consideraremos aplicações da forma

$$X : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

onde  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , isto é,

**DEFINIÇÃO 1.12.1.** (PROCESSO ESTOCÁSTICO) – *Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $a < b$ . Diremos que  $X$  é um processo estocástico indexado por  $(a, b)$  é se e somente se*

$$\forall t \in (a, b) : \omega \rightarrow X(t, \omega) \text{ é uma variável aleatória em } \Omega.$$

Os processos estocásticos possuem propriedades hilbertianas análogas àquelas das variáveis aleatórias. Por exemplo, podemos considerar o conjunto

$$\mathcal{V} = \mathcal{E}_P(\ell, (a, b), L^2(\Omega, P)),$$

isto é, o conjunto funções simples definidas por partições  $\mathfrak{Part}((a, b))$  do intervalo  $(a, b)$  tomando valores em  $L^2(\Omega, P)$ . Temos

$$\mathcal{V} = \left\{ X : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} : X(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i(\omega) 1_{(t_i, t_{i+1})}(t) ; \right. \\ \left. t \in \mathfrak{Part}((a, b)), X_i \in L^2(\Omega, P) \right\}.$$

$\mathcal{V}$  pode ser munido do produto escalar

$$(X, Y) = \int_{(a,b)} E(XY) .$$

Com efeito,  $(\bullet, \bullet)$  é bilinear, simétrica e positiva definida: quando  $X, Y \in \mathcal{V}$ , temos

$$X(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n_x-1} \overline{X}_i 1_{(x_i, x_{i+1})}(t) \quad \text{e} \quad Y(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n_Y-1} \overline{Y}_i 1_{(y_i, y_{i+1})}(t)$$

onde  $x = (x_0, \dots, x_{n_x}) \in \mathfrak{Part}((a, b))$  e  $y = (y_0, \dots, y_{n_y}) \in \mathfrak{Part}((a, b))$ . Para

$$n > 0 \text{ tal que } h = \frac{b-a}{n} \leq \min\{\delta(x), \delta(y)\} ,$$

temos

$$XY = \sum_{i=0}^{n-1} X_i Y_i 1_{(a_i, a_{i+1})}(t) \quad , \quad a_i = a + (i-1)h \quad ,$$

$$X_i = X(a_i) \quad , \quad Y_i = Y(a_i)$$

de modo que

$$(X, Y) = h \sum_{i=0}^{n-1} E(X_i Y_i) .$$

Em particular,

$$\|X\|^2 = (X, X) = h \sum_{i=0}^{n-1} E([X_i]^2) .$$

O complemento de  $\mathcal{V}$  para esse produto escalar é um espaço de Hilbert denotado por  $V = L^2((a, b), L^2(\Omega, P))$ .

Utilizaremos repetidas vezes no que segue o *princípio de extensão*, o qual consiste em estender uma aplicação linear e contínua definida em um espaço vetorial  $\mathcal{V}$  ao conjunto das seqüências de Cauchy de elementos de  $\mathcal{V}$  e aos conjuntos nos quais  $\mathcal{V}$  é denso em  $V$ . O *princípio de extensão* é fundamentado pelos seguintes teoremas:

**TEOREMA 1.12.2.** *Sejam  $\mathcal{V}$  um espaço pré-hilbertiano de produto escalar  $(\bullet, \bullet)$  e  $I : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação linear contínua em  $\mathcal{V}$ . Seja*

$$\mathbb{V} = \{ \tilde{v} = \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V} : \tilde{v} \text{ é de Cauchy para } (\bullet, \bullet) \} .$$

Seja

$$\|\tilde{v}\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\| .$$

Então

(i)  $\forall \tilde{v} \in \mathbb{V} : \{I(v_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  é uma seqüência de Cauchy;

(ii) Existe  $\tilde{I}(\tilde{v}) \in \mathbb{R}$  tal que  $I(v_n) \rightarrow \tilde{I}(\tilde{v})$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

(iii) Se  $\tilde{w} \in \mathbb{V}$  verifica  $\|w_n - v_n\| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , então  $\tilde{I}(\tilde{w}) = \tilde{I}(\tilde{v})$ .

(iv) Se  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;  $\tilde{v}, \tilde{w} \in \mathbb{V}$ ,  $\tilde{u} = \alpha\tilde{v} + \beta\tilde{w}$  então

$$\tilde{I}(\tilde{u}) = \alpha\tilde{I}(\tilde{v}) + \beta\tilde{I}(\tilde{w}) .$$

(v) Seja  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $|I(v)| \leq M\|v\|, \forall v \in \mathcal{V}$ . Então,

$$|\tilde{I}(\tilde{v})| \leq M\|\tilde{v}\|, \forall \tilde{v} \in \mathbb{V} .$$

DEMONSTRAÇÃO: Notemos que  $\{\|v_n\|\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  é de Cauchy, pois

$$|\|v_m\| - \|v_n\|| \leq \|v_m - v_n\|$$

e

$$m, n \geq n(\varepsilon) \implies \|v_m - v_n\| \leq \varepsilon \implies |\|v_m\| - \|v_n\|| \leq \varepsilon .$$

Assim, existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $\|v_n\| \rightarrow m$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

(i)  $\{I(v_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  é de Cauchy, pois

$$|I(v_m) - I(v_n)| = \|I(v_m - v_n)\| \leq M\|v_m - v_n\|$$

e  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma seqüência de Cauchy.

(ii) Como  $\mathbb{R}$  é completo, existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que

$$m = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(v_n) .$$

Definindo  $\tilde{I}(\tilde{v}) = m$ , temos o resultado.

(iii) Se  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$  verifica  $\|w_n - v_n\| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , temos

$$|I(w_n) - I(v_n)| = \|I(w_n - v_n)\| \leq M\|w_n - v_n\| \rightarrow 0 ,$$

de modo que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I(w_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(v_n)$$

e, por conseguinte,  $\tilde{I}(\tilde{w}) = \tilde{I}(\tilde{v})$ .

(iv) Temos

$$I(u_n) = I(\alpha v_n + \beta w_n) = \alpha I(v_n) + \beta I(w_n) \longrightarrow \alpha \tilde{I}(\tilde{v}) + \beta \tilde{I}(\tilde{w}),$$

de forma que  $\tilde{I}(\tilde{u}) = \alpha \tilde{I}(\tilde{v}) + \beta \tilde{I}(\tilde{w})$ .

(v) Como  $\|v_n\| \longrightarrow \|\tilde{v}\|$  quando  $n \longrightarrow +\infty$  e  $|I(v_n)| \longrightarrow \left| \tilde{I}(\tilde{v}) \right|$ , temos

$$|I(v_n)| \leq M \|v_n\|, \forall n \in \mathbb{N} \implies \left| \tilde{I}(\tilde{v}) \right| \leq M \|\tilde{v}\|.$$

■

**TEOREMA 1.12.3.** *Sejam  $\mathcal{V}$  um espaço pré-hilbertiano de produto escalar  $(\bullet, \bullet)$  e  $I : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação linear contínua em  $\mathcal{V}$ . Se  $V$  é um espaço vetorial tal que  $\mathcal{V}$  é denso em  $V$ , então  $I$  pode ser estendida a  $V$ , isto é, existe  $I_V : V \longrightarrow \mathbb{R}$  linear contínua que coincide com  $I$  em  $\mathcal{V}$ . Além disto, se  $M \in \mathbb{R}$  verifica  $|I(v)| \leq M \|v\|, \forall v \in \mathcal{V}$ , então  $|I_V(v)| \leq M \|v\|, \forall v \in V$ .*

**DEMONSTRAÇÃO:** Lembremos que uma aplicação linear  $I : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$  é contínua se e somente se existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $|I(v)| \leq M \|v\|, \forall v \in \mathcal{V}$ . Como  $\mathcal{V}$  é denso em  $V$ : para todo  $v \in V$ , existe  $\tilde{v} = \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$  tal que  $\|v_n - v\| \longrightarrow 0$  quando  $n \longrightarrow +\infty$ . Seja

$$I_V(v) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} I(v_n).$$

$\tilde{v}$  é uma seqüência de Cauchy (dado que é convergente). Assim,  $I_V(v) = \tilde{I}(\tilde{v})$ . Decorre do teorema precedente que o limite existe e é bem definido: se  $\tilde{w} = \{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$  verifica  $\|w_n - v\| \longrightarrow 0$  quando  $n \longrightarrow +\infty$ , então  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma seqüência de Cauchy (dado que é convergente) e  $\|w_n - v_n\| \longrightarrow 0$  quando  $n \longrightarrow +\infty$ , de modo que  $\tilde{I}(\tilde{v}) = \tilde{I}(\tilde{w})$  e, por conseguinte,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} I(v_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} I(w_n).$$

$I_V : V \longrightarrow \mathbb{R}$  é linear: sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;  $v, w \in V$ ;  $u = \alpha v + \beta w$ ;  $\tilde{v} = \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ ,  $\tilde{w} = \{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ ,  $\|v_n - v\| \longrightarrow 0$  e  $\|w_n - w\| \longrightarrow 0$  quando  $n \longrightarrow +\infty$ . Então  $\tilde{u} = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$  definida por  $u_n = \alpha v_n + \beta w_n$  verifica

$$\tilde{I}(\tilde{u}) = \alpha \tilde{I}(\tilde{v}) + \beta \tilde{I}(\tilde{w}).$$

Assim,  $I_V(w) = \alpha I_V(v) + \beta I_V(w)$ .  $I_V : V \longrightarrow \mathbb{R}$  é contínua: se  $\tilde{v} = \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$  verifica  $\|v_n - v\| \longrightarrow 0$  quando  $n \longrightarrow +\infty$ , então  $\|v_n\| \longrightarrow \|v\|$ , de modo que  $\|\tilde{v}\| = \|v\|$  e temos

$$\left| \tilde{I}(\tilde{v}) \right| \leq M \|v\| \implies |I_V(v)| \leq M \|v\|.$$

■

COROLÁRIO 1.12.4. *Sejam  $\mathcal{V}$  um espaço pré-hilbertiano de produto escalar  $(\bullet, \bullet)$  e  $I : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação linear contínua em  $\mathcal{V}$ . Se  $V$  é o complemento de  $\mathcal{V}$  para  $(\bullet, \bullet)$ , então  $I$  pode ser estendida a  $V$ .*

DEMONSTRAÇÃO: Basta notar que

$$\mathbb{V} = \{ \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V} : \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ é de Cauchy para } (\bullet, \bullet) \}$$

é denso em  $V$ . ■

## 1.13 Processo de Wiener

Um dos processos estocásticos fundamentais é o seguinte:

DEFINIÇÃO 1.13.1. (PROCESSO DE WIENER UNIDIMENSIONAL)– *Seja*

$$W = \{W(t)\}_{t \geq 0}$$

*uma família de variáveis aleatórias. Diremos que  $W$  é um processo de Wiener unidimensional ou movimento browniano unidimensional se e somente se:*

- (i)  $W(0) = 0$  ;
- (ii)  $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $0 \leq s \leq t$  :
  - (a)  $W(t) - W(s) \sim N(0, \sqrt{t-s})$  ;
  - (b)  $W(t) - W(s)$  é independente de  $W(b) - W(a)$ ,  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $0 \leq a \leq b \leq s$ .

Temos

PROPOSIÇÃO 1.13.2. *Seja  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $0 \leq s \leq t$ . Então*

- (i)  $E((W(t) - W(s))W(s)) = 0$  ;
- (ii)  $E(W(s)^2) = s$  ;
- (iii)  $E(W(t)W(s)) = s$  ;
- (iv)  $E((W(t) - W(s))W(t)) = t - s$  .

DEMONSTRAÇÃO: Tomando  $a = 0$  e  $b = s$ , temos:  $W(t) - W(s)$  é independente de  $W(s) - W(0) = W(s) - 0 = W(s)$ , de modo que

$$E((W(t) - W(s))W(s)) = \underbrace{E(W(t) - W(s))}_{=0} E(W(s)) = 0 .$$

De maneira análoga,

$$E(W(s)^2) = E((W(s) - W(0))^2) = \\ V(W(s) - W(0)) = s - 0 = s.$$

Assim,

$$E(W(t)W(s)) = E((W(t) - W(s) + W(s))W(s)) = \\ \underbrace{E((W(t) - W(s))W(s))}_{=0} + \underbrace{E(W(s)^2)}_{=s},$$

de modo que  $E(W(t)W(s)) = s$ . Enfim,

$$E((W(t) - W(s))W(t)) = \\ \underbrace{E(W(t)^2)}_{=t} - \underbrace{E(W(t)W(s))}_{=s} = t - s.$$

■

**TEOREMA 1.13.3.** *Sejam  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $0 \leq s \leq t$ ;  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k > 0$ ;  $t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$  tais que  $0 \leq t_i \leq s$  ( $1 \leq i \leq k$ ) e  $t_i \leq t_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq k-1$ );  $X = (W(t_1), \dots, W(t_k))$ ,  $Y = W(t) - W(s)$ . Então  $E(Y | X) = 0$ .*

**DEMONSTRAÇÃO:** Sejam  $a = 0, b = t_i$ :  $0 \leq a \leq b \leq s$ , de modo que  $W(t) - W(s)$  é independente de  $W(b) - W(a) = W(t_i)$ . Logo,  $Y$  é independente de  $X$ . Por conseguinte,  $E(Y | X) = E(Y) = 0$ . ■

**DEFINIÇÃO 1.13.4.** (PROCESSO DE WIENER MULTIDIMENSIONAL)– *Seja  $W = \{W(t)\}_{t \geq 0}$  uma família de vetores aleatórios de  $\mathbb{R}^k$ . Diremos que  $W$  é um processo de Wiener  $k$ -dimensional ou movimento browniano  $k$ -dimensional se e somente se*

$$W(t) = (W_1(t), \dots, W_k(t)),$$

onde

- (i)  $\{W_i(t)\}_{t \geq 0}$  é um processo de Wiener unidimensional ( $1 \leq i \leq k$ );
- (ii) Cada componente é independente das demais, isto é, se  $i \neq j$  então  $W_i(t)$  é independente de  $W_j(s)$ ,  $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $s, t \geq 0$ .

## 1.14 Integrais de Ito

Apresentamos nesta seção a definição de algumas integrais estocásticas. Visamos sobretudo as integrais

$$\int_0^T \varphi(W(t)) dt \text{ e } \int_0^T \varphi(W(t)) dW(t) ,$$

onde  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função e  $W = \{W(t)\}_{t \geq 0}$  é um movimento browniano. As definições apresentadas são ditas «no sentido de Ito».

### 1.14.1 Integrais com relação ao tempo

Nesta subseção, vamos definir

$$I(X) = \int_a^b X(t) dt.$$

Seja  $t = (t_0, \dots, t_n) \in \mathfrak{Part}((a, b))$  uma  $n$ -partição de  $(a, b)$ . Consideremos a soma finita

$$I(X, t) = \sum_{i=1}^n X(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) .$$

Diremos que

$$\int_a^b X(t) dt = Y$$

quando

$$I(X, t) \rightarrow \int_a^b X(t) dt \text{ para } \delta(t) \rightarrow 0,$$

isto é,

**DEFINIÇÃO 1.14.1.** *Seja  $X \in L^2((a, b), L^2(\Omega, P))$ . Diremos que*

*$\int_a^b X(t) dt = Y \in L^2(\Omega, P)$  se e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\eta(\varepsilon) > 0$  tal que*

$$\forall t \in \mathfrak{Part}((a, b)) : \delta(t) \leq \eta(\varepsilon) \implies \|Y - I(X, t)\|_{L^2(\Omega, P)} \leq \varepsilon.$$

Lembremos que o produto escalar e a norma de  $L^2(\Omega, P)$  são

$$(X, Y)_{L^2(\Omega, P)} = E(XY) \quad ; \quad \|Z\|_{L^2(\Omega, P)} = E(Z^2) .$$

Seja  $n > 0$  e consideremos

$$I_n(X) = h \sum_{i=1}^n X(a + (i-1)h) \quad ; \quad h = \frac{b-a}{n} .$$

Quando a integral existe, temos também

$$I_n(X) \longrightarrow \int_a^b X(t) dt \quad \text{para } n \longrightarrow +\infty .$$

A integral com relação ao tempo é linear e contínua:

TEOREMA 1.14.2. *Sejam  $X, Y$  dois processos estocásticos indexados por  $(a, b)$  tais que  $\int_a^b X(t) dt$  e  $\int_a^b Y(t) dt$  existem. Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Então*

$$\int_a^b (\alpha X(t) + \beta Y(t)) dt = \alpha \int_a^b X(t) dt + \beta \int_a^b Y(t) dt .$$

Além disto, existe uma constante  $C = C(a, b) \in \mathbb{R}$ , independente de  $X$  tal que

$$\forall X \in L^2((a, b), L^2(\Omega, P)) : \left\| \int_a^b X(t) dt \right\|_{L^2(\Omega, P)} \leq C \|X\|_{L^2((a, b), L^2(\Omega, P))} .$$

DEMONSTRAÇÃO: Para todo  $t = (t_0, \dots, t_n) \in \mathfrak{Part}((a, b))$ ,

$$I(\alpha X + \beta Y, t) = \alpha I(X, t) + \beta I(Y, t) ,$$

de modo que  $I(\alpha X + \beta Y) = \alpha I(X) + \beta I(Y)$ . Pelo princípio de extensão, basta considerar  $X \in \mathcal{E}_P(\ell, (a, b), L^2(\Omega, P))$ . Para um tal  $X$ , temos

$$X(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n_x-1} \bar{X}_i 1_{(x_i, x_{i+1})}(t) ,$$

onde  $x = (x_0, \dots, x_{n_x}) \in \mathfrak{Part}((a, b))$ . Sejam  $n > 0$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $a_i = a + (i-1)h$  e  $X_i = X(a_i)$  ( $1 \leq i \leq n+1$ ). Então, para  $h \leq \delta(x)$ , temos

$$X(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i 1_{(a_i, a_{i+1})}(t) = h^2 \sum_{i=1}^n X_i^2;$$

$$[I_n(X)]^2 = h^2 \left[ \sum_{i=1}^n X_i \right]^2 = h^2 \sum_{i,j=1}^n X_i X_j \leq h^2 \sum_{i,j=1}^n \frac{X_i^2 + X_j^2}{2}.$$

Assim,

$$[I_n(X)]^2 \leq nh^2 \sum_{i=1}^n X_i^2 = (b-a)h \sum_{i=1}^n X_i^2$$

e

$$\|I_n(X)\|_{L^2(\Omega, P)}^2 = E([I_n(X)]^2) \leq (b-a)h \sum_{i=1}^n E(X_i^2) =$$

$$(b-a) \int_{(a,b)} E(X^2) = (b-a) \|X\|_{L^2((a,b), L^2(\Omega, P))}^2,$$

de onde o resultado. ■

### 1.14.2 Integrais com relação a um processo

Nesta subsecção, vamos definir

$$I(X, Y) = \int_a^b X(t) dY(t).$$

Seja  $t = (t_0, \dots, t_n) \in \mathfrak{Part}((a, b))$  uma  $n$ -partição de  $(a, b)$ . Consideremos a soma finita

$$I(X, Y, t) = \sum_{i=1}^n X(t_{i-1})(Y(t_i) - Y(t_{i-1})).$$

Diremos que

$$\int_a^b X(t) dY(t) = Z$$

quando

$$I(X, Y, t) \longrightarrow Z \text{ para } \delta(t) \longrightarrow 0,$$

isto é,

DEFINIÇÃO 1.14.3. Sejam  $X, Y \in L^2((a, b), L^2(\Omega, P))$ . Diremos que

$$\int_a^b X(t) dY(t) = Z \in L^2(\Omega, P)$$

se e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\eta(\varepsilon) > 0$  tal que

$$\forall t \in \mathfrak{Part}((a, b)) : \delta(t) \leq \eta(\varepsilon) \implies \|Z - I(X, Y, t)\|_{L^2(\Omega, P)} \leq \varepsilon.$$

Seja  $n > 0$  e consideremos, com  $h = \frac{b-a}{n}$ ,

$$I_n(X, Y) = \sum_{i=1}^n X(a + (i-1)h) (Y(a + ih) - Y(a + (i-1)h)) .$$

Quando a integral existe, temos também

$$I_n(X, Y) \longrightarrow \int_a^b X(t) dY(t) \quad \text{para } n \longrightarrow +\infty .$$

A integral com relação aos processos é bilinear:

PROPOSIÇÃO 1.14.4. Sejam  $X, Y, Z \in L^2((a, b), L^2(\Omega, P))$  tais que  $\int_a^b X(t) dY(t)$  e  $\int_a^b X(t) dZ(t)$  existem. Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Então,

$$\int_a^b X(t) d((\alpha Y(t) + \beta Z(t))) = \alpha \int_a^b X(t) dY(t) + \beta \int_a^b X(t) dZ(t) .$$

DEMONSTRAÇÃO: Para todo  $t = (t_0, \dots, t_n) \in \mathfrak{Part}((a, b))$ ,

$$I(X, \alpha Y + \beta Z, t) = \alpha I(X, Y, t) + \beta I(X, Z, t) ,$$

de modo que  $I(X, \alpha Y + \beta Z) = \alpha I(X, Y) + \beta I(X, Z)$ . ■

PROPOSIÇÃO 1.14.5. *Sejam  $X, Y, Z \in L^2((a, b), L^2(\Omega, P))$  tais que  $\int_a^b X(t) dZ(t)$  e  $\int_a^b Y(t) dZ(t)$  existem. Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Então,*

$$\int_a^b (\alpha X(t) + \beta Y(t)) dZ(t) = \alpha \int_a^b X(t) dZ(t) + \beta \int_a^b Y(t) dZ(t).$$

DEMONSTRAÇÃO: Para todo  $t = (t_0, \dots, t_n) \in \mathfrak{Part}((a, b))$ ,

$$I(\alpha Y + \beta Z, Z, t) = \alpha I(X, Z, t) + \beta I(Y, Z, t),$$

de modo que  $I(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha I(X, Z) + \beta I(Y, Z)$ . ■

### 1.14.3 Integrais com relação a um processo de Wiener

As integrais da forma

$$I_t(\varphi) = \int_a^t \varphi(W(t)) dt \quad \text{e} \quad I_W(\varphi) = \int_a^b \varphi(W(t)) dW(t)$$

são casos particulares das precedentes, correspondendo respectivamente a

$$I_t(\varphi) = I(\varphi(W)) \quad \text{e} \quad I_W(\varphi) = I(\varphi(W), W)$$

Temos

PROPOSIÇÃO 1.14.6. *Sejam  $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $\varphi(W), \psi(W) \in L = L^2((a, b), L^2(\Omega, P))$ . Então, para  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,*

$$I_W(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha I_W(\varphi) + \beta I_W(\psi).$$

Além disto,

$$E(I_W(\varphi)) = 0,$$

$$\|I_W(\varphi)\|_{L^2(\Omega, P)}^2 = \|\varphi(W)\|_L^2,$$

$$(I_W(\varphi), I_W(\psi))_{L^2(\Omega, P)} = (\varphi(W), \psi(W))_L.$$

DEMONSTRAÇÃO: Temos

$$\begin{aligned} I_W (\alpha\varphi + \beta\psi) &= I (\alpha\varphi(W) + \beta\psi(W), W) = \\ &= \alpha I (\varphi(W), W) + \beta I (\psi(W), W) = \alpha I_W (\varphi) + \beta I_W (\psi) . \end{aligned}$$

Para as demais igualdades, utilizamos o princípio de extensão: basta demonstrar os resultados para  $\varphi, \psi$  tais que  $\varphi(W), \psi(W) \in \mathcal{E}_P(\ell, (a, b), L^2(\Omega, P))$ . Em tal caso,

$$\begin{aligned} \varphi(W)(t, \omega) &= \sum_{i=0}^{n_x-1} \overline{\varphi}_i 1_{(x_i, x_{i+1})}(t) \quad \text{e} \\ \psi(W)(t, \omega) &= \sum_{i=0}^{n_y-1} \overline{\psi}_i 1_{(y_i, y_{i+1})}(t) \end{aligned}$$

onde  $x = (x_0, \dots, x_{n_x}) \in \mathfrak{Part}((a, b))$  e  $y = (y_0, \dots, y_{n_y}) \in \mathfrak{Part}((a, b))$ . Para

$$\begin{aligned} n > 0 \text{ tal que } h = \frac{b-a}{n} \leq \min \{ \delta(x), \delta(y) \} , \quad a_i = a + ih, \\ \varphi_i = \varphi(W_i), \quad \psi_i = \psi(W_i) , \quad W_i = W(a_i) \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \varphi(W)(t, \omega) &= \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i 1_{(a_i, a_{i+1})}(t) \quad \text{e} \\ \psi(W)(t, \omega) &= \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i 1_{(a_i, a_{i+1})}(t) \quad . \end{aligned}$$

Assim,

$$I_W (\varphi) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i (W_{i+1} - W_i) \quad \text{e} \quad I_W (\psi) = \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i (W_{i+1} - W_i),$$

de modo que

$$E(I_W(\varphi)) = \sum_{i=0}^{n-1} E(\varphi_i (W_{i+1} - W_i)) .$$

Como  $\varphi_i = \varphi(W_i)$  é independente de  $W_{i+1} - W_i$  :

$$E(I_W(\varphi)) = \sum_{i=0}^{n-1} E(\varphi_i) \underbrace{E(W_{i+1} - W_i)}_{=0} = 0 .$$

Temos também

$$I_W(\varphi) I_W(\psi) = \sum_{i,j=0}^{n-1} \varphi_i \psi_j (W_{i+1} - W_i) (W_{j+1} - W_j) .$$

Para  $i > j$ ,  $(W_{i+1} - W_i)$  é independente de  $(W_{j+1} - W_j)$ ,  $\varphi_i$  e  $\psi_j$  de modo que

$$E(\varphi_i \psi_j (W_{i+1} - W_i) (W_{j+1} - W_j)) = \underbrace{E(W_{i+1} - W_i)}_{=0} E(\varphi_i \psi_j (W_{j+1} - W_j)) = 0 .$$

Assim,

$$E(I_W(\varphi) I_W(\psi)) = \sum_{i=0}^{n-1} E(\varphi_i \psi_i (W_{i+1} - W_i)^2) = h \sum_{i=0}^{n-1} E(\varphi_i \psi_i) = I_t(\varphi) = I(\varphi(W)) .$$

Como  $(W_{i+1} - W_i)$  é independente de  $\varphi_i$  e  $\psi_i$  :

$$E(I_W(\varphi) I_W(\psi)) = \sum_{i=0}^{n-1} E(\varphi_i \psi_i) \underbrace{E((W_{i+1} - W_i)^2)}_{=h} = h \sum_{i=0}^{n-1} E(\varphi_i \psi_i) .$$

e temos

$$E(I_W(\varphi) I_W(\psi)) = (\varphi(W), \psi(W))_L ,$$

isto é,

$$(I_W(\varphi), I_W(\psi))_{L^2(\Omega, P)} = (\varphi(W), \psi(W))_L .$$

Tomando  $\psi = \varphi$  nesta igualdade, obtemos

$$\|I_W(\varphi)\|_{L^2(\Omega, P)}^2 = \|\varphi(W)\|_L^2 .$$

■

## 1.15 Cálculo de Ito

### 1.15.1 Fórmula de Ito

Notemos que

$$E\left(\frac{1}{2} \int_a^b W(t) dW(t)\right) = 0 \quad \text{e} \quad E\left([W(b)]^2 - [W(a)]^2\right) = b - a,$$

de modo que estas integrais não seguem as regras usuais do cálculo. Temos

PROPOSIÇÃO 1.15.1. (FÓRMULA DE ITO)– *Seja  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  (isto é,  $u \in C^\infty(\mathbb{R})$  e seu suporte é compacto) tal que  $\int_a^b u'(W(t)) dW(t)$  e  $\int_a^b u''(W(t)) dt$  existem.*

Então

$$\int_a^b u'(W(t)) dW(t) = u(W(b)) - u(W(a)) - \frac{1}{2} \int_a^b u''(W(t)) dt .$$

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos  $n > 0$ ,  $h = (b-a)/n$  e  $a_i = a + (i-1)h$ ,  $1 \leq i \leq n+1$ . Temos

$$\begin{aligned} u(W_{i+1}) - u(W_i) - u'(W_i)(W_{i+1} - W_i) \\ - \frac{1}{2}u''(W_i)(W_{i+1} - W_i)^2 = \frac{1}{6}u'''(\xi_i)(W_{i+1} - W_i)^3, \end{aligned}$$

onde  $\xi_i$  é uma variável aleatória. Assim,

$$u(W(b)) - u(W(a)) - T_n - V_n - U_n = 0 ,$$

onde

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{i=1}^n u'(W_i)(W_{i+1} - W_i) , \\ V_n &= \sum_{i=1}^n u''(W_i)(W_{i+1} - W_i)^2 , \\ U_n &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n u'''(\xi_i)(W_{i+1} - W_i)^3 . \end{aligned}$$

1. Por definição,

$$T_n \longrightarrow \int_a^b u'(W(t)) dW(t) \text{ quando } n \longrightarrow +\infty.$$

2. Seja

$$S_n = \sum_{i=1}^n (W_{i+1} - W_i)^2 ; W_i = W(a_i) .$$

Consideremos  $Z_i = (W_{i+1} - W_i)^2 - h$ . Temos:

$$Z_i Z_j = (W_{i+1} - W_i)^2 (W_{j+1} - W_j)^2 - h (W_{i+1} - W_i)^2 - h (W_{j+1} - W_j)^2 + h^2 .$$

Para  $i \neq j$ ,  $W_{i+1} - W_i$  e  $W_{j+1} - W_j$  são independentes, de forma que

$$E \left( (W_{i+1} - W_i)^2 (W_{j+1} - W_j)^2 \right) = \underbrace{E \left( (W_{i+1} - W_i)^2 \right)}_{= h} \underbrace{E \left( (W_{j+1} - W_j)^2 \right)}_{= h} = h^2$$

e

$$E (Z_i Z_j) = h^2 - h^2 - h^2 + h^2 = 0 .$$

Para  $i = j$ , temos

$$Z_i^2 = (W_{i+1} - W_i)^4 - 2h (W_{i+1} - W_i)^2 + h^2$$

e

$$E (Z_i^2) = \underbrace{M_4 (W_{i+1} - W_i)}_{= 3h^2} - 2h \underbrace{M_2 (W_{i+1} - W_i)}_{= h} + h^2 = h^2 .$$

Assim,

$$E \left( (S_n - (b-a))^2 \right) = E \left( \left( \sum_{i=1}^n Z_i \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^n E (Z_i^2) = nh^2 = \frac{(b-a)^2}{n},$$

de modo que

$$E \left( (S_n - (b-a))^2 \right) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty .$$

3. Seja

$$M_3 = \max \{ |u'''(s)| : s \in \mathbb{R} \} < \infty .$$

Seja  $B_i = u'''(\xi_i) (W_{i+1} - W_i)^3$ . Temos

$$B_i^2 \leq \frac{M_3^2}{36} (W_{i+1} - W_i)^6 .$$

Como  $W_{i+1} - W_i \sim N(0, \sqrt{h})$ :

$$E\left((W_{i+1} - W_i)^6\right) = h^3 E\left(\left(\frac{W_{i+1} - W_i}{\sqrt{h}}\right)^6\right) = \frac{(6)!}{3!2^3} h^3,$$

de modo que existe uma constante  $C \in \mathbb{R}$  tal que

$$E(B_i^2) \leq Ch^3.$$

Ora,

$$U_n = \sum_{i=1}^n B_i,$$

de modo que

$$\begin{aligned} E(U_n^2) &= \sum_{i,j=1}^n E(B_i B_j) \leq \sum_{i,j=1}^n \sqrt{E(B_i^2)} \sqrt{E(B_j^2)} \\ &\leq n^2 Ch^3 = C \frac{(b-a)^3}{n} \end{aligned}$$

e

$$U_n \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

4. Sejam

$$M_2 = \max\{|u''(s)| : s \in \mathbb{R}\} < \infty$$

e

$$A_i = u''(W_i)(W_{i+1} - W_i)^2 - u''(W_i)(a_{i+1} - a_i) = u''(W_i) Z_i.$$

Para  $i > j$ ,  $W_{i+1} - W_i$  é independente de  $W_{i+1}$ ,  $W_{j+1} - W_j$  e  $W_j$ , de forma que  $Z_i$  é independente de  $u''(W_i)$ ,  $u''(W_j)$  e  $Z_j$ . Assim, para  $i > j$ ,

$$E(A_i A_j) = \underbrace{E(Z_i)}_{=0} E(u''(W_i) u''(W_j) Z_j) = 0.$$

Para  $i = j$ , temos

$$E(A_i^2) \leq M_2^2 E(Z_i^2) = M_2^2 h^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} E\left(\left(V_n - h \sum_{i=1}^n u''(W_i)\right)^2\right) &= E\left(\left(\sum_{i=1}^n A_i\right)^2\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n E(A_i^2) \leq M_2^2 n h^2 = M_2^2 \frac{(b-a)^2}{n}, \end{aligned}$$

e

$$E \left( \left( V_n - h \sum_{i=1}^n u''(W_i) \right)^2 \right) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty ,$$

de modo que

$$V_n \rightarrow \int_a^b u''(W(t)) dt \text{ quando } n \rightarrow +\infty .$$

5. Assim,

$$T_n + \frac{1}{2}V_n - U_n \rightarrow \int_a^b u'(W(t)) dW(t) + \frac{1}{2} \int_a^b u''(W(t)) dt ,$$

de modo que

$$\begin{aligned} u(W(b)) - u(W(a)) - \int_a^b u'(W(t)) dW(t) \\ - \frac{1}{2} \int_a^b u''(W(t)) dt = 0 \end{aligned}$$

para toda  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

■

Pelo princípio de extensão, este resultado se aplica a toda  $u$  para a aderência e aos complementos de  $D(\mathbb{R})$ .

A fórmula de Ito se generaliza ao caso multidimensional onde  $u : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\int_a^b \nabla u(W(t)) dW(t) = u(W(b)) - u(W(a)) - \frac{1}{2} \int_a^b \Delta u(W(t)) dt .$$

### 1.15.2 Difusões estocásticas de Ito

Escreveremos

$$dX_t = a(t, W_t) dW_t + b(t, W_t) dt$$

para simbolizar a igualdade

$$X(t) - X(0) = \int_0^t a(s, W(s)) dW(s) + \int_0^t b(s, W(s)) ds .$$

e diremos que o processo  $X$  é uma *difusão estocástica*.  
A fórmula de Ito se escreve

$$du(W_t) = u'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} u''(W_t) dt .$$

Temos:

PROPOSIÇÃO 1.15.2. *Sejam  $X, Y \in L^2((a, b), L^2(\Omega, P))$  tais que*

$$dX_t = a_X(t, W_t) dW_t + b_X(t, W_t) dt \text{ e } dY_t = a_Y(t, W_t) dW_t + b_Y(t, W_t) dt .$$

*Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Então*

$$d(\alpha X_t + \beta Y_t) = [\alpha a_X(t, W_t) + \beta a_Y(t, W_t)] dW_t + [\alpha b_X(t, W_t) + \beta b_Y(t, W_t)] dt .$$

DEMONSTRAÇÃO: É uma consequência imediata da linearidade das integrais. ■

PROPOSIÇÃO 1.15.3. *Sejam  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X = x(W)$ ,  $Y = y(W)$  e  $Z = XY$  suficientemente regulares. Então*

$$dZ_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + x'(X_t) y'(W_t) dt .$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $z(s) = x(s) y(s) = xy(s)$ . Da fórmula de Ito:

$$dZ_t = z'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} z''(W_t) dt .$$

Ora,

$$z'(s) = x'(s) y(s) + x(s) y'(s)$$

e

$$z''(s) = x''(s) y(s) + 2x'(s) y'(s) + x(s) y''(s) .$$

Assim,

$$dZ_t = [x'(W_t) Y_t + X_t y'(W_t)] dW_t + \frac{1}{2} [x''(W_t) Y_t + 2x'(W_t) y'(W_t) + X_t y''(W_t)] dt$$

isto é,

$$dZ_t = X_t \underbrace{\left[ y'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} y''(W_t) dt \right]}_{dY_t} + Y_t \underbrace{\left[ x'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} x''(W_t) dt \right]}_{dX_t} + x'(W_t) y'(W_t) dt ,$$

de onde o resultado. ■

**COROLÁRIO 1.15.4.** *Se  $dX_t = a_X(t, W_t) dW_t + b_X(t, W_t) dt$ ,  $dY_t = a_Y(t, W_t) dW_t + b_Y(t, W_t) dt$  e  $Z = XY$ , então*

$$dZ_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + [a_X(t, W_t) a_Y(t, W_t)] dt .$$

**DEMONSTRAÇÃO:** É uma consequência imediata da proposição precedente. ■

**PROPOSIÇÃO 1.15.5.** *Sejam  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X = x(W)$ ,  $Z = y(x(W))$  suficientemente regulares. Então*

$$dZ_t = y'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} y''(X_t) (x'(W_t))^2 dt .$$

**DEMONSTRAÇÃO:** Seja  $z(s) = y(x(s)) = y \circ x(s)$ . Da fórmula de Ito:

$$dZ_t = z'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} z''(W_t) dt .$$

Ora,

$$z'(s) = [y(x(s))]' = y'(x(s)) x'(s)$$

e

$$z''(s) = [y'(x(s)) x'(s)]' = y''(x(s)) [x'(s)]^2 + y'(x(s)) x''(s) .$$

Assim,

$$dZ_t = y'(X_t) x'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} [y''(X_t) [x'(W_t)]^2 + y'(X_t) x''(W_t)] dt ,$$

isto é,

$$dZ_t = y'(X_t) \underbrace{\left[ x'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} x''(W_t) dt \right]}_{dX_t} + \frac{1}{2} y''(X_t) [x'(W_t)]^2 dt$$

e temos o resultado enunciado. ■

COROLÁRIO 1.15.6. *Seja  $Y(t) = F(X(t))$ , onde*

$$dX_t = a_X(t, W_t) dW_t + b_X(t, W_t) dt.$$

*Então*

$$dY_t = F'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} F''(X_t) (a_X(t, W_t))^2 dt .$$

DEMONSTRAÇÃO: É uma consequência imediata da proposição precedente. ■

Quando  $F = F(t, x)$ ,  $Y(t) = F(t, X(t))$  e  $dX_t = A_t dW_t + B_t dt$ , temos

$$dY_t = \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) (A_t)^2 dt .$$

Quando  $F = F(t, x, z)$ ,  $Y(t) = F\left(t, X(t), \int_0^t g(s, X(s)) ds\right)$  e  $dX_t = A_t dW_t + B_t dt$ , temos, pondo

$$P(t) = \left( t, X(t), \int_0^t g(s, X(s)) ds \right),$$

$$dY_t = \frac{\partial F}{\partial t}(P_t) dt + \frac{\partial F}{\partial x}(P_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P_t) (A_t)^2 dt + g(P_t) \frac{\partial F}{\partial z}(P_t) .$$

No caso multidimensional, onde

$$F = F(t, x), Y(t) = F(t, X(t)), F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

temos, para  $1 \leq i \leq m$ ,

$$d(Y_i)_t = \frac{\partial F_i}{\partial t}(t, X_t) dt + (A dX_t)_i + \frac{1}{2} (dX_t)^t B_i dX_t ,$$

onde

$$A_{ij}(t, x) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t, x) \quad ; \quad B_{ijk}(t, x) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j \partial x_k}(t, x) .$$

Isto é, com a convenção de soma em índices repetidos:

$$d(Y_i)_t = \frac{\partial F_i}{\partial t}(t, X_t) dt + A_{ij} d(X_j)_t + \frac{1}{2} B_{ijk} d(X_j)_t d(X_k)_t .$$



## Capítulo 2

# Máximo de Entropia e Informação

O trabalho de simulações estocásticas de um sistema geralmente segue uma determinada organização:

1. constrói-se um **modelo determinístico** para o sistema;
2. constrói-se um **modelo estocástico paramétrico** para o sistema: seleciona-se os parâmetros do sistema considerados aleatórios e determina-se suas respectivas funções densidades de probabilidades;
3. aplica-se o Método de Monte Carlo para obter-se inferências estatísticas sobre a resposta do sistema.

As etapas da construção dos modelos determinístico e estocástico do sistema são fundamentais para obter-se resultados realistas nas simulações estocásticas. Esses dois modelos são utilizados no Método de Monte Carlo e influenciam de forma direta as respostas obtidas. Exemplos de construção de modelos estocásticos podem ser vistos em [65, 64, 67, 66, 63].

No método de Monte Carlo, tipicamente gera-se amostras dos parâmetros que foram considerados aleatórios (usando às distribuições de probabilidade previamente fixadas - modelo estocástico) e, para cada amostra gerada calcula-se uma resposta determinística do sistema (através do modelo determinístico). Esses resultados determinísticos são agregados ao resultado final desejado (estatísticas e aproximações da distribuição de probabilidade da resposta do sistema podem ser calculadas).



Figura 2.1: Método de Monte Carlo.

Assim, a escolha das funções densidades de probabilidade dos parâmetros considerados aleatórios deve ser feita de forma cautelosa. Essas funções podem ser determinadas:

- a partir da construção de histogramas com resultados de experimentos;
- através do Princípio da Máxima Entropia (PEM).

Muitas vezes, a realização de experimentos com os parâmetros pode ser muito custosa ou até inviável. Por isso, essa estratégia é pouco utilizada na determinação das funções densidades de probabilidade. O mais comum e frequente na literatura é fazer isso através do princípio da máxima entropia.

A seguir é mostrado como funciona esse princípio.

## 2.1 Princípio da Máxima Entropia

O Princípio da Máxima Entropia (PEM) é um método eficaz de construção de modelos probabilísticos para variáveis aleatórias escalares e vetoriais, contínuas e discretas. Ou seja, é empregado para a construção da função densidade de probabilidade de tais variáveis aleatórias, utilizando para isso somente as informações disponíveis sobre essas variáveis.

Por exemplo, para uma variável aleatória vetorial, o método permite construir a função densidade de probabilidade quando se conhece somente:

- o suporte dessa variável ou;

- o suporte e a média, ou;
- o suporte, a média e a matriz de covariância.

A função densidade de probabilidade obtida pelo PEM depende diretamente da informação conhecida sobre a variável aleatória.

Dessa forma, o Princípio da Máxima Entropia consiste em maximizar a entropia (incerteza) sujeita a restrições definidas pelas informações disponíveis. O método baseia-se na teoria da informação. O conceito de entropia usado é o de Shannon (Cf. [74]) e, a ideia de maximizar a entropia foi proposta por Jaynes (Cf. [42, 43]) no contexto da Mecânica Estatística.

O Princípio estabelece que:

*De todas as distribuições de probabilidade consistentes com as restrições impostas, escolhe-se aquela que maximiza a incerteza (entropia).*

Para explicar o PEM, inicialmente serão tratadas as variáveis aleatórias discretas tanto nos casos em que assume um conjunto finito de valores, quanto no casos em que assume um conjunto infinito. Posteriormente são tratadas as variáveis aleatórias contínuas e, por último, os vetores aleatórios.

### 2.1.1 Variáveis aleatórias discretas

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume  $n$  valores distintos  $x_1, \dots, x_n$ . Suponha que deseja-se determinar a densidade de probabilidade  $p$  dessa variável aleatória  $X$ , ou seja, deseja-se determinar os valores  $p_1, \dots, p_n$ , tais que:

$$p_1 + \dots + p_n = 1, \quad p_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.1.1)$$

e que maximizam a medida da entropia de Shannon dada por:

$$S(p) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i). \quad (2.1.2)$$

Esse problema de maximização da entropia  $S$  sujeito ao vínculo (2.1.1) é transformado em um problema sem vínculo através de um multiplicador de Lagrange. Assim:

$$\begin{aligned} L(p, \lambda_0) &= S(p) - (\lambda_0 - 1) \left( \sum_{i=1}^n p_i - 1 \right) \\ &= S(p) - \lambda_0 \sum_{i=1}^n p_i + \lambda_0 + \sum_{i=1}^n p_i - 1 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

onde  $(\lambda_0 - 1)$  é o multiplicador de Lagrange correspondente ao vínculo (2.1.1). Fazendo-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial p_i}(p, \lambda_0) &= -\ln(p_i) - p_i \frac{1}{p_i} - \lambda_0 + 1 = 0 \\ &= -\ln(p_i) - \lambda_0 = 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

verifica-se que:

$$\ln(p_i) = -\lambda_0 \implies p_i = e^{-\lambda_0}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1.5)$$

Assim, quando nenhuma informação sobre a variável aleatória  $X$  é conhecida, a densidade de probabilidade  $p$  que maximiza a entropia de Shannon é a uniforme. Nesse caso, tem-se:

$$p_i = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1.6)$$

Caso  $X$  assumisse um número infinito de valores o problema de otimização não teria solução. Isto é, não existe uma distribuição de probabilidade que maximize a entropia de Shannon. Logo o PEM pode não fornecer uma solução que possibilite a construção do modelo probabilístico.

Vejamos agora uma situação mais geral, quando mais vínculos são prescritos. Suponha que a densidade esteja submetida a  $m$  vínculos escritos na forma:

$$\sum_{i=1}^n p_i g_{r i}(x_1, \dots, x_n) = a_r, \quad r = 1, \dots, m. \quad (2.1.7)$$

Nesse caso, o problema de maximização da entropia  $S$  sujeito aos  $m+1$  vínculos (2.1.1 e 2.1.7) é transformado em um problema sem vínculos através de  $m+1$  multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} L(p, \lambda_0, \dots, \lambda_m) &= S(p) - (\lambda_0 - 1) \left( \sum_{i=1}^n p_i - 1 \right) \\ &\quad - \sum_{r=1}^m \lambda_r \left( \sum_{i=1}^n p_i g_{r i} \right) \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

onde  $(\lambda_0 - 1), \lambda_1, \dots, \lambda_m$  são os  $m+1$  multiplicadores de Lagrange. Fazendo-se:

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = 0 \implies -\ln(p_i) - \lambda_0 - \sum_{r=1}^m \lambda_r g_{r i} = 0 \quad (2.1.9)$$

ou seja:

$$p_i = \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 g_{1i} - \lambda_2 g_{2i} - \dots - \lambda_m g_{mi}) \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1.10)$$

Os multiplicadores  $\lambda_0 - 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  são calculados substituindo-se  $p_i$  (2.1.10) em (2.1.1) e (2.1.7), tal que:

$$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\lambda_0 - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_{ji}\right) = 1 \quad (2.1.11)$$

e

$$\sum_{i=1}^n g_{r i} \exp\left(-\lambda_0 - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_{ji}\right) = a_r, \quad r = 1, \dots, m. \quad (2.1.12)$$

EXEMPLO 2.1.1. *Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume  $n$  finitos valores distintos  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Suponha que a média dessa variável seja conhecida ( $\mu$ ). Deseja-se determinar a densidade de probabilidade  $p$  de  $X$  que maximiza a entropia  $S$  (2.1.2), tal que:*

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad e \quad \sum_{i=1}^n x_i p_i = \mu. \quad (2.1.13)$$

*Escrevendo esse problema de otimização através dos multiplicadores de Lagrange:*

$$L(p, \lambda_0, \lambda_1) = -\sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) - (\lambda_0 - 1) \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1\right) - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i p_i - \mu\right) \quad (2.1.14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = 0 \implies -\ln(p_i) - \lambda_0 - \lambda_1 x_i = 0. \quad (2.1.15)$$

*Dessa forma:*

$$p_i = \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 x_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1.16)$$

Os valores de  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$  são determinados a partir de (2.1.13):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 x_i) &= 1 \quad e \\ \sum_{i=1}^n x_i \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 x_i) &= \mu . \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

EXEMPLO 2.1.2. *Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume infinitos valores distintos  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Suponha que a média dessa variável seja conhecida ( $\mu$ ). Deseja-se determinar a densidade de probabilidade  $p$  de  $X$  que maximiza a entropia  $S$  (2.1.2), tal que:*

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1 \quad e \quad \sum_{i=0}^{\infty} i p_i = \mu . \quad (2.1.18)$$

Escrevendo esse problema de otimização através dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} L(p, \lambda_0, \lambda_1) &= - \sum_{i=0}^{\infty} p_i \ln(p_i) \\ &- (\lambda_0 - 1) \left( \sum_{i=0}^{\infty} p_i - 1 \right) - \lambda_1 \left( \sum_{i=0}^{\infty} i p_i - \mu \right) \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = 0 \implies -\ln(p_i) - \lambda_0 - \lambda_1 i = 0 . \quad (2.1.20)$$

Dessa forma:

$$p_i = \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 i), \quad i = 0, 1, 2, \dots . \quad (2.1.21)$$

Os multiplicadores  $(\lambda_0 - 1)$  e  $\lambda_1$  são determinados a partir dos vínculos prescritos em (2.1.18):

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 i) &= \\ \exp(-\lambda_0) \sum_{i=0}^{\infty} \exp(-\lambda_1 i) &= \frac{\exp(-\lambda_0)}{1 - \exp(-\lambda_1)} = 1 \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 i) = \exp(-\lambda_0) \frac{\exp(-\lambda_1)}{(1 - \exp(-\lambda_1))^2} = \mu . \quad (2.1.23)$$

Assim:

$$\exp(-\lambda_1) = \frac{\mu}{1 + \mu} \implies \lambda_1 = -\ln\left(\frac{\mu}{1 + \mu}\right) \quad (2.1.24)$$

$$\exp(-\lambda_0) = 1 - \frac{\mu}{1 + \mu} \implies \lambda_0 = -\ln\left(\frac{1}{1 + \mu}\right) . \quad (2.1.25)$$

A expressão (2.1.21) pode ser reescrita como ( $i = 0, 1, 2 \dots$ ):

$$p_i = \exp\left[\ln\left(\frac{1}{1 + \mu}\right) + i \ln\left(\frac{\mu}{1 + \mu}\right)\right] \quad (2.1.26)$$

$$p_i = \left(\frac{1}{1 + \mu}\right) \exp\left[i \ln\left(\frac{\mu}{1 + \mu}\right)\right]. \quad (2.1.27)$$

### 2.1.2 Variáveis aleatórias contínuas

Os casos de aplicação do Princípio da Máxima Entropia de maior interesse são relacionados com as variáveis aleatórias contínuas. Nesse caso, o suporte da variável aleatória é a primeira informação de interesse sobre a variável. Observe que esse suporte pode ser um intervalo finito  $[a, b]$ , pode ser um intervalo semi-infinito  $[a, \infty]$ , ou pode ser todos os reais  $(-\infty, \infty)$ .

DEFINIÇÃO 2.1.3. (MEDIDA DA ENTROPIA DE SHANNON)– *Caso tenha-se uma variável aleatória contínua,  $X$ , com suporte  $[a, b]$  e com função densidade de probabilidade  $p$ , a medida da entropia de Shannon,  $S$ , é dada por:*

$$S(p) = - \int_a^b p(x) \ln p(x) dx . \quad (2.1.28)$$

Para descobrir qual a expressão da função  $p$  que maximiza essa entropia  $S$ , um problema de otimização deve ser resolvido. Como  $p$  é uma função densidade de probabilidade, sabe-se que:

$$\int_a^b p(x) dx = 1. \quad (2.1.29)$$

Assim como feito no caso das variáveis aleatórias discretas, o problema de otimização com o vínculo (2.1.29) será transformado em um problema sem vínculo através de um multiplicador de Lagrange:

$$L(p, \lambda_0) = - \int_a^b p(x) \ln p(x) dx - (\lambda_0 - 1) \left[ \int_a^b p(x) dx - 1 \right] . \quad (2.1.30)$$

A Lagrangiana pode ser escrita como:

$$L(p, \lambda_0) = u(\lambda_0) - \int_a^b h(p, \lambda_0) dx , \quad (2.1.31)$$

com:

$$u(\lambda_0) = (\lambda_0 - 1) , \quad (2.1.32)$$

$$h(p, \lambda_0) = p(x) [\ln p(x) + (\lambda_0 - 1)] . \quad (2.1.33)$$

Pelo cálculo variacional, os extremos de máximo e mínimo da Lagrangiana  $L$  verificam:

$$\frac{\partial}{\partial p(x)} h(p, \lambda_0) = 0 . \quad (2.1.34)$$

Dessa forma, obtém-se como extremo a distribuição:

$$p(x) = \mathbb{1}_{[a,b]} \exp(-\lambda_0) . \quad (2.1.35)$$

Porém, como:

$$\frac{\partial^2}{\partial p(x)^2} h(p, \lambda_0) > 0 , \quad (2.1.36)$$

o extremo identificado é um máximo e assim, a distribuição  $p$  que maximiza a entropia,  $S$ , é a distribuição uniforme no intervalo  $[a, b]$ , ou seja:

$$p(x) = \mathbb{1}_{[a,b]} \frac{1}{b-a} . \quad (2.1.37)$$

Frequentemente é comum trabalhar-se com problemas em que mais vínculos são prescritos, como por exemplo a média e momentos de ordem superior. Suponha que a variável aleatória  $X$  esteja submetida a  $m$  vínculos escritos na forma:

$$\int_a^b p(x)g_r(x) dx = a_r \quad r = 1, \dots, m. \quad (2.1.38)$$

Para essa variável aleatória, a Lagrangiana é escrita como:

$$\begin{aligned} L(p, \lambda_0, \dots, \lambda_m) &= S(p) - (\lambda_0 - 1) \left( \int_a^b p(x) dx - 1 \right) \\ &\quad - \sum_{r=1}^m \lambda_r \left( \int_a^b p(x)g_r(x) dx - a_r \right) \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

onde  $\lambda_0 - 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  são os  $m + 1$  multiplicadores de Lagrange. Reescreve-se (2.1.39) como:

$$L(p, \lambda_0) = u(\lambda_0, \dots, \lambda_m) - \int_a^b h(p, \lambda_0, \dots, \lambda_m) dx, \quad (2.1.40)$$

com:

$$u(\lambda_0, \dots, \lambda_m) = (\lambda_0 - 1) + \sum_{r=1}^m \lambda_r a_r, \quad (2.1.41)$$

$$\begin{aligned} h(p, \lambda_0, \dots, \lambda_m) &= p(x) \ln p(x) \\ &\quad + p(x) \left( (\lambda_0 - 1) + \sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x) \right). \end{aligned} \quad (2.1.42)$$

Pelo cálculo variacional, os extremos de máximo e mínimo da Lagrangiana  $L$  verificam:

$$\frac{\partial}{\partial p(x)} h(p, \lambda_0) = 0. \quad (2.1.43)$$

Dessa forma, obtém-se como extremo a distribuição:

$$p(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \exp \left( -(\lambda_0 - 1) - \sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x) \right). \quad (2.1.44)$$

Os multiplicadores  $\lambda_0 - 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  são calculados substituindo-se a expressão  $p$  (2.1.44) em (2.1.29) e (2.1.38).

EXEMPLO 2.1.4. *Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com suporte compacto  $[a, b]$  e com valores para média e segundo momento prescritos:  $E[X] = \mu$  e  $E[X^2] = \alpha^2$ . Deseja-se determinar a densidade de probabilidade  $p$  de  $X$  que maximiza a entropia  $S$  (2.1.28), tal que:*

$$\int_a^b p(x) dx = 1 ; \int_a^b p(x) x dx = \mu ; \int_a^b p(x) x^2 dx = \alpha^2. \quad (2.1.45)$$

Pela expressão (2.1.44), tem-se que:

$$p(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 x - \lambda_2 x^2). \quad (2.1.46)$$

EXEMPLO 2.1.5. *Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com suporte  $[0, \infty)$  e com valor da média prescrito:  $E[X] = \mu$ . Deseja-se determinar a densidade de probabilidade  $p$  de  $X$  que maximiza a entropia  $S$  (2.1.28), tal que:*

$$\int_a^b p(x) dx = 1 \quad \int_a^b p(x) x dx = \mu \quad (2.1.47)$$

Pela expressão (2.1.44), tem-se que:

$$p(x) = \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 x). \quad (2.1.48)$$

Calculando-se os multiplicadores  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$ , chega-se a seguinte expressão para a densidade  $p$ :

$$p(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}. \quad (2.1.49)$$

EXEMPLO 2.1.6. *Seja  $X$  uma variável aleatória contínua tal que:*

1. *seu suporte seja  $[0, \infty)$ ;*
2. *sua média seja  $E[X] = \mu \in [0, \infty)$ ;*
3. *o valor esperado de  $E[\log(X)] = q$ .*

Nesse caso, pelo PEM a densidade de probabilidade  $p$  de  $X$  que maximiza a entropia de Shannon é a densidade Gamma:

$$p(x) = \mathbb{1}_{]0,+\infty)}(x) \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{\delta^2}} \frac{1}{\Gamma(1/\delta^2)} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{\frac{1}{\delta^2}-1} \exp\left(-\frac{x}{\delta^2 \mu}\right), \quad (2.1.50)$$

onde:

- $\Gamma$  é a função Gamma:  $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} \exp(-t) dt$ ;
- $\delta = \sigma / \mu$ .

EXEMPLO 2.1.7. Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com suporte  $(-\infty, \infty)$  e com valores para média e segundo momento prescritos:  $E[X] = \mu$  e  $E[X^2] = \alpha^2$ . Deseja-se determinar a densidade de probabilidade  $p$  de  $X$  que maximiza a entropia  $S$  (2.1.28), tal que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx &= 1 ; & \int_{-\infty}^{\infty} p(x) x dx &= \mu ; \\ & & \int_{-\infty}^{\infty} p(x) x^2 dx &= \alpha^2 . \end{aligned} \quad (2.1.51)$$

Pela expressão (2.1.44), tem-se que:

$$p(x) = \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 x - \lambda_2 x^2) = a \exp(-b(x-c)^2) , \quad (2.1.52)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  devem ser determinados por:

$$\begin{aligned} a \int_{-\infty}^{\infty} \exp[(-b(x-c)^2)] dx &= 1 \\ a \int_{-\infty}^{\infty} x \exp[(-b(x-c)^2)] dx &= \mu . \\ a \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp[(-b(x-c)^2)] dx &= \alpha^2 \end{aligned} \quad (2.1.53)$$

Usando o seguinte resultado (Cf. [44]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[(-b(x-c)^2)] dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}} , \quad \text{para } b > 0 , \quad (2.1.54)$$

verifica-se que:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} , \quad b = \frac{1}{2\sigma^2} , \quad c = \mu , \quad (2.1.55)$$

onde a variância  $\sigma^2 = \alpha^2 - \mu^2$ . Assim, a função densidade de probabilidade que maximiza a entropia de Shannon é:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} \right]. \quad (2.1.56)$$

A seguir é mostrado um resumo da construção de modelos probabilísticos para variáveis aleatórias contínuas através do Princípio da Máxima Entropia.

**Variáveis aleatórias contínuas com suporte compacto  $[a, b]$ :**

Seja  $X$  uma variável aleatória contínua real com suporte compacto  $[a, b]$ . Deseja-se determinar a densidade de probabilidade  $p$  de  $X$  que maximiza a entropia  $S$  (2.1.28) tal que:

$$\int_a^b p(x) dx = 1 \quad \text{e} \quad p(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]. \quad (2.1.57)$$

1. Caso nenhuma informação adicional sobre  $X$  seja conhecida, a densidade de probabilidade que maximiza a entropia de Shannon é a uniforme no intervalo  $[a, b]$ :

$$p(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \frac{1}{b-a}. \quad (2.1.58)$$

2. Caso a média de  $X$  seja conhecida,  $E[X] = \mu$ , a densidade de probabilidade que maximiza a entropia de Shannon é a exponencial truncada:

$$p(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 x), \quad (2.1.59)$$

onde:

$$e^{-\lambda_0} \int_a^b e^{-\lambda_1 x} dx = 1, \quad e^{-\lambda_0} \int_a^b x e^{-\lambda_1 x} dx = \mu. \quad (2.1.60)$$

3. Caso  $a = 0$ ,  $b = 1$ , e os valores de  $E[\ln(X)]$  e  $E[\ln(1-X)]$  sejam conhecidos e iguais a  $k_1$  e  $k_2$  respectivamente, a densidade de probabilidade que maximiza a entropia de Shannon é a densidade beta:

$$p(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \frac{1}{B(m, n)} x^{m-1} (1-x)^{n-1}, \quad (2.1.61)$$

onde  $B$  é a função beta:

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (2.1.62)$$

e onde  $\Gamma(m) = \int_0^\infty t^{m-1} \exp(-t) dt$ . Os valores de  $m$  e  $n$  são determinados a partir dos vínculos  $E[\ln(X)]$  e  $E[\ln(1-X)]$ . De forma que:

$$\frac{1}{B(m, n)} \int_0^1 x^{(m-1)}(1-x)^{n-1} \ln(x) dx = E[\ln(X)] = k_1, \quad (2.1.63)$$

$$\frac{1}{\beta(m, n)} \int_0^1 x^{(m-1)}(1-x)^{n-1} \ln(1-x) dx = E[\ln(1-X)] = k_2. \quad (2.1.64)$$

**Variáveis aleatórias contínuas com suporte  $[0, \infty)$ :**

Seja  $X$  uma variável aleatória contínua real com suporte  $[0, \infty)$ . Deseja-se determinar a densidade de probabilidade  $p$  de  $X$  que maximiza a entropia  $S$ :

$$S(p) = - \int_0^\infty p(x) \ln p(x) dx. \quad (2.1.65)$$

tal que:

$$\int_0^\infty p(x) dx = 1 \quad \text{e} \quad p(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, \infty). \quad (2.1.66)$$

1. Caso nenhuma informação adicional sobre  $X$  seja conhecida, o problema de otimização não possui solução.
2. Caso a média de  $X$  seja conhecida,  $E[X] = \mu$ , a densidade de probabilidade que maximiza a entropia de Shannon é a exponencial:

$$p(x) = \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x) \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}. \quad (2.1.67)$$

3. Caso sejam conhecidos o valor esperado de  $X$  e o valor esperado de  $\log(X)$ , ou seja,  $E[X] = \mu$  e  $E[\log(X)] = q$ , a densidade de probabilidade  $p$  que maximiza a entropia de Shannon é a densidade Gamma:

$$p(x) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{\delta^2}} \frac{1}{\Gamma(1/\delta^2)} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{\frac{1}{\delta^2}-1} \exp\left(\frac{x}{\delta^2\mu}\right), \quad (2.1.68)$$

onde  $\Gamma$  é a função Gamma ( $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} \exp(-t) dt$ ) e  $\delta = \sigma / \mu$ .

4. Caso os valores de  $E[\ln(X)]$  e  $E[\ln(1-X)]$  sejam conhecidos e iguais a  $k_1$  e  $k_2$  respectivamente, a densidade de probabilidade que maximiza a entropia de Shannon é:

$$p(x) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \frac{1}{B(m,n)} x^{(m-1)} (1+x)^{-(n+m)}, \quad (2.1.69)$$

onde  $B$  é a função beta (2.1.62) e, os valores de  $m$  e  $n$  são determinados a partir dos vínculos  $E[\ln(X)]$  e  $E[\ln(1-X)]$ . De forma que:

$$\frac{1}{B(m,n)} \int_0^\infty x^{(m-1)} (1+x)^{-(n+m)} \ln(x) dx = E[\ln(X)] = k_1, \quad (2.1.70)$$

$$\frac{1}{\beta(m,n)} \int_0^\infty x^{(m-1)} (1+x)^{-(n+m)} \ln(1-x) dx = E[\ln(1-X)] = k_2. \quad (2.1.71)$$

### Variáveis aleatórias contínuas com suporte $(-\infty, \infty)$ :

Seja  $X$  uma variável aleatória contínua real com suporte  $[-\infty, \infty)$ . Deseja-se determinar a densidade de probabilidade  $p$  de  $X$  que maximiza a entropia  $S$ :

$$S(p) = - \int_{-\infty}^\infty p(x) \ln p(x) dx. \quad (2.1.72)$$

tal que:

$$\int_{-\infty}^\infty p(x) dx = 1 \quad \text{e} \quad p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.1.73)$$

1. Caso nenhuma informação adicional sobre  $X$  seja conhecida, o problema de otimização não possui solução.
2. Caso somente a média de  $X$  seja conhecida, o problema de otimização não possui solução.
3. Caso sejam conhecidos  $E[X] = \mu$  e  $E[X^2] = \alpha^2$ , a densidade de probabilidade que maximiza a entropia de Shannon é a Gaussiana:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} \right]. \quad (2.1.74)$$

### 2.1.3 Vetores aleatórios

DEFINIÇÃO 2.1.8. (VETOR ALEATÓRIO) *Um vetor aleatório*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad (2.1.75)$$

de dimensão  $n$  é um vetor formado por  $n$  variáveis aleatórias.

Seja

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (2.1.76)$$

um vetor cujo elemento de volume é  $d\mathbf{x} = dx_1 \cdots dx_n$ .

A função distribuição de probabilidade associada ao vetor aleatório  $\mathbf{X}$  é a função  $F : \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1]$  dada por:

$$F(\mathbf{x}) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n) \quad (2.1.77)$$

e a função densidade de probabilidade,  $p$ , do vetor aleatório  $\mathbf{X}$  é:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} F(\mathbf{x}), \quad (2.1.78)$$

chamada também de densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_n$ . De maneira análoga,  $F$  é chamada a distribuição conjunta destas variáveis.

De forma análoga ao caso das variáveis aleatórias contínuas, a medida de incerteza de um vetor aleatório  $\mathbf{X}$  no  $\mathbb{R}^n$  é definido pela entropia de sua função densidade de probabilidade  $p$ :

$$S(p) = - \int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x}) \ln p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} . \quad (2.1.79)$$

Como  $p$  é uma função densidade de probabilidade, sabe-se que:

$$p(\mathbf{x}) \geq 0 \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 1 . \quad (2.1.80)$$

Além de (2.1.80), outros vínculos podem ser prescritos para o vetor aleatório  $\mathbf{X}$ . Suponha que  $m$  informações sobre  $\mathbf{X}$  sejam conhecidas e estejam escritas na forma:

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x}) \mathbf{g}_r(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^{\nu_r} \quad , \quad r = 1, \dots, m . \quad (2.1.81)$$

onde os expoentes  $\nu_1, \dots, \nu_m$  são  $m$  inteiros iguais ou superiores a um.

Seja  $C_{ad}$  o espaço das funções  $\mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x})$  do  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^{\geq 0}$ , tendo todas o mesmo suporte conhecido  $k_n \subset \mathbb{R}^n$  (com a possibilidade de que  $k_n = \mathbb{R}^n$ ) e, atendendo aos vínculos definidos em (2.1.80) e (2.1.81).

Para descobrir qual a expressão da função  $p \in C_{ad}$  que maximiza essa entropia  $S$  (2.1.79), um problema de otimização (2.1.82) deve ser resolvido.

$$\max_{p \in C_{ad}} S(p) . \quad (2.1.82)$$

Para resolver este problema,  $m + 1$  multiplicadores de Lagrange são introduzidos  $(\lambda_0 - 1) \in \mathbb{R}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_1 \in \mathbb{R}^{\nu_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda}_m \in \mathbb{R}^{\nu_m}$  associados aos  $m + 1$  vínculos. A Lagrangiana, nesse caso, é:

$$\begin{aligned} L(p, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_m) = & S(p) - (\lambda_0 - 1) \left( \int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - 1 \right) \\ & - \sum_{r=1}^m \left\langle \boldsymbol{\lambda}_r , \int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x}) \mathbf{g}_r(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \mathbf{a}_r \right\rangle_{\mathbb{R}^{\nu_r}} \end{aligned} \quad (2.1.83)$$

onde  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}^{\nu_r}} = u_1 v_1 + \dots + u_{\nu_r} v_{\nu_r}$  é o produto escalar euclidiano no  $\mathbb{R}^{\nu_r}$ .

Reescreve-se (2.1.83) como:

$$L(p, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_m) = u(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_m) - \int_{\mathbb{R}^n} h(p, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_m) d\mathbf{x} , \quad (2.1.84)$$

com:

$$u(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_m) = (\lambda_0 - 1) + \sum_{r=1}^m \langle \boldsymbol{\lambda}_r, \mathbf{a}_r \rangle , \quad (2.1.85)$$

$$h(p, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_m) = p(\mathbf{x}) [ \ln p(\mathbf{x}) + (\lambda_0 - 1) + \sum_{r=1}^m \langle \boldsymbol{\lambda}_r, \mathbf{g}_r(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^{\nu_r}} ] . \quad (2.1.86)$$

Pelo cálculo variacional, os extremos de máximo e mínimo da Lagrangiana  $L$  verificam:

$$\frac{\partial}{\partial p(\mathbf{x})} h(p, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_m) = 0 . \quad (2.1.87)$$

Resolvendo esse problema de otimização, chega-se ao seguinte resultado:

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{k_n}(\mathbf{x}) \exp \left( -\lambda_0 - \sum_{r=1}^m \langle \boldsymbol{\lambda}_r, \mathbf{g}_r(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^{\nu_r}} \right) . \quad (2.1.88)$$

EXEMPLO 2.1.9. *Seja  $\mathbf{X}$  um vetor aleatório contínuo, com dimensão  $n$  e com suporte compacto  $k_n = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ . Deseja-se determinar a densidade de probabilidade  $p$  de  $\mathbf{X}$  que maximiza a entropia  $S$  (2.1.79), tal que:*

$$p(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 . \quad (2.1.89)$$

Pela expressão (2.1.88), tem-se que:

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{k_n}(\mathbf{x}) \exp(-\lambda_0) , \quad (2.1.90)$$

ou seja,  $p$  é uma função constante. Substituindo (2.1.90) no vínculo (2.1.89):

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{k_n}(\mathbf{x}) \exp(-\lambda_0) d\mathbf{x} = 1 \quad (2.1.91)$$

$$\begin{aligned} \exp(-\lambda_0) \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{k_n}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \\ \exp(-\lambda_0) \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{k_n}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= 1 \end{aligned} \quad (2.1.92)$$

$$\exp(-\lambda_0) |k_n| = 1 \implies \exp(-\lambda_0) = \frac{1}{|k_n|}, \quad (2.1.93)$$

com  $|k_n| = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{k_n}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  sendo a medida de  $k_n$ . Substituindo (2.1.93) em (2.1.90), determina-se que:

$$p(\mathbf{x}) = \mathbb{1}_{k_n}(\mathbf{x}) \frac{1}{|k_n|}. \quad (2.1.94)$$

O valor de  $\lambda_0$  é calculado igualando-se (2.1.90) a (2.1.94):

$$\lambda_0 = -\ln\left(\frac{1}{|k_n|}\right). \quad (2.1.95)$$

**EXEMPLO 2.1.10.** Seja  $\mathbf{X}$  uma vetor aleatório de dimensão  $n$ , com suporte  $k_n = (0, +\infty) \times \cdots \times (0, +\infty) \subset \mathbb{R}^n$  e com vetor média conhecido  $E[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} \in k_n$ , ou seja:

$$E[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}, \quad \mu_i = E(X_i) \quad (2.1.96)$$

A função densidade de probabilidade de  $\mathbf{X}$  construída pelo Princípio da Máxima Entropia é:

$$p(\mathbf{x}) = p_1(x_1) \times \cdots \times p_n(x_n), \quad (2.1.97)$$

onde a densidade  $p_j$  da variável aleatória  $X_j$  é escrita como uma função exponencial (2.1.49):

$$p_j(x_j) = \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x_j) \frac{1}{\mu_j} \exp\left(-\frac{x_j}{\mu_j}\right), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.1.98)$$

mostrando que, pelo Princípio da Máxima Entropia, as  $n$  variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_n$  são independentes.

EXEMPLO 2.1.11. *Seja  $\mathbf{X}$  um vetor aleatório de dimensão  $n$ , com suporte  $k_n = \mathbb{R}^n$ , com vetor média conhecida  $E[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} = (\mu_1 \cdots \mu_n)^T \in k_n$ , onde  $\mu_j = E[X_j]$  e com matriz de covariância  $\mathbf{C}$  real simétrica positiva definida conhecida.*

*A função densidade de probabilidade de  $\mathbf{X}$  construída pelo Princípio da Máxima Entropia é a densidade Gaussiana:*

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{C}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \{\mu_{\mathbf{X}}\}), (\mathbf{x} - \{\mu_{\mathbf{X}}\}) \rangle_{\mathbb{R}^n} \right\}. \quad (2.1.99)$$

### 2.1.4 Matrizes aleatórias

Nas seções anteriores do trabalho foi mostrado como o Princípio da Máxima Entropia (PEM) determina as funções densidades de probabilidade de variáveis e vetores aleatórios (casos em que apenas algumas informações sobre essas variáveis são conhecidas). Dessa forma, quando se faz uma abordagem estocástica paramétrica de um sistema, o PEM pode ser utilizado para construir as densidades de probabilidade dos parâmetros do sistema que são considerados aleatórios (e portanto representados por variáveis/vetores aleatórios).

Porém, essa abordagem paramétrica, em alguns problemas, revela-se não ser a mais adequada para modelar incertezas. Ao invés de se considerar que a incerteza está presente nos parâmetros do sistema, pode ser necessário considerá-la intrínseca ao modelo. Nesse caso, as incertezas estão nas matrizes que compõem o sistema de equações do modelo e, assim, o modelo é composto por matrizes aleatórias.

Igualmente ao feito nos casos das variáveis/vetores aleatórios, o PEM pode ser utilizado para construir as densidades de probabilidade de matrizes aleatórias. Esta abordagem foi introduzida recentemente por Soize (Cf. [76]) em 2000.

A notação utilizada para representar subconjunto de matrizes é:

- $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ : conjunto de todas as matrizes reais quadradas  $n \times n$ ;
- $\mathbb{M}_n^S(\mathbb{R})$ : conjunto de todas as matrizes reais simétricas  $n \times n$ ;
- $\mathbb{M}_n^{+0}(\mathbb{R})$ : conjunto de todas as matrizes reais simétricas positivo - semidefinidas  $n \times n$ ;
- $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ : conjunto de todas as matrizes reais simétricas positivo - definidas  $n \times n$ ;
- $\mathbb{M}_n^D(\mathbb{R})$ : conjunto de todas as matrizes reais diagonais  $n \times n$ .

$$\mathbb{M}_n^D(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n^{+0}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n^S(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \quad (2.1.100)$$

A norma de uma matriz  $\mathbf{A} = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  é dada por

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \quad , \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n . \quad (2.1.101)$$

e a norma Frobenius (or Hilbert-Schmidt norm) é:

$$\|\mathbf{A}\|_F^2 = \text{tr} \{ \mathbf{A}^T \mathbf{A} \} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk}^2 \quad (2.1.102)$$

tal que:  $\|\mathbf{A}\| \leq \|\mathbf{A}\|_F \leq \sqrt{n} \|\mathbf{A}\|$ .

Seja  $\mathbf{A}_n = (A_{n,ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  uma matriz aleatória com valores em  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$  cuja distribuição de probabilidade  $P_{\mathbf{A}_n} = p_{\mathbf{A}_n}(\mathbf{A}_n) \tilde{dA}_n$  é definida através de uma função densidade de probabilidade desconhecida:

$$\mathbf{A}_n \mapsto p_{\mathbf{A}_n}(\mathbf{A}_n), \quad \text{do } \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \quad \text{em } \mathbb{R}^+ = [0, +\infty) \quad (2.1.103)$$

com respeito ao elemento de volume:

$$\tilde{dA}_n = 2^{n(n-1)/4} \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} dA_{n,ij} . \quad (2.1.104)$$

Esta função densidade de probabilidade desconhecida pode ser construída através do PEM utilizando somente as informações conhecidas.

Suponha que essas informações conhecidas sobre  $\mathbf{A}_n$  sejam:

1.  $\mathbf{A}_n \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$  e  $\int_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})} p_{\mathbf{A}_n}(\mathbf{A}_n) \tilde{dA}_n = 1$ ;

2. o valor esperado de  $\mathbf{A}_n$  é conhecido, ou seja:

$$E(\mathbf{A}_n) = \int_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})} \mathbf{A}_n p_{\mathbf{A}_n}(\mathbf{A}_n) \tilde{dA}_n = \underline{\mathbf{A}}_n .$$

3.  $\int_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})} \ln(\det \mathbf{A}_n) p_{\mathbf{A}_n}(\mathbf{A}_n) \tilde{dA}_n = v$ , com  $|v| < +\infty$ .

A entropia relacionada a  $p_{\mathbf{A}_n}$  é dada por:

$$S(p_{\mathbf{A}_n}) = - \int_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})} p_{\mathbf{A}_n}(\mathbf{A}_n) \ln(p_{\mathbf{A}_n}(\mathbf{A}_n)) \tilde{dA}_n . \quad (2.1.105)$$

Seja  $C_{ad}$  o espaço das funções  $\mathbf{A}_n \mapsto p_{\mathbf{A}_n}$  do  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$  em  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$  atendendo aos vínculos definidos acima.

Para descobrir qual a expressão da função  $p_{\mathbf{A}_n} \in C_{ad}$  que maximiza essa entropia  $S$  (2.1.79), um problema de otimização (2.1.106) deve ser resolvido:

$$\max_{p \in C_{ad}} S(p) . \quad (2.1.106)$$

Para simplificar o problema, são feitas algumas manipulações algébricas. A matriz positiva-definida  $\underline{\mathbf{A}}_n$  pode ser decomposta usando a decomposição de Cholesky:

$$\underline{\mathbf{A}}_n = \underline{\mathbf{L}}_n^T \underline{\mathbf{L}}_n , \quad (2.1.107)$$

sendo  $\underline{\mathbf{L}}_n$  uma matriz triangular superior. Consequentemente, a matriz aleatória  $\mathbf{A}_n$  pode ser escrita como:

$$\mathbf{A}_n = \underline{\mathbf{L}}_n^T \mathbf{G}_n \underline{\mathbf{L}}_n , \quad (2.1.108)$$

onde  $\mathbf{G}_n$  é uma matriz aleatória com valores em  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$  tais que:

$$\underline{\mathbf{G}}_n = E(\underline{\mathbf{G}}_n) = \mathbf{I}_n . \quad (2.1.109)$$

A distribuição de probabilidade  $P_{\mathbf{G}_n} = p_{\mathbf{G}_n}(\mathbf{G}_n) \tilde{d}G_n$  possui uma densidade de probabilidade com respeito ao elemento de volume:

$$\tilde{d}G_n = 2^{n(n-1)/4} \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} dA_{n,ij}$$

e pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{G}_n}(\mathbf{G}_n) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}(\mathbf{G}_n) &\times C_{G_n} \times (\det \mathbf{G}_n)^{(n+1) \frac{(1-\delta_A^2)}{2\delta_A^2}} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(n+1)}{2\delta_A^2} \text{tr} \mathbf{G}_n \right\} , \end{aligned} \quad (2.1.110)$$

onde a constante de normalização  $C_{G_n}$  vale:

$$C_{G_n} = \frac{(2\pi)^{-n(n-1)/4} \left( \frac{n+1}{2\delta_A^2} \right)^{n(n+1)(2\delta_A^2)^{-1}}}{\left\{ \prod_{j=1}^n \Gamma \left( \frac{n+1}{2\delta_A^2} + \frac{1-j}{2} \right) \right\}} . \quad (2.1.111)$$

O parâmetro de dispersão  $\delta_A$  é dado por:

$$\delta_A = \left\{ \frac{E(\|\mathbf{G}_n - \underline{\mathbf{G}}_n\|_F^2)}{\|\underline{\mathbf{G}}_n\|_F^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1.112)$$

com  $0 < \delta < \sqrt{\frac{n+1}{n+5}}$ .

Além disso, a matriz positiva - definida  $\mathbf{G}_n$  pode ser decomposta usando a decomposição de Cholesky:

$$\mathbf{G}_n = \mathbf{M}_n^T \mathbf{M}_n, \quad (2.1.113)$$

onde  $\mathbf{M}_n$  é uma matriz triangular superior com valores em  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . Fazendo essa decomposição, as entradas da matriz triangular superior  $\mathbf{M}_n$  tornam-se variáveis aleatórias independentes, caracterizadas por:

- caso  $j < j'$ :  $M_{n,jj'} = \sigma_n U_{jj'}$ , onde  $\sigma_n = \delta_A (n+1)^{-1/2}$  e  $U_{jj'}$  é uma variável aleatória real Gaussiana reduzida (com média zero e variância um).
- caso  $j = j'$ :  $M_{n,jj} = \sigma_n \sqrt{2V_j}$ , onde  $V_j$  é uma variável aleatória real positiva Gamma, com função densidade de probabilidade:

$$p_{V_j}(v) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(v) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2\sigma_A^2} + \frac{1-j}{2}\right)} v^{\left(\frac{n+1}{2\sigma_A^2} - \frac{1+j}{2}\right)} e^{-v}. \quad (2.1.114)$$

## 2.2 Geração de amostras de variáveis aleatórias, vetores aleatórios e processos estocásticos

Foi visto no início do capítulo que construídos os modelos determinístico e estocástico (utilizando-se, por exemplo, o PEM) de um sistema, o Método de Monte Carlo pode ser aplicado para obter-se inferências estatísticas sobre a resposta desse sistema (2.1).

Porém como o método tipicamente envolve a geração de observações de alguma distribuição de probabilidade, torna-se indispensável estudar-se geração de:

- variáveis e vetores aleatórios;
- processos e campos estocásticos

para poder-se trabalhar com o método Monte Carlo.

Por exemplo, dado um sistema, suponha que o Princípio da Máxima Entropia tenha sido utilizado para determinar-se a densidade de probabilidade dos

parâmetros considerados aleatórios. Caso deseje-se aplicar o Método de Monte Carlo para esse problema, será necessário gerar amostras dos objetos estocásticos.

Quando deseja-se gerar amostrar de uma variável aleatória real,  $X$ , com uma densidade de probabilidade  $p$ , busca-se obter uma sequência de valores  $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ , com  $x_m \in \mathbb{R}, \forall m$  que representem realizações de  $X$ .

Muitos livros e artigos chamam os geradores de amostras de variáveis aleatórias frequentemente de geradores de números aleatórios (RNG-*Random Number Generator*). Abaixo segue uma lista com os principais requisitos de um RNG, espera-se que ele:

1. seja rápido, pois em suas aplicações podem ser necessário gerar milhões de amostras.
2. seja repetível, para tornar possível uma depuração do processo.
3. seja passível de análise, para poder-se estudar as propriedades da sua distribuição de probabilidade.
4. tenha um longo período.
5. seja aparentemente aleatório para a aplicação a qual é destinado.

No início do desenvolvimento de geradores, muitas técnicas híbridas de sistemas analógicos e digitais foram experimentadas. Como exemplo, tem-se os circuitos eletrônicos geradores de ruído branco. No entanto, estes métodos apresentavam muitas desvantagens: eram muito lentos, não repetíveis, tendiam a tornar-se tendenciosos e, exigiam equipamentos muito especializados. Por isso, essas técnicas foram sendo substituídas com o passar dos anos. Hoje, praticamente todos os geradores são baseados em algoritmos.

Como o computador é um dispositivo determinístico, pode parecer impossível que ele seja utilizado como um gerador. De fato, amostras geradas por computadores são obtidas através de algoritmos determinísticos. No entanto, elas parecem ser aleatórias e, para confirmar esse comportamento, deveriam ser submetidas a rigorosos testes. Muitas vezes, essas amostras são chamadas de '*pseudo-aleatórias*' (Cf. [75]).

Em (Cf. [48]), o autor Knuth descreve uma tentativa feita por ele de construir um gerador de amostras de variáveis aleatórias. Ele escreveu um algoritmo que trabalhava com números decimais de 10 dígitos, gerando uma sequência de valores  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  a partir de um valor inicial.

Apesar de extenso, Knuth verificou que seu algoritmo podia convergir rapidamente para um ponto fixo. Além disso, testando-o, ele percebeu que, mesmo utilizando diferentes valores iniciais, a sequência de números começava rapidamente a se repetir.

Dessa forma, o algoritmo de Knuth é um excelente exemplo de que a uma grande complexidade em um algoritmo não garante que ele será um bom gerador de amostras de variáveis aleatórias. Muitas vezes, a complexidade esconde o comportamento de repetição dos números gerados. E assim, conclui-se que: *amostras de variáveis aleatórias não devem ser geradas com um método escolhido ao acaso* (Cf. [48]).

Muitos métodos de geração de amostras de variáveis e vetores aleatórios foram desenvolvidos ao longo dos últimos anos. Como por exemplo, os geradores baseados em congruência linear, baseados no Método da Transformada Inversa, baseados em Cadeias de Markov (Monte Carlo Cadeia de Markov) entre outros.

Não será discutido nesse texto os casos mais simples de geração. Sugere-se ao leitor consultar [68], [29] e [69].

Quando deseja-se obter realizações de processos e campos estocásticos, o processo de geração é um pouco mais complicado por tratar-se de problemas de dimensão infinita. A seguir é feita uma breve introdução aos processos estocásticos e, em sequência é mostrado como a Expansão de Karhunen-Loève pode ser utilizada para gerar-se realizações desses processos.

### 2.2.1 Processos estocásticos

Um processo estocástico,  $\mathcal{X}$ , é definido como um mapeamento que associa a cada ponto amostra  $w \in \Omega$  uma função real de um parâmetro  $t$  pertencente a um conjunto  $T$  (na maioria dos processos estocásticos, o parâmetro  $t$  está associado ao tempo) (Cf. [1, 56]). Dessa forma, cria-se uma família  $F$  de funções de  $t$  ( $t \in T$ ).

$$\begin{aligned} \mathcal{X} : \quad \Omega &\longmapsto F \\ w &\longmapsto \mathcal{X}(t, w), \quad t \in T. \end{aligned} \quad (2.2.115)$$

Assim, um processo estocástico é uma função de duas variáveis ( $w$  e  $t$ ) cujos domínios são  $\Omega$  e  $T \subset \mathbb{R}$ , respectivamente. Ao se fixar, por exemplo, o valor  $w_m \in \Omega$  para  $w$ , o processo estocástico passa a representar uma única função  $\mathcal{X}(t, w_m)$  de  $t$ . Ao se fixar o valor  $t_j$  para  $t$ , o processo estocástico passa a representar uma variável aleatória,  $\mathcal{X}(t_j, w)$ , que associa a cada ponto amostra,  $w_m$ , um número real  $\mathcal{X}(t_j, w_m)$ .

Um processo estocástico pode ser interpretado como um número infinito de variáveis aleatórias indexadas pelo parâmetro  $t$ . Fixado um valor de  $t = t_j$ , a variável aleatória  $\mathcal{X}(t_j, w)$  possui uma função distribuição de probabilidade  $F$  dada por:

$$F_{\mathcal{X}(t_j, w)}(x) = P(\mathcal{X}(t_j, w) < x) \quad (2.2.116)$$

e uma função densidade de probabilidade  $p_{\mathcal{X}(t_j, w)}$ .

A média de um processo estocástico,  $\mathcal{X}$ , é definida pela equação (2.2.117), a variância por (2.2.118), a autocorrelação por (2.2.119) e a covariância por (2.2.120):

$$\mu_{\mathcal{X}}(t) = E[\mathcal{X}(t, \omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\mathcal{X}(t, \omega)}(x) dx \quad (2.2.117)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{X}}^2(t) &= E \left[ (\mathcal{X}(t, \omega) - \mu_{\mathcal{X}}(t))^2 \right] = \\ &= E [\mathcal{X}^2(t, \omega)] - E [\mathcal{X}(t, \omega)]^2 \end{aligned} \quad (2.2.118)$$

$$R_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(t_1, t_2) = E[\mathcal{X}(t_1, \omega) \mathcal{X}(t_2, \omega)] \quad (2.2.119)$$

$$\begin{aligned} C(t_1, t_2) &= \\ E [(\mathcal{X}(t_1, \omega) - \mu_{\mathcal{X}}(t_1)) (\mathcal{X}(t_2, \omega) - \mu_{\mathcal{X}}(t_2))] &= \\ E [\mathcal{X}(t_1, \omega) \mathcal{X}(t_2, \omega)] - \mu_{\mathcal{X}}(t_1) \mu_{\mathcal{X}}(t_2) &= \\ R_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(t_1, t_2) - \mu_{\mathcal{X}}(t_1) \mu_{\mathcal{X}}(t_2) . \end{aligned} \quad (2.2.120)$$

### 2.3 Expansão de Karhunen-Loève

DEFINIÇÃO 2.3.1. (EXPANSÃO DE KARHUNEN-LOÈVE)

Seja  $\mu_{\mathcal{X}}$  a média em função do tempo de um processo estocástico  $\mathcal{X}$  e seja  $C(t_1, t_2)$  a sua função de covariância. A expansão de Karhunen-Loève de  $\mathcal{X}$  é expressa por:

$$\mathcal{X}(t, \omega) = \mu_{\mathcal{X}}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \psi_i(t) X_i(\omega) , \quad (2.3.121)$$

onde cada  $\psi_i$  é uma autofunção e cada  $\lambda_i$  o correspondente autovalor do seguinte problema:

$$\int_T C(t_1, t_2) \psi_i(t_2) dt_2 = \lambda_i \psi_i(t_1) \quad t \in T \quad (2.3.122)$$

e onde  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$  é uma sequência de variáveis aleatórias duas a duas decorrelacionadas, tal que:

$$E[X_i] = 0 \quad e \quad E[X_i X_j] = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \mathbb{N} , \quad (2.3.123)$$

e é definida por:

$$X_i(\omega) = \frac{1}{\lambda_i} \int_T [\mathcal{X}(t, \omega) - \mu_{\mathcal{X}}(t)] \psi_i(t) dt , \quad \forall i \in \mathbb{N} . \quad (2.3.124)$$

Dessa forma, a expansão de Karhunen-Loève representa uma maneira muito especial de decompor um processo estocástico em uma soma infinita de termos que dependem do tempo (as autofunções  $\psi_i$ ) e de uma sequência de variáveis aleatórias,  $X_i$ .

Na prática, a expansão de KL é aproximada por uma soma finita com  $d$  termos:

$$\mathcal{X}(t, \mathbf{w}) \approx \mu_{\mathcal{X}}(t) + \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} \psi_i(t) X_i(\mathbf{w}) . \quad (2.3.125)$$

Surtem então duas questões a serem analisadas:

1. se uma boa aproximação para o processo estocástico  $\mathcal{X}$  pode ser obtida truncando-se a série em  $d$  termos e;
2. quantos termos são necessários para obter-se essa boa aproximação.

A resposta para essas questões está relacionada com uma importante característica da expansão de Karhunen-Loève: o decaimento do valor dos autovalores,  $\lambda_i$ , em função do crescimento do índice  $i$ .

A ordenação de forma decrescente da sequência de autovalores  $\{\lambda_i\}$  obtidas por (2.3.122) permite que se avalie a importância desses autovalores na expansão de KL. Quanto menor o autovalor, menor é a sua influência na série de KL.

Assim, para determinar o número de termos utilizados na expansão de KL truncada, é usual analisar o decaimento dos  $\lambda_i$  e considerar os  $d$  primeiros autovalores, fazendo com que a influência dos termos desprezados seja a menor possível.

É importante observar que esse número de termos  $d$  a serem considerados vai depender do processo estocástico que está sendo expandido e de sua função de covariância. Exemplos de aplicações da decomposição de KL podem ser encontrados em [79, 6, 7, 72, 71, 70, 31, 15, 52].

Os próximos exemplos ilustram essa característica do decaimento dos autovalores para processos com diferentes funções de covariância.

**EXEMPLO 2.3.2.** *Considere um processo estocástico  $\mathcal{X}$ , com parâmetro  $t$  definido para  $t \in T = [-b, b]$  e com uma função de covariância  $C$  exponencial:*

$$C(t_1, t_2) = \exp\left(\frac{-|t_1 - t_2|}{a}\right) , \quad a > 0 . \quad (2.3.126)$$

*Aplicando-se a expansão de Karhunen-Loève a esse processo, as autofunções  $\psi_i$  e seus correspondentes autovalores  $\lambda_i$  são calculados através da seguinte integral (2.3.122):*

$$\int_T \exp(-c|t_1 - t_2|) \psi_i(t_2) dt_2 = \lambda_i \psi_i(t_1) , \quad (2.3.127)$$

onde  $c = 1/a$ . A expressão (2.3.127) pode ser reescrita como:

$$\int_{-b}^{t_1} \exp(-c(t_1 - t_2))\psi_i(t_2) dt_2 + \int_{t_1}^b \exp(-c(t_2 - t_1))\psi_i(t_2) dt_2 = \lambda_i \psi_i(t_1) . \quad (2.3.128)$$

Diferenciando (2.3.128) duas vezes em relação a  $t_1$  e, fazendo algumas manipulações matemáticas, obtém-se uma equação diferencial em termos de  $\psi_i$ . Resolvendo essa equação (Cf. [82]), chega-se a seguinte expressão para os autovalores  $\lambda_i$ :

$$\lambda_i = \begin{cases} \frac{2a}{1 + a^2\omega_i^2}, & i \text{ par} \\ \frac{2a}{1 + a^2v_i^2}, & i \text{ ímpar} \end{cases} \quad (2.3.129)$$

e para as correspondentes autofunções  $\psi_i$ :

$$\psi_i(t) = \begin{cases} \sin(\omega_i t) / \sqrt{b - \frac{\sin(2\omega_i b)}{2\omega_i}}, & i \text{ par} \\ \sin(v_i t) / \sqrt{b + \frac{\sin(2v_i b)}{2v_i}}, & i \text{ ímpar} \end{cases} \quad (2.3.130)$$

onde  $\omega_i$  e  $v_i$  são soluções da equação:

$$\begin{cases} a\omega + \tan(\omega b) = 0, & i \text{ par} \\ 1 - av \tan(vb) = 0, & i \text{ ímpar} \end{cases} . \quad (2.3.131)$$

Na figura (2.2) é apresentado o gráfico dos primeiros 20 autovalores  $\lambda_i$  calculados para a função de covariância exponencial (2.3.126) com diferentes valores de  $a$ .

**EXEMPLO 2.3.3.** Considere um processo estocástico  $\mathcal{X}$ , com parâmetro  $t$  definido para  $t \in T = [-b, b]$  e com uma função de covariância  $C$ :

$$C(t_1, t_2) = \delta(t_1 - t_2) . \quad (2.3.132)$$

Aplicando a expansão de KL a  $\mathcal{X}$ , verifica-se por (2.3.122) que as autofunções  $\psi_i$  podem ser quaisquer funções ortogonais e, os autovalores  $\lambda_i$  são todos constantes iguais a 1, isto é,  $\lambda_i = 1, \forall i$ . Nesse caso, quando  $C(t_1, t_2) = \delta(t_1 - t_2)$  não há decaimento dos autovalores.

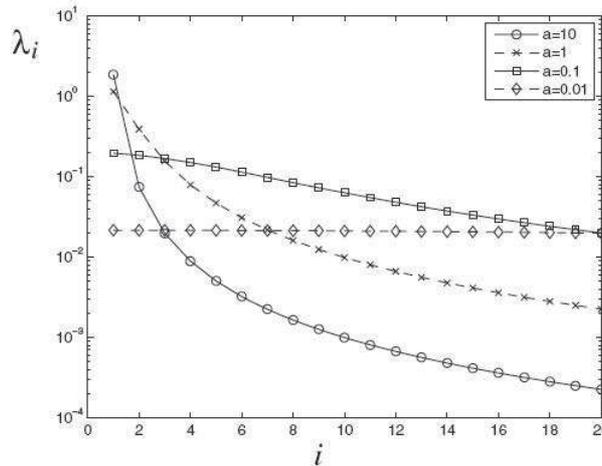


Figura 2.2: Primeiros 20 autovalores  $\lambda_i$  calculados para a função de covariância com diferentes valores de  $a$ .

### 2.3.1 Expansão de KL aplicada a processos estocásticos gaussianos

Os processos estocásticos gaussianos quando submetidos à expansão de KL apresentam um comportamento especial. Eles são representados pela soma (2.3.121) onde todos os  $X_i$  são variáveis aleatórias gaussianas independentes.

Isso se deve ao fato de que, quando trabalha-se com variáveis aleatórias gaussianas, decorrelação é equivalente a independência e, além disso, combinações lineares de variáveis gaussianas resultam em variáveis aleatórias gaussianas.

Dessa forma, a expansão truncada de KL permite parametrizar um processos estocásticos gaussianos em um número finito de variáveis aleatórias gaussianas.

### 2.3.2 Exemplos numéricos da expansão de KL

Na seção anterior, mostrou-se como obter expressões analíticas da expansão de Karhunen-Loève para processos estocásticos a partir da expressão analítica da função de covariância. Nesta seção é mostrado como a expansão de KL pode ser estimada numericamente a partir das realizações do processo estocástico.

Antes de explicar como isso é feito, é necessário definir o que é considerado uma realização de um processo estocástico em uma simulação numérica.

### 2.3.3 O processo de discretização

O computador é um dispositivo capaz de fazer contas em um domínio discreto. Por isso, toda vez que um algoritmo é implementado em alguma linguagem computacional, é escrito para fazer contas discretas. Quando se deseja trabalhar em um domínio contínuo, é necessário fazer uma discretização. No francês há uma palavra que define bem essa transformação, é a chamada "numérisation".

Por isso, quando se trabalha com realizações numéricas,  $w_m$ , de um processo estocástico  $\mathcal{X}$ , primeiramente faz-se uma discretização do parâmetro  $t$  (geralmente associado ao tempo). Considera-se, por exemplo, que ele assumirá  $n$  valores  $t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_n, \forall t_j \in \mathbb{T}$  e  $\forall j \in \mathbb{N}$ .

Fixados esses  $n$  instantes, pode-se então associar a cada instante  $t_j$  uma variável aleatória  $\mathcal{X}(t_j, w)$ . No total, ficam definidas  $n$  variáveis:

$$\mathcal{X}(t_1, w), \mathcal{X}(t_2, w), \dots, \mathcal{X}(t_j, w), \dots, \mathcal{X}(t_n, w).$$

Cada realização,  $w_m$ , de  $\mathcal{X}$  é representada por realizações dessas  $n$  variáveis aleatórias, ou seja:  $\mathcal{X}(t_1, w_m), \dots, \mathcal{X}(t_j, w_m), \dots, \mathcal{X}(t_n, w_m)$ .

É usual e prático representar cada realização  $w_m$  através de um vetor com  $n$  componentes:

$$\mathcal{X}(t, w_m) = \begin{pmatrix} \mathcal{X}(t_1, w_m) \\ \vdots \\ \mathcal{X}(t_j, w_m) \\ \vdots \\ \mathcal{X}(t_n, w_m) \end{pmatrix}. \quad (2.3.133)$$

Um processo estocástico é dito estar especificado até ordem  $n$  quando a função densidade de probabilidade conjunta

$$p_{\mathcal{X}(t_1, w) \mathcal{X}(t_2, w) \dots \mathcal{X}(t_n, w)}$$

é conhecida para qualquer conjunto de valores  $(t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n)$ , tais que  $t_i \in \mathbb{T}, \forall i$ .

Assim, dado um processo especificado até uma ordem  $n$ , é possível gerar realizações numéricas desse processo. Ou seja, é possível obter os vetores:

$$\mathcal{X}(t, w_1), \mathcal{X}(t, w_2), \dots.$$

### 2.3.4 Estimativas de um processo estocástico

A partir de um número grande,  $M$ , de realizações numéricas de um processo estocástico  $\mathcal{X}$ , estimativas para a média, variância e correlação desse processo podem ser calculadas (Cf. [81]).

Suponha que cada realização  $w_m$  do processo,  $\{\mathcal{X}(t, w_m)\}$ , é representada por um vetor  $(n \times 1)$  e que nessa realização, o parâmetro  $t$  assume os valores  $t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_n \in \mathbb{T}$ .

Dessa forma, a média,  $\mu_{\mathcal{X}}(t)$ , pode ser estimada através de um vetor com  $n$  componentes. Cada componente  $j$  representa a estimativa da média da variável aleatória  $\mathcal{X}(t_j, w)$ , sendo calculada por:

$$\hat{\mu}_{\mathcal{X}}(t_j) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathcal{X}(t_j, w_m) \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.3.134)$$

Assim, o vetor  $\{\hat{\mu}_{\mathcal{X}}(t)\}$  que estima a média do processo é:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathcal{X}}(t) = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{\mathcal{X}}(t_1) \\ \vdots \\ \hat{\mu}_{\mathcal{X}}(t_j) \\ \vdots \\ \hat{\mu}_{\mathcal{X}}(t_n) \end{pmatrix}. \quad (2.3.135)$$

Tendo calculado  $\{\hat{\mu}_{\mathcal{X}}(t)\}$ , um procedimento semelhante pode ser feito para estimar a variância do processo,  $\sigma_{\mathcal{X}}^2$  (2.2.118). Em cada instante  $t_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ :

$$\hat{\sigma}_{\mathcal{X}}^2(t_j) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\hat{\mu}_{\mathcal{X}}(t_j) - \mathcal{X}(t_j, w_m))^2. \quad (2.3.136)$$

Assim, define-se o vetor:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{X}}^2(t) = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{\mathcal{X}}^2(t_1) \\ \vdots \\ \hat{\sigma}_{\mathcal{X}}^2(t_j) \\ \vdots \\ \hat{\sigma}_{\mathcal{X}}^2(t_n) \end{pmatrix}. \quad (2.3.137)$$

Para estimar a função de covariância em dois instantes quaisquer  $t_j, t_k \in \mathbb{T}$ , faz-se:

$$\hat{C}(t_j, t_k) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M [\mathcal{X}(t_j, w_m) - \hat{\mu}_{\mathcal{X}}(t_j)] \cdot [\mathcal{X}(t_k, w_m) - \hat{\mu}_{\mathcal{X}}(t_k)]. \quad (2.3.138)$$

Dessa forma, a função de covariância pode ser representada através de uma matriz  $\hat{\mathbf{C}}$  ( $n \times n$ ):

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \hat{C}(t_1, t_1) & \cdots & \hat{C}(t_1, t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{C}(t_n, t_1) & \cdots & \hat{C}(t_n, t_n) \end{pmatrix}. \quad (2.3.139)$$

Representando as  $M$  realizações de um processo estocástico  $\mathcal{X}$  em uma matriz  $\mathcal{X}$  ( $n \times M$ ), de forma que cada coluna de  $\mathcal{X}$  seja uma realização do processo:

$$\mathcal{X} = (\mathcal{X}(t, w_1), \mathcal{X}(t, w_2), \dots, \mathcal{X}(t, w_M)) , \quad (2.3.140)$$

ou seja:

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \mathcal{X}(t_1, w_1) & \mathcal{X}(t_1, w_2) & \cdots & \mathcal{X}(t_1, w_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{X}(t_n, w_1) & \mathcal{X}(t_n, w_2) & \cdots & \mathcal{X}(t_n, w_M) \end{pmatrix}. \quad (2.3.141)$$

e criando uma matriz  $\mathcal{X}_0$  em que cada coluna  $k$  seja igual a:  $\mathcal{X}(t, w_k) - \hat{\mu}_{\mathcal{X}}(t)$ ,

$$\mathcal{X}_0 = ( \mathcal{X}(t, w_1) - \hat{\mu}_{\mathcal{X}}(t) \quad \cdots \quad \mathcal{X}(t, w_M) - \hat{\mu}_{\mathcal{X}}(t) ) , \quad (2.3.142)$$

a matriz de covariância  $\hat{\mathbf{C}}$  pode ser escrita como:

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{1}{M} \mathcal{X}_0 \mathcal{X}_0^T , \quad (2.3.143)$$

onde  $(.)^T$  indica a matriz transposta.

Assim, a partir de realizações numéricas de um processo estocástico,  $\mathcal{X}$ , é possível obter a matriz  $[\hat{\mathbf{C}}]$  que estima a sua função de covariância  $C$ .

### 2.3.5 Estimativas dos autovalores e autofunções da expansão de KL

Os termos da expansão de Karhunen-Loève em relação ao tempo são calculados através de um problema de autovalor envolvendo a função de covariância (2.3.122).

Quando trabalha-se em um domínio discreto e, calcula-se uma estimativa dessa função de covariância através da matriz  $[\hat{\mathbf{C}}]$ , um problema de autovalor equivalente a (2.3.122) pode ser definido por:

$$\hat{\mathbf{C}}\hat{\boldsymbol{\psi}} \Delta t = \hat{\lambda}\hat{\boldsymbol{\psi}}, \quad (2.3.144)$$

onde  $\Delta t$  representa o incremento de tempo utilizado para fazer-se a discretização do processo estocástico.

Resolver (2.3.144), significa obter  $n$  autovalores  $\hat{\lambda}_i$  e seus  $n$  correspondentes autovetores  $\hat{\boldsymbol{\psi}}_i$ .

Esses  $\hat{\lambda}_i$  calculados são considerados estimativas para os autovalores de (2.3.122) e, os  $\hat{\boldsymbol{\psi}}_i$  são considerados estimativas para as autofunções  $\boldsymbol{\psi}_i$ .

EXEMPLO 2.3.4. *Seja*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são variáveis aleatórias gaussianas com média e matriz de covariância dados por:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3.145)$$

Considere o seguinte processo estocástico:

$$\mathcal{X}(t, w) = A_1 t + A_2. \quad (2.3.146)$$

Dado que  $A_1$  e  $A_2$  são variáveis aleatórias gaussianas,  $\mathcal{X}$  é uma combinação linear de gaussianas, ou seja, é um processo estocástico gaussiano.

Assim, para qualquer valor de  $t_j \in T$ , a função densidade de probabilidade correspondente  $p_{\mathcal{X}(t_j, w)}$  é gaussiana.

Esse processo estocástico pode ser representado por:

$$\mathcal{X}(t, w) = \mathbf{T}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad (2.3.147)$$

e terá média e variância:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{X}}(t) = \mathbf{T}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}} = t + 2 \quad (2.3.148)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{X}}^2(t) = \mathbf{T}\mathbf{C}_{\mathbf{A}}\mathbf{T}^T = t^2 + t + 1. \quad (2.3.149)$$

Dessa forma, a função densidade de probabilidade  $p_{\mathcal{X}(t_j, w)}$  é conhecida para qualquer valor de  $t_j \in T$ :

$$p_{\mathcal{X}(t_j, w)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t_j^2 + t_j + 1}} e^{-\frac{(x - (t_j+2))^2}{2(t_j^2 + t_j + 1)}}, \quad (2.3.150)$$

e conseqüentemente, o processo é dito estar especificado até primeira ordem.

A partir da densidade de probabilidade (2.3.150),  $10^4$  realizações foram geradas para esse processo (no intervalo de tempo  $[0, 10]$  e com um  $\Delta t = 0.1$ ). Estimou-se a matriz de covariância  $[\hat{C}]$  por (2.3.143) e, posteriormente resolveu-se o problema de autovalor (2.3.144).

Os autovalores estimados são mostrados na figura (2.3).

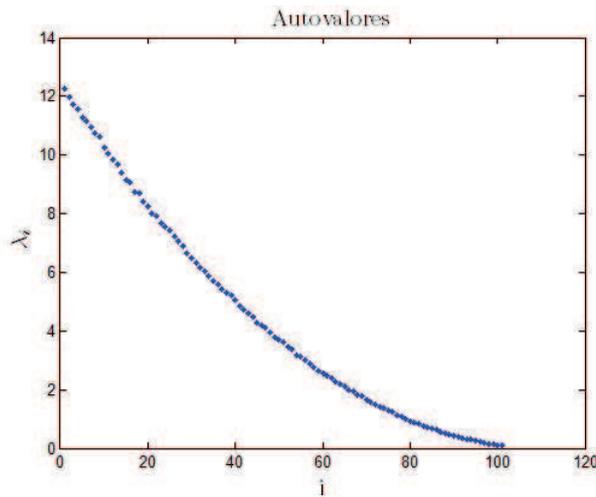


Figura 2.3: Autovalores  $\lambda_i$  estimados a partir da matriz de covariância  $[\hat{C}]$  do processo (2.3.146).

EXEMPLO 2.3.5. Considere o seguinte processo estocástico:

$$\mathcal{X}(t, w) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t), \quad (2.3.151)$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são variáveis aleatórias gaussianas com média e matriz de covariância dados por (2.3.145). Da mesma forma que no exemplo anterior, 2.1.6,  $\mathcal{X}$  é gaussiano, o processo estocástico deste exemplo também é gaussiano. Ele pode ser representado por:

$$\mathcal{X}(t, w) = [T]\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos^2(\omega t) & \sin(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad (2.3.152)$$

e, possui média e variância:

$$\mu_{\mathcal{X}}(t) = [T] \{ \mu_A \} = \cos(\omega t) + 2 \sin(\omega t) \quad (2.3.153)$$

$$\sigma_{\mathcal{X}}^2(t) = [T][C_A][T]^T = \cos^2(\omega t) + \cos(\omega t) \sin(\omega t) + \sin^2(\omega t) . \quad (2.3.154)$$

A função densidade de probabilidade  $p_{\mathcal{X}(t_j, w)}$  é conhecida para qualquer valor de  $t_j \in T$ :

$$p_{\mathcal{X}(t_j, w)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_{\mathcal{X}}^2(t_j)}} e^{-\frac{(x - \mu_{\mathcal{X}}(t_j))^2}{2\sigma_{\mathcal{X}}^2(t_j)}} \quad (2.3.155)$$

e, o processo é dito estar especificado até primeira ordem.

A partir da densidade de probabilidade (2.3.150),  $10^4$  realizações foram geradas para esse processo (no intervalo de tempo  $[0, 10]$  e com um  $\Delta t = 0.1$ ). Estimou-se a matriz de covariância  $[\hat{C}]$  por (2.3.143) e, posteriormente resolveu-se o problema de autovalor (2.3.144).

Os autovalores estimados são mostrados na figura (2.4).

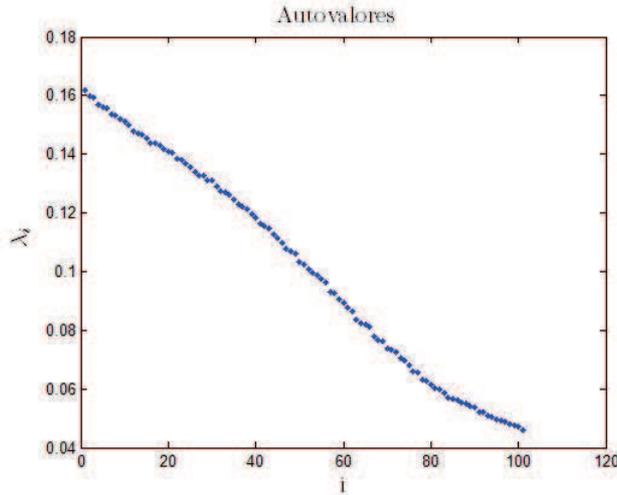


Figura 2.4: Autovalores  $\lambda_i$  estimados a partir da matriz de covariância  $[\hat{C}]$  do processo (2.3.151).

### 2.3.6 Estimativas das variáveis aleatórias da expansão de KL

Quando trabalha-se com a expansão de KL de um processo estocástico  $\mathcal{X}$  em um domínio discreto, após ter-se calculado estimativas para os autovalores,  $\hat{\lambda}_i$ , e para as autofunções,  $\hat{\psi}_i$ , é necessário estimar-se a função densidade de probabilidade das variáveis aleatórias  $X_i$  da expansão.

A partir da expressão (2.3.124), cada realização  $w_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , de cada uma das variáveis aleatórias  $X_i$  da expansão de KL pode ser calculada por:

$$X_i(w_m) = \frac{1}{\lambda_i} \left\langle (\mathcal{X}(t, w_m) - \hat{\mu}_{\mathcal{X}}(t)), \hat{\psi}_i \right\rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad (2.3.156)$$

onde  $\mathcal{X}(t, w_m)$  representa uma realização numérica  $m$  do processo estocástico  $\mathcal{X}$ , ou seja é o vetor definido em (2.3.133) e pertence a  $\mathbb{R}^n$ .

Para estimar a função densidade de probabilidade dessa variável aleatória  $X_i$ , basta calcular um número  $M$  grande de realizações de  $X_i$  e, construir o histograma dessas  $M$  realizações.

As  $M$  realizações de  $X_i$  podem ser expressas por um vetor  $\mathbf{X}_i$ ,  $(M \times 1)$ , (cada componente representa uma realização  $m$  de  $X_i$ ). Esse vetor pode ser calculado por:

$$\mathbf{X}_i = \frac{1}{\lambda_i} \mathcal{X}_0^T \hat{\psi}_i, \quad (2.3.157)$$

onde a matriz  $\mathcal{X}_0$  está definida em (2.3.142) e tem dimensão  $(n \times m)$ .

## 2.4 Geração de realizações processos estocásticos a partir da expansão de KL

A expansão de Karhunen-Loève é uma poderosa técnica de parametrização de um processo estocástico que possibilita sua aproximação através de um processo de dimensão finita, ou seja, um vetor aleatório. Ela pode ser utilizada, por exemplo, para facilitar e reduzir o custo computacional da geração de realizações desse processo.

Quando trabalha-se com o método de Monte Carlo, geralmente deseja-se gerar realizações de uma variável, vetor aleatório ou processo estocástico e posteriormente utilizar as amostras geradas para aproximar alguma função de interesse. Assim, o método utiliza a amostragem aleatória como ferramenta para produzir observações sobre as quais se realizam inferências estatísticas com objetivo de extrair informações sobre as observações (Cf. [75]).

Essa seção mostra como gerar amostras de processos estocásticos, que seriam utilizadas por exemplo no Método de Monte Carlo, a partir da expansão de KL.

Dado um processo estocástico,  $\mathcal{X}$ , suponha que o vetor de média  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathcal{X}}(t)$  e a matriz de covariância  $\hat{\mathbf{C}}$  possam ter sido estimados por (2.3.144) e (2.3.143) e, que o problema de autovalor (2.3.144) tenha sido resolvido. Suponha também que a função densidade de probabilidade de cada variável aleatória  $X_i$  da expansão de Karhunen-Loève tenha sido estimada através do histograma de suas amostras (calculadas por (2.3.157)).

Considere por exemplo que  $n$  autovalores  $\hat{\lambda}_i$  e  $n$  autovetores  $\hat{\boldsymbol{\psi}}_i$  ( $n \times 1$ ) foram calculados.

Pela expansão truncada de KL, com  $d$  termos ( $d < n$ ), para esse processo, verifica-se que cada realização numérica de  $\mathcal{X}$  pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(KL)}(t, \mathbf{w}_m) = \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathcal{X}}(t) + \sum_{i=1}^d \sqrt{\hat{\lambda}_i} \hat{\boldsymbol{\psi}}_i X_i(\mathbf{w}_m). \quad (2.4.158)$$

onde  $X_i(\mathbf{w}_m)$  representa uma realização  $m$  de cada variável aleatória  $X_i$ .

Assim, vetores  $\boldsymbol{\mathcal{X}}(t, \mathbf{w}_m)$  são gerados através de realizações de um número finito,  $d$ , das variáveis aleatórias  $X_i$ .

**EXEMPLO 2.4.1.** *Suponha que deseja-se gerar-se realizações através da expansão de KL de um processo estocástico,  $\mathcal{X}$ , com parâmetro  $t \geq 0$ , caracterizado por um passeio aleatório com incrementos com densidade de probabilidade Gamma, tal que:*

1.  $\mathcal{X}(0, w) = 0$ ;
2.  $\mathcal{X}(t, w)$ ,  $t \geq 0$ , é um processo estocástico com incrementos independentes;
3. a densidade de probabilidade da variável aleatória  $Y = \mathcal{X}(t_2, w) - \mathcal{X}(t_1, w)$ , com  $t_2 > t_1 \geq 0$ , é Gamma. Sua média é  $\mu_Y = m(t_2 - t_1)$  e seu coeficiente de variação é  $\delta_Y = \frac{\delta}{\sqrt{t_2 - t_1}}$ , com  $m > 0$  e  $\delta > 0$  fixados.

Para gerar-se realizações através da expansão de KL de  $\mathcal{X}$ , primeiramente foram geradas  $10^4$  realizações desse processo (no intervalo de tempo  $[0, 10]$  e com diferentes discretizações de tempo  $\Delta t$ ). Através dessas realizações, estimou-se a matriz de covariância  $\hat{\mathbf{C}}$  por (2.3.143) e, posteriormente resolveu-se o problema de autovalor (2.3.144).

As aproximações obtidas para os vinte primeiros autovalores  $\hat{\lambda}_i$  são mostradas na figura 2.5.

A partir dos histogramas das variáveis aleatórias da expansão de KL (2.3.157), foi possível estimar as funções densidades de probabilidade de cada variável  $X_i$ . Os gráficos das densidades estimadas para as quatro primeiras variáveis são mostradas em (2.6).

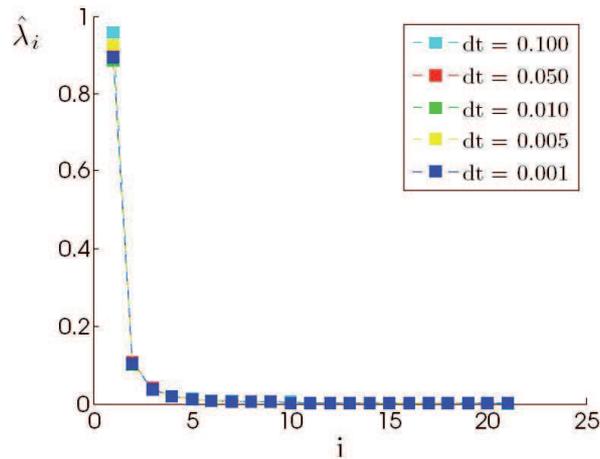


Figura 2.5: Estimativas dos autovalores  $\hat{\lambda}_i$  da matriz  $\hat{\mathbf{C}}$  para diferentes discretizações de tempo  $dt$ .

Tendo as densidades de probabilidade das variáveis aleatórias  $X_i$ , amostras de cada uma dessas variáveis foram obtidas através do Método de Monte Carlo Cadeia de Markov (MCMC). Assim, pela expressão da expansão truncada de KL (2.4.158) foi possível calcular realizações de  $\mathcal{X}$ .

Para analisar a influência do número de termos  $d$  usados na expressão truncada de KL, duas estratégias foram utilizadas.

**Primeira estratégia:** a partir das amostras de  $\mathcal{X}$  geradas por KL, estimou-se a matriz de covariância do processo,  $\hat{\mathbf{C}}_d$ , calculou-se a norma Frobenius dessa matriz e analisou-se o erro:

$$Erro = \frac{|\hat{\mathbf{C}}_d|_{Fr} - |\hat{\mathbf{C}}|_{Fr}}{|\hat{\mathbf{C}}|_{Fr}}$$

para diferentes números de termos  $d$  usados na expressão truncada de KL. Os resultados obtidos são mostrados na figura (2.7) mostra. Verifica-se que quanto maior o número de termos usados na expansão, menor será o erro (2.4.159).

**Segunda estratégia:** fez-se uma comparação entre:

- a função densidade de probabilidade da variável aleatória  $\mathcal{X}(t = \underline{t}, w)$  (para algum  $t$  fixado  $t = \underline{t}$ );

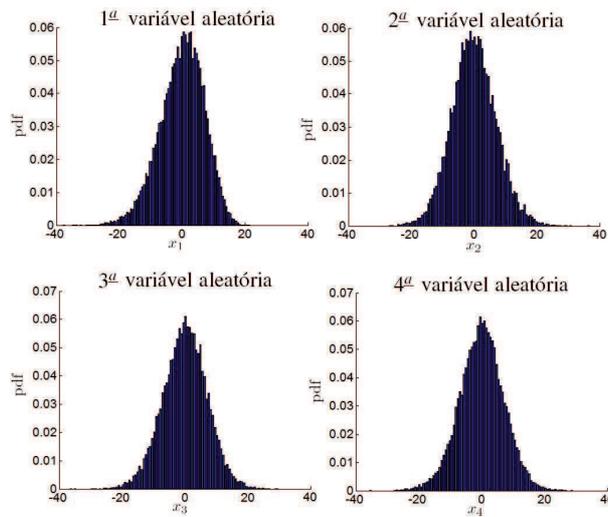


Figura 2.6: Estimativas para as densidade de probabilidade das quatro primeiras variáveis aleatórias  $X_i$  da expansão de KL.

- o histograma da variável aleatória  $\mathcal{X}^{(KL)}(t = \underline{t}, w)$ , calculado através das realizações do processo estocástico geradas pela expansão de KL.

Nas figuras (2.8) e (2.9) são mostrados as densidades  $p_{\mathcal{X}(t=2,w)}$  (nesse caso,  $\underline{t} = 2$ ) e os histogramas da variável aleatória  $\mathcal{X}^{(KL)}(t = 2, w)$  para os casos em que consideraram-se  $d = 1$ ,  $d = 2$ ,  $d = 5$  e  $d = 10$  termos na expansão de KL. Pelas figuras, verifica-se que quanto se aumenta o número de termos usados na expansão, o histograma de  $\mathcal{X}^{(KL)}(t = 2, w)$  se aproxima da densidade  $p_{\mathcal{X}(t=2,w)}$ .

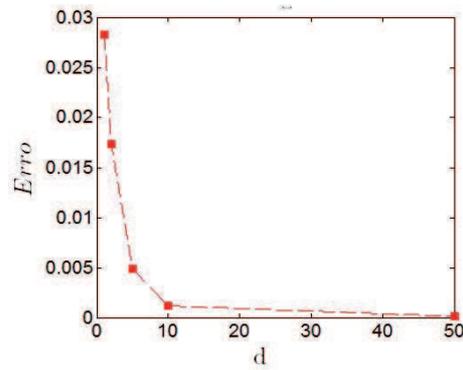


Figura 2.7: Erro (2.4.159) obtido para diferentes números de termos  $d$ .

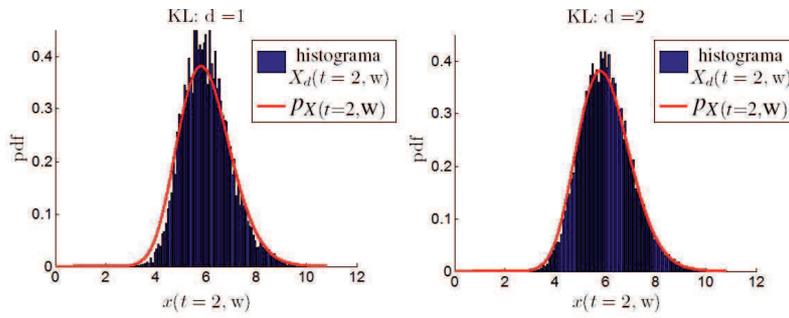


Figura 2.8: Densidades  $p_{\mathcal{X}(t=2, w)}$  e histogramas de  $\mathcal{X}^{KL}(t = 2, w)$  para  $d = 1$  e  $d = 2$  termos.

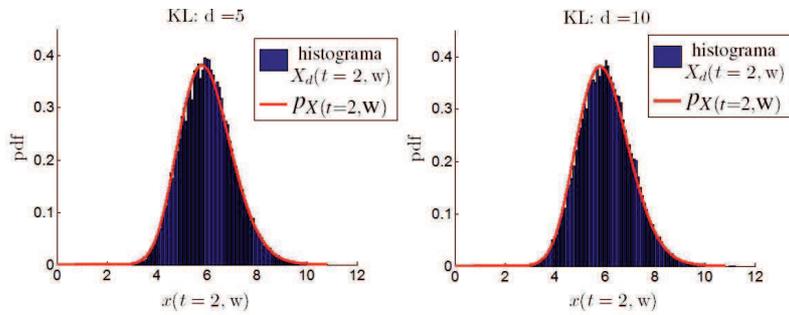


Figura 2.9: Densidades  $p_{\mathcal{X}(t=2, w)}$  e histogramas de  $\mathcal{X}^{KL}(t = 2, w)$  para  $d = 5$  e  $d = 10$  termos.



## Capítulo 3

# Representação de Variáveis Aleatórias

Tratando-se de variáveis aleatórias, utiliza-se usualmente a palavra *representação* com o significado de *aproximação*. De maneira informal, o problema de representação de variáveis aleatórias pode ser colocado da forma seguinte:

**PROBLEMA-MODELO 3.1.** (INFORMAL)– *Sejam  $Y$  e  $X$  dois vetores aleatórios (eventualmente de dimensões diferentes). Seja  $S \neq \emptyset$  um conjunto de funções de  $X$ . Determinar um elemento  $PY$  de  $S$  tal que  $PY$  esteja mais próximo de  $Y$  que todo outro elemento de  $S$ .*

Idealmente, desejamos que  $PY = Y$  ou que, pelo menos, a diferença entre  $PY$  e  $Y$  seja muito pequena, de maneira a podermos utilizar  $PY$  em lugar de  $Y$  para as aplicações práticas.

É interessante notar que esta formulação conduz a um problema de otimização: trata-se de determinar um elemento de  $S$  ótimo segundo um critério de proximidade. A introdução de definições precisas de  $S$  e de um critério de proximidade são indispensáveis para a formalização, o estudo de propriedades e a resolução numérica.

### 3.1 Aproximações baseadas em propriedades hiltbertianas

Quando consideramos variáveis de quadrado integrável ( $S \subset L^2(\Omega, P)$ ), podemos explorar a *estrutura hiltbertiana* deste conjunto (Cf. 1.4 , 1.9):

**PROBLEMA 3.1.1.** *Sejam  $Y$  e  $X$  dois vetores aleatórios tomando valores em  $\mathbb{R}^q$  e  $\mathbb{R}^p$ , respectivamente. Seja  $S \neq \emptyset$ ,  $S \subset L^2(\Omega, P)$  um conjunto de funções de  $X$ . Determinar*

$$Z \in S \text{ e } \|Z - Y\| = \min \{\|c - Y\| : c \in S\} . \quad (3.1.1)$$

A resolução deste último problema é baseada na noção de *projeção ortogonal* (Cf. definição 1.4.2) e os resultados teóricos fundamentais associados são o *teorema da projeção ortogonal* e suas conseqüências (Cf. proposição 1.4.3). A resolução prática é frequentemente baseada na proposição 1.4.5 : temos

$$PY \in S \text{ e } Y - PY \perp S,$$

de modo que

$$PY \in S \text{ e } (Y - PY, s) = 0, \forall s \in S.$$

Esta última equação é geralmente utilizada para determinar numericamente a aproximação. Notemos que a representação só pode ser exata (isto é, a igualdade  $Y = PY$  só pode ser satisfeita) quando  $Y \in S$ .

### 3.1.1 Melhor aproximação de $Y$ por uma função arbitrária de $X$ : esperança condicional

Dentro do quadro hilbertiano, a aproximação mais geral é dada pela *esperança condicional*. Neste caso,  $S$  é simplesmente o conjunto de *todas* as funções de  $X$  que continuem sendo de quadrado integrável :

$$S = \{Z : Z = \varphi(X), \varphi : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q, Z \in L^2(\Omega, P)\}$$

e a norma é :

$$\|U\| = \sqrt{(U, U)}, \quad (U, V) = E(UV) .$$

Como já vimos (seções 1.4.3, 1.9.1), a solução neste caso é  $PY = E(Y|X)$ , a *esperança condicional de  $Y$  com relação a  $X$* .

Utilizamos a notação  $E(Y|X=x)$  para designar o valor pontual de  $PY$  para um dado valor de  $X$ . Quando o par  $(X, Y)$  possui uma densidade  $f(x, y)$  (isto é,  $P(X \in dx, Y \in dy) = f(x, y) dx dy$ ), temos  $PY = g(X)$ , com

$$g(x) = \int y f(y | X = x) dy$$

no qual  $f(y | X = x)$  é a *distribuição de probabilidade de  $Y$  condicional a  $X$*

$$f(y | X = x) = f(x, y) / \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = f(x, y) / f_X(x) .$$

A esperança condicional fornece um limite inferior para o erro em norma:  $E(Y|X)$  é a função de  $X$  mais próxima de  $Y$  no sentido da norma  $\|x\|$ , de forma que  $\|Y - \varphi(X)\| \geq \|Y - E(Y|X)\|$  para toda  $Z = \varphi(X) \in S$ .

EXEMPLO 3.1.2. Consideremos  $\Omega = (0, 1)$  e  $P((a, b)) = b - a$  (isto é,  $P(dx) = \ell(dx)$  no qual  $\ell$  é a medida de Lebesgue). Sejam  $X(\omega) = \sqrt{\omega}$  e  $Y(\omega) = \omega^2$ . A repartição do par  $(X, Y)$  é

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = P(\sqrt{\omega} < x, \omega^2 < y) = P(\omega < x^2, \omega < \sqrt{y}),$$

de forma que

$$F(x, y) = \min\{x^2, \sqrt{y}\}.$$

A densidade de probabilidade conjunta é dada por

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y).$$

Esta derivada deve ser calculada de forma variacional: em um ponto  $(x, y)$ , consideramos uma bola  $B_\varepsilon$  de raio  $\varepsilon > 0$  e o conjunto  $D(B_\varepsilon)$  de funções a suporte compacto em  $B_\varepsilon$ . Temos então

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y), \phi \right\rangle = \int_{B_\varepsilon} F \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \phi \, dx dy, \quad \forall \phi \in D(B_\varepsilon).$$

Sejam

$$B_\varepsilon^< = \{(x, y) \in B_\varepsilon : x^2 < \sqrt{y}\};$$

$$B_\varepsilon^> = \{(x, y) \in B_\varepsilon : x^2 > \sqrt{y}\};$$

$$\Sigma = \{(x, y) : x^2 = \sqrt{y}, 0 < x, y < 1\};$$

$$\Sigma_\varepsilon = \{(x, y) \in B_\varepsilon : x^2 = \sqrt{y}\}.$$

Temos

$$(x, y) \in B_\varepsilon^< \implies f(x, y) = 0$$

e, de forma análoga,

$$(x, y) \notin B_\varepsilon^< \implies f(x, y) = 0.$$

de modo que a densidade  $f$  é concentrada na curva  $\Sigma$ : temos  $f = A(x, y) \delta_\Sigma$ . A densidade empírica, aproximada por splines quadráticos, obtida de uma amostra de 10000 pontos do par é dada na figura 3.1.

Assim, notando que  $x^2 = \sqrt{y} \iff x^4 = y$ , temos

$$f(y | X = x) = A(x, y) \delta_{\Sigma}(x, y) / \int_{\mathbb{R}} A(x, y) \delta_{\Sigma} dy = \begin{cases} 0, & \text{se } y \neq x^4, \\ 1, & \text{se } y = x^4. \end{cases}$$

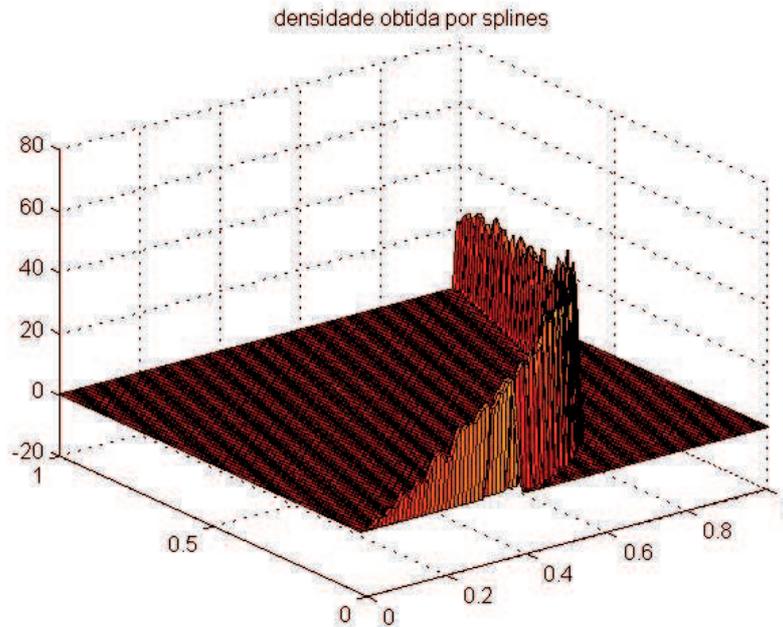


Figura 3.1: Densidade obtida a partir de 10000 realizações do par

Logo,

$$E(Y | X = x) = x^4 \text{ e } E(Y | X) = X^4 .$$

É possível determinar  $A(x, y)$  : com efeito, seja

$$n = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}, \quad n_x = \frac{N_x}{\sqrt{N_x^2 + N_y^2}}, \quad n_y = \frac{N_y}{\sqrt{N_x^2 + N_y^2}},$$

$$N_x = 2x, \quad N_y = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

a normal unitária saindo da região  $B_\varepsilon^<$ . Em todo ponto  $(x, y) \in \Sigma$ , temos

$$\int_{B_\varepsilon} F \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \phi \, dx dy = \int_{B_\varepsilon^<} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \phi + \int_{B_\varepsilon^>} \sqrt{y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \phi ,$$

Ora,

$$\int_{B_\varepsilon(x)} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \phi = \int_{B_\varepsilon(x)} \operatorname{div} \left( x^2 \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial y \\ 0 \end{pmatrix} - N_x \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix} \right) ,$$

de forma que (teorema de Green) :

$$\int_{B_\varepsilon(x)} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \phi = \int_{\Sigma_\varepsilon(x)} \left[ x^2 \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n - N_x \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix} \cdot n \right] ,$$

e

$$\int_{B_\varepsilon(x)} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \phi = \int_{\Sigma_\varepsilon(x)} [n_x x^2 \partial\phi/\partial y - n_y N_x \phi]$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon(x)} \sqrt{y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \phi &= \int_{B_\varepsilon(x)} \operatorname{div} \left( \sqrt{y} \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial y \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \int_{\Sigma_\varepsilon(x)} \sqrt{y} \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n, \end{aligned}$$

de onde

$$\int_{B_\varepsilon(x)} \sqrt{y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \phi = - \int_{\Sigma_\varepsilon(x)} [n_x \sqrt{y} \partial\phi/\partial y] ,$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} F \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \phi \, dx dy &= \int_{\Sigma_\varepsilon(x)} \left[ n_x \underbrace{(x^2 - \sqrt{y})}_{=0} \partial\phi/\partial y + n_x N_y \phi \right] = \\ &= \int_{\Sigma_\varepsilon(x)} n_x N_y \phi = n_x N_y \delta_\Sigma(\phi) , \end{aligned}$$

e  $A = n_x N_y = n_y N_x$ .

### 3.1.2 Aproximação por uma constante: média

Quando  $X$  é uma constante de mesma dimensão que  $Y$  (isto é,  $p = q$  e  $X = 1$ ), temos:

$$S = \{ Z \in L^2(\Omega) : Z \text{ é constante: } Z(\omega) = s \in \mathbb{R}^P, \forall \omega \in \Omega \}$$

Neste caso, desejamos aproximar o valor de  $Y$  por uma constante - podemos buscar o valor de  $m \in \mathbb{R}^p$  tal que

$$m = \arg \min \{ \|Y - c\| : c \in \mathbb{R}^p \} .$$

Temos:

$$(Y - m, c) = 0, \forall c \in \mathbb{R}^p,$$

de modo que

$$c^t E(Y) = c^t m, \forall c \in \mathbb{R}^p \iff m = E(Y) .$$

Temos

$$\|Y - m\| = \sqrt{E\left((Y - E(Y))^2\right)} = \sqrt{V(Y)} ,$$

de modo que a norma do erro cometido nesta aproximação é a raiz quadrada da *variância* de  $Y$ .

EXEMPLO 3.1.3. Consideremos  $\Omega = (0, 1)$  e  $P((a, b)) = b - a$  (isto é,  $P(dx) = \ell(dx)$  no qual  $\ell$  é a medida de Lebesgue). Sejam  $X(\omega) = \sqrt{\omega}$  e  $Y(\omega) = \omega^2$ . Temos

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega)P(d\omega) = \int_0^1 \sqrt{\omega}d\omega = \frac{2}{3}$$

e

$$E(Y) = \int_{\Omega} Y(\omega)P(d\omega) = \int_0^1 \omega^2 d\omega = \frac{1}{3} .$$

As variâncias são

$$V(X) = \int_{\Omega} (X(\omega) - E(X))^2 P(d\omega) = \int_0^1 \left(\sqrt{\omega} - \frac{2}{3}\right)^2 d\omega = \frac{1}{18}$$

e

$$V(Y) = \int_{\Omega} (Y(\omega) - E(Y))^2 P(d\omega) = \int_0^1 \left(\omega^2 - \frac{1}{3}\right)^2 d\omega = \frac{4}{45} .$$

Os mesmos resultados podem ser obtidos através da densidade de probabilidade. Por exemplo, a repartição de  $X$  é

$$F_X(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1 \end{cases} ,$$

de modo que sua densidade de probabilidade é

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 1 \\ 2x, & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases} .$$

Assim,

$$E(X) = \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$$

e

$$V(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 f_X(x) dx = \int_0^1 2x \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 dx = \frac{1}{18}$$

De forma análoga,

$$F_Y(y) = P(Y < y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \leq 0 \\ \sqrt{y}, & \text{se } 0 < y \leq 1 \\ 1, & \text{se } y > 1 \end{cases} ,$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 0 \text{ ou } y > 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}, & \text{se } 0 < y < 1 \end{cases} .$$

Assim,

$$E(Y) = \int_0^1 y f_Y(y) dy = \int_0^1 \frac{1}{2} \sqrt{y} dy = \frac{1}{3}$$

e

$$V(Y) = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 f_X(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 dy = \frac{4}{45} .$$

### 3.1.3 Aproximação afim: correlação linear

Quando desejamos aproximar o valor de  $Y$  por uma função afim de  $X$ , temos

$$S = \{s \in L^2(\Omega) : s = \alpha X + \beta; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} ,$$

Neste caso, podemos buscar os valores dos parâmetros  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que

$$aX + b = \arg \min \{\|Y - Z\| : Z = \alpha X + \beta; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} .$$

Temos:

$$(Y - aX - b, \alpha X + \beta) = 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Tomando sucessivamente  $(\alpha, \beta) = (1, 0)$  e  $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ , obtemos

$$aE(X^2) + bE(X) = E(XY) \quad ; \quad aE(X) + b = E(Y) \quad .$$

A solução deste sistema linear é

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \quad ; \quad b = E(Y) - aE(X) \quad .$$

Neste caso,

$$\|Y - aX - b\| = \sqrt{V(Y) \left(1 - [\rho(X, Y)]^2\right)},$$

no qual

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}.$$

$\rho(X, Y)$  é o *coeficiente de correlação linear* entre  $X$  e  $Y$ . Temos  $|\rho(X, Y)| \leq 1$  e o erro se anula quando  $|\rho(X, Y)| = 1$ .

**EXEMPLO 3.1.4.** *Consideremos  $\Omega = (0, 1)$  e  $P((a, b)) = b - a$  (isto é,  $P(dx) = \ell(dx)$  no qual  $\ell$  é a medida de Lebesgue). Sejam  $X(\omega) = \sqrt{\omega}$  e  $Y(\omega) = \omega^2$ . Temos*

$$E(X) = \frac{2}{3}, \quad V(X) = \frac{1}{18} \quad ; \quad E(Y) = \frac{1}{3}, \quad V(Y) = \frac{4}{45}.$$

*Além disto,*

$$E(XY) = \int_{\Omega} X(\omega)Y(\omega)P(d\omega) = \int_0^1 \omega^2 \sqrt{\omega} d\omega = \frac{2}{7},$$

*de modo que*

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{2}{7} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{63}.$$

*Assim*

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{4/63}{1/18} = \frac{8}{7} \quad ;$$

$$b = E(Y) - aE(X) = \frac{1}{3} - \frac{8}{7} \times \frac{2}{3} = -\frac{3}{7} \quad ;$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{2\sqrt{10}}{7} \approx 0.903508 \quad ;$$

$$\|Y - aX - b\| = \sqrt{V(Y) (1 - [\rho(X, Y)]^2)} = \frac{2}{7\sqrt{5}} \approx 0.127775 .$$

Com efeito, se

$$J(a, b) = \int_{\Omega} (Y(\omega) - aX(\omega) - b)^2 P(d\omega) = \int_{\Omega} (\omega^2 - a\sqrt{\omega} - b)^2 d\omega ,$$

temos

$$J(a, b) = \frac{1}{5} + \frac{a^2}{2} - \frac{2b}{3} + b^2 + \frac{4}{21}a(-3 + 7b) ,$$

de modo que

$$\frac{\partial J}{\partial a} = a + \frac{4}{3}b - \frac{4}{7} ,$$

e

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{2}{3}(2a + 3b - 1) .$$

Assim, o mínimo de  $J$  é atingido em  $(a, b)$  tal que

$$a + \frac{4}{3}b = \frac{4}{7} ; 2a + 3b = 1 ,$$

sistema linear cuja solução é  $a = \frac{8}{7}$  e  $b = -\frac{3}{7}$  . Notemos que

$$E(X^2) = \int_{\Omega} X(\omega)^2 P(d\omega) = \int_0^1 \omega d\omega = \frac{1}{2}$$

enquanto que

$$E(X) = \frac{2}{3} , E(Y) = \frac{1}{3} , E(XY) = \frac{2}{7} .$$

Assim, as equações

$$aE(X^2) + bE(X) = E(XY) ; aE(X) + b = E(Y)$$

se escrevem

$$\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b = \frac{2}{7} \iff a + \frac{4}{3}b = \frac{4}{7}$$

e

$$\frac{2}{3}a + b = \frac{1}{3} \iff 2a + 3b = 1 .$$

### 3.1.4 Aproximação polinomial

Quando desejamos aproximar o valor de  $Y$  por um polinômio de argumento  $X$  e de grau  $d$ , pomos

$$A(d) = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^d : \alpha \geq 0 \text{ (isto é, } \alpha_i \geq 0 \text{ para } 0 \leq i \leq p) \right. \\ \left. \text{e } |\alpha| = \sum_{i=1}^p \alpha_i \leq d \right\}$$

e

$$S = \left\{ s \in L^2(\Omega) : s = \sum_{\alpha \in A(d)} s_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_p^{\alpha_p}; \right. \\ \left. s_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} \in \mathbb{R}^q, \forall \alpha \in A(d) \right\},$$

de forma que

$$PY = \sum_{\alpha \in A(d)} u_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_p^{\alpha_p} \in S$$

e

$$\left( \sum_{\alpha \in A(d)} u_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_p^{\alpha_p}, X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \dots X_p^{\beta_p} \right) = \\ \left( Y, X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \dots X_p^{\beta_p} \right), \forall \beta \in A(d).$$

Esta última equação fornece um sistema linear para a determinação dos coeficientes  $u_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}$ .

Um caso particular interessante deste procedimento é aquele no qual  $X$  é um *vetor gaussiano* (Cf. seção 1.11.3. O vetor é gaussiano se, por exemplo, todas as componentes  $X_i$  são gaussianas e independentes). Neste caso, encontramos a idéia original de Wiener (Cf. [80], [14], [38]) que deu origem aos *polinômios de caos* (ou *caos polinomial*).

**EXEMPLO 3.1.5.** Consideremos  $\Omega = (0, 1)$  e  $P((a, b)) = b - a$  (isto é,  $P(dx) = \ell(dx)$  no qual  $\ell$  é a medida de Lebesgue). Sejam  $X(\omega) = \sqrt{\omega}$  e  $Y(\omega) = \omega^2$ .

Quando desejamos aproximar  $Y$  por um polinômio de  $X$ , de grau  $d$ , devemos determinar

$$PY = \sum_{j=0}^d u_j X^j,$$

no qual os  $d+1$  coeficientes  $u_0, u_1, \dots, u_n$  verificam

$$\left( \sum_{j=0}^d u_j X^j, X^i \right) = (Y, X^i), \quad 0 \leq i \leq d,$$

isto é,

$$\sum_{j=0}^n u_j E(X^{i+j}) = E(YX^i), \quad 0 \leq i \leq d.$$

Pondo  $U = (u_0, \dots, u_d)$ , temos

$$AU = B,$$

onde

$$A_{ij} = E(X^{i+j}) = \int_{\Omega} [X(\omega)]^{i+j} P(d\omega) = \int_0^1 \omega^{(i+j)/2} d\omega = \frac{2}{2+i+j}, \quad 0 \leq i, j \leq d$$

e

$$B_i = E(YX^i) = \int_{\Omega} Y(\omega) [X(\omega)]^i P(d\omega) = \int_0^1 \omega^{(i+4)/2} d\omega = \frac{2}{6+i}, \quad 0 \leq i \leq d$$

A solução fornecida por MATLAB para diferentes valores de  $d$  é dada abaixo:

$d$	$U$
0	(0.3333)
1	(-0.4286, 1.1429)
2	(0.2143, -1.4286, 2.1429)
3	(-0.0397, 0.4762, -1.6667, 2.2222)
4	(0.0000, -0.0000, 0.0000, -0.0000, 1.0000)
5	(0.0000, -0.0000, 0.0000, -0.0000, 1.0000, -0.0000)
6	(0.0000, -0.0000, 0.0000, -0.0000, 1.0000, -0.0000, 0.0000)

Observemos que

- para  $d = 0$ , trata-se de aproximar  $Y$  por uma constante: o resultado exato é  $PY = \frac{1}{3} \approx 0.3333$ ,
- para  $d = 1$ , trata-se de aproximar  $Y$  por uma função afim de  $X$ : o resultado exato é  $PY = -\frac{3}{7} + \frac{8}{7}X$ , o que corresponde a  $U = \left(-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}\right) \approx (-0.4286, 1.1429)$ .
- para  $d \geq 4$ , o resultado é  $PY = X^4 = E(Y | X)$ , o que corresponde ao resultado exato.

### 3.1.5 Aproximação em um subespaço de dimensão finita

O caso mais usual é aquele no qual  $S$  é um subespaço de dimensão finita, isto é, um subespaço para o qual existe uma base formada de um número finito  $n$  de elementos

$$F = \{\varphi_1(X), \dots, \varphi_n(X)\}$$

tal que

$$S = \left\{ s \in L^2(\Omega) : s = \sum_{i=1}^n s_i \varphi_i(X); s_i \in \mathbb{R}^q, 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Neste caso,

$$PY = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j(X) \in S$$

e

$$\left( \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j(X), \varphi_i(X) \right) = (Y, \varphi_i(X)), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Assim,  $U = (u_1, \dots, u_n)^t$  é a solução do sistema linear

$$AU = B, \quad A_{ij} = (\varphi_j(X), \varphi_i(X)), \quad B_i = (Y, \varphi_i(X)).$$

Notemos que esta aproximação é *linear*: se  $\alpha \in \mathbb{R}$ , temos

$$P(Y_1 + \alpha Y_2) = PY_1 + \alpha PY_2.$$

Com efeito, se

$$(B_1)_i = (Y_1, \varphi_i(X)), \quad (B_2)_i = (Y_2, \varphi_i(X)), \quad B_i = (B_1)_i + \alpha (B_2)_i$$

e

$$AU_1 = B_1, \quad AU_2 = B_2,$$

então

$$U = U_1 + \alpha U_2$$

verifica

$$AU = AU_1 + \alpha AU_2 = B_1 + \alpha B_2 = B ,$$

de forma que  $P(Y_1 + \alpha Y_2) = PY_1 + \alpha PY_2$ .

Quando a base é *ortogonal*, isto é,

$$(\varphi_i(X), \varphi_j(X)) = 0, \text{ se } i \neq j, (\varphi_i(X), \varphi_i(X)) > 0 .$$

temos

$$A_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j, A_{ii} > 0 .$$

Neste caso, temos simplesmente

$$u_i = B_i/A_{ii} = (Y, \varphi_i(X)) / (\varphi_i(X), \varphi_i(X)), \quad 1 \leq i \leq n .$$

Quando a base é *ortonormal*, isto é,

$$(\varphi_i(X), \varphi_j(X)) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

temos

$$u_i = B_i = (Y, \varphi_i(X)), \quad 1 \leq i \leq n .$$

Notemos que toda base  $G = \{\psi_1(X), \dots, \psi_n(X)\}$  pode ser transformada em base ortonormal através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt:

$$\phi_1 = \psi_1 ; \quad \varphi_1 = \phi_1 / \|\phi_1\| ;$$

$$k > 1 : \phi_k = \psi_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\psi_k, \varphi_i) \varphi_i ; \quad \varphi_k = \phi_k / \|\phi_k\| .$$

**EXEMPLO 3.1.6.** Consideremos  $\Omega = (0, 1)$  e  $P((a, b)) = b - a$  (isto é,  $P(dx) = \ell(dx)$  no qual  $\ell$  é a medida de Lebesgue). Sejam  $X(\omega) = \sqrt{\omega}$  e  $Y(\omega) = \omega^2$ . No último exemplo, consideramos a aproximação de  $Y$  por um polinômio de grau  $d$  de  $X$ , o que corresponde a  $\varphi_i(X) = X^{i-1}$ ,  $0 \leq i \leq d+1$ . Outras famílias podem ser consideradas, tais, por exemplo,

$$\begin{aligned} \varphi_1(X) &= 1; \quad \varphi_{2k}(X) = \sin(kX), \\ \varphi_{2k+1}(X) &= \cos(kX), \quad 1 \leq k \leq d \quad (n = 2d + 1) . \end{aligned}$$

Neste caso, temos

$$B_1 = \frac{1}{3} .$$

$$B_{2k} = -\frac{2}{k^6} (k (120 - 20k^2 + k^4) \cos(k) - 5 (24 - 12k^2 + k^4) \sin(k)) \quad (k \geq 1),$$

$$B_{2k+1} = \frac{2}{k^6} (-120 + 5 (24 - 12k^2 + k^4) \cos(k) + k (120 - 20k^2 + k^4) \sin(k)) \quad (k \geq 1) .$$

$$A_{11} = 1,$$

$$A_{1,2k} = \frac{2}{k^2} (\sin(k) - k \cos(k)) \quad (k \geq 1) ,$$

$$A_{1,2k+1} = \frac{2}{k^2} (\cos(k) + k \sin(k) - 1) \quad (k \geq 1) ,$$

$$A_{2k,2k} = \frac{1 + 2k^2 - \cos(2k) - 2k \sin(2k)}{4k^2} \quad (k \geq 1) ,$$

$$A_{2k,2k+1} = \frac{\sin(2k) - 2k \cos(2k)}{4k^2} \quad (k \geq 1) ,$$

$$A_{2k+1,2k+1} = \frac{2k^2 + \cos(2k) + 2k \sin(2k) - 1}{4k^2} \quad (k \geq 1) ,$$

e, para  $k \neq p$ ,

$$A_{2k,2p} = \frac{2}{(k^2 - p^2)^2} (p (k^2 - p^2) \cos(p) \sin(k) + k (p^2 - k^2) \cos(k) \sin(p) + (k^2 + p^2) \sin(k) \sin(p) + 2kp (\cos(k) \cos(p) - 1)) ,$$

$$A_{2k,2p+1} = \frac{2}{(k^2 - p^2)^2} (k (p^2 - k^2) \cos(p) \cos(k) + p (p^2 - k^2) \sin(k) \sin(p) - 2kp \cos(k) \sin(p) + (k^2 + p^2) \cos(p) \sin(k)) ,$$

$$A_{2k+1,2p+1} = \frac{2}{(k^2 - p^2)^2} (k (k^2 - p^2) \cos(p) \sin(k) + p (p^2 - k^2) \cos(k) \sin(p) + (k^2 + p^2) (\cos(p) \cos(k) - 1) + 2kp \sin(k) \sin(p)) .$$

O resultado obtido para  $d = 6$  é dado na figura abaixo.

É interessante comparar também as funções de repartição e as densidades de probabilidade (figura abaixo).

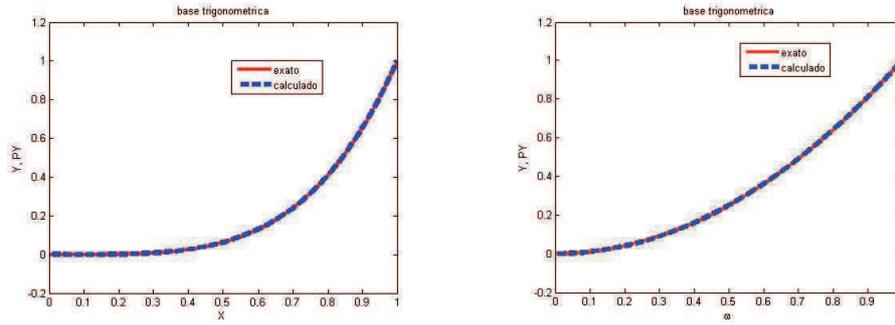


Figura 3.2: Aproximação em base trigonométrica

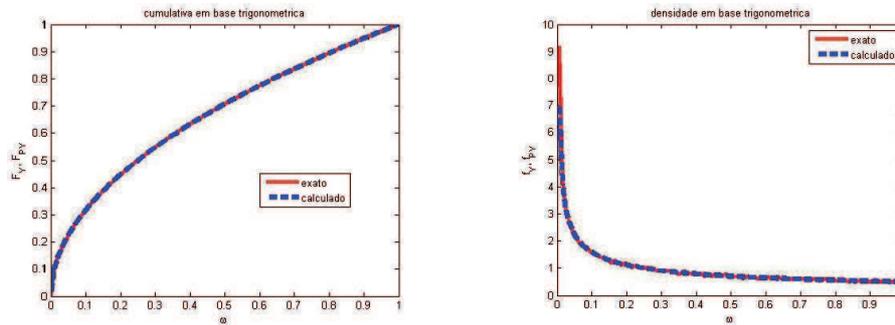


Figura 3.3: Aproximação em base trigonométrica

EXEMPLO 3.1.7. Notemos que a existência de uma dependência entre as variáveis  $X$  e  $Y$  é essencial. Com efeito, se as variáveis são independentes, então

$$B_i = (Y, \varphi_i(X)) = E(Y, \varphi_i(X)) = E(Y) E(\varphi_i(X)) ,$$

de forma que o sistema linear  $AU = B$  tem por solução

$$U = E(Y) \bar{U}$$

no qual

$$A\bar{U} = \bar{B} , \quad \bar{B}_i = E(\varphi_i(X)) .$$

Assim,

$$PY = E(Y) P(1) ,$$

no qual  $1$  é a função constante igual a  $1$ .

### 3.1.6 Aproximação através de uma família total

Uma primeira generalização da situação precedente consiste em considerar um subespaço  $S$  para o qual existe uma *família total*  $F$ , isto é, uma família enumerável  $F$  tal que as combinações lineares finitas de elementos de  $F$  sejam densas em  $S$  (Cf. [27]).

$$F = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} ; [F] = \left\{ Z \in L^2(\Omega, P) : Z = \sum_{i=1}^k a_i \varphi_{n_i} \right\} ;$$

$$S = \overline{[F]} .$$

Assim:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists U_\varepsilon \in [F] \text{ tal que } \|Y - U_\varepsilon\| \leq \varepsilon .$$

#### Caso de uma família crescente de subespaços

Um primeiro caso particular interessante é aquele no qual  $[F]$  é parametrado por uma dimensão, isto é,  $[F]$  é a reunião de subespaços crescentes de dimensão finita :

$$[F] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [F_n] ; \dim([F_k]) = d_k < \infty ; d_{k+1} \geq d_k, \forall k \geq 0 ;$$

$$[F_k] \subset [F_{k+1}] .$$

Neste caso, podemos definir  $S_k = [F_k] = \overline{[F_k]}$  e temos

$$S = \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} S_k} ; \dim(S_k) = d_k < \infty ; d_{k+1} \geq d_k, \forall k \geq 0 ;$$

$$S_k \subset S_{k+1} .$$

Para todo  $Z$ , denotamos  $P_k Z$  a projeção de  $Z$  em  $S_k$  e  $c_k(Z) = \|Z - P_k Z\|$ . Temos então

$$\|Z - PZ\| \leq c_{k+1}(Z) \leq c_k(Z), \forall k \in \mathbb{N},$$

de forma que a seqüência  $\{c_k(Z)\}_{k \in \mathbb{N}}$  é decrescente e limitada inferiormente. Assim,

$$c_k(Z) \longrightarrow c(Z) \text{ para } k \longrightarrow +\infty .$$

Quando  $Z \in S$ , temos

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists Z_\varepsilon \in [F] \text{ tal que } \|Z - Z_\varepsilon\| \leq \varepsilon .$$

Dado que  $[F] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [F_n]$ , temos  $Z_\varepsilon \in S_k$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Logo

$$c_k(Z) = \|Z - P_k(Z)\| \leq \|Z - Z_\varepsilon\| \leq \varepsilon .$$

Por conseguinte,

$$c_n(Z) \leq \varepsilon \text{ para todo } n \geq k$$

e  $c(Z) \leq \varepsilon$ . Como  $\varepsilon$  é arbitrário, resulta que  $c(Z) = 0$ . Por conseguinte,

$$\forall Z \in S : P_k(Z) \longrightarrow Z \text{ quando } k \longrightarrow +\infty .$$

Como  $Y - PY$  é ortogonal a  $S$  e  $S_k \subset S$ , temos  $Y - PY \perp S_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , de forma que

$$\forall k \in \mathbb{N} : P_k(Y - PY) = 0 .$$

Assim, a linearidade da projeção em subespaços de dimensão finita mostra que  $P_k Y = P_k(PY)$ . Dado que  $PY \in S$ , temos

$$P_k Y = P_k(PY) \longrightarrow PY \text{ quando } k \longrightarrow +\infty .$$

Logo,

$$PY = \lim P_k Y \quad \text{e} \quad \|Y - PY\| = \lim \|Y - P_k Y\| .$$

Assim,  $P_k Y$  fornece uma aproximação de  $PY$ . Na prática, não se busca ter  $S_k \subset S_{k+1}$ , mas

$$\forall k : S_i \subset \bigcup_{n=k+1}^{+\infty} S_n \text{ para } i \leq k ,$$

o que é verificado quando  $\forall k : \exists n > 0$  tal que  $S_k \subset S_{k+n}$ .

$P_k Y$  pode ser calculado utilizando a estratégia apresentada para os espaços de dimensão finita: se

$$F_k = \{\varphi_1(X), \dots, \varphi_{d_k}(X)\}$$

é uma base de  $S_k$ , então

$$P_k Y = \sum_{j=1}^{d_k} u_{j,k} \varphi_j(X) \in S_k$$

e  $U_k = (u_{1,k}, \dots, u_{d_k,k})^t$  é a solução do sistema linear

$$A_k U_k = B_k , \quad (A_k)_{ij} = (\varphi_j(X), \varphi_i(X)) , \quad (B_k)_i = (Y, \varphi_i(X)) .$$

### Caso de uma família ortogonal

Um segundo caso particular interessante é aquele em que a família  $F$  é *ortogonal*, isto é,

$$(\varphi_m(X), \varphi_n(X)) = 0, \text{ se } m \neq n .$$

Neste caso, definimos

$$F_k = \{\varphi_0(X), \varphi_1(X), \dots, \varphi_n(X)\}$$

e  $[F]$  é a reunião de subespaços crescentes de dimensão finita :

$$[F] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [F_n] ; \dim([F_k]) = k + 1 < \infty ; d_{k+1} \geq d_k, \forall k \geq 0 ;$$

$$[F_k] \subset [F_{k+1}] .$$

Além disto,

$$(A_k)_{ij} = (\varphi_j(X), \varphi_i(X)) = 0, \text{ se } i \neq j ,$$

de modo que

$$P_k Y = \sum_{j=0}^k u_j \varphi_j(X) \in S_k ,$$

no qual

$$u_i = B_i/A_{ii} = (Y, \varphi_i(X)) / (\varphi_i(X), \varphi_i(X)), \quad 0 \leq i \leq k .$$

Neste tipo de aproximação utilizam-se habitualmente famílias ortogonais clássicas associadas às funções de quadrado integrável. Por exemplo, é possível utilizar uma série de Fourier clássica associada a uma *base trigonométrica* ou *polinômios ortogonais*. Notemos que a eventual ortogonalidade da base esta associada à distribuição de  $X$ : se a densidade de probabilidade de  $X$  é  $f_X$  e sua imagem (isto é, o conjunto dos valores possíveis de  $X$ ) é  $D$ , temos

$$(\varphi_i, \varphi_j) = E(\varphi_i(X) \varphi_j(X)) = \int_D \varphi_i(x) \varphi_j(x) f_X(x) dx,$$

de forma que  $f_X$  é o *peso associado à família*. Em geral,  $f_X = Aw(x)$ , no qual  $A$  é uma constante de normalização e  $w$  é o peso usual associado à família ortogonal. Temos, por exemplo,

família	$D$	$w(x)$
Tchebichev 1a. espécie ( $T_n$ )	$(-1, 1)$	$1/\sqrt{1-x^2}$
Tchebichev 2nda espécie ( $U_n$ )	$(-1, 1)$	$\sqrt{1-x^2}$
Legendre ( $P_n$ )	$(-1, 1)$	1
Laguerre ( $L_n$ )	$(0, +\infty)$	$e^{-x}$
Hermite probabilista ( $H_n$ )	$(-\infty, +\infty)$	$e^{-x^2/2}$
Trigonométrica ( $1, \sin(n\pi x), \cos(n\pi x)$ )	$(-1, +1)$	1

Assim, a priori, a distribuição de  $X$  deve ser compatível com o peso. Por exemplo, a utilização de  $H_n$  supõe uma densidade gaussiana. Na prática, esta limitação pode ser ultrapassada: utilizamos *séries truncadas*, o que corresponde a aproximações em subespaços de de dimensão finita. Em tal situação, a família é simplesmente utilizada para gerar uma base do subespaço e a propriedade de ortogonalidade não é necessária. Como no caso precedente, também nesta situação temos

$$PY = \lim P_k Y \quad \text{e} \quad \|Y - PY\| = \lim \|Y - P_k Y\| .$$

### Caso de uma base hilbertiana

Um terceiro caso particular interessante é aquele no qual  $S$  possui uma base hilbertiana  $F$ , isto é, uma família enumerável e ortonormal  $F$

$$F = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} ; (\varphi_m, \varphi_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } m = n , \\ 0, & \text{se } m \neq n . \end{cases}$$

tal que todo elemento de  $S$  possa ser representado de maneira única por uma série (Cf. [27]):

$$S = \left\{ s \in L^2(\Omega) : s = \sum_{i=0}^{+\infty} s_i \varphi_i(X) ; s_i \in \mathbb{R}^q, \forall i \in \mathbb{N} \right\} .$$

Neste caso,

$$PY = \sum_{j=0}^{+\infty} u_j \varphi_j(X) \in S$$

e

$$\left( \sum_{j=0}^{+\infty} u_j \varphi_j(X), \varphi_i(X) \right) = (Y, \varphi_i(X)), \quad \forall i \in \mathbb{N} .$$

Como a família é ortornormada, temos

$$u_i = (Y, \varphi_i(X)), \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Notemos que toda família enumerável  $G = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$S = \left\{ s \in L^2(\Omega) : s = \sum_{i=0}^{+\infty} s_i \psi_i(X); s_i \in \mathbb{R}^q, \forall i \in \mathbb{N} \right\},$$

(isto é, tal que todo elemento de  $S$  possa ser representado de maneira única por uma série) pode ser transformada em base hilbertiana (isto é, pode ser ortonormal) através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt:

$$\phi_0 = \psi_0; \quad \varphi_0 = \phi_0 / \|\phi_0\|;$$

$$n > 0: \phi_n = \psi_n - \sum_{i=0}^{n-1} (\psi_n, \varphi_i) \varphi_i; \quad \varphi_n = \phi_n / \|\phi_n\|.$$

Em particular, as famílias ortogonais precedentes podem ser transformadas em famílias ortonormais. No caso de uma base hilbertiana também temos

$$PY = \lim P_k Y \quad \text{e} \quad \|Y - PY\| = \lim \|Y - P_k Y\|.$$

EXEMPLO 3.1.8. Consideremos  $\Omega = (0, 1)$  e  $P((a, b)) = b - a$  (isto é,  $P(dx) = \ell(dx)$  no qual  $\ell$  é a medida de Lebesgue). Sejam  $X(\omega) = \sqrt{\omega}$  e  $Y(\omega) = \omega^2$ . Consideremos a família dos polinômios de Legendre. Buscamos

$$P_k Y = \sum_{j=0}^k u_j \varphi_j(X) \quad (\varphi_j = \text{polinômio de Legendre de ordem } j).$$

Para  $k = 6$ , temos

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{64} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{96} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{15} & \frac{1}{6} & \frac{13}{192} & 0 & -\frac{1}{80} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{35} & \frac{8}{63} & \frac{3}{64} & 0 \\ -\frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{192} & \frac{1}{16} & \frac{9}{64} & \frac{10}{99} & \frac{31}{768} \\ 0 & -\frac{1}{96} & 0 & \frac{1}{63} & \frac{10}{64} & \frac{15}{128} & \frac{143}{768} \\ \frac{1}{64} & 0 & -\frac{1}{80} & 0 & \frac{31}{768} & \frac{12}{143} & \frac{25}{256} \end{pmatrix},$$

$$B_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{33} \\ \frac{5}{7} \\ \frac{24}{8} \\ \frac{63}{1} \\ \frac{16}{16} \\ \frac{693}{1} \\ \frac{1}{192} \end{pmatrix},$$

e a solução é

$$U_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ \frac{8}{35} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que corresponde a

$$P_k Y = \frac{1}{5} + \frac{2}{7}(-1 + 3X^2) + \frac{1}{35}(3 - 30X^2 + 35X^4),$$

isto é,

$$P_k Y = X^4,$$

que é o resultado exato. Também podemos utilizar, por exemplo, polinômios de Laguerre: neste caso,

$$P_k Y = \sum_{j=0}^k u_j \varphi_j(X) \quad (\varphi_j = \text{polinômio de Laguerre de ordem } j).$$

Para  $k = 6$ , temos

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & -\frac{19}{60} & -\frac{151}{360} & -\frac{1091}{2520} & -\frac{7841}{20160} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{20} & -\frac{36}{173} & -\frac{2520}{859} & -\frac{3360}{6067} & -\frac{181440}{14449} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{20} & \frac{60}{173} & \frac{1260}{1079} & \frac{6720}{8359} & \frac{60480}{26891} & \frac{226800}{17929} \\ -\frac{19}{60} & -\frac{36}{173} & \frac{1260}{859} & \frac{5040}{8339} & \frac{36288}{47611} & \frac{129600}{821141} & \frac{110880}{907189} \\ -\frac{151}{360} & -\frac{2520}{341} & -\frac{6720}{6067} & \frac{36288}{26891} & \frac{181440}{821141} & \frac{3326400}{4845121} & \frac{4435200}{574273} \\ -\frac{360}{1091} & -\frac{3360}{20117} & -\frac{60480}{14449} & \frac{129600}{17929} & \frac{3326400}{907189} & \frac{19958400}{574273} & \frac{2745600}{97926401} \\ -\frac{7841}{20160} & -\frac{181440}{181440} & \frac{226800}{226800} & \frac{110880}{110880} & \frac{4435200}{4435200} & \frac{2745600}{2745600} & \frac{518918400}{518918400} \end{pmatrix},$$

$$B_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{21} \\ -\frac{19}{281} \\ -\frac{168}{1512} \\ -\frac{1507}{14591} \\ -\frac{7560}{83160} \\ -\frac{43427}{332640} \end{pmatrix},$$

e a solução é

$$U_k = \begin{pmatrix} 24 \\ -96 \\ 144 \\ -96 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que corresponde a

$$P_k Y = 48 - 96(1 - X) - 96X + 72X^2 - 16X^3 + X^4 + \\ 72(2 - 4X + X^2) - 16(6 - 18X + 9X^2 - X^3),$$

isto é,

$$P_k Y = X^4,$$

que também é o resultado exato. Quando utilizamos polinômios de Hermite,

$$P_k Y = \sum_{j=0}^k u_j \varphi_j(X) \quad (\varphi_j = \text{polinômio de Hermite de ordem } j).$$

e

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{20}{3} & \frac{176}{7} & \frac{96}{10720} \\ \frac{4}{3} & 2 & \frac{8}{15} & -\frac{20}{3} & -\frac{464}{3} & \frac{88}{300} & \frac{10720}{496} \\ 0 & \frac{8}{15} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{35} & -\frac{32}{3} & -\frac{300}{624} & \frac{496}{5} \\ -\frac{24}{5} & -\frac{20}{3} & -\frac{16}{3} & 24 & \frac{11552}{3} & -\frac{624}{5} & -\frac{40000}{77} \\ -\frac{20}{3} & -\frac{464}{3} & -\frac{32}{3} & \frac{11552}{3} & \frac{315}{656} & -\frac{53056}{5} & -\frac{22016}{77} \\ \frac{176}{7} & \frac{88}{3} & -\frac{3}{800} & \frac{315}{624} & \frac{5}{53056} & \frac{693}{2528} & \frac{5181056}{15} \\ 96 & \frac{10720}{63} & \frac{496}{5} & -\frac{40000}{77} & -\frac{693}{22016} & \frac{5181056}{3003} & \frac{121920}{7} \end{pmatrix},$$

$$B_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{21} \\ -\frac{19}{281} \\ -\frac{168}{1512} \\ -\frac{1507}{14591} \\ -\frac{7560}{83160} \\ -\frac{43427}{332640} \end{pmatrix},$$

e a solução é

$$U_k = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{16} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que corresponde a

$$P_k Y = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}(-2 + 4X^2) + \frac{1}{16}(12 - 48X^2 + 16X^4),$$

isto é,

$$P_k Y = X^4,$$

que também é o resultado exato. Para os polinômios de Tchebichev de primeira espécie, temos

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{21} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{6} & -\frac{26}{105} & -\frac{1}{6} & -\frac{22}{315} \\ 0 & \frac{2}{15} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{9}{30} & -\frac{1}{385} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{6}{26} & \frac{2}{7} & \frac{14}{45} & \frac{14}{45} & -\frac{74}{30} & -\frac{32}{385} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{105}{1} & 0 & \frac{14}{45} & \frac{14}{45} & \frac{74}{231} & 0 \\ -\frac{3}{21} & -\frac{1}{1} & -\frac{2}{9} & -\frac{30}{82} & \frac{74}{231} & \frac{1}{38} & \frac{38}{117} \\ 0 & -\frac{6}{315} & -\frac{9}{5} & -\frac{30}{385} & 0 & \frac{2}{117} & \frac{117}{35} \end{pmatrix},$$

$$B_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{5}{63} \\ -\frac{1}{15} \\ -\frac{74}{693} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

e a solução é

$$U_k = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{16} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que corresponde a

$$P_k Y = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}(-1 + 2X^2) + \frac{1}{8}(1 - 8X^2 + 8X^4) ,$$

isto é, mais uma vez

$$P_k Y = X^4 .$$

Para os polinômios de Tchebichev de segunda espécie, temos

$$A_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 1 & \frac{8}{15} & \frac{1}{9} & \frac{12}{35} & \frac{1}{188} \\ \frac{4}{3} & 2 & \frac{28}{15} & \frac{8}{45} & \frac{92}{105} & \frac{2}{7} & \frac{315}{188} \\ 1 & \frac{28}{15} & \frac{7}{5} & \frac{232}{105} & \frac{3}{5} & \frac{356}{28} & \frac{15}{4616} \\ \frac{8}{15} & \frac{8}{45} & \frac{232}{105} & \frac{8}{776} & \frac{776}{45} & \frac{15}{9236} & \frac{3465}{31} \\ \frac{1}{9} & \frac{92}{105} & \frac{3}{5} & \frac{776}{45} & \frac{315}{15} & \frac{3465}{46} & \frac{127628}{45045} \\ \frac{12}{35} & \frac{2}{7} & \frac{356}{28} & \frac{315}{15} & \frac{9236}{45} & \frac{15}{31} & \frac{45045}{337} \\ \frac{1}{188} & \frac{315}{188} & \frac{15}{15} & \frac{4616}{3465} & \frac{15}{31} & \frac{127628}{45045} & \frac{105}{105} \end{pmatrix} ,$$

$$B_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{4} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{40}{63} \\ \frac{8}{15} \\ \frac{292}{693} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} ,$$

e a solução é

$$U_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \\ \frac{3}{16} \\ 0 \\ \frac{1}{16} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

o que corresponde a

$$P_k Y = \frac{1}{8} + \frac{3}{16}(-1 + 4X^2) + \frac{1}{16}(1 - 12X^2 + 16X^4) ,$$

isto é, ainda mais uma vez o resultado exato

$$P_k Y = X^4 .$$

EXEMPLO 3.1.9. *As famílias de elementos finitos são populares e correspondem à subespaços de dimensão finita crescentes. Por exemplo, consideremos  $k > 0$ ,  $h = 1/k$ ,  $x_i = ih$ ,  $0 \leq i \leq k$  e a família de elementos finitos  $P_1$*

$$\varphi_j(s) = \begin{cases} 1 - \frac{|s-x_i|}{h}, & \text{se } |s-x_i| \leq h \\ 0, & \text{nos demais casos} \end{cases} .$$

*Consideremos ainda  $\Omega = (0, 1)$ ,  $P((a, b)) = b - a$  (isto é,  $P(dx) = \ell(dx)$  no qual  $\ell$  é a medida de Lebesgue),  $X(\omega) = \sqrt{\omega}$  e  $Y(\omega) = \omega^2$ . Buscamos*

$$P_k Y = \sum_{j=0}^k u_j \varphi_j(X) .$$

*Por exemplo, quando  $k = 10$ , temos*

$$A_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{600} & \frac{1}{600} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{600} & \frac{1}{75} & \frac{1}{200} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{200} & \frac{2}{75} & \frac{1}{120} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{120} & \frac{1}{25} & \frac{7}{600} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{600} & \frac{3}{200} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{200} & \frac{11}{15} & \frac{600}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{600} & \frac{2}{600} & \frac{13}{600} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{600} & \frac{7}{600} & \frac{1}{40} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{600} & \frac{40}{75} & \frac{17}{600} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{40} & \frac{3}{17} & \frac{19}{600} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{17}{600} & \frac{25}{19} & \frac{600}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{600} & \frac{13}{200} \end{pmatrix}$$

$$B_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{21000000} \\ \frac{500000}{23} \\ \frac{250000}{289} \\ \frac{500000}{283} \\ \frac{125000}{667} \\ \frac{100000}{4069} \\ \frac{250000}{17381} \\ \frac{500000}{4203} \\ \frac{82500}{60267} \\ \frac{500000}{594323} \\ \frac{1}{7000000} \end{pmatrix}$$

*O resultado obtido para  $k = 50$  é dado na figura abaixo.*

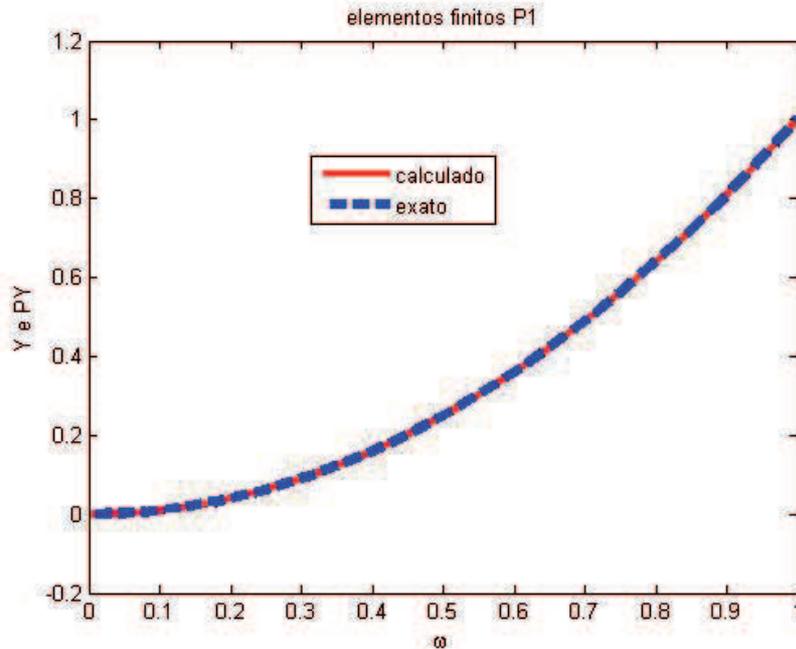


Figura 3.4: Aproximação por elementos finitos

### 3.2 Aproximações baseadas em propriedades estatísticas (ajuste de momentos)

As aproximações precedentes envolvem o cálculo de expressões dependentes da distribuição conjunta do par  $(X, Y)$ . Por exemplo, a avaliação de  $f(y | X = x)$ , de

$$(X, Y) = E(XY) = \int xy f(x, y) dx dy$$

ou, de forma mais geral, de

$$(Y, \varphi_i(X)) = E(Y \varphi_i(X)) = \int y \varphi_i(x) f(x, y) dx dy ,$$

no qual  $f$  é a densidade de probabilidade conjunta do par  $(X, Y)$ .

Quando esta distribuição não é conhecida a priori, esta distribuição deve ser avaliada a partir de amostras do par. Esta etapa pode envolver dificuldades

práticas, pois, por um lado, é necessário gerar amostras (o que introduz um custo) e, por outro lado, estimar as quantidades acima (o que introduz um erro). Na realidade, a situação prática mais usual é aquela na qual a distribuição não é conhecida e dispomos somente de realizações do par, isto é, de uma amostra.

Estas observações sugerem que, pelo menos em certos casos, talvez seja interessante *não estimar quantidades dependentes da distribuição conjunta e utilizar a amostra gerada diretamente para calcular propriedades estatísticas* ligadas à variável  $Y$ . Por exemplo, podemos determinar um elemento  $PY \in S$  tal que certas estatísticas de  $Y$  coincidam com as estatísticas correspondentes de  $PY$ .

Por exemplo, podemos impor a coincidência de certos momentos:  $M_i(Y) = E(Y^i) = E((PY)^i) = M_i(PY)$  para alguns valores de  $i$  (por exemplo,  $1 \leq i \leq n$ ). As aproximações deste tipo estão relacionadas com o *teorema de Lévy* (Cf. 1.10.3 e [23]) e a noção de *convergência em lei* (Cf. 1.10.5): lembremos que a função característica de  $Y$  é (Cf. 1.8)

$$\varphi(t) = E(\exp(itY))$$

e que uma seqüência  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $Y$  em lei se e somente se  $\varphi_n(t) = E(\exp(itY_n))$  converge pontualmente para  $\varphi(t)$  (isto é,  $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$  q.t.p.). A função característica está intimamente relacionada com os momentos. Como já vimos (Cf. 1.8):

- Se  $M_p(Y) < \infty$  então  $\varphi^{(p)}$  (derivada de ordem  $p$  de  $\varphi$ ) satisfaz  $\varphi^{(p)}(t) = i^p E(Y^p e^{itX})$ . Em particular,  $\varphi^{(p)}(0) = i^p M_p(Y)$ ;
- Se  $M_p(Y) < \infty, \forall p \in \mathbb{N}$  e a série  $S(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(it)^n}{n!} M_n(Y)$  tem um raio de convergência não nulo então  $\varphi(t) = S(t)$ .

Estas duas propriedades sugerem que, por um lado, é possível representar  $\varphi$  - e portanto a lei de  $Y$  - utilizando os momentos de  $Y$  e, por outro lado, aproximar a lei de  $Y$  utilizando seus primeiros momentos: uma variável cujos primeiros momentos coincidam com os de  $Y$  deve ter uma distribuição próxima daquela de  $Y$ . A primeira idéia (representação da lei de  $Y$  através da série  $S(t)$ ) está ligada ao *problema dos momentos* (Cf., por exemplo, [16]) e a segunda idéia tem sido explorada recentemente (Cf., por exemplo, [34], [35], [36]).

No plano numérico,

$$PY = \sum_{j=1}^k u_j \varphi_j(X) \in S ; \quad U = (u_1, \dots, u_k)^t ;$$

e determinar  $U$  tal que

$$M_p(Y) = M_p(PY) \text{ para } 1 \leq p \leq n.$$

Quando  $k = n$ , definimos assim um sistema de  $n$  equações não lineares cuja incógnita é  $U$ , de dimensão  $n$ . Este sistema pode ser resolvido por métodos usuais para sistemas não lineares. Entretanto, na prática, podemos considerar um número de momentos diferente do número de incógnitas ( $k \neq n$ ) e pode ser interessante colocar o problema em termos de otimização: consideremos a aplicação  $T : \mathbb{R}^k \rightarrow S$  dada por

$$v = (v_1, \dots, v_k)^t \rightarrow T(v) = \sum_{j=1}^k v_j \varphi_j(X) \in S$$

e a aplicação  $M : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$v = (v_1, \dots, v_k)^t \rightarrow M(v) = (M_1(T(v)), \dots, M_n(T(v)))^t \in \mathbb{R}^n .$$

Pondo

$$M_Y = (M_1(Y), \dots, M_n(Y))^t \in \mathbb{R}^n ,$$

podemos definir  $J : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$J(v) = \text{dist}(M(v), M_Y) ,$$

na qual  $\text{dist}$  é uma medida de distância: por exemplo, podemos considerar uma norma  $\|\bullet\|_{\mathbb{R}^n}$  em  $\mathbb{R}^n$  e definir  $\text{dist}(u, v) = \|u - v\|_{\mathbb{R}^n}$ . Neste caso, buscaremos

$$U = \arg \min_{\mathbb{R}^k} J .$$

A principal dificuldade neste problema reside na não convexidade de  $J$ : a qualidade da aproximação depende da qualidade da minimização - caso o ponto determinado numericamente esteja longe de um ótimo global de  $J$ , a aproximação não será de boa qualidade. Assim, é necessário utilizar métodos de otimização global adaptados. Também devemos notar que o teorema de Levy garante somente a convergência em lei, isto é, a aproximação correta das funções cumulativas e não das variáveis. Na prática, a aproximação das variáveis exige geralmente uma excelente qualidade na resolução do sistema de equações não lineares (ou do problema de otimização global), enquanto que a aproximação da função cumulativa pode ser obtida com menor esforço.

**EXEMPLO 3.2.1.** Consideremos ainda  $\Omega = (0, 1)$ ,  $P((a, b)) = b - a$  (isto é,  $P(dx) = \ell(dx)$  na qual  $\ell$  é a medida de Lebesgue),  $X(\omega) = \sqrt{\omega}$  e  $Y(\omega) = \omega^2$ . Quando desejamos aproximar  $Y$  por um polinômio de grau 5 de  $X$ , mas a lei

do par é desconhecida, devemos estimar os valores de  $B_i = E(YX^i)$  a partir da amostra, o que introduz um erro. Por exemplo, eis os resultados obtidos para diferentes valores de  $ns$ :

$ns$	$U$
10	(-1.4309, 28.4332, 169.5479, 421.2838, -459.5838, 183.1038)
100	(-0.1089, 2.1753, -13.0411, 32.5765, -34.8053, 14.3105)
1000	(-0.0105, 0.2108, -1.2644, 3.1608, -2.4766, 1.3905)

Os resultados são apresentados no gráfico abaixo: como vemos, a aproximação é de má qualidade e só começa a se aproximar dos valores exatos a partir de 100 pontos. A situação pode ser ainda mais complexa se a lei de  $X$  também

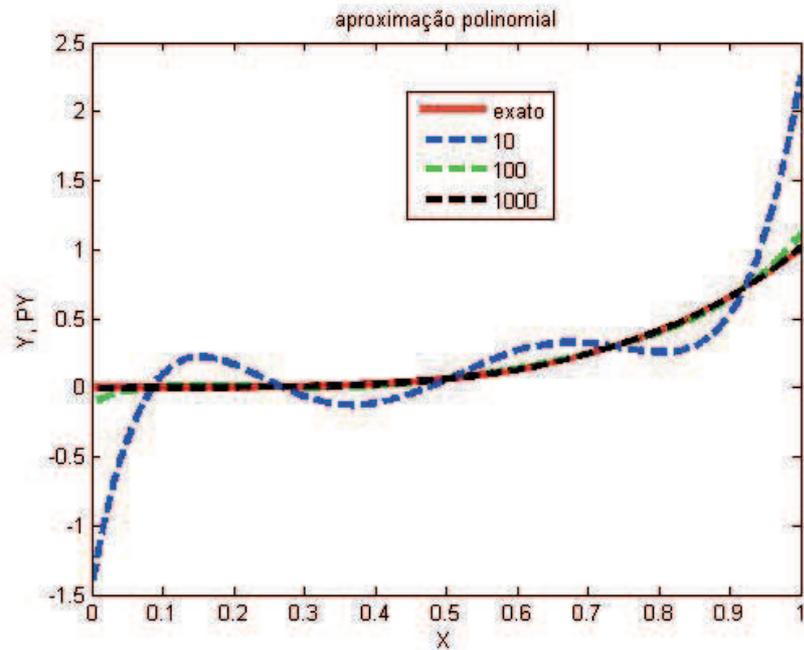


Figura 3.5: Aproximação polinomial com  $B$  estimada

for desconhecida. Neste caso, mesmo a matriz  $A$  deve ser estimada a partir da

amostra: em tal situação, os resultados são os seguintes

$ns$	$U$
10	(0.5230, -0.0748, -14.9273, 46.0987, -49.9426, 19.3635)
100	(0.4373, -0.0170, -15.6027, 51.8225, -59.8655, 24.2747)
1000	(0.4294, -0.0135, -15.4512, 51.4904, -59.6683, 24.2615)

Neste caso, os resultados são ruins mesmo para 1000 pontos: Uma alternativa

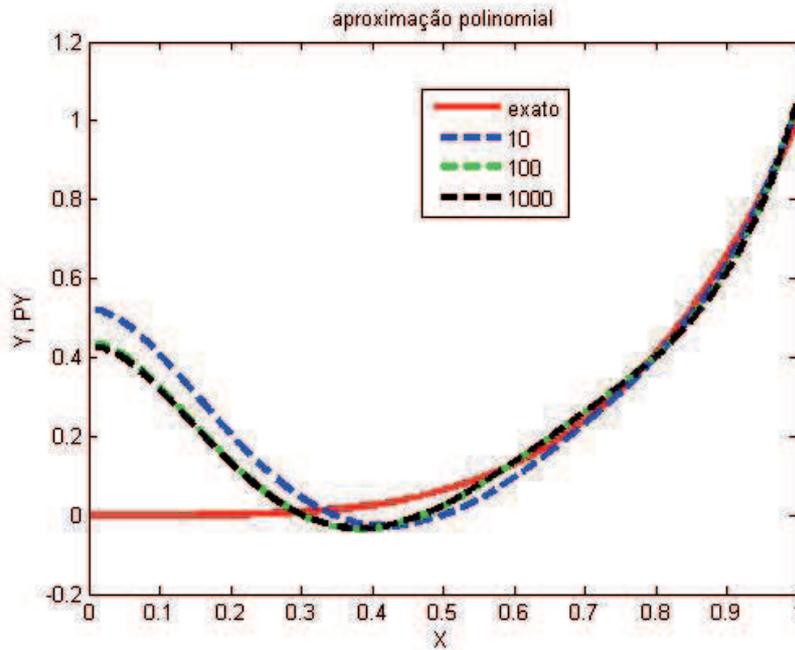


Figura 3.6: Aproximação polinomial com  $A$  e  $B$  estimadas

consiste em aproximar os  $n$  primeiros momentos de  $Y$ , como indicado. O resultado para  $n = 5$ , minimizando a soma dos quadrados dos erros relativos (análogo a uma distância do  $\chi^2$ ), é mostrado na figura abaixo. A distância final entre os momentos é de  $1E - 13$ . Observemos que mesmo a densidade de probabilidade é aproximada de forma relativamente correta.

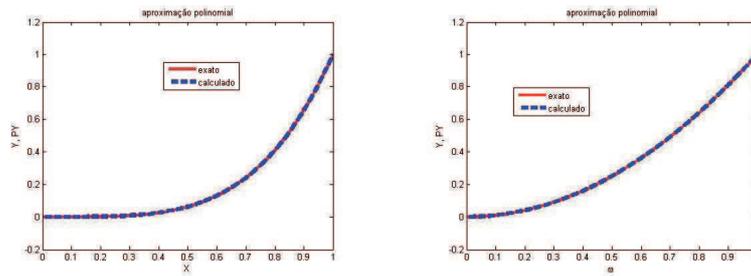


Figura 3.7: Aproximação utilizando os momentos

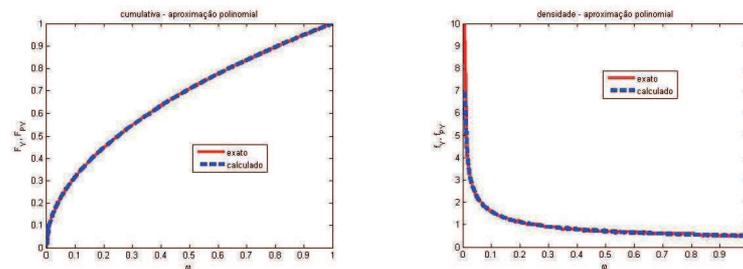


Figura 3.8: Aproximação utilizando os momentos

### 3.3 Aproximações baseadas em interpolações (colocação)

O fato de gerar uma amostra  $\{(X_i, Y_i) : i = 1, \dots, ns\}$  permite uma abordagem alternativa: pode-se tentar construir

$$PY(X) = \sum_{j=1}^k u_j \varphi_j(X) \in S$$

tal que

$$PY(X_i) = Y_i, \quad i = 1, \dots, ns.$$

Neste caso,  $U = (u_1, \dots, u_k)^t$  é a solução de um sistema linear

$$AU = B, \quad A_{ij} = \varphi_j(X_i), \quad B_i = Y_i \quad (1 \leq i \leq ns, 1 \leq j \leq k).$$

Este sistema conta com  $ns$  equações para  $k$  incógnitas. Quando  $ns > k$ , o número de equações é superior ao número de incógnitas: o sistema é sobre-determinado e devemos determinar soluções generalizadas, tais como, por exemplo,

soluções por mínimos quadrados - caso em que a solução pode ser interpretada como uma versão discreta da aproximação de tipo hilbertiano por uma base de dimensão finita.

Dentro do mesmo ponto de vista, outras técnicas de interpolação podem ser utilizadas, tais como aproximações de tipo splines ou, de forma geral, colocação por intervalos - caso que pode ser interpretado como uma versão discreta das aproximações hilbertianas baseadas em seqüências crescentes de subespaços de dimensão finita.

A variedade das técnicas possíveis impede toda síntese rápida, mas o leitor pode consultar a vasta literatura da área de interpolação para obter maiores informações.

EXEMPLO 3.3.1. Consideremos ainda  $\Omega = (0, 1)$ ,  $P((a, b)) = b - a$  (isto é,  $P(dx) = \ell(dx)$  no qual  $\ell$  é a medida de Lebesgue),  $X(\omega) = \sqrt{\omega}$  e  $Y(\omega) = \omega^2$ . Quando desejamos aproximar  $Y$  por um polinômio de grau 5 de  $X$ , uma idéia simples consiste em gerar uma amostra  $(X_i, Y_i)$  para valores convenientemente escolhidos de  $X$ . Podemos em seguida interpolar os valores de  $Y$ . Por exemplo, consideremos uma partição uniforme de  $\Omega$ :  $\omega_i = ih$ ,  $0 \leq i \leq np$ ,  $h = 1/np$  e os valores correspondentes de  $X_i = X(\omega^i)$  e de  $Y_i = Y(\omega^i)$ . Para um polinômio de grau  $d = 5$ , temos

$$U = (-0.0000, 0.0000, -0.0000, 0.0000, 1.0000, 0.0000)$$

Os resultados são mostrados nos gráficos abaixo.

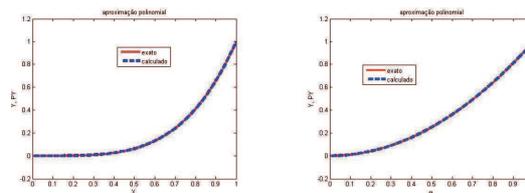


Figura 3.9: Aproximação por interpolação

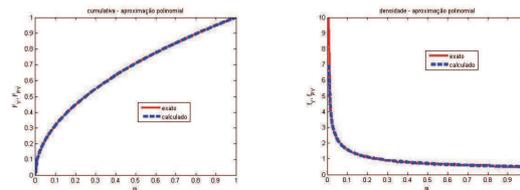


Figura 3.10: Aproximação por interpolação

## Capítulo 4

# Sistemas Lineares Incertos

Neste capítulo, consideramos problemas usuais associados a uma matriz quadrada de dimensões  $n \times n$ , denotada  $\mathbf{A} = (A_{ij}) \in \mathcal{M}(n, n)$ , tais como

- resolução de sistemas lineares

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B},$$

onde  $\mathbf{B} = (B_i) \in \mathcal{M}(n, 1)$  é um vetor dado de dimensão  $n \times 1$  e  $\mathbf{X} = (X_i) \in \mathcal{M}(n, 1)$  é o  $n \times 1$  vetor incógnita a ser determinado vector (situações onde  $\mathbf{A}$  não é quadrada, mas retangular, podem ser tratadas por outros métodos - tais como, por exemplo, mínimos quadrados);

- determinação de autovetores e autovalores:

$$\mathbf{X} \neq \mathbf{0} \text{ and } \mathbf{AX} = \lambda \mathbf{X},$$

onde  $\lambda$  é um número real desconhecido e  $\mathbf{X}$  é um vetor de dimensão  $n \times 1$ , também desconhecido.

Examinaremos aqui duas situações básicas e distintas:

- Na primeira situação, consideramos que  $\mathbf{A}$  ou  $\mathbf{B}$  contêm incertezas geradas por um vetor aleatório  $\mathbf{v}$  - i.e.,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{v})$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{v})$  - e desejamos determinar a distribuição de probabilidades, ou estatísticas, da solução  $\mathbf{X}$ ;
- na segunda,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são deterministas, mas não estamos interessados em determinar a solução completa  $\mathbf{X}$ : somente alguns componentes de  $\mathbf{X}$  nos interessam.

Lembremos que existem métodos clássicos para tratar a primeira situação, geralmente baseados no *condicionamento* de  $\mathbf{A}$ , ou sua *sensibilidade*, mas tais métodos não produzem informações sobre a distribuição de probabilidades de  $\mathbf{X}$ . Por exemplo, o condicionamento de  $\mathbf{A}$  é caracterizado por (Cf., por exemplo, [21])

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

e verifica (Cf., por exemplo, [21])

$$\frac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{B}\|} \text{ if } \mathbf{A}(\Delta\mathbf{X}) = \Delta\mathbf{B} .$$

Esta desigualdade permite estimar o erro  $\Delta\mathbf{X}$  em  $\mathbf{X}$  quando um erro  $\Delta\mathbf{B}$  afeta  $\mathbf{B}$ . Como observado,  $\text{cond}(\mathbf{A})$  não traz informações sobre a distribuição de  $\mathbf{X}$ . De maneira análoga, para variações infinitesimais de  $\mathbf{A}$  (Cf., por exemplo, [21]):

$$\|d\lambda\| \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \|d\mathbf{A}\| .$$

Da mesma forma que a desigualdade precedente, esta última equação não nos dá informações sobre a distribuição de  $\lambda$ .

## 4.1 Representação de soluções de sistemas lineares incertos

Nesta seção, consideramos o sistema linear

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B},$$

onde  $\mathbf{A} = (A_{ij}) \in \mathcal{M}(n, n)$  é uma matriz quadrada  $n \times n$ ,  $\mathbf{B} = (B_i) \in \mathcal{M}(n, 1)$  é um vetor de dimensão  $n \times 1$  e  $\mathbf{X} = (X_i) \in \mathcal{M}(n, 1)$  é o vetor de incógnitas. Supomos que existe um vetor aleatório  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{nr})$  tal que  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{v})$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{v})$ . Nosso objetivo é a determinação numérica da distribuição de probabilidades de  $\mathbf{X}$  em três situações:

- quando a distribuição de  $\mathbf{v}$  é conhecida e, além disto, as funções  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{v})$  e  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{v})$  são conhecidas
- quando somente uma amostra de  $\mathbf{v}$  é dada, mas as funções  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{v})$  e  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{v})$  são conhecidas
- quando somente uma amostra do par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  é dada

Em todas estas situações, o objetivo pode ser atingido através da construção de uma aproximação  $\mathbf{PX}$  de  $\mathbf{X}$  num subespaço de variáveis aleatórias convenientemente escolhidos. Por exemplo, se os componentes  $v_i$  tomam seus valores no intervalo  $\Omega = (a, b)$ , podemos utilizar o procedimento introduzido na seção 3: consideremos uma *família total*  $F = \{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  do espaço funcional  $L^2(\Omega)$  e uma aproximação  $\mathbf{PX}$  pertencente ao subespaço de dimensão finita

$$S = [\{\varphi_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, \varphi_{N_X}(\boldsymbol{\xi})\}]^n = \left\{ \sum_{k=1}^{N_X} \mathbf{D}_k \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) : \mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^n, 1 \leq k \leq N_X \right\}, \quad (4.1.1)$$

onde  $N_X \in \mathbb{N}^*$  e  $\boldsymbol{\xi}$  é uma variável aleatória conveniente. Consideremos  $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) = (\varphi_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, \varphi_{N_X}(\boldsymbol{\xi}))^t \in \mathcal{M}(N_X, 1)$ . Então :

$$\mathbf{Y} \in S \iff \mathbf{Y} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{D} = (D_{ij}) \in \mathcal{M}(n, N_X).$$

Assim,

$$\mathbf{PX} = \boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}), \quad (4.1.2)$$

onde  $\boldsymbol{\chi} = (\chi_{ij}) \in \mathcal{M}(n, N_X)$  são coeficientes desconhecidos, a determinar. Uma vez calculada  $\boldsymbol{\chi}$ , podemos construir

$$\mathbf{PX} = \sum_{k=1}^{N_X} \boldsymbol{\chi}_k \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) \left( \text{i.e., } (\mathbf{PX})_j = \sum_{k=1}^{N_X} \chi_{jk} \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) \right). \quad (4.1.3)$$

#### 4.1.1 Caso de distribuições conhecidas.

Nesta seção, consideramos a situação onde a distribuição de  $\mathbf{v}$  e as funções  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{v})$  e  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{v})$  são dadas.

Como observado precedentemente (Cf. capítulo 3), uma variável conveniente é  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{v}$ . Suponhamos que  $\mathbf{v}$  toma seus valores em  $\Omega \subset \mathbb{R}^{nr}$  e  $\mathbf{X}(\mathbf{v}) \in V = [L^2(\Omega)]^n$ . Neste caso, seja  $F = \{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  uma *família total* do espaço funcional  $L^2(\Omega)$ . Temos

$$(\mathbf{Y}, \mathbf{AX}) = E(\mathbf{Y}^t \mathbf{AX}) = E(\mathbf{Y}^t \mathbf{B}) = (\mathbf{Y}, \mathbf{B}), \forall \mathbf{Y} \in V$$

e  $\mathbf{X}$  é a solução da equação variacional

$$\mathbf{X} \in V \text{ e } E(\mathbf{Y}^t \mathbf{AX}) = E(\mathbf{Y}^t \mathbf{B}), \forall \mathbf{Y} \in V. \quad (4.1.4)$$

Esta equação é aproximada por

$$\mathbf{PX} \in S \text{ e } E(\mathbf{Y}^t \mathbf{A}(\mathbf{PX})) = E(\mathbf{Y}^t \mathbf{B}), \forall \mathbf{Y} \in S. \quad (4.1.5)$$

Dado que (da Eq. (4.1.2)),

$$\mathbf{A}(\mathbf{P}\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{v}),$$

temos

$$E\left(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{v})^t \mathbf{D}^t \mathbf{A}\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{v})\right) = E\left(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{v})^t \mathbf{D}^t \mathbf{B}\right), \forall \mathbf{D} \in \mathcal{M}(n, p). \quad (4.1.6)$$

Thus

$$E\left(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{v})^t \mathbf{D}^t \mathbf{A}\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{v})\right) = \sum_{i,j=1}^n \sum_{k,m=1}^{N_X} E\left(\varphi_m(\mathbf{v}) D_{im} A_{ij} \chi_{jk} \varphi_k(\mathbf{v})\right)$$

e

$$E\left(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{v})^t \mathbf{D}^t \mathbf{B}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^{N_X} E\left(\varphi_m(\mathbf{v}) D_{im} B_i\right).$$

Assim, tomando  $D_{im} = \delta_{ir} \delta_{ms}$  na Eq. (4.1.6), temos, para  $1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq N_X$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{N_X} E\left(\varphi_s(\mathbf{v}) A_{rj} \chi_{jk} \varphi_k(\mathbf{v})\right) = E\left(\varphi_s(\mathbf{v}) B_r\right).$$

Introduzindo a notação

$$\mathcal{A}_{rsjk} = E\left(\varphi_s(\mathbf{v}) A_{rj} \varphi_k(\mathbf{v})\right), \quad \mathcal{B}_{rs} = E\left(\varphi_s(\mathbf{v}) B_r\right), \quad (4.1.7)$$

temos

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{N_X} \mathcal{A}_{rsjk} \chi_{jk} = \mathcal{B}_{rs}, \quad 1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq p.$$

Estas equações formam um sistema linear: consideremos

$$ind(j, k) = (k - 1)n + j$$

e as matrizes  $M = (M_{\alpha\beta}) \in \mathcal{M}(nN_X, nN_X)$ ,  $U = (U_\beta) \in \mathcal{M}(nN_X, 1)$ ,  $N = (N_\alpha) \in \mathcal{M}(nN_X, 1)$  by

$$M_{\alpha\beta} = \mathcal{A}_{rsjk}, \quad N_\alpha = \mathcal{B}_{rs}, \quad U_\beta = \chi_{jk}, \quad \alpha = ind(r, s), \quad \beta = ind(j, k).$$

Então, temos

$$\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{N}. \quad (4.1.8)$$

A resolução deste sistema linear determina  $\mathbf{U}$  e, por conseguinte,  $\boldsymbol{\chi}$ .

EXEMPLO 4.1.1. .- Consideremos a situação na qual  $\mathbf{v} = (v_1)$  é uniformemente distribuída em  $(-1, 1)$ : sua densidade é

$$f(v) = \begin{cases} 1/2, & \text{if } -1 < v < 1 \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Consideremos

$$A(v) = \begin{pmatrix} 2v_1 + 3 & v_1 + 3 \\ v_1 + 1 & v_1 + 2 \end{pmatrix}, \quad B(v) = \begin{pmatrix} v_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Neste,

$$\det(A) = v_1^2 + 3v_1 + 3 \geq 1$$

and

$$X = \frac{1}{v_1^2 + 3v_1 + 3} \begin{pmatrix} v_1^2 + v_1 - 3 \\ -v_1^2 + v_1 + 3 \end{pmatrix}.$$

O método apresentado é aplicado com uma base polinomial

$$\varphi_k(v) = \left(\frac{v+1}{2}\right)^{k-1}.$$

Os resultados obtidos para  $p = 5$  se encontram na Figura 4.1. O erro quadrático médio relativo é de 0.5 %.

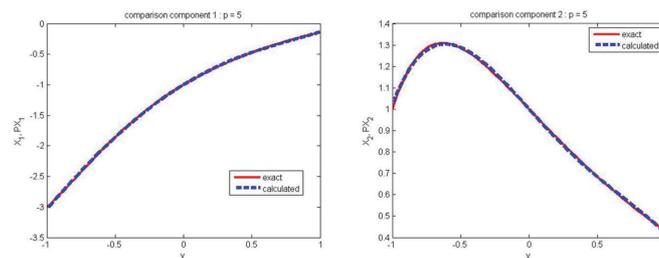


Figura 4.1: Resultados obtidos no Exemplo 4.1.1

EXEMPLO 4.1.2. .- Consideremos uma barra - i.e., uma estrutura para qual utilizamos um modelo de meio contínuo unidimensional com a geometria de um segmento e para o qual somente movimentos longitudinais são admissíveis. Uma barra de comprimento  $\ell > 0$  é descrita por uma variável  $s \in (0, \ell)$  cujo campo de deslocamentos é uma função  $x : (0, \ell) \rightarrow \mathbb{R}$ . O comportamento mecânico da barra é caracterizado por seu módulo de elasticidade  $E$ , sua densidade  $\rho$  e sua seção reta  $S$ . O equilíbrio da barra sob a ação da gravidade  $g$  e um carregamento

representado por uma força  $F$  aplicada a uma de suas extremidades é descrito pela equação

$$\frac{d}{ds} \left( ES \frac{dx}{ds} \right) + \rho Sg = 0 \quad \text{on } (0, \ell), \quad ES \frac{dx}{ds}(\ell) = F, \quad x(0) = 0 .$$

Para estruturas reais, todos esses parâmetros variam:  $E, S, \rho, F$  devem ser considerados como variáveis aleatórias tendo seus valores distribuídos sobre intervalos dados. Além disto, podem existir uma variabilidade interna (valores diferentes entre dois pontos da mesma estrutura) e variabilidade externa (valores diferentes para duas estruturas a priori idênticas). Por exemplo, as estruturas de madeira apresentam uma variabilidade interna para uma dada árvore e variabilidade externa para árvores diferentes.

Quando a resolução das equações da barra é efetuada através de elementos finitos, o intervalo  $(0, \ell)$  é discretizado em  $n$  subintervalos de comprimento  $h = \ell/n$  correspondendo aos nós  $s_i = ih, 0 \leq i \leq n$ . As incógnitas são os valores aproximados  $X_i \approx x(s_i)$ , para  $1 \leq i \leq n$ , os quais satisfazem o sistema linear  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ , onde a matriz de rigidez  $\mathbf{A}$  é construída através da montagem das matrizes de rigidez de cada elemento  $I_i$ , enquanto  $\mathbf{B}$  resulta da montagem das matrizes de massa e força elementares de cada elemento  $I_i$ .

Para analisar os efeitos da variabilidade externa, podemos considerar  $F$  como determinista e  $E, S, \rho$  como constantes para cada estrutura, mas variando de uma estrutura a outra. Neste caso, temos

$$\mathbf{A} = \frac{ES}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 0 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \frac{\rho Sgh}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \dots \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ F \end{pmatrix},$$

onde  $E, S$  e  $\rho$  são variáveis aleatórias. Tomando  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ,  $v_1 = ES$ ,  $v_2 = \rho S$ , esta situação corresponde ao caso estudado nesta seção. Por exemplo, suponhamos que cada  $v_i$  é uma variável aleatória independente, de lei uniforme sobre um intervalo  $(a_i, b_i)$ . Consideremos dois inteiros estritamente positivos  $n_1 > 0, n_2 > 0$  e as funções dadas por  $(0 \leq r \leq n_1, 0 \leq s \leq n_2)$

$$\varphi_k(\mathbf{v}) = \left( \frac{v_1 - a_1}{b_1 - a_1} \right)^r \left( \frac{v_2 - a_2}{b_2 - a_2} \right)^s, \quad k = sn_1 + r. \quad (4.1.9)$$

O procedimento introduzido nesta seção pode ser aplicado. Por exemplo, tomemos  $a_1 = 2.2 \text{ MN}$ ,  $b_1 = 2.7 \text{ MN}$ ,  $a_2 = 0.11 \text{ kN/m}$ ,  $b_2 = 0.14 \text{ kN/m}$ ,  $F = 1 \text{ kN}$ ,  $\ell = 5 \text{ m}$ . Utilizando  $n_1 = n_2 = 3$ ,  $n = 10$ , obtemos os resultados da Figura 4.2. O erro quadrático médio é inferior a 0.02% .

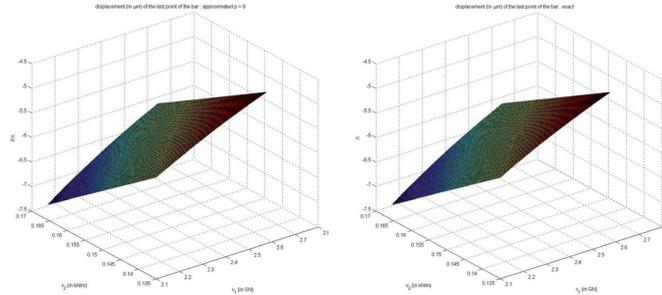


Figura 4.2: Resultados obtidos no Exemplo 4.1.2 (variáveis independentes)

Todavia, as variáveis  $E$  e  $\rho$  não são independentes. Na verdade, a análise de amostras de madeira frequentemente mostram uma correlação significativa entre elas, de modo que pode ser interessante utilizar uma representação de  $E$  como função de  $\rho$ . Quando uma amostra dos pares  $(u, \rho)$  pode ser disponibilizada, estes dados podem ser utilizados para construir uma função  $E = E(\rho)$  (Cf. capítulo 3). Por exemplo, suponhamos que  $E \approx (1840 + 15\rho) \times 10^6$  em unidades SI. Neste caso, a única variável aleatória a ser considerada é  $\mathbf{v} = (v_1)$ ,  $v_1 = \rho S$ . Suponhamos que esta variável segue uma lei uniforme sobre  $(a, b)$ ,  $a = 0.11 \text{ kN/m}$ ,  $b = 0.14 \text{ kN/m}$ ,  $F = 1 \text{ kN}$ ,  $\ell = 5 \text{ m}$ . Podemos aplicar o método exposto com uma base polinomial

$$\varphi_k(v) = \left( \frac{v+a}{b-a} \right)^{k-1} .$$

Os resultados obtidos para  $n = 10$ ,  $p = 5$  se encontram na Figura 4.3. O erro quadrático médio é inferior a  $1E - 5\%$ .

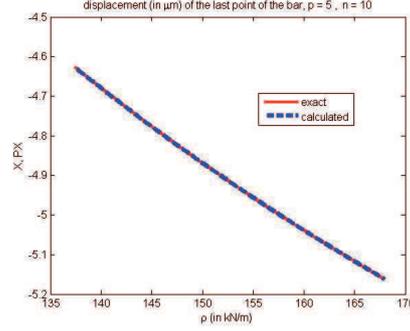


Figura 4.3: Resultados obtidos no Exemplo 4.1.2 ( $E$  como função de  $\rho$ )

A variabilidade interna pode ser analisada de mesma maneira.

#### 4.1.2 Caso de distribuições desconhecidas

Quando há variáveis cujas densidades não são conhecidas, as médias que aparecem nas equações definindo as matrizes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$  do sistema linear para a determinação dos coeficientes  $\chi$  da projeção  $\mathbf{P}\mathbf{X}$  não podem ser avaliados exatamente e necessitamos uma *amostra*: as médias aparecendo na Eq. (4.1.7) devem ser estimadas através de uma amostra para permitir a construção do sistema linear (4.1.8). Por exemplo, os valores desconhecidos podem ser estimados utilizando uma amostra  $((\mathbf{v}^1, \mathbf{A}^1, \mathbf{B}^1), \dots, (\mathbf{v}^{ns}, \mathbf{A}^{ns}, \mathbf{B}^{ns}))$  de  $ns$  valores da tripla  $(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ :

$$\mathcal{A}_{rsjk} \approx \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^{ns} \varphi_s(\mathbf{v}^i) A_{rj}^i \varphi_k(\mathbf{v}^i), \quad \mathcal{B}_{rs} \approx \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^{ns} \varphi_s(\mathbf{v}^i) B_r^i.$$

Caso as funções  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{v})$  e  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{v})$  sejam conhecidas de maneira explícita, todos os valores podem ser estimados a partir de uma amostra  $(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{ns})$  de  $ns$  valores de  $\mathbf{v}$ :

$$\mathcal{A}_{rsjk} \approx \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^{ns} \varphi_s(\mathbf{v}^i) A_{rj}(\mathbf{v}^i) \varphi_k(\mathbf{v}^i),$$

$$\mathcal{B}_{rs} \approx \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^{ns} \varphi_s(\mathbf{v}^i) B_r(\mathbf{v}^i).$$

Uma vez calculadas as estimações acima, o procedimento é o mesmo que na seção precedente: a resolução do sistema (4.1.8) determina  $\mathbf{U}$  e, por conseguinte,  $\mathbf{C}$ .

EXEMPLO 4.1.3. .- Consideremos novamente a situação estudada no exemplo 4.1.1: desta vez, supomos que a distribuição de  $\mathbf{v}$  é desconhecida, mas que uma amostra de  $ns$  valores de  $\mathbf{v}$  é disponível - para este exemplo, a amostra é gerada utilizando a função interna `rand` de `MATLAB`: a instrução  $\mathbf{v} = a + (b-a) * \text{rand}(ns, 1)$ ; gera um vetor de  $ns$  números reais de lei uniforme sobre  $(a, b)$ . Os resultados obtidos para  $p = 5, ns = 25$  se encontram na Figura 4.4. O erro quadrático médio relativo entre os dados e a aproximação é inferior a 0.5 % e a comparação com o resultado exato leva a um resultado análogo.

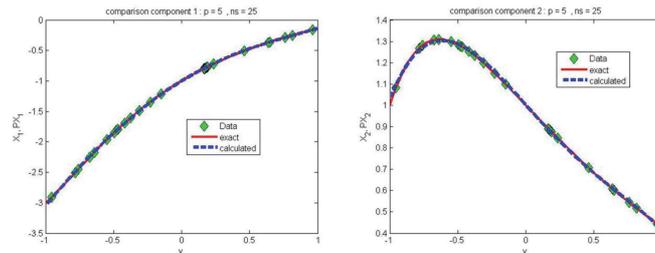


Figura 4.4: Resultados obtidos no Exemplo 4.1.3 (amostra de 25 pontos aleatórios)

A Figura 4.5 mostra os resultados obtidos para  $p = 5, ns = 100$ . O erro quadrático médio relativo entre os dados e a aproximação é inferior a 0.5 % e a comparação com o resultado exato leva a um resultado análogo.

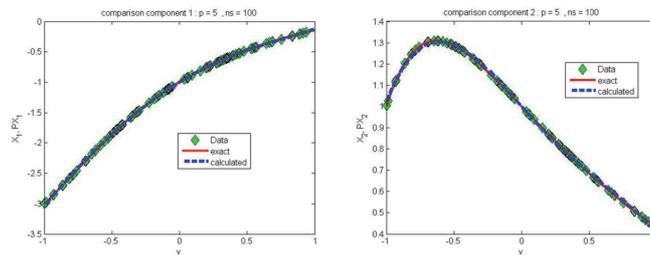


Figura 4.5: Resultados obtidos no Exemplo 4.1.3 (amostra de 100 pontos aleatórios)

Como observado previamente, é possível utilizar uma grade uniforme, análoga à fornecida por uma grade de pontos «de colocação» uniformemente distribuídos: por exemplo, quando consideramos  $ns = 11$  pontos «de colocação» equidistribuídos, obtemos os resultados da Figura 4.6. O erro quadrático médio relativo é

inferior a 0.6 % seja com relação aos dados seja com relação à solução exata.

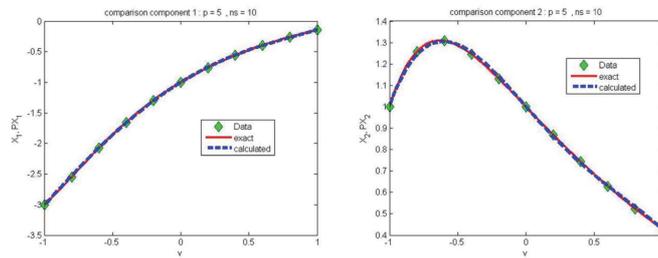


Figura 4.6: Resultados obtidos no Exemplo 4.1.3 (11 pontos equidistribuídos)

EXEMPLO 4.1.4. - Consideremos a situação do exemplo 4.1.2: de forma análoga à do exemplo 4.1.3, supomos que a distribuição de  $\mathbf{v}$  é desconhecida, mas que dispomos de  $ns$  realizações da variável  $\mathbf{v}$  - para este exemplo, geramos a amostra da mesma forma que no exemplo precedente. Os resultados obtidos para  $a_1 = 2.2$  MN,  $b_1 = 2.7$  MN,  $a_2 = 0.11$  kN/m,  $b_2 = 0.14$  kN/m,  $F = 1$  kN,  $\ell = 5$  m,  $n_1 = n_2 = 3$ ,  $n = 10$ ,  $ns = 100$  são exibidos na Figura 4.7. O erro quadrático médio relativo é inferior a 0.02% .

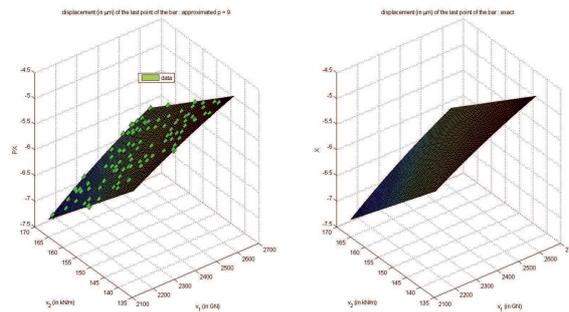


Figura 4.7: Resultados obtidos no Exemplo 4.1.4 (amostra de 100 pontos aleatório)

Quando utilizamos uma grade uniforme de 36 pontos, o erro quadrático médio relativo continua inferior a 0.02%. Os resultados se encontram na Figura 4.8.

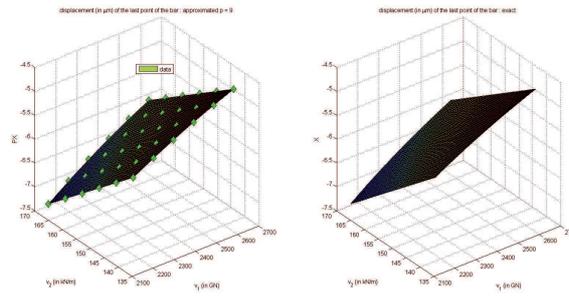


Figura 4.8: Resultados obtidos no Exemplo 4.1.4 (grade uniforme de 36 pontos)

A situação é análoga quando consideramos  $E$  como função de  $\rho$ . Com os mesmos parâmetros do exemplo 4.1.2, uma amostra de 11 pontos uniformemente repartidos de  $\rho$  leva aos resultados da Figura 4.9, com um erro quadrático médio relativo de  $1E - 5$  % na comparação com os dados e com a solução exata.

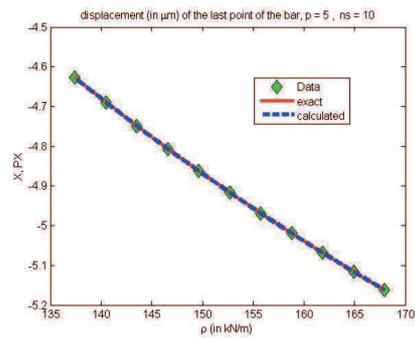


Figura 4.9: Resultados obtidos no Exemplo 4.1.4 (11 pontos equidistribuídos)

Como no caso precedente, a variabilidade interna pode ser estudada da mesma maneira.

## 4.2 Representação de autovalores e autovetores de matrizes incertas

Nesta seção, consideramos a determinação dos pares  $(\lambda_i, \mathbf{X}_i)$ , onde  $\lambda_i$  é um autovalor e  $\mathbf{X}_i$  é um autovetor da matriz quadrada  $\mathbf{A} = (A_{ij}) \in \mathcal{M}(n, n)$ .

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_i = \lambda_i\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i \neq \mathbf{0}.$$

Para aliviar a notação, não escreveremos mais o índice  $i$  e utilizaremos a notação  $\mathbf{X}$  em lugar de  $\mathbf{X}_i$ ,  $\lambda$  em lugar de  $\lambda_i$ : o leitor deve ter em mente que a construção apresentada trata de  $n$  autovalores e autovetores. Além disto, utilizaremos  $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y}^t \cdot \mathbf{y}}$  para um vetor  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

Supomos que a matriz  $\mathbf{A}$  depende de um vetor aleatório  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{nr})$  (i. e.,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{v})$ , onde  $\mathbf{v}$  é aleatório).

Autovalores e autovetores de matrizes aleatórias são estudados na literatura, através de procedimentos e enfoques variados. Por exemplo: análise dos autovalores e dos autovetores de matrizes aleatórias e de sua distribuição em diversos casos (Cf., por exemplo, [33, 19, 41]), construção de estimadores e obtenção de estatísticas (Cf., por exemplo, [11, 77, 78]), decomposições polinomiais para a determinação dos coeficientes de caos polinomiais associados a variáveis aleatórias (Cf., for instance, [58, 59, 60, 61]), análise de sistemas dinâmicos contínuos (Cf., por exemplo, [51, 50, 20]). No que segue, consideramos os métodos clássicos de representação, baseados nas técnicas de colocação, ajuste de momentos ou projeção, mas consideramos também a adaptação de métodos clássicos para a determinação numérica de autovalores e autovetores, tais como, por exemplo, Potências iteradas, Subespaços iterados, Iterações de Krylov. De forma coerente com a apresentação dada no capítulo 3, os autovalores e os autovetores estudados são considerados como funções desconhecidas das variáveis aleatórias consideradas – temos  $\lambda = \lambda(\mathbf{v})$  e  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{v})$  – e uma representação formal em termos de uma série destas mesmas variáveis é utilizada para aproximar estas funções e reduzir o problema à determinação dos coeficientes da série: De maneira análoga a das seções precedentes, consideramos também situações onde somente uma amostra é disponível.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que os autovalores e autovetores estudados são inteiramente reais, isto é, que suas partes complexas são nulas (os procedimentos são análogos no caso complexo, bastando substituir  $\mathbb{R}$  por  $\mathbb{C}$ ). Como indicado acima, consideramos uma aproximação  $\mathbf{P}\mathbf{X}$  correspondendo a uma série truncada da forma (Cf. Eqs. (4.1.1)-(4.1.3)):

$$\mathbf{P}\mathbf{X} \in S_X = [\{\varphi_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, \varphi_{N_X}(\boldsymbol{\xi})\}]^n = \left\{ \sum_{k=1}^{N_X} \mathbf{D}_k \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) : \mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^n, 1 \leq k \leq N_X \right\},$$

De forma análoga, consideramos  $P\lambda$  tal que

$$P\lambda \in S_\lambda = [\{\psi_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, \psi_q(\boldsymbol{\xi})\}] = \left\{ \sum_{k=1}^{N_\lambda} D_k \psi_k(\boldsymbol{\xi}) : D_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq N_\lambda \right\},$$

$$\mathbf{P}\mathbf{X} = \sum_{k=1}^{N_X} \chi_k \varphi_k(\boldsymbol{\xi}), P\lambda = \sum_{k=1}^{N_\lambda} \ell_k \psi_k(\boldsymbol{\xi}) \quad (4.2.10)$$

Tomando  $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) = (\varphi_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, \varphi_{N_X}(\boldsymbol{\xi}))^t \in \mathcal{M}(N_X, 1)$  e  $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}) = (\psi_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, \psi_{N_\lambda}(\boldsymbol{\xi}))^t \in \mathcal{M}(N_\lambda, 1)$ , temos

$$\mathbf{P}\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) \text{ and } P\lambda = \boldsymbol{\ell}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}), \quad (4.2.11)$$

onde  $\boldsymbol{\chi} = (\chi_{ij}) \in \mathcal{M}(n, N_X)$  and  $\boldsymbol{\ell} = (\ell_i) \in \mathcal{M}(1, N_\lambda)$  são as incógnitas a determinar.

Na prática, a mesma família e o mesmo grau de aproximação podem ser utilizados para os dois elementos  $\mathbf{X}$  e  $\lambda$ .

#### 4.2.1 Determinação da distribuição de um autovalor ou autovetor por colocação

A forma mais simples para determinar uma aproximação da distribuição de um dado autovalor (ou autovetor) consiste em utilizar uma amostra da variável estudada para interpolar uma projeção. Por exemplo, suponhamos que estamos interessados no autovalor dominante: se temos à nossa disposição uma amostra  $\mathbf{S} = (\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{ns})$  de  $ns$  realizações de  $\boldsymbol{\xi}$  (ou se é possível obter uma tal amostra), podemos utilizá-la para gerar uma amostra do autovalor dominante  $\bar{\lambda}$  e, então, determinar os valores de  $\boldsymbol{\ell}$  correspondendo à melhor aproximação da forma dada na Eq. (4.2.11) para os dados correspondentes à amostra  $(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_{ns})$ . Por exemplo, podemos considerar o sistema linear para determinar os coeficientes

$$\bar{\lambda}_i = P\lambda(\boldsymbol{\xi}_i) = \boldsymbol{\ell}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}_i) \quad (i = 1, \dots, ns).$$

Este sistema se escreve na forma

$$\mathbf{L}\boldsymbol{\ell} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad L_{ij} = \psi_j(\boldsymbol{\xi}_i)$$

e é geralmente sobredeterminado (mais equações do que incógnitas). No sentido dos mínimos quadrados, com um coeficiente de regularização de Tikhonov  $\varepsilon > 0$ , temos

$$(\mathbf{L}^t\mathbf{L} + \varepsilon Id)\boldsymbol{\ell} = \mathbf{L}^t\bar{\boldsymbol{\lambda}}.$$

EXEMPLO 4.2.1. Consideremos uma única variável aleatória  $v = u^2 \in \mathbb{R}$ ,  $u$  uniformemente distribuída em  $(0, 2)$  e a matriz aleatória

$$\mathbf{A}(v) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}v\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}v\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}v\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}v\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}v\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}v\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}v\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}v\right) \end{pmatrix}. \quad (4.2.12)$$

Os autovalores de  $\mathbf{A}$  são  $2-v$  e  $v$ . Assim

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} 2-v, & \text{se } 0 < v < 1; \\ v, & \text{se } 1 < v < 4. \end{cases} \quad ; \quad \Delta = \begin{cases} v, & \text{se } 0 < v < 1; \\ 2-v, & \text{se } 1 < v < 2. \end{cases} \quad (4.2.13)$$

Neste caso, a função cumulativa exata do valor próprio dominante é

$$F_{\bar{\lambda}}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \sqrt{\lambda} - \sqrt{2-\lambda} \right), & \text{se } 1 < \lambda < 2; \\ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda}, & \text{se } 2 < \lambda < 4. \end{cases} \quad (4.2.14)$$

Seja  $(v_1, \dots, v_{ns})$  uma amostra de  $ns$  realizações de  $v$  conduzindo aos valores próprios  $(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_{ns})_i$ . Podemos utilizar estes valores para determinar a solução do sistema linear

$$\lambda_i = P\lambda(v_i) = \ell\psi(v_i) \quad .$$

Este sistema é, em geral, sobredeterminado (mais equações do que incógnitas). Os resultados obtidos com uma amostra de  $ns = 21$  realizações são dados nas Figs. (4.10) (resultados correspondendo a um coeficiente de regularização de Tikhonov nulo) e (4.11) (resultados correspondendo a um coeficiente de regularização de Tikhonov igual a  $1E-3$ ). A figura do lado esquerdo compara a variável  $\lambda$  à projeção  $P\lambda$ , enquanto que a figura do lado direito compara a função cumulativa da projeção à função cumulativa exata. A aproximação utilizada é um polinômio de grau 8. Os resultados obtidos utilizando uma amostra  $v_i = u_i^2$  gerada por pontos  $(u_1, \dots, u_{ns})$  equidistribuídos é dada na Fig. (4.12).

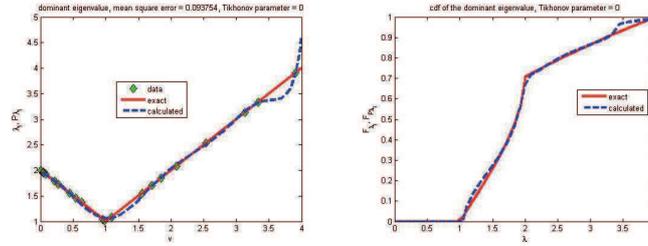


Figura 4.10: Resultados obtidos no Exemplo 4.2.1 (amostra aleatória de 21 pontos)

Se estivermos interessados nos autovetores, podemos considerar uma amostra de pares  $(\bar{\lambda}_i, \bar{\mathbf{X}}_i)$  tais que  $\|\bar{\mathbf{X}}_i\| = 1$  e  $\max\{\bar{\mathbf{X}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{X}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}\} > 0$ . Podemos então aplicar o procedimento apresentado, aproximando os autovetores pela expressão da Eq. (4.1.3). Um exemplo de resultado é dado na Fig. (4.13) - para obtê-los, utilizamos  $n_s = 51$  valores equidistribuídos de  $u$  e uma base trigonométrica com  $N_X = 23$ .

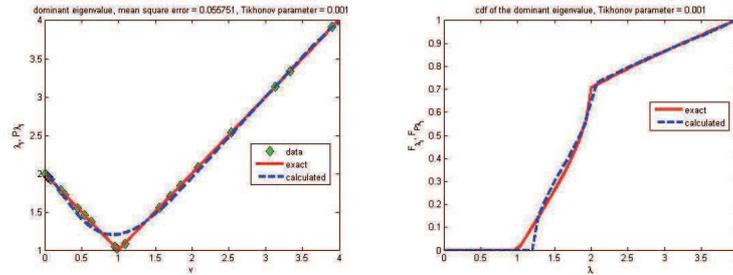


Figura 4.11: Resultados obtidos no Exemplo 4.2.1 (amostra de 21 pontos aleatórios)

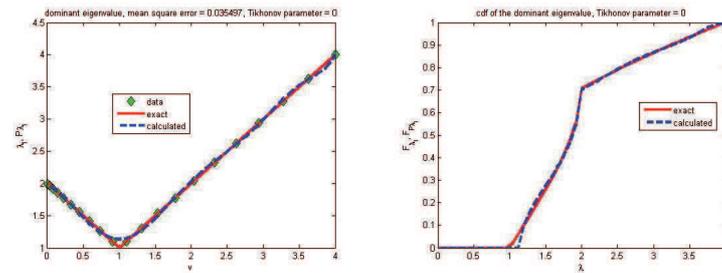


Figura 4.12: Resultados obtidos no Exemplo 4.2.1 (21 pontos equidistribuídos)

## 4.2.2 Determinação da distribuição de autovetores ou autovalores por ajuste de momentos

Uma variante do método precedente consiste em utilizar uma amostra  $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n_s})$  para construir uma representação utilizando o método do ajuste de momentos

(moment matching method): a amostra permite calcular os momentos empíricos

$$\mathbf{M}^e = (M_1^e, \dots, M_q^e), M_i^e = \frac{1}{n_s} \sum_{j=1}^{n_s} (\lambda_j^i)$$

e aproximados

$$\mathbf{M}^a(\ell) = (M_1^a, \dots, M_q^a), M_i^a = \frac{1}{n_s} \sum_{j=1}^{n_s} (\lambda(\mathbf{v}_j^i)).$$

Estes valores podem ser utilizados para ajustar os momentos: é possível seja resolver as equações não lineares  $\mathbf{M}^a(\ell) = \mathbf{M}^e$  seja minimisar uma função objetivo medindo uma pseudo-distância  $d(\mathbf{M}^a(\ell), \mathbf{M}^e)$ .

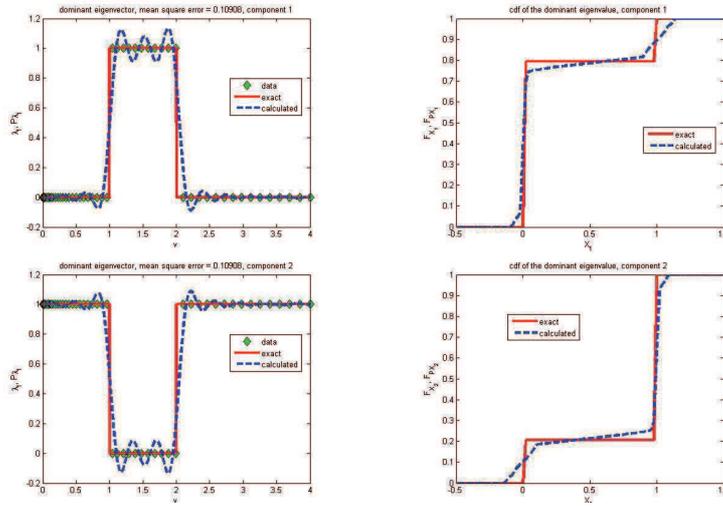


Figura 4.13: Resultados obtidos no Exemplo 4.2.1 (51 pontos equidistribuídos)

EXEMPLO 4.2.2. Consideremos a situação descrita no exemplo 4.2.1. Testemos quatro métodos de ajuste: minimização do erro relativo, minimização da soma dos erros relativos, minimização do erro absoluto, resolução numérica do sistema não linear (Cf. também seção 3.2). Os resultados correspondendo a uma amostra de  $n_s = 21$  pontos se encontram na Fig. 4.14: podemos observar que o autovalor não é bem aproximado, mas somente a função cumulativa - como observado na seção 3.2. Os resultados obtidos com uma amostra de  $n_s = 21$  valores equidistribuídos de  $u$  se encontram na Fig. 4.15. Enfim, os resultados obtidos com 51 valores

equidistribuídos de  $u$  se encontram na Fig. 4.16. Em todos os casos, os melhores resultados foram obtidos através da resolução do sistema não linear.

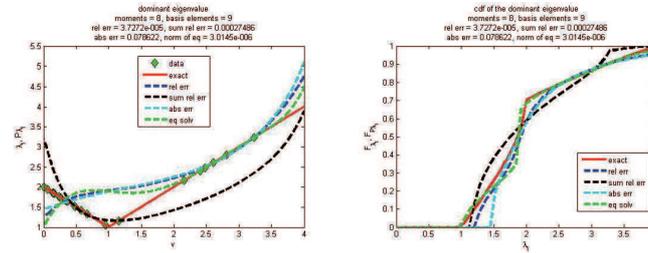


Figura 4.14: Resultados obtidos no Exemplo 4.2.2 (21 pontos aleatórios)

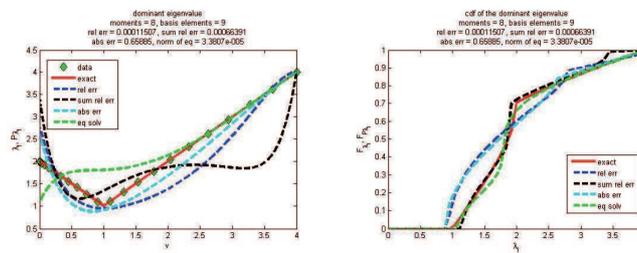


Figura 4.15: Resultados obtidos no Exemplo 4.2.2 (21 pontos equidistribuídos)

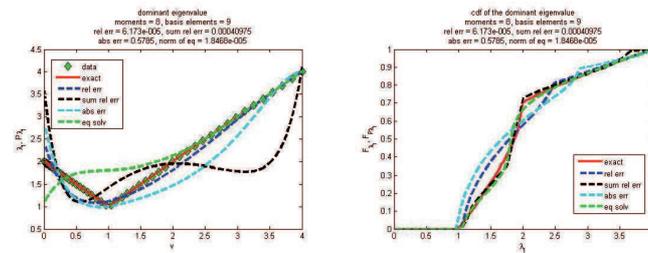


Figura 4.16: Resultados obtidos no Exemplo 4.2.2 (51 pontos equidistribuídos)

### 4.2.3 Representação dos autovalores extremos através de otimização

Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} / \mathbf{X}^t \cdot \mathbf{X} . \quad (4.2.15)$$

$F$  é o quociente de Rayleigh associado à matriz  $\mathbf{A}$ . Seu mínimo coincide com o menor valor próprio  $\underline{\lambda}$  de  $\mathbf{A}$  e é atingido quando  $\mathbf{X}$  é um autovetor associado a  $\underline{\lambda}$  (Cf., por exemplo [39]). De forma análoga, seu máximo coincide com o valor próprio dominante  $\bar{\lambda}$  da matriz  $\mathbf{A}$  e é atingido quando  $\mathbf{X}$  é um autovetor que lhe é associado.

O quociente de Rayleigh fornece um método alternativo para a determinação numérica da distribuição dos autovalores extremos, através da maximização ou minimização de  $E(F(\mathbf{P}\mathbf{X}))$ . Por exemplo, podemos utilizar a representação dada nas Eqs.(4.2.10)-(4.2.11), definirmos

$$f(\boldsymbol{\chi}) = E(F(\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}))) . \quad (4.2.16)$$

e determinarmos numericamente  $\boldsymbol{\chi}$  tal que  $f$  seja mínimo ou máximo: a solução define  $\mathbf{P}\mathbf{X}$  - a otimização pode ser realizada utilizando, por exemplo, os métodos apresentados em [49]. Além disto, por um lado, o mínimo ou máximo pode ser limitado a uma bola  $\boldsymbol{\chi}_i^t \cdot \boldsymbol{\chi}_i \leq r$ , ( $r > 0$ ) e, por outro lado, decomposições em valores singulares (SVD) podem ser utilizadas: se  $\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \mathbf{W}(\mathbf{v})\mathbf{S}(\mathbf{v})\mathbf{U}(\mathbf{v})^t$ , com  $\mathbf{W}(\mathbf{v})^t \mathbf{W}(\mathbf{v}) = \mathbf{U}(\mathbf{v})^t \mathbf{U}(\mathbf{v}) = Id$ , então, para  $\mathbf{B}(\mathbf{v}) = \mathbf{U}(\mathbf{v})^t \mathbf{W}(\mathbf{v})\mathbf{S}(\mathbf{v})$  e  $Y = \mathbf{U}(\mathbf{v})^t X$ ,

$$F(\mathbf{X}) = G(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} / \mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{Y} . \quad (4.2.17)$$

e  $\mathbf{B}$  pode ser utilizada em lugar de  $\mathbf{A}$ . O algoritmo correspondente se escreve

---

#### Algorithm 1 Otimização do quociente de Rayleigh

---

**Require:**  $N_X > 0$ ,  $kmax > 0$ ,  $precmin > 0$ ,  $\boldsymbol{\chi}^{(0)} \in \mathcal{M}(n, N_X)$ ;

**Require:** uma amostra  $\mathbf{v}_s$  de  $ns$  realizações de  $\mathbf{v}$ ;

**Require:** um método de minimização de  $f$ ;

  gerar :  $\boldsymbol{\chi}$  minimizando  $f$  (Eq. 4.2.16);

  gerar :  $\mathbf{P}\mathbf{X}$  associado a  $\boldsymbol{\chi}$ ;

$\lambda := \mathbf{P}\mathbf{X}^t \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}\mathbf{X} / \mathbf{P}\mathbf{X}^t \cdot \mathbf{P}\mathbf{X}$ ;

  return  $\mathbf{P}\mathbf{X}$ ,  $\lambda$

---

Uma alternativa consiste em utilizar a minimização do quociente de Rayleigh para gerar uma amostra de  $\underline{\lambda}$  ou  $\bar{\lambda}$  e utilizar em seguida um procedimento de colocação:

- ou minimizar  $f_i(\boldsymbol{\chi}) = F(\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{v}_i))$  para cada  $i$ : cada minimização produz uma realização  $\lambda_i$  de  $\lambda$ .
- ou minimizar  $F_i(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t \cdot \mathbf{A}(\mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{X} / \mathbf{X}^t \cdot \mathbf{X}$  para cada  $i$ : também neste caso, cada minimização produz uma realização  $\lambda_i$  de  $\lambda$ .

EXEMPLO 4.2.3. Consideremos a situação descrita no exemplo 4.2.1 estamos interessados na determinação dos autovalores extremos (mínimo e máximo), o que corresponde à minimização e à maximização do quociente de Rayleigh (Eq (4.2.17)). Utilizamos a técnica apresentada em [49], com uma amostra de  $ns = 21$  valores equidistantes de  $u$ . Os resultados obtidos se encontram nas Figs. 4.17 e 4.18, respectivamente.

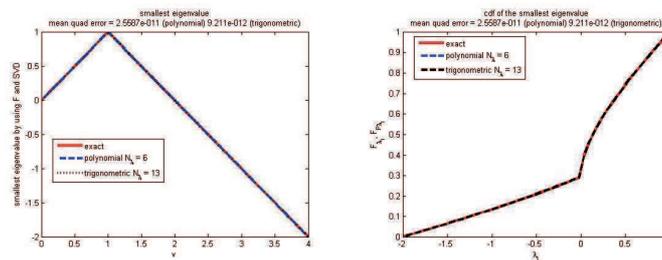


Figura 4.17: Menor autovalor no Exemplo 4.2.3 (21 pontos equidistantes)

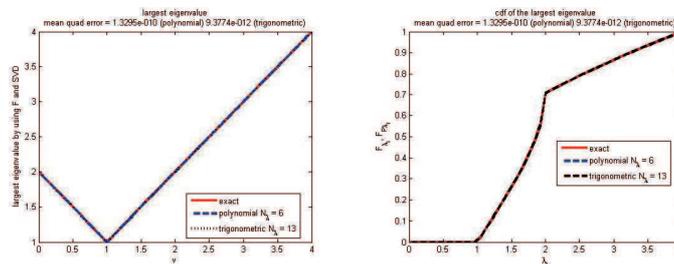


Figura 4.18: Maior autovalor no Exemplo 4.2.3 (21 pontos equidistantes)

#### 4.2.4 Potências iteradas

Um segundo método clássico para a determinação do valor próprio dominante quando  $\mathbf{A}$  possui  $n$  autovalores distintos é o método das *potências iteradas*, o qual consiste em iterações partindo de um vetor inicial  $\mathbf{X}^{(0)}$ :

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{T}^{(k+1)} / \|\mathbf{T}^{(k+1)}\| \quad , \quad \mathbf{T}^{(k+1)} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^{(k)} \quad . \quad (4.2.18)$$

Consideremos a representação introduzida nas Eqs. (4.2.10)-(4.2.11): definimos  $\mathbf{X}^{(k+1)}(v) = \chi^{(k+1)} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{v})$  e, de forma análoga,

$$\mathbf{T}^{(k+1)} = \boldsymbol{\tau}^{(k+1)} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{v}).$$

Então, temos

$$\sum_{j=1}^{N_X} \tau_{pj}^{(k+1)} \varphi_j(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{N_X} \sum_{q=1}^n A_{pq}(\mathbf{v}) \chi_{qj}^{(k)} \varphi_j(\mathbf{U}) \quad . \quad (4.2.19)$$

Multiplicando ambos os lados por  $\varphi_i(\mathbf{v})$ , obtemos

$$\sum_{j=1}^{N_X} \tau_{pj}^{(k+1)} \varphi_j(\mathbf{v}) \varphi_i(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{N_X} \sum_{q=1}^n A_{pq}(\mathbf{v}) \chi_{qj}^{(k)} \varphi_j(\mathbf{v}) \varphi_i(\mathbf{v}) \quad . \quad (4.2.20)$$

e tomando a média em ambos os lados, resulta

$$\sum_{j=1}^{N_X} \sum_{q=1}^n \mathcal{C}_{piqj} \tau_{qj}^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{N_X} \sum_{q=1}^n \mathcal{D}_{piqj}(\mathbf{v}) \chi_{qj}^{(k)} \quad , \quad (4.2.21)$$

onde

$$\mathcal{C}_{piqj} = E(\delta_{pq} \varphi_i(\mathbf{v}) \varphi_j(\mathbf{v})) \quad , \quad \mathcal{D}_{piqj} = E(A_{pq}(\mathbf{v}) \varphi_i(\mathbf{v}) \varphi_j(\mathbf{v})) \quad . \quad (4.2.22)$$

Utilizando a transformação  $ind(a, b) = a + (b - 1)N_X$ , podemos definir, para  $r = ind(p, i)$  e  $s = ind(q, j)$ ,

$$C_{rs} = \mathcal{C}_{piqj} \quad , \quad D_{rs} = \mathcal{D}_{piqj} \quad , \quad t_s^{(k+1)} = \tau_{qj}^{(k+1)} \quad , \quad x_s^{(k)} = \chi_{qj}^{(k)} \quad . \quad (4.2.23)$$

e a Eq. (4.2.22) se escreve

$$\mathbf{C} \mathbf{t}^{(k+1)} = \mathbf{D} \mathbf{x}^{(k)} \quad . \quad (4.2.24)$$

Uma vez calculado  $\mathbf{t}^{(k+1)}$ , podemos normalizá-lo e definir

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{t}^{(k+1)} / \|\mathbf{t}^{(k+1)}\| \quad , \quad \chi_{qj}^{(k+1)} = x_s^{(k+1)} \quad . \quad (4.2.25)$$

As Eqs. (4.2.24)-(4.2.25) definem as iterações :  $\mathbf{X}^{(k)}$  é dado, o que determina  $(\chi^{(k)})$  e, por conseguinte,  $\mathbf{x}^{(k)}$  e  $\mathbf{t}^{(k+1)}$  através da (Eq. (4.2.24)). Então,  $\mathbf{x}^{(k+1)}$

e  $(\chi_1^{(k+1)}, \dots, \chi_{N_X}^{(k+1)})$  são determinados pela Eq. (4.2.25), a qual fornece  $\mathbf{X}^{(k+1)}$ . No final das iterações, o valor próprio é aproximado pelo quociente de Rayleigh dado na Eq. (4.2.15):  $\lambda \approx F(\mathbf{X})$ . Ainda neste caso, decomposições em valores singulares podem ser utilizadas:  $\mathbf{A}(\mathbf{v})$  pode ser substituída por  $\mathbf{B}(\mathbf{v})$ .

Técnicas de deflação também podem ser utilizadas para construir outros autovalores : uma vez  $\mathbf{X}$  e  $\lambda$  determinados, podemos considerar  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{X} \mathbf{X}^t / \mathbf{X}^t \mathbf{X}$ . Então o valor próprio dominante de  $\tilde{\mathbf{A}}$  é o segundo maior autovalor de  $\mathbf{A}$  e o procedimento eposto pode ser aplicado a  $\tilde{\mathbf{A}}$ .

Enfim, notemos que é possível determinar o autovalor mínimo utilizando a inversa  $\mathbf{A}^{-1}$  de  $\mathbf{A}$  em lugar desta última. Na prática, não é necessário inverter a matriz: basta utilizar as iterações ditas inversas:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)}$ , o que leva a  $\mathbf{D} \mathbf{t}^{(k+1)} = \mathbf{C} \mathbf{x}^{(k)}$  em lugar da Eq. (4.2.24).

O algoritmo correspondente a este método é o seguinte:

---

**Algorithm 2** Potências iteradas

---

**Require:**  $N_X > 0$ ,  $kmax > 0$ ,  $precmin > 0$ ,  $\chi^{(0)} \in \mathcal{M}(n, N_X)$ ;  
**local :**  $k$ ,  $prec$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{xnew}$ ;  
**gerar :**  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ ;  
**gerar :**  $\mathbf{x}^{(0)}$  associado a  $\chi^{(0)}$ ;  
 $k := 0$ ;  
 $\mathbf{x} := \mathbf{x}^{(0)}$ ;  
 $prec := precmin + 1$ ;  
**while**  $k < kmax$  **and**  $prec > precmin$  **do**  
    **determinar**  $\mathbf{t}$  :  $\mathbf{C} \mathbf{t} := \mathbf{D} \mathbf{x}$  (ou  $\mathbf{D} \mathbf{t} := \mathbf{C} \mathbf{x}$  para as iterações inversas);  
     $\mathbf{xnew} := \mathbf{t} / \|\mathbf{t}\|$ ;  
     $prec := \|\mathbf{xnew} - \mathbf{x}\|$ ;  
     $\mathbf{x} := \mathbf{xnew}$ ;  
     $k := k + 1$ ;  
**end while**  
**gerar :**  $\chi$  associated to  $\mathbf{x}$ ;  
**gerar :**  $\mathbf{P} \mathbf{X}$  associated to  $\chi$ ;  
 $\lambda := \mathbf{P} \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{X} / \mathbf{P} \mathbf{X}^t \mathbf{P} \mathbf{X}$ ;  
**return**  $\mathbf{X}$ ,  $\lambda$

---

Como no caso precedente, uma alternativa consiste em utilizar este método para gerar uma amostra de autovalores e aplicar um procedimento de colocação.

**EXEMPLO 4.2.4.** *Consideremos a situação descrita no exemplo 4.2.1. Os resultados obtidos para os autovalores mínimo e máximo se encontram nas Figs. (4.19)-(4.22). Nas Figs. (4.19) e (4.20), os produtos escalares foram calculados através*

de integração numérica utilizando a função interna `quad` de `MATLAB`. Nas Figs. (4.21) e (4.22), as médias foram estimadas utilizando uma amostra equidistribuída de valores de  $u$ .

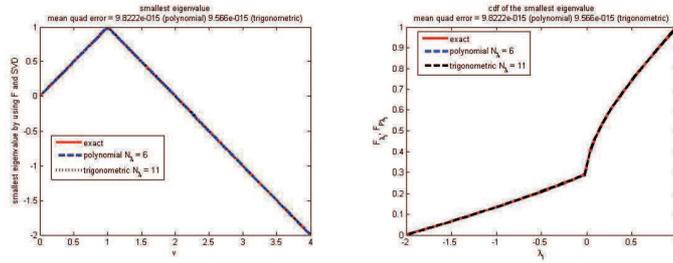


Figura 4.19: Menor autovalor no Exemplo 4.2.4 (integração numérica)

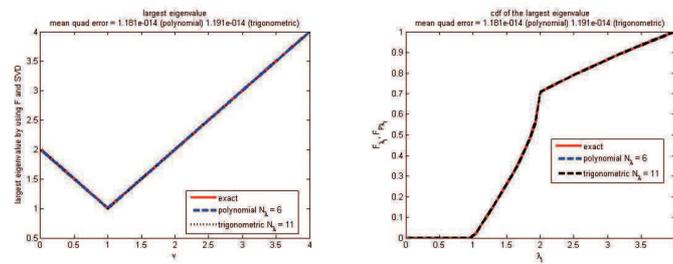


Figura 4.20: Maior autovalor no Exemplo 4.2.4 (integração numérica)

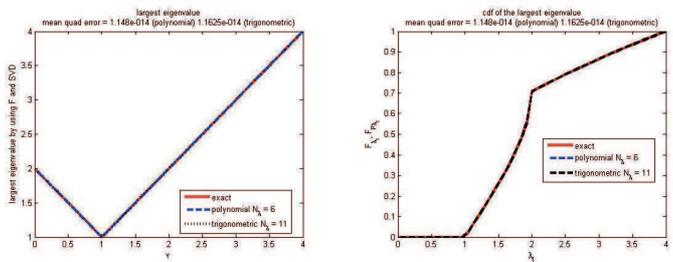


Figura 4.21: Maior autovalor no Exemplo 4.2.4 (21 pontos equidistantes)

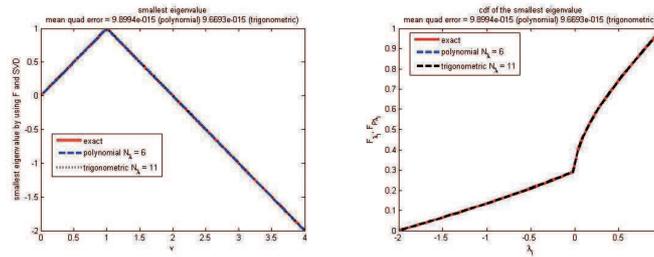


Figura 4.22: Maior autovalor no Exemplo 4.2.4 (21 pontos equidistantes)

#### 4.2.5 Subespaços iterados, ou iterações de Krylov

Uma generalização simples do método das potências iteradas consiste em utilizar não apenas um, mas um conjunto de vetores iniciais: consideramos não um vetor, mas o conjunto  $S^{(0)} = \{\mathbf{X}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{X}_{kd}^{(0)}\}$  de  $kd$  vetores iniciais.  $S^{(0)}$  pode ser construído de forma a ser ortonormal - por exemplo, através da aplicação da ortonormalização de Gram-Schmidt ao conjunto  $\mathcal{S}^{(0)} = \{\mathcal{X}_1^{(0)}, \dots, \mathcal{X}_{kd}^{(0)}\}$ , dado pelo utilizador. Alguns métodos usuais para a construção de  $S^{(0)}$  são os seguintes:

- escolha aleatória,
- autovetores de uma matriz auxiliar,
- vetores de Krylov:  $\mathcal{X}_1^{(0)}$  é dado e  $\mathcal{X}_{i+1}^{(0)} = \mathbf{A} \cdot \mathcal{X}_i^{(0)}$ .

No passo  $k$ ,  $S^{(k)} = \{\mathbf{X}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{X}_{kd}^{(k)}\}$  é dado e

$$S^{(k+1)} = \{\mathbf{X}_1^{(k+1)}, \dots, \mathbf{X}_{kd}^{(k+1)}\}$$

é obtido através da ortonormalização de Gram-Schmidt do conjunto  $\mathcal{S}^{(k+1)} = \{\mathcal{X}_1^{(k+1)}, \dots, \mathcal{X}_{kd}^{(k+1)}\}$ , o qual é obtido através da aplicação de uma iteração do método das potências iteradas aos elementos de  $S^{(k)}$ :  $\mathcal{X}_i^{(k+1)}$  é obtido pela aplicação do procedimento correspondente às Eqs. (4.2.23)-(4.2.24) a  $\mathbf{X}_i^{(k)}$ . O algoritmo correspondente a este método é o seguinte:

Como nos casos precedentes, podemos empregar decomposições em valores singulares (SVD) e substituir  $(\mathbf{A}(\mathbf{v}))$  por  $\mathbf{B}(\mathbf{v})$  definida acima. Além disto, da mesma maneira que nos casos acima, é possível utilizar este procedimento para gerar uma amostra de autovalores ou autovetores destinada a um procedimento de colocação.

**Algorithm 3** Subspaços iterados

---

**Require:**  $kmax > 0$ ,  $precmin > 0$ ,  $\chi^{(0)} \in \mathcal{M}(n, N_X)$ ;  
**Require:**  $N_X > 0$ ,  $kmax > 0$ ,  $precmin > 0$ ,  $np > 0$ ;  
**local :**  $k$ ,  $prec$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{xnew}$ ;  
**gerar :**  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ ;  
**gerar**  $T^0 = \{\chi_1^{(0)}, \dots, \chi_{np}^{(0)}\} \subset \mathcal{M}(n, N_X)$ ;  
**for**  $i := 1$  to  $np$  **do**  
    **gerar :**  $\mathbf{t}_i^{(0)}$  associado a  $\chi_i^{(0)}$ ;  
**end for**  
**gerar**  $S^0 = \{\mathbf{x}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{x}_{np}^{(0)}\}$  pela ortonormalização de Gram-Schmidt de  $\{\mathbf{t}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{t}_{np}^{(0)}\}$ ;  
 $k := 0$ ;  
 $prec := precmin + 1$ ;  
**while**  $k < kmax$  **and**  $prec > precmin$  **do**  
    **for**  $i := 1$  a  $np$  **do**  
        **gerar :**  $\mathbf{x}$  associado a  $\chi_i^{(k)}$ ;  
        **determinar**  $\mathbf{t} : \mathbf{C}\mathbf{t} := \mathbf{D}\mathbf{x}$ ;  
        **gerar :**  $\chi$  associado a  $\mathbf{t}$ ;  
         $\eta_i^{(k)} := \eta$ ;  
    **end for**  
    **gerar**  $T^k = \{\eta_1^{(k)}, \dots, \eta_{np}^{(k)}\}$ ;  
    **gerar**  $S^{(k+1)} = \{\chi_1^{(k+1)}, \dots, \chi_{np}^{(k+1)}\}$  pela ortonormalização de Gram-Schmidt de  $T^k$ ;  
     $prec := 0$ ;  
    **for**  $i := 1$  a  $np$  **do**  
         $prec := prec + \|\chi_i^{(k+1)} - \chi_i^{(k)}\|$ ;  
    **end for**;  
     $k := k + 1$ ;  
**end while**  
**for**  $i := 1$  a  $np$  **do**  
    **gerar :**  $\mathbf{P}\mathbf{X}_i$  associado a  $\chi_i^{(k+1)}$ ;  
     $\lambda_i := \mathbf{P}\mathbf{X}_i^t \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}\mathbf{X}_i / \mathbf{P}\mathbf{X}_i^t \cdot \mathbf{P}\mathbf{X}_i$ ;  
**end for**  
**return**  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{np}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_{np}$

---

EXEMPLO 4.2.5. Consideremos ainda a situação descrita no exemplo 4.2.1. De-sejam determinar simultaneamente os autovalores mínimo e máximo utilizando o conjunto inicial de Krylov. Dos resultados obtidos se encontram nas Figs. 4.23 e 4.26, respectivamente. Nas Figs. (4.23) e (4.24), os produtos escalares foram calculados através de integração numérica utilizando a função interna `quad` de MATLAB. Nas Figs. (4.25) and (4.26) as médias foram estimadas utilizando uma amostra equidistribuída de valores de  $u$ .

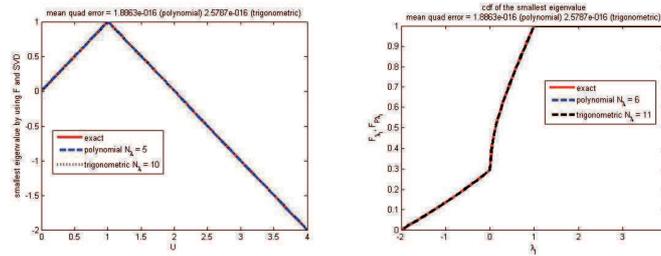


Figura 4.23: Menor autovalor no Exemplo 4.2.5 (integração numérica)

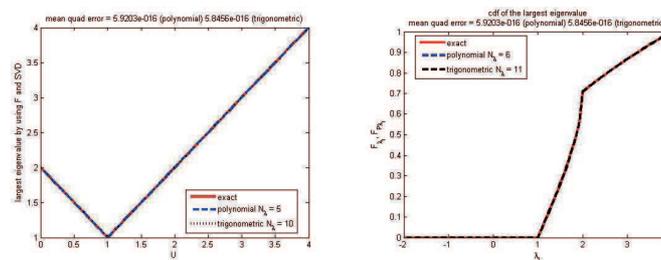


Figura 4.24: Maior autovalor no Exemplo 4.2.5 (integração numérica)

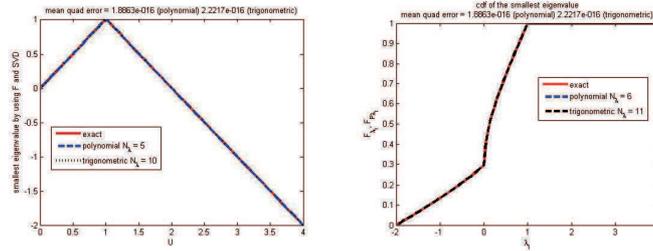


Figura 4.25: Menor autovalor no Exemplo 4.2.5 (21 pontos equidistantes)

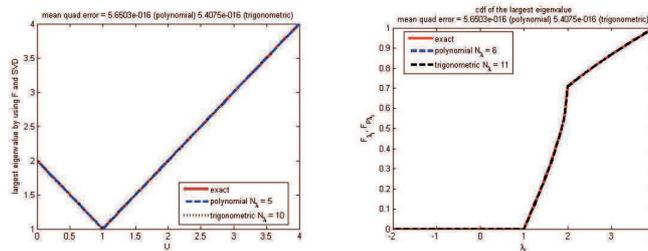


Figura 4.26: Maior autovalor no Exemplo 4.2.5 (21 pontos equidistantes)

### 4.3 Métodos estocásticos para sistemas lineares determinísticos

Sistemas lineares deterministas tem sido estudados na literatura de maneira extensa e profunda. Métodos eficientes de resolução são muito difundidos e podem ser facilmente encontrados. Entretanto, os métodos existentes geralmente exigem a resolução completa do sistema mesmo quando somente algumas das variáveis nos interessam, isto é, a determinação total da solução é necessária mesmo quando somente alguns componentes da solução nos interessam. Em algumas situações, a determinação independente de alguns componentes da solução é possível através de métodos estocásticos. Eventualmente uma única variável pode ser determinada sem passar pelas outras. A situação-modelo é a seguinte: consideremos o sistema linear

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \quad (4.3.26)$$

onde  $\mathbf{X} = (X_i) \in \mathcal{M}(n, 1)$  é a incógnita;  $\mathbf{B} = (B_i) \in \mathcal{M}(n, 1)$  é um vetor e  $\mathbf{A} = (A_{ij}) \in \mathcal{M}(n, n)$  verifica

$$\mathbf{A} = \alpha \mathbf{Id} - \mathbf{\Pi}, \quad (4.3.27)$$

onde  $\alpha > 1$  é um número real e  $\mathbf{\Pi} = (\Pi_{ij}) \in \mathcal{M}(n, n)$  é uma matriz tal que

$$\pi_{ij} \geq 0, \forall i, j; \sum_{j=1}^n \pi_{ij} = 1, \forall i \quad (1 \leq i, j \leq n). \quad (4.3.28)$$

Consideremos  $\Omega = \{1, \dots, n\}$ ; uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(i) = B_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.3.29)$$

e uma sequência de variáveis aleatórias  $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega$  tal que

$$P(U_{k+1} = j \mid U_k = i) = \Pi_{ij}, \quad \forall k \in \mathbb{N}; \quad U_0 \in \Omega; \quad (4.3.30)$$

e

$$\forall k \in \mathbb{N} : P(U_{k+1} = j \mid U_k = i, U_{k-1} = i_{k-1}, \dots, U_0 = i_0) = \Pi_{ij}, \quad \forall (j, i, i_{k-1}, \dots, i_0) \in \Omega^{k+2}; \quad (4.3.31)$$

Seja

$$\mathbf{P}_0 = (P(U_0 = i)) \in \mathcal{M}(n, 1).$$

Nosso objetivo é demonstrar o resultado seguinte:

**TEOREMA 4.3.1.** *Suponhamos satisfeitas as condições (4.3.26)-(4.3.31). Então*

$$X_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^k} E(f(U_k) \mid U_0 = i).$$

**DEMONSTRAÇÃO.-**

1. Seja  $i \in \Omega$ : se  $P(U_0 = i) = 0$ , então
2. Mostremos que

$$P(U_{k+1} = i_{k+1}, U_k = i_k, U_{k-1} = i_{k-1}, \dots, U_0 = i_0) = \Pi_{i_0 i_1} \Pi_{i_1 i_2} \dots \Pi_{i_{k+1} i_k} P(U_0 = i_0), \quad \forall (i_{k+1}, i_k, i_{k-1}, \dots, i_0) \in \Omega^{k+2} \quad (4.3.32)$$

A prova é feita por indução finita: para  $k = 0$ , consideremos os eventos  $E = "U_1 = i_1"$ ;  $F = "U_0 = i_0"$ . Temos

$$P(E | F) = \Pi_{i_0 i_1} ; P(F) = P(U_0 = i_0) .$$

Lembrando que

$$P(E \cap F) = P(E | F) . P(F) ,$$

temos

$$P(U_1 = i_1, U_0 = i_0) = \Pi_{i_0 i_1} P(U_0 = i_0).$$

Suponhamos, para a indução, que a Eq. (4.3.32) é satisfeita para o valor  $k > 0$ . Tomando  $E = "U_{k+2} = i_{k+2}"$ ;  $F = "U_{k+1} = i_k, U_k = i_k, \dots, U_0 = i_0"$ , temos, da Eq. (4.3.31),

$$P(E | F) = \Pi_{i_{k+1} i_{k+2}} ;$$

$$P(F) = P(U_{k+1} = i_{k+1}, U_k = i_k, \dots, U_0 = i_0)$$

e, lembrando ainda que  $P(E \cap F) = P(E | F) . P(F)$ , temos

$$P(U_{k+2} = i_{k+2}, U_{k+1} = i_{k+1}, U_k = i_k, \dots, U_0 = i_0) =$$

$$\Pi_{i_{k+1} i_{k+2}} P(U_{k+1} = i_{k+1}, U_k = i_k, \dots, U_0 = i_0) .$$

Então, usando a hipótese feita para o valor de  $k$  (Eq. (4.3.32))

$$P(U_{k+2} = i_{k+2}, U_{k+1} = i_{k+1}, U_k = i_k, \dots, U_0 = i_0) =$$

$$\Pi_{i_0 i_1} \Pi_{i_1 i_2} \dots \Pi_{i_{k+1} i_k} \Pi_{i_{k+1} i_{k+2}} P(U_0 = i_0)$$

e a relação dada na Eq. (4.3.32) é verificada para o valor  $k + 1$ , o que completa a indução.

3. Como

$$P(U_{k+1} = j, U_0 = i) =$$

$$\sum_{i_k, i_{k-1}, \dots, i_1=1}^n P(U_{k+1} = j, U_k = i_k, U_{k-1} = i_{k-1}, \dots, U_0 = i) ,$$

temos

$$P(U_{k+1} = j, U_0 = i) =$$

$$P(U_0 = i) \sum_{i_k, i_{k-1}, \dots, i_1=1}^n \Pi_{i i_1} \Pi_{i_1 i_2} \dots \Pi_{i_k j} ,$$

i.e.,

$$P(U_{k+1} = j, U_0 = i) = [\mathbf{\Pi}^{k+1}]_{ij} P(U_0 = i) .$$

4. Mostremos que

$$\forall k \in \mathbb{N} : P(U_{k+1} = j \mid U_0 = i) = [\mathbf{\Pi}^{k+1}]_{ij}, \\ \forall i, j \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

Suponhamos que  $P(F) \neq 0$ : consideremos  $E = "U_{k+1} = j"$ ;  $F = "U_0 = i"$ .  
Então

$$P(U_{k+1} = j \mid U_0 = i) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = [\mathbf{\Pi}^{k+1}]_{ij}.$$

Seja  $P(F) = 0$ : neste caso,

$$\Pi_{ij} = P(U_1 = j \mid U_0 = i) = 0, \forall j \quad (1 \leq j \leq n)$$

e

$$[\mathbf{\Pi}^{k+1}]_{ij} = \sum_{i_k, i_{k-1}, \dots, i_1=1}^n \Pi_{ii_1} \Pi_{i_1 i_2} \dots \Pi_{i_k j} = 0 \\ = P(U_1 = j \mid U_0 = i), \forall j \quad (1 \leq j \leq n),$$

de forma que a igualdade continua válida.

5. Assim,

$$E(f(U_k) \mid U_0 = i) = \sum_{j=1}^n f(j) P(U_k = j \mid U_0 = i) = \\ \sum_{j=1}^n [\mathbf{\Pi}^k]_{ij} B_j = [\mathbf{\Pi}^k \mathbf{B}]_i$$

6. Além disto,

$$\left( \mathbf{Id} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{\Pi} \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^k} \mathbf{\Pi}^k$$

Logo,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^k} E(f(U_k) \mid U_0 = i) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^k} [\mathbf{\Pi}^k \mathbf{B}]_i = \\ \left[ \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^k} \mathbf{\Pi}^k \right) \mathbf{B} \right]_i = \left[ \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{\Pi} \right)^{-1} \mathbf{B} \right]_i = X_i.$$

e temos o resultado enunciado. ■



## Capítulo 5

# Equações Algébricas Não Lineares com Parâmetros Aleatórios

### 5.1 Sistemas de equações algébricas não lineares

Nesta seção, consideramos sistemas de equações algébricas:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (5.1.1)$$

no qual  $\mathbf{F} : \mathcal{M}(n, 1) \times \mathcal{M}(nr, 1) \rightarrow \mathcal{M}(n, 1)$  é uma função regular,  $\mathbf{X} = (X_i) \in \mathcal{M}(n, 1)$  é o vetor das incógnitas,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{nr})$  é um vetor aleatório. Neste caso,  $\mathbf{X}$  é uma função implícita de  $\mathbf{v}$  e, assim, também é um vetor aleatório, função de  $\mathbf{v}$ :  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{v})$ . Nosso objetivo é a determinação numérica da variável  $\mathbf{X}(\mathbf{v})$  através das formas de representação previamente introduzidas (Capítulo 3): consideramos uma aproximação  $\mathbf{PX}$  de  $\mathbf{X}$  em um subespaço conveniente de variáveis aleatórias, tal como, por exemplo,

$$\mathbf{PX} = \sum_{k=1}^{N_X} \chi_k \varphi_k(\xi) \quad \left( \text{i.e., } (\mathbf{PX})_j = \sum_{k=0}^{N_X} \chi_{jk} \varphi_k(\mathbf{v}) \right). \quad (5.1.2)$$

Nesta expressão, a incógnita a ser determinada é  $\chi = (\chi_{ij}) \in \mathcal{M}(n, N_X)$ .  $F = \{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é uma família convenientemente escolhida, tal como, por exemplo, uma *família total* de um espaço funcional - se  $\mathbf{v}$  toma seus valores em  $\Omega \subset \mathbb{R}^{nr}$ , uma escolha conveniente é  $L^2(\Omega)$ .  $\xi$  é uma variável aleatória convenientemente seleti-

onada e  $N_X \in \mathbb{N}^*$  é a dimensão do subespaço de aproximação. Tomando

$$\varphi(\boldsymbol{\xi}) = (\varphi_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, \varphi_{N_X}(\boldsymbol{\xi}))^t \in \mathcal{M}(N_X, 1),$$

temos:

$$\mathbf{P}\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}\varphi(\boldsymbol{\xi}) . \quad (5.1.3)$$

No que segue, aplicamos os métodos gerais apresentados no capítulo 3 e, além disto, apresentamos também métodos particulares, adaptados à Eq.(5.1.1).

### 5.1.1 Colocação

Quando dispomos de uma amostra  $\mathcal{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{ns})$  de  $ns$  realizações de  $\mathcal{X}$ , podemos considerar o sistema linear

$$\mathbf{P}\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}_i) = \mathbf{X}_i , \quad i = 1, \dots, ns . \quad (5.1.4)$$

A resolução numérica destas equações fornece os coeficientes  $\boldsymbol{\chi}$  - este sistema é geralmente sobredeterminado e devemos utilizar um método adaptado, tal como, por exemplo, uma resolução por mínimos quadrados.

Caso disponhamos de uma amostra  $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{ns})$  de  $ns$  realizações de  $\mathbf{v}$ , a escolha natural é  $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}(\mathbf{v}_i)$  e  $\boldsymbol{\xi}_i = \mathbf{v}_i$ , para  $i = 1, \dots, ns$ . A situação é análoga se os valores de  $\mathbf{v}_i$  podem ser determinados a partir dos valores de  $\mathbf{X}_i$ . Ao contrário, quando só dispomos de uma amostra direta de  $\mathbf{X}$ , *i. e.*, se os valores de  $\mathbf{X}_i$  são dados, mas não é possível determinar os valores correspondentes de  $\mathbf{v}_i$ , podemos introduzir um vetor aleatório artificial  $\mathbf{a}$  e tomar  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{a}$ . Como observado no capítulo 3, os resultados podem ser de má qualidade caso as variáveis sejam independentes. Neste caso, necessitamos gerar uma forma de dependência entre as variáveis  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{X}$ , o que pode ser obtido por uma reordenação. Este procedimento é particularmente útil em caso de multiplicidade de soluções (Cf. exemplos abaixo).

EXEMPLO 5.1.1. *Consideremos a equação do segundo grau*

$$F(X, v) = X^2 - 2X + v = 0 ,$$

onde  $v$  é uniformemente distribuído sobre  $(0, 1)$ . Esta equação tem por soluções

$$X_1 = 1 - \sqrt{1-v} , \quad X_2 = 1 + \sqrt{1-v} .$$

As funções cumulativas associadas são, respectivamente,

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - (x-1)^2, & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{senão.} \end{cases} ;$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 1 \\ (x-1)^2, & \text{se } 1 < x < 2 \\ 1, & \text{senão.} \end{cases} .$$

Suponhamos que uma amostra de  $ns = 11$  realizações de  $v$  seja disponível. Neste caso, podemos gerar amostras correspondentes de  $X_1$  e  $X_2$  tomando  $X_{1i} = X_1(v_i)$  e  $X_{2i} = X_2(v_i)$ . Se uma tal amostra não é disponível (isto é, os valores de  $v$  são desconhecidos), mas somente os valores de  $X_1$  e  $X_2$  são dados, podemos considerar uma variável aleatória  $a$  de lei uniforme sobre  $(-1, 1)$  e  $X_1 = X_1(a)$ ,  $X_2 = X_2(a)$ . Para criar uma dependência entre as variáveis, podemos, por exemplo, ordenar os valores de  $X_{1i}$  e  $X_{2i}$  de forma crescente e utilizar uma amostra de  $a$ , também ordenada de forma crescente. Pontos equidistribuídos  $a_i = -1 + 2(i-1)/ns$  também podem ser considerados - tais pontos já se encontram ordenados de forma crescente.

Os resultados obtidos com uma base polinomial com  $ns = 11$  pontos e uma resolução da Eq. (5.1.4) por mínimos quadrados se encontram nas Figs. (5.1)-(5.2).

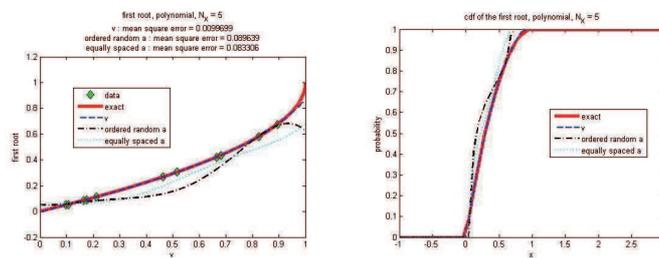


Figura 5.1: Resultados para  $X_1$  no Exemplo 5.1.1 (11 pontos aleatórios)

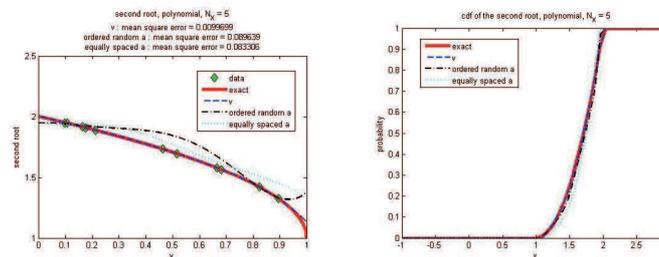


Figura 5.2: Resultados para  $X_2$  no Exemplo 5.1.1 (11 pontos aleatórios)

Os resultados podem ser melhorados se tivermos informações adicionais. Por example, os resultados para  $ns = 21$  pontos são mostrados nas Figs. (5.3)-(5.4).

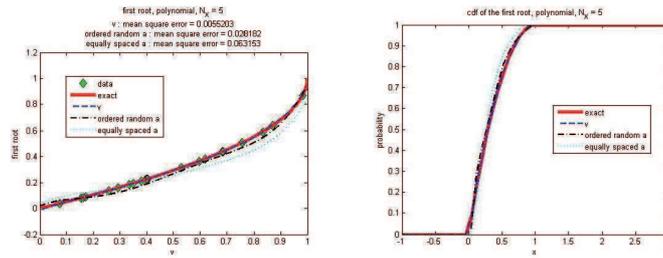


Figura 5.3: Resultados para  $X_1$  no Exemplo 5.1.1 (21 pontos aleatórios)

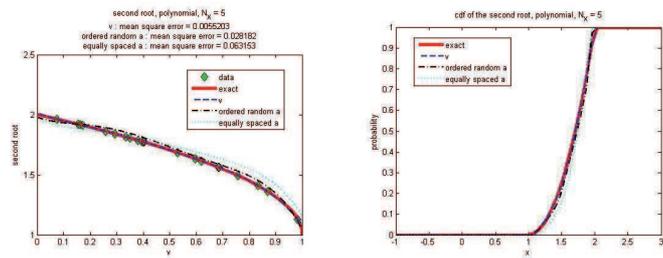


Figura 5.4: Resultados para  $X_2$  no Exemplo 5.1.1 (21 pontos aleatórios)

É interessante notar que os resultados obtidos utilizando uma amostra de  $n$ s valores equidistribuídos de  $v_i$  são idênticos aos resultados obtidos utilizando  $n$ s valores equidistribuídos de  $a_i$  - esta constatação não é surpreendente, dado que, em tal caso, existe uma relação entre os dois valores:  $a_i = 2v_i - 1$  e as variáveis  $a$  e  $v$  tornam-se uma função da outra. Os resultados correspondentes a esta situação se encontram nas Figs. (5.5)-(5.6).

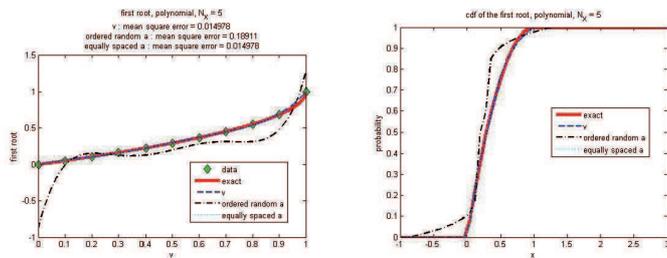


Figura 5.5: Resultados para  $X_1$  no Exemplo 5.1.1 (11 pontos equidistantes)

Uma situação de interesse prático é aquela onde não podemos separar os valores de  $X_1$  and  $X_2$ : a amostra de raízes contém valores de ambos e não dispomos de informação suficiente para separá-las. Por exemplo, consideremos uma amostra formada de 40 valores, dos quais 20 correspondem a  $X_1$  e 20 a  $X_2$ . Consideremos 40 valores artificiais  $a_i$  equidistantes tais que  $a_1 = -1$  and  $a_{40} = 1$ . Os resultados obtidos aplicando o procedimento descrito se encontram na Fig. (5.7)

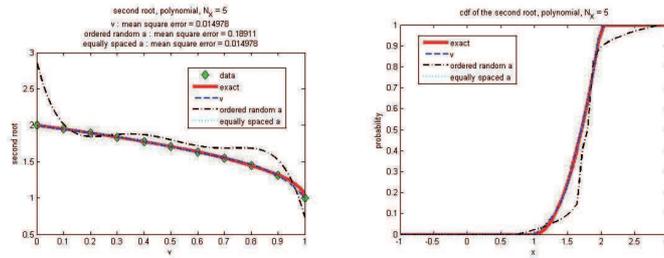


Figura 5.6: Resultados para  $X_2$  no Exemplo 5.1.1 (11 pontos equidistantes)

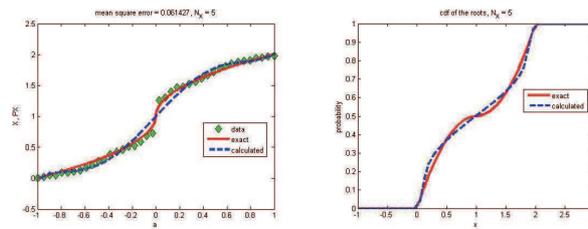


Figura 5.7: Resultados para uma amostra misturando as raízes no Exemplo 5.1.1 (20 pontos aleatórios de cada raiz)

### 5.1.2 Ajuste de momentos

Uma segunda maneira tradicional para explorar amostras é o *método do ajuste de momentos*, apresentado no capítulo 3: determinamos os coeficientes de forma a fazer com que os momentos  $\mathbf{M}^a(\mathbf{P}\mathbf{X}) = (M_1^a, \dots, M_q^a)$  da aproximação coincidam com os momentos empíricos  $\mathbf{M}^e = (M_1^e, \dots, M_q^e)$  da amostra. Para tanto, podemos optar entre resolver o sistema de equações não lineares  $\mathbf{M}^a(\mathbf{P}\mathbf{X}) = \mathbf{M}^e$  ou minimizar uma função-objetivo correspondendo a uma pseudo-distancia  $d(\mathbf{M}^a(\mathbf{P}\mathbf{x}), \mathbf{M}^e)$  caracterizando a proximidade ou afastamento entre os momentos.

EXEMPLO 5.1.2. Consideremos a situação descrita no Exemplo 5.1.1. Suponhamos dada uma amostra de  $ns = 21$  realizações de  $v$ . Então, de maneira análoga à do Exemplo 5.1.1, podemos gerar amostras de  $X_1$  e  $X_2$ : basta tomar  $X_{1i} = X_1(v_i)$  e  $X_{2i} = X_2(v_i)$ , o que permite aplicar o procedimento exposto. Os resultados obtidos com uma base polinomial aparecem nas Figs. (5.8)-(5.9).

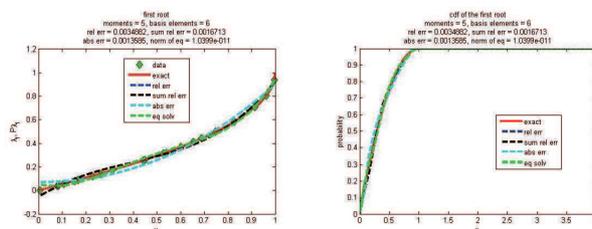


Figura 5.8: Resultados para  $X_1$  no Exemplo 5.1.2 (21 pontos aleatórios)

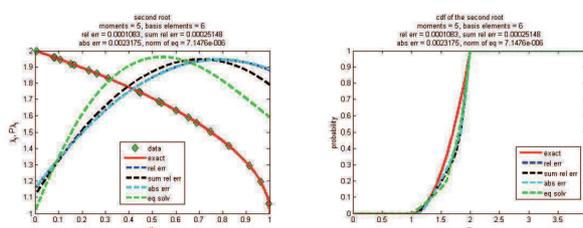


Figura 5.9: Resultados para  $X_2$  no Exemplo 5.1.2 (21 pontos aleatórios)

Os resultados obtidos com uma amostra de pontos equidistantes  $v_i = (i-1)/ns$  se encontram nas Figs. (5.10)-(5.11).

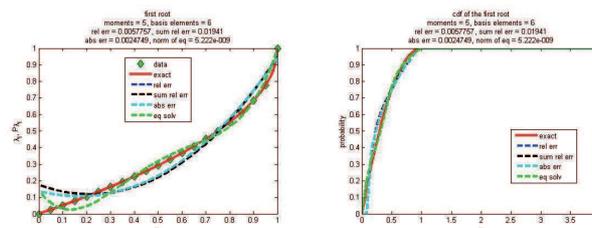


Figura 5.10: Resultados para  $X_1$  no Exemplo 5.1.2 (21 pontos equidistantes)

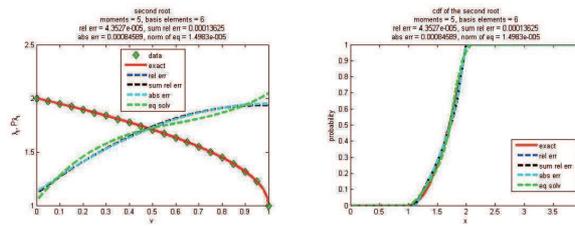


Figura 5.11: Resultados para  $X_2$  no Exemplo 5.1.2 (21 pontos equidistantes)

Quando os valores de  $v_i$  são desconhecidos, podemos considerar - como no Exemplo 5.1.1 - uma variável artificial  $a$ . Por exemplo, consideremos uma amostra contendo, como no exemplo precedente, 20 realizações de  $X_1$  e 20 realizações de  $X_2$ , assim como uma amostra de 40 pontos equidistantes  $a_i$  tais que  $a_1 = -1$  e  $a_40 = 1$ . Os resultados obtidos se encontram na Fig. (5.12)

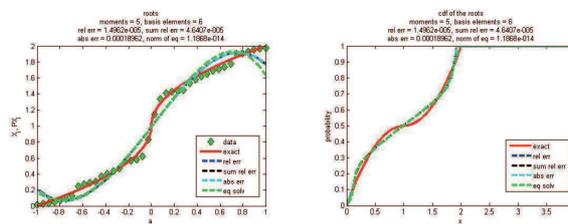


Figura 5.12: Resultados para uma amostra misturando as raízes no Exemplo 5.1.1 (20 pontos aleatórios de cada raiz)

### 5.1.3 Aproximação variacional

Do ponto de vista variacional, a Eq. (5.1.1) é aproximada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{PX}, \mathbf{v}) = \mathbf{0} , \tag{5.1.5}$$

Dado que (da Eq. (5.1.3)),

$$\mathbf{F}(\mathbf{PX}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{F}(\chi\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{v}) ,$$

temos

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi})^t \mathbf{D}^t \mathbf{F}(\chi\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{D} \in \mathcal{M}(n, N_X) . \tag{5.1.6}$$

Como

$$\varphi(\boldsymbol{\xi})^t \mathbf{D}^t \mathbf{F}(\boldsymbol{\chi} \varphi(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^{N_X} \varphi_m(\boldsymbol{\xi}) D_{im} F_i \left( \sum_{k=1}^{N_X} \chi_k \varphi_k(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{v} \right), \forall \mathbf{D} \in \mathcal{M}(n, N_X),$$

temos

$$\sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^{N_X} D_{im} E \left( \varphi_m(\boldsymbol{\xi}) F_i \left( \sum_{k=1}^{N_X} \chi_k \varphi_k(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{v} \right) \right) = 0, \quad \forall \mathbf{D} \in \mathcal{M}(n, N_X).$$

Tomando  $D_{im} = \delta_{ir} \delta_{ms}$ , resulta

$$E \left( \varphi_s(\boldsymbol{\xi}) F_r \left( \sum_{k=1}^{N_X} \chi_k \varphi_k(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{v} \right) \right) = 0, \quad 1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq N_X. \quad (5.1.7)$$

As Eqs. (5.1.7) definem um sistema de  $n \times N_X$  equações não lineares para as  $n \times N_X$  incógnitas  $\boldsymbol{\chi} = (\chi_{ij}) \in \mathcal{M}(n, N_X)$ . Este sistema deve ser resolvido por um método adequado a fim de fornecer os coeficientes  $\boldsymbol{\chi}$ . É preciso notar que a construção das Eqs. (5.1.7) só é possível se a distribuição conjunta do par  $(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})$  for conhecida, seja de forma analítica, seja de forma empírica, através de uma amostra do par. Além disto, os resultados são geralmente melhores quando usamos  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{v}$ .

**EXEMPLO 5.1.3.** *Consideremos a situação descrita no Exemplo 5.1.1. Podemos utilizar uma aproximação em base polinomial utilizando  $\xi = v$  e efetuar a resolução numérica das Eqs. (5.1.6) pelo método iterativo de Newton-Raphson. Os resultados assim obtidos se encontram nas Figs. (5.13)-(5.15). Na primeira figura, as médias foram calculadas através de integração numérica. Na segunda, consideramos 21 valores equidistantes de  $v$ . A última figura corresponde a uma amostra de 21 realizações aleatórias de  $v$ .*

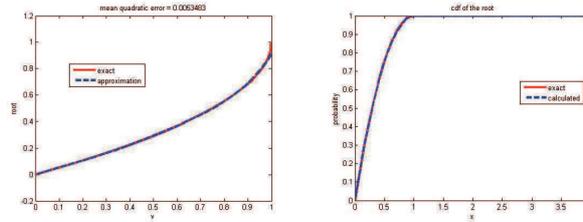


Figura 5.13: Resultados obtidos no Exemplo 5.1.3 (integração numérica)

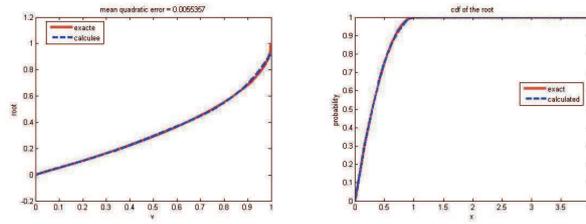


Figura 5.14: Resultados obtidos no Exemplo 5.1.3 (pontos equidistantes)

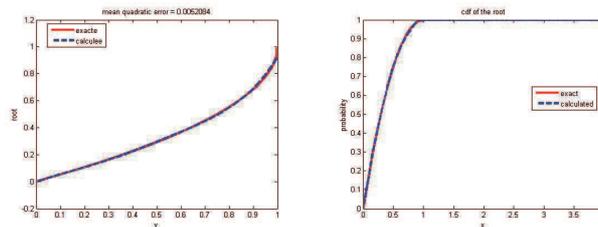


Figura 5.15: Resultados obtidos no Exemplo 5.1.3 (pontos aleatórios)

A utilização de uma variável  $\xi \neq v$  é ilustrada nas Figs. (5.16)-(5.17): consideramos, por um lado, uma amostra de  $ns = 21$  realizações aleatórias de  $v$  e 21 pontos  $a_i$  equidistribuídos sobre  $(-1,1)$  tais que  $a_1 = -1$  e  $a_{21} = 1$ . Os resultados obtidos com  $\xi = a$  e um polinômio de grau 5 se encontram na Fig. (5.16), enquanto que os resultados para um polinômio de grau 8 se encontram na Fig. (5.17).

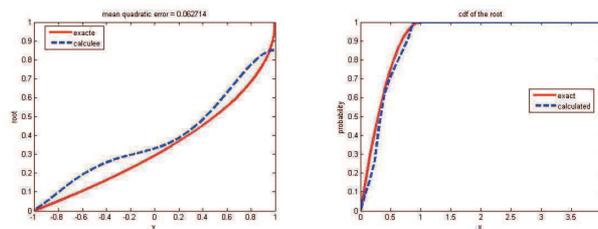


Figura 5.16: Resultados obtidos no Exemplo 5.1.3 ( $\xi \neq v$ , amostra de 21 pontos)

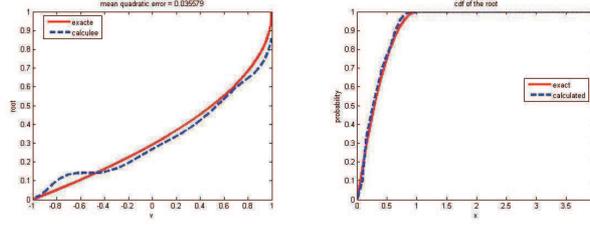


Figura 5.17: Resultados obtidos no Exemplo 5.1.3 ( $\xi \neq v$ , amostra de 21 pontos)

#### 5.1.4 Adaptação de métodos iterativos

Consideremos um método iterativo para a resolução numérica da Eq. (5.1.1), cuja função de iteração é  $\Psi$ : o método consiste em gerar uma sequência  $\{\mathbf{X}^{(p)}\}_{p \geq 0}$ , partindo do ponto inicial  $\mathbf{X}^{(0)}$  e tal que

$$\mathbf{X}^{(p+1)} = \Psi(\mathbf{X}^{(p)}) . \quad (5.1.8)$$

O método iterativo acima pode ser adaptado à determinação de  $\mathbf{PX}$ : seja

$$\mathbf{PX}^{(p)} = \sum_{k=1}^{N_X} \chi_k^{(p)} \varphi_k(\xi) \quad \left( \text{i.e., } (\mathbf{PX}^{(p)})_j = \sum_{k=0}^{N_X} \chi_{jk}^{(p)} \varphi_k(\mathbf{v}) \right) . \quad (5.1.9)$$

Então, as iterações se escrevem

$$\mathbf{PX}^{(p+1)} = \Psi(\mathbf{PX}^{(p)}) . \quad (5.1.10)$$

Adotemos o ponto vista variacional: temos

$$\varphi(\xi)^t \mathbf{D}^t \mathbf{PX}^{(p+1)} = \varphi(\xi)^t \mathbf{D}^t \Psi(\mathbf{PX}^{(p)}) , \quad \forall \mathbf{D} \in \mathcal{M}(n, N_X) .$$

e

$$\sum_{k,m=1}^{N_X} \sum_{i=1}^n D_{im} \varphi_m(\xi) \chi_{ik}^{(p+1)} \varphi_k(\xi) = \sum_{m=1}^{N_X} \sum_{i=1}^n D_{im} \varphi_m(\xi) \Psi_i \left( \sum_{k=1}^{N_X} \chi_k^{(p)} \varphi_k(\xi) \right) , \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq m \leq N_X .$$

Assim

$$\sum_{k,m=1}^{N_X} \sum_{i=1}^n D_{im} E \left( \varphi_m(\boldsymbol{\xi}) \chi_{ik}^{(p+1)} \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) \right) = \sum_{m=1}^{N_X} \sum_{i=1}^n D_{im} E \left( \varphi_m(\boldsymbol{\xi}) \Psi_i \left( \sum_{k=1}^{N_X} \chi_k^{(p)} \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) \right) \right),$$

$$1 \leq i \leq n, 1 \leq m \leq N_X .$$

Tomando  $D_{im} = \delta_{ir} \delta_{ms}$  nesta igualdade, temos, para  $r, 1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq N_X$

$$\sum_k^{N_X} E(\varphi_s(\boldsymbol{\xi}) \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) \chi_{rk}^{(p+1)}) = E \left( \varphi_s(\boldsymbol{\xi}) \Psi_r \left( \sum_{k=1}^{N_X} \chi_k^{(p)} \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) \right) \right). \quad (5.1.11)$$

Estas equações formam um sistema linear para as incógnitas  $\chi_{rk}^{(p+1)}$ : sejam

$$\mathcal{A}_{rsjk} = \delta_{jr} E(\varphi_s(\boldsymbol{\xi}) \varphi_k(\boldsymbol{\xi})),$$

$$\mathcal{B}_{rs} = E \left( \varphi_s(\boldsymbol{\xi}) \Psi_r \left( \sum_{k=1}^{N_X} \chi_k^{(p)} \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) \right) \right) \quad (5.1.12)$$

Então,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{N_X} \mathcal{A}_{rsjk} \chi_{jk}^{(p+1)} = \mathcal{B}_{rs}, \quad 1 \leq r \leq n, \quad 1 \leq s \leq N_X .$$

Redefinindo os índices por

$$ind(j, k) = (k-1)n + j$$

e utilizando  $A = (A_{\alpha\beta}) \in \mathcal{M}(nN_X, nN_X)$ ,  $U = (U_\beta) \in \mathcal{M}(nN_X, 1)$ ,  $B = (B_\alpha) \in \mathcal{M}(nN_X, 1)$  dadas por

$$A_{\alpha\beta} = \mathcal{A}_{rsjk}, \quad B_\alpha = \mathcal{B}_{rs}, \quad U_\beta = \chi_{jk}^{(p+1)},$$

$$\alpha = ind(r, s), \quad \beta = ind(j, k), \quad (5.1.13)$$

temos

$$\mathbf{AU} = \mathbf{B}. \quad (5.1.14)$$

A resolução deste sistema linear determina  $\mathbf{U}$  e, logo,  $\chi^{(p+1)}$ . Na prática, a solução pode ser determinada resolvendo  $n$  sistemas lineares contendo cada um  $N_X$  incógnitas e uma matriz  $M \in \mathcal{M}(N_X, N_X)$  fixa : sejam  $\mathbf{N}^r \in \mathcal{M}(N_X, 1)$  e  $\mathbf{U}^r \in \mathcal{M}(N_X, 1)$  tais que

$$M_{sk} = E(\varphi_s(\boldsymbol{\xi}) \varphi_k(\boldsymbol{\xi})) ,$$

$$N_s^r = E\left(\varphi_s(\boldsymbol{\xi}) \Psi_r\left(\sum_{k=1}^{N_X} \chi_k^{(p)} \varphi_k(\boldsymbol{\xi})\right)\right), U_k^r = \chi_{rk}^{(p+1)} \quad (5.1.15)$$

Então,

$$\mathbf{M}\mathbf{U}^r = \mathbf{N}^r, 1 \leq r \leq n . \quad (5.1.16)$$

A resolução da Eq. (5.1.16) para um valor fixo de  $r$  fornece os valores de  $\chi_{rk}$ , para  $1 \leq k \leq N_X$ .

Um caso usual é aquele onde a função de iteração toma a forma

$$\Psi(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \Phi(\mathbf{X}) .$$

Neste caso, as iterações (5.1.8) se escrevem

$$\mathbf{X}^{(p+1)} = \mathbf{X}^{(p)} + \Delta\mathbf{X}^{(p)} ; \Delta\mathbf{X}^{(p)} = \Phi(\mathbf{X}^{(p)}) . \quad (5.1.17)$$

e temos

$$\chi^{(p+1)} = \chi^{(p)} + \Delta\chi^{(p)} , \quad (5.1.18)$$

onde  $\Delta\chi^{(p)}$  é determinado resolvendo o sistema linear  $\mathbf{A}\Delta\mathbf{U} = \Delta\mathbf{B}$ , análogo a (5.1.14), com  $\Phi$  substituindo  $\Psi$  em (5.1.12) (lembramos que  $\beta = \text{ind}(j, k)$ ):

$$\Delta\mathcal{B}_{rs} = E\left(\varphi_s(\boldsymbol{\xi}) \Phi_r\left(\sum_{k=1}^{N_X} \chi_k^{(p)} \varphi_k(\boldsymbol{\xi})\right)\right) , \quad (5.1.19)$$

$$\Delta B_\alpha = \Delta\mathcal{B}_{rs} , \Delta U_\beta = \Delta\chi_{jk}^{(p+1)}$$

Analogamente a (5.1.16), é possível determinar  $\Delta\chi^{(p)}$  resolvendo  $n$  sistemas lineares  $\mathbf{M}\Delta\mathbf{U}^r = \Delta\mathbf{N}^r$ , análogos a (5.1.16), com  $\Phi$  substituindo  $\Psi$  em (5.1.15):

$$\Delta N_s^r = E\left(\varphi_s(\boldsymbol{\xi}) \Phi_r\left(\sum_{k=1}^{N_X} \chi_k^{(p)} \varphi_k(\boldsymbol{\xi})\right)\right) , \quad (5.1.20)$$

$$\Delta U_k^r = \Delta\chi_{rk}^{(p+1)} .$$

EXEMPLO 5.1.4. Consideremos novamente a situação descrita no Exemplo 5.1.1. Quando utilizamos o método de Newton para a resolução da equação do segundo grau, a função de iteração é

$$\Phi(X, v) = \frac{X^2 - 2X + v}{2X - 2},$$

Apresentamos na Fig. (5.18) os resultados obtidos após 100 iterações, partindo de  $\chi_{jk}^{(0)} = 1, \forall j, k$ . Neste cálculo, utilizamos uma aproximação polinomial de grau 5 e as médias são estimadas a partir de  $ns = 21$  pontos  $v_i$  equidistantes.

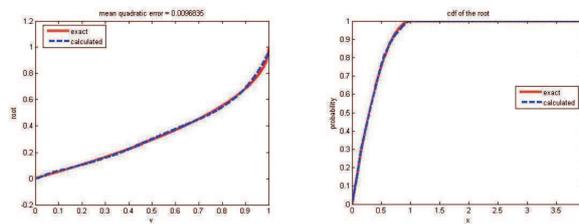


Figura 5.18: Resultados obtidos no Exemplo 5.1.4 ( $ns = 21$  pontos  $v_i$  equidistantes)

Na Fig. (5.18), apresentamos os resultados obtidos efetuando 100 iterações a partir de  $\chi_{jk}^{(0)} = 0, \forall j, k$ . Neste cálculo, as médias foram obtidas por integração numérica utilizando a função quad de MATLAB.

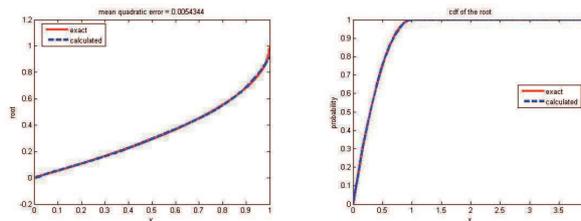


Figura 5.19: Resultados obtidos no Exemplo 5.1.4 (integração numérica)

## 5.2 Resolução de sistemas de equações não lineares determinísticos

Nesta seção, consideramos a resolução de sistemas de equações algébricas determinísticos

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

nos quais  $\mathbf{F} : \mathcal{M}(n, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função vetorial, e  $\mathbf{x} = (x_i) \in \mathcal{M}(n, 1)$  é a incógnita. Supomos que estas equações não contém nenhum termo aleatório e são de tipo determinista:  $\mathbf{x}$  é um vetor de números reais. Estamos interessados em situações onde o cálculo de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  contém erros: por exemplo, quando somente aproximações de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  podem ser construídas. Os métodos usuais, tais como o método de Newton-Raphson podem encontrar dificuldades em tal situação, dado que os erros no cálculo de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  e de suas derivadas podem levar a oscilações ou divergência. Dentro do quadro mais geral de métodos estocásticos, uma alternativa é o método de *Robbins-Monro*, o qual pode ser considerado como uma simples extensão das iterações de relaxação

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \theta \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \theta > 0, \mathbf{x}^{(0)} \text{ given}.$$

Este simples procedimento de relaxação pode ser generalizado pela introdução de uma variável  $\theta$ , diferente para cada iteração  $k$ :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \theta_k \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \theta_k > 0, \mathbf{x}^{(0)} \text{ dado}.$$

Quando a sequência  $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  verifica

$$\theta_k > 0, \forall k \in \mathbb{N}; \sum_{i=0}^{+\infty} \theta_i = +\infty; \sum_{i=0}^{+\infty} \theta_i^2 < +\infty, \quad (5.2.21)$$

o método é conhecido como *algoritmo de Robbins-Monro*. Uma maneira simples de satisfazer estas condições consiste em utilizar

$$\theta_k = \frac{\theta}{a + b(k+1)}, \quad a, b, \theta > 0.$$

este algoritmo foi inicialmente utilizado para equações contendo variáveis aleatórias: consideremos as iterações

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \theta_k \mathbf{Y}^{(k)},$$

onde  $\mathbf{Y}^{(k)}$  é uma aproximação de  $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$ .

Supondo que o erro  $\varepsilon^{(k)} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{Y}^{(k)}$  é uma variável aleatória centrada, independente de  $\{\mathbf{x}^{(0)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{Y}^{(0)}, \dots, \mathbf{Y}^{(k-1)}\}$ , o algoritmo ainda converge para  $x$ .

A convergência resulta do seguinte teorema:

TEOREMA 5.2.1. Seja  $(,)$  o produto escalar usual de  $\mathbb{R}^n$ . Suponhamos que

1.  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua e limitada:

$$\sup \{ \|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \} = M < \infty ;$$

2. Existe  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ ;

3. Seja, para  $\delta > 0$ ,  $A(\mathbf{x}, \delta) = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \geq \delta \}$ . Supomos que existe uma aplicação  $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que,  $\forall \delta > 0$ ,

$$\inf \{ (\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{y}) - \mathbf{F}(\mathbf{x})) : \mathbf{y} \in A(\mathbf{x}, \delta) \} \geq m(\delta) > 0 .$$

4. A sequência  $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  verifica (5.2.21)

Sob estas hipóteses, a sequência  $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge para  $\mathbf{x} : \mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}$  for  $k \rightarrow +\infty$ .

Notemos que a condição (iii) implica que a solução é única, dado que  $\mathbf{F}(\mathbf{y}) \neq \mathbf{F}(\mathbf{x})$  para  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ .

DEMONSTRAÇÃO:

1. Seja  $\mathbf{T}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$ . Então

$$\mathbf{T}^{(k+1)} = \mathbf{T}^{(k)} - \theta_k \left( \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) \right)$$

e

$$\|\mathbf{T}^{(k+1)}\|^2 = \|\mathbf{T}^{(k)}\|^2 + \theta_k^2 \|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})\|^2 - 2\theta_k (\mathbf{T}^{(k)}, \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})) .$$

Sejam

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \theta_k^2$$

e

$$z_k = \|\mathbf{T}^{(k)}\|^2 + M^2 S - \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i^2 \|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)})\|^2$$

As hipóteses sobre  $f$  mostram que

$$0 < \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i^2 \|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)})\|^2 \leq M^2 \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i^2 \leq M^2 S ,$$

o que implica a existência de um número real  $A > 0$  tal que

$$0 < A \leq M^2 S \quad \text{and} \quad \sum_{i=0}^{+\infty} \theta_i^2 \left\| \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}) \right\|^2 = A .$$

Além disto,

$$z_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} .$$

2. Temos também

$$z_{k+1} = \left\| \mathbf{T}^{(k+1)} \right\|^2 + M^2 S - \sum_{i=0}^k \theta_i^2 \left\| \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}) \right\|^2 .$$

Assim,

$$\begin{aligned} z_{k+1} - z_k &= \left\| \mathbf{T}^{(k+1)} \right\|^2 - \left\| \mathbf{T}^{(k)} \right\|^2 - \theta_k^2 \left\| \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \right\|^2 \\ &= -2\theta_k \left( \mathbf{T}^{(k)}, \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \right) \end{aligned}$$

e temos

$$z_{k+1} = z_k - 2\theta_k \left( \mathbf{T}^{(k)}, \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \right) .$$

Como

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{T}^{(k)}, \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \right) &= \left( \mathbf{T}^{(k)}, \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) \right) \\ &= \left( \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) \right) \geq m \left( \left\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x} \right\| \right) \geq 0 , \end{aligned}$$

temos

$$z_{k+1} \leq z_k, \quad \forall k \in \mathbb{N} .$$

3. Assim,  $\{z^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  é decrescente e limitada inferiormente: existe um número real  $z \geq 0$  tal que

$$z^{(k)} \rightarrow z \quad \text{for } k \rightarrow +\infty .$$

4. Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{T}^{(k)} \right\|^2 &= z_k - M^2 S + \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i^2 \left\| \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}) \right\|^2 \\ &\rightarrow B = z - M^2 S + A . \end{aligned}$$

Dado que  $\left| \mathbf{T}^{(k)} \right|^2 \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$ , temos  $B \geq 0$ .

5. Suponhamos  $B > 0$ . Então, existe  $k_0 > 0$  tal que:

$$k \geq k_0 \implies \|\mathbf{T}^{(k)}\|^2 \geq \frac{B}{2} \implies \|\mathbf{T}^{(k)}\| \geq \sqrt{\frac{B}{2}} > 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} k \geq k_0 \implies \left( \mathbf{T}^{(k)}, \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \right) &= \left( \mathbf{T}^{(k)}, \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) \right) \\ &= \left( \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) \right) \geq m \left( \sqrt{\frac{B}{2}} \right) > 0 \end{aligned}$$

e, considerando

$$\lambda = 2m \left( \sqrt{\frac{B}{2}} \right) > 0,$$

temos

$$k \geq k_0 \implies z_{k+1} = z_k - 2\theta^{(k)} \left( \mathbf{T}^{(k)}, \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \right) \leq z_k - \lambda\theta_k.$$

Esta desigualdade mostra que

$$\forall k > k_0 : z_k - z_{k_0} = \sum_{i=k_0}^{k-1} (z_{i+1} - z_i) \leq -\lambda \sum_{i=k_0}^{k-1} \theta_i.$$

Como

$$z_{k+1} \leq z_k \leq z_0, \forall k \in \mathbb{N},$$

esta desigualdade implica que

$$\forall k > k_0 : 0 \leq \sum_{i=k_0}^{k-1} \theta_i \leq \frac{z_{k_0} - z_k}{\lambda} \leq \frac{z_0 - z_k}{\lambda} \leq \frac{z_0 - z}{\lambda}.$$

6. Mas a desigualdade implica que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \theta_i < +\infty,$$

o que contradiz as hipóteses. Logo,  $B = 0$  e temos o resultado enunciado. ■



## Capítulo 6

# Equações Diferenciais com Incertezas

Do ponto de vista matemático, *equações diferenciais são antes de tudo equações*: os métodos apresentados nos Capítulos 4 e 5 podem ser utilizados para a quantificação de incertezas em equações diferenciais. A principal dificuldade reside na quantidade de incógnitas a serem determinadas.

Formalmente, é preciso guardar em mente que as soluções de equações diferenciais não são vetores de um espaço de dimensão finita, mas elementos de um espaço vetorial de dimensão infinita: enquanto a solução do sistema linear  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$  - com  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n, n)$  e  $\mathbf{B} \in \mathcal{M}(n, 1)$  - é um vetor  $\mathbf{X} \in \mathcal{M}(n, 1)$ , a solução da equação diferencial  $x' = ax$  sobre  $(0, T)$ ,  $x(0) = x_0$  é uma função  $x(t) = x_0 \exp(at)$ . Enquanto a determinação de  $\mathbf{X}$  consiste na determinação de  $n$  números reais, aquela de  $x$  exige a determinação de  $x(t)$  para cada  $t \in (0, T)$  - isto é, a determinação de uma quantidade infinita de números reais. Esta especificidade tem um impacto significativo na complexidade do problema de quantificação de incertezas: para o caso do sistema linear em dimensão finita  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$  onde  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{v})$  e  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{v})$ , devemos determinar  $\mathbf{P}\mathbf{X} = \chi\varphi(\xi)$ , com  $\chi \in \mathcal{M}(n, N_X)$  (ver Capítulo 4); para o caso da equação diferencial  $x' = ax$  sobre  $(0, T)$ ,  $x(0) = x_0$  com  $a = a(\mathbf{v})$ , devemos determinar  $Px = \chi(t)\varphi(\xi)$ , onde  $(0, T) \rightarrow \chi(t) \in \mathcal{M}(1, N_X)$  é uma aplicação - isto é,  $\chi(t)$  deve ser determinado para uma infinidade de valores de  $t$ .

Na prática, equações diferenciais são frequentemente resolvidas utilizando *discretizações* gerando aproximações com incógnitas em dimensão finita, tais como esquemas de diferenças finitas, elementos finitos, etc. Em tal caso, a determinação completa de  $x(t)$  não é realizada e nos contentamos com a determinação de valores aproximados  $x_1 \approx x(t_1)$ , ...,  $x_n \approx x(t_n)$  ( $0 < t_1 < \dots < t_n = T$ ), e a incógnita torna-se  $\mathbf{X} = (x_i) \in \mathcal{M}(n, 1)$ , solução um sistema de equações algébricas

$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ . Este sistema é linear ou não linear, segundo a natureza da equação original e método de discretização usado. Nos dois casos, as técnicas de construção de representação podem ser empregados. Alguns esquemas de discretização levam à construção iterativa, ou progressiva da aproximação, o que conduz naturalmente a considerar métodos como apresentados na seção 5.1.4.

A principal dificuldade resulta, como mencionado acima, da *maldição da dimensionalidade*: a quantidade de passos  $n$  pode ser grande (eventualmente muito grande). Analogamente,  $N_X$  pode tornar-se grande, pois cresce rapidamente com o número de variáveis aleatórias utilizado na aproximação. Assim, o número total de incógnitas,  $nN_X$ , pode crescer rapidamente na prática - o que é uma limitação ao uso prático dos métodos considerados.

## 6.1 Representação de soluções de equações diferenciais lineares

As observações acima mostram que a quantificação de incertezas em equações diferenciais lineares está ligada à quantificação de incertezas em sistemas algébricos lineares. Por exemplo, consideremos a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \quad (6.1.1)$$

onde  $\mathbf{X} : (0, T) \rightarrow \mathcal{M}(n, 1)$  é a incógnita a ser determinada,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{v}) \in \mathcal{M}(n, n)$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{v}) \in \mathcal{M}(n, 1)$ ,  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0(\mathbf{v}) \in \mathcal{M}(n, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{nr})$  é um vetor aleatório destinado a modelar a incerteza. De forma análoga à apresentada na seção 4.1 (ver chapter 4), buscamos uma aproximação  $\mathbf{P}\mathbf{X}$  em

$$S = [\{\varphi_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, \varphi_{N_X}(\boldsymbol{\xi})\}]^n = \left\{ \sum_{k=1}^{N_X} \mathbf{D}_k \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) : \mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^n, 1 \leq k \leq N_X \right\}, \quad (6.1.2)$$

i. e.,

$$\mathbf{X} \approx \mathbf{P}\mathbf{X} = \sum_{k=1}^p \chi_k \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) \left( \text{i.e., } (\mathbf{P}\mathbf{X})_j = \sum_{k=0}^{+\infty} \chi_{jk} \varphi_k(\mathbf{v}) \right). \quad (6.1.3)$$

onde  $\boldsymbol{\xi}$  é uma variável aleatória conveniente,  $F = \{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é uma família de funções conveniente,

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) = (\varphi_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, \varphi_{N_X}(\boldsymbol{\xi}))^t \in \mathcal{M}(N_X, 1)$$

e  $\chi = (\chi_{ij}) \in \mathcal{M}(n, N_X)$  é a incógnita a ser determinada. Temos

$$\mathbf{X} \approx \mathbf{P}\mathbf{X} = \chi\varphi(\boldsymbol{\xi}) . \quad (6.1.4)$$

Adotemos, por exemplo, o ponto de vista variacional: analogamente às seções 4.1 e 5.1.3, a equação diferencial (6.1.1) é aproximada por

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{X} \in S, \quad E(\mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{X}(0)) = E(\mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{X}_0) \quad \text{e} \\ E\left(\mathbf{Y}^t \cdot \frac{d\mathbf{P}\mathbf{X}}{dt}\right) = E(\mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}\mathbf{X}) + E(\mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{B}), \quad \forall \mathbf{Y} \in S . \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

Lembrando que

$$\mathbf{Y} \in \mathbf{S} \iff \mathbf{Y} = \mathbf{D}\varphi(\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{D} = (D_{ij}) \in \mathcal{M}(n, N_X) ,$$

temos, por um lado,

$$\begin{aligned} E\left(\varphi(\boldsymbol{\xi})^t \mathbf{D}^t \frac{d\chi}{dt} \varphi(\boldsymbol{\xi})\right) = E\left(\varphi(\boldsymbol{\xi})^t \mathbf{D}^t \mathbf{A} \varphi(\boldsymbol{\xi})\right) \\ + E\left(\varphi(\boldsymbol{\xi})^t \mathbf{D}^t \mathbf{B}\right), \quad \forall \mathbf{D} \in \mathcal{M}(n, N_X) ; \end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$E\left(\varphi(\boldsymbol{\xi})^t \mathbf{D}^t \chi(0) \varphi(\boldsymbol{\xi})\right) = E\left(\varphi(\boldsymbol{\xi})^t \mathbf{D}^t \mathbf{X}_0\right) . \quad (6.1.6)$$

Temos

$$E\left(\varphi(\boldsymbol{\xi})^t \mathbf{D}^t \frac{d\chi}{dt} \varphi(\boldsymbol{\xi})\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k,m=1}^{N_X} E(\varphi_m(\mathbf{v}) D_{im} \varphi_k(\mathbf{v})) \frac{d\chi_{ik}}{dt} , \quad (6.1.7)$$

$$E\left(\varphi(\mathbf{v})^t \mathbf{D}^t \mathbf{A} \chi \varphi(\mathbf{v})\right) = \sum_{i,j=1}^n \sum_{k,m=1}^{N_X} E(\varphi_m(\mathbf{v}) D_{im} A_{ij} \varphi_k(\mathbf{v})) \chi_{jk}$$

e

$$E\left(\varphi(\mathbf{v})^t \mathbf{D}^t \mathbf{B}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^{N_X} E(\varphi_m(\mathbf{v}) D_{im} B_i) ,$$

Assim, tomando  $D_{im} = \delta_{ir}\delta_{ms}$ , Eq. (4.1.6), leva a, para  $1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq N_X$

$$\sum_{k=1}^{N_X} \left[ E(\varphi_s(\mathbf{v}) \varphi_k(\mathbf{v})) \frac{d\chi_{rk}}{dt} + \sum_{j=1}^n E(\varphi_s(\mathbf{v}) A_{rj} \varphi_k(\mathbf{v})) \chi_{jk} \right] = E(\varphi_s(\mathbf{v}) B_r) . \quad (6.1.8)$$

Sejam

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{rsjk} &= \delta_{jr} E(\varphi_s(\mathbf{v}) \varphi_k(\mathbf{v})), \quad \mathcal{A}_{rsjk} = E(\varphi_s(\mathbf{v}) A_{rj} \varphi_k(\mathbf{v})), \\ \mathcal{C}_{rs}(\mathbf{B}) &= E(\varphi_s(\mathbf{v}) B_r). \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

Temos, para  $1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq N_X$ ,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{N_X} \left[ \mathcal{M}_{rsjk} \frac{d\chi_{jk}}{dt} + \mathcal{A}_{rsjk} \chi_{jk} \right] = \mathcal{C}_{rs}(\mathbf{B}) .$$

Consideremos a aplicação

$$ind(j, k) = (k-1)n + j, \quad (6.1.10)$$

e as matrizes  $\mathbf{M} = (M_{\alpha\beta})$ ,  $\mathbf{N} = (N_{\alpha\beta}) \in \mathcal{M}(nN_X, nN_X)$ ,  $\mathbf{U} = (U_\beta)$ ,  $\mathbf{Q} = (Q_\beta) \in \mathcal{M}(nN_X, 1)$  tais que

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \mathcal{M}_{rsjk}, \quad N_{\alpha\beta} = \mathcal{A}_{rsjk}, \quad Q_\alpha = \mathcal{C}_{rs}(\mathbf{B}), \quad U_\beta = \chi_{jk}, \\ \alpha &= ind(r, s), \quad \beta = ind(j, k) \end{aligned} . \quad (6.1.11)$$

Então, temos

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{N}\mathbf{U} + \mathbf{Q}. \quad (6.1.12)$$

Por outro lado,

$$E(\varphi(\mathbf{v})^t \mathbf{D}^t \mathbf{X}_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^{N_X} E(\varphi_m(\mathbf{v}) D_{im} X_{0i}) ,$$

$$E(\varphi(\boldsymbol{\xi})^t \mathbf{D}^t \boldsymbol{\chi}(0) \varphi(\boldsymbol{\xi})) = \sum_{i=1}^n \sum_{k,m=1}^{N_X} E(\varphi_m(\mathbf{v}) D_{im} \varphi_k(\mathbf{v})) \chi_{ik}(0)$$

e a Eq. (6.1.6) mostra que, para  $1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq N_X$ ,

$$\sum_{k=1}^{N_X} [E(\varphi_s(\mathbf{v}) \varphi_k(\mathbf{v}))] \chi_{rk}(0) = E(\varphi_s(\mathbf{v}) X_{0r}) .$$

Assim, para  $1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq N_X$ ,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{N_X} \mathcal{M}_{rsjk} \chi_{jk}(0) = \mathcal{C}_{rs}(\mathbf{X}_0) .$$

Assim, definindo  $\mathbf{Y}_0 = (Y_{0\beta}) \in \mathcal{M}(nN_X, 1)$  tal que

$$Y_{0\alpha} = \mathcal{C}_{rs}(\mathbf{X}_0) , \alpha = \text{ind}(r, s) , \quad (6.1.13)$$

temos

$$\mathbf{M}\mathbf{U}(0) = \mathbf{Y}_0 . \quad (6.1.14)$$

As Eqs. (6.1.12) e (6.1.14) formam um sistema linear de equações diferenciais que pode ser resolvido para determinar a incógnita  $\mathbf{U}$ . Uma vez determinado  $\mathbf{U}$ , podemos construir  $\chi$  utilizando a Eq. (6.1.11) e, enfim,  $\mathbf{P}\mathbf{X}$ .

EXEMPLO 6.1.1. *Seja  $n = 2$  e a equação diferencial*

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -v_1 \\ v_1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} , \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \text{on } (0, T)$$

*A solução exata é*

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} v_2 \cos(v_1 t) \\ v_2 \sin(v_1 t) \end{pmatrix}$$

*Suponhamos que  $v = (v_1, v_2)$  seja um par de variáveis aleatórias independentes tais que  $v_1$  segue uma lei uniforme sobre  $(a_1, b_1)$  e  $v_2$  é uma variável uniforme sobre  $(a_2, b_2)$ . Utilizamos a base  $(0 \leq i \leq n_1, 0 \leq j \leq n_2)$*

$$\varphi_k(v) = \left( \frac{v_1 - a_1}{b_1 - a_1} \right)^i \left( \frac{v_2 - a_2}{b_2 - a_2} \right)^j , \quad k = (j - 1)n_1 + i .$$

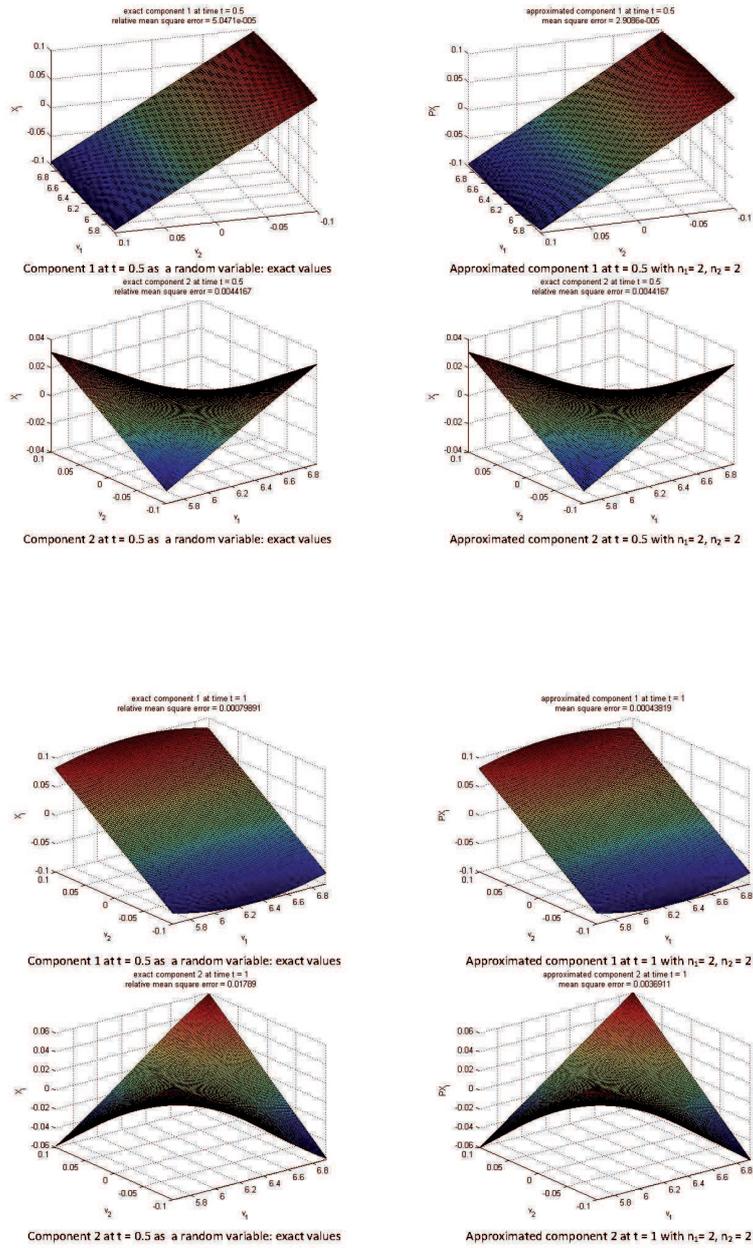


Figura 6.1: Resultados para  $t = 1$  no Exemplo 6.1.1 ( $n_1 = n_2 = 2$ )

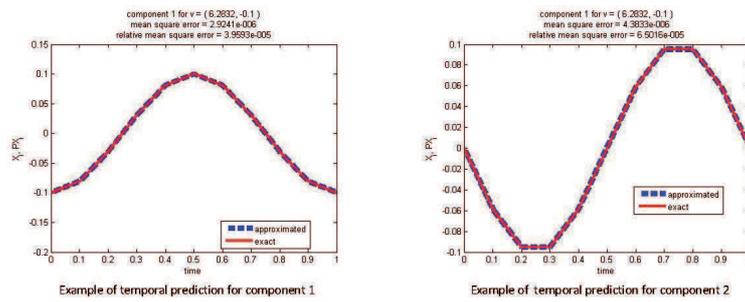


Figura 6.2: Resultados para o Exemplo 6.1.1 com  $nts = 10$  ( $n_1 = n_2 = 2$ )

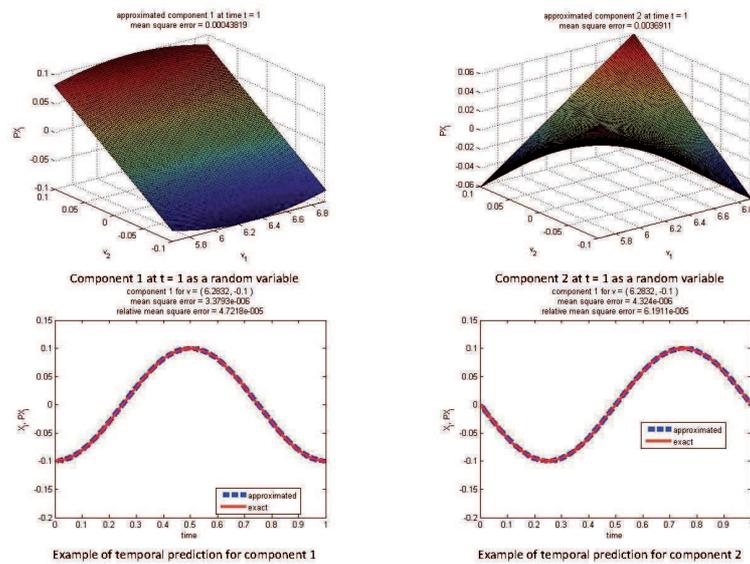


Figura 6.3: Resultados para o Exemplo 6.1.1 com  $nts = 40$  ( $n_1 = n_2 = 2$ )

Os resultados obtidos para  $T = 1$ ,  $a_1 = 1.8\pi$ ,  $b_1 = 2.2\pi$ ,  $a_2 = -0.1$ ,  $b_1 = 0.1$ ,  $n_1 = n_2 = 2$  estão nas Figs. (6.1.1) - (6.3). A equação diferencial formada pelas Eqs. (6.1.12) e (6.1.14) foi integrada utilizando a função MATLAB `ode45` e a solução foi controlada em  $nts$  instantes do tempo correspondendo a  $t = \Delta t, 2\Delta t, \dots, nts\Delta t = 1$ ,  $\Delta t = T/nts$ . As médias foram calculadas por integração numérica utilizando a função `quad` de MATLAB. Para  $nts = 10$ , o erro quadrático médio global observado foi de  $1E - 4$  e o erro relativo correspondente

resultou inferior a 0.3%. As Figs. (6.1.1) - (6.1) comparam as variáveis aleatórias  $\mathbf{X}(t)$ ,  $\mathbf{PX}(t)$  para valores de  $t$  fixos e todos os valores de  $\mathbf{v}$ , enquanto a Fig. (6.2) compara a predição  $\mathbf{PX}(t)$  à solução exata  $\mathbf{X}(t)$  para um ponto  $\mathbf{v}$  particular e todos os valores de  $t$ . Os resultados são análogos para  $nts = 40$ : a Fig. (6.3) mostra um exemplo de resultado para  $nts = 40$ .

## 6.2 Representação das soluções de equações diferenciais não lineares

O procedimento apresentado na seção precedente pode ser adaptado a equações não lineares: consideremos

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0. \quad (6.2.15)$$

Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{PX} \in S, \quad E(\mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{X}(0)) &= E(\mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{X}_0) \quad \text{e} \\ E\left(\mathbf{Y}^t \cdot \frac{d\mathbf{PX}}{dt}\right) &= E(\mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{PX})), \quad \forall \mathbf{Y} \in S. \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

Assim, a Eq. (6.1) se escreve

$$\begin{aligned} E\left(\varphi(\boldsymbol{\xi})^t \mathbf{D}^t \frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt} \varphi(\boldsymbol{\xi})\right) &= \\ E\left(\varphi(\boldsymbol{\xi})^t \mathbf{D}^t \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\chi}\varphi(\boldsymbol{\xi}))\right), \quad \forall \mathbf{D} \in \mathcal{M}(n, N_X); \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

e, dado que

$$\begin{aligned} E\left(\varphi(\mathbf{v})^t \mathbf{D}^t \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\chi}\varphi(\boldsymbol{\xi}))\right) &= \\ \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^{N_X} E(\varphi_m(\mathbf{v}) D_{im} f_i(t, \boldsymbol{\chi}\varphi(\boldsymbol{\xi}))) &, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{k,m=1}^{N_X} E(\varphi_m(\mathbf{v}) D_{im} \varphi_k(\mathbf{v})) \frac{d\chi_{ik}}{dt} &= \\ \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^{N_X} E(\varphi_m(\mathbf{v}) D_{im} f_i(t, \boldsymbol{\chi}\varphi(\boldsymbol{\xi}))) &. \end{aligned}$$

Assim, tomando  $D_{im} = \delta_{ir}\delta_{ms}$ , for  $1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq N_X$ , temos

$$\sum_{k=1}^{N_X} \left[ E(\varphi_s(\mathbf{v}) \varphi_k(\mathbf{v})) \frac{d\chi_{rk}}{dt} \right] = E(\varphi_s(\mathbf{v}) f_r(t, \chi\varphi(\boldsymbol{\xi}))) . \quad (6.2.18)$$

Consideremos

$$F_\alpha(t, \mathbf{U}) = E(\varphi_s(\mathbf{v}) f_r(t, \chi\varphi(\boldsymbol{\xi})))$$

e temos

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{U}) . \quad (6.2.19)$$

com a condição inicial (6.1.14).

EXEMPLO 6.2.1. *Sejam  $n = 1$  e a equação logística*

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(1-x) \quad , \quad x(0) = x_0 .$$

*A solução exata é*

$$x(t) = \frac{x_0 \exp(\alpha t)}{1 - x_0 + x_0 \exp(\alpha t)} .$$

*Supondo que  $v = (\alpha, x_0)$  é um par de variáveis aleatórias independentes tais que  $\alpha$  segue uma lei uniforme sobre  $(0, 1)$  e  $x_0$  é uma v.a. de lei uniforme sobre  $(0.5, 1.5)$ . A equação diferencial (6.2.19) com condição inicial (6.1.14) foi resolvida numericamente com a função `ode45` de MATLAB e a solução foi controlada nos instantes  $t_i = i\Delta t$ ,  $i = 1, \dots, nts$ ,  $\Delta t = T/nts$ . As médias foram determinadas por integração numérica utilizando a função MATLAB `quad`. A Fig. (6.4) mostra um exemplo de resultado para  $nts = 10$ .*

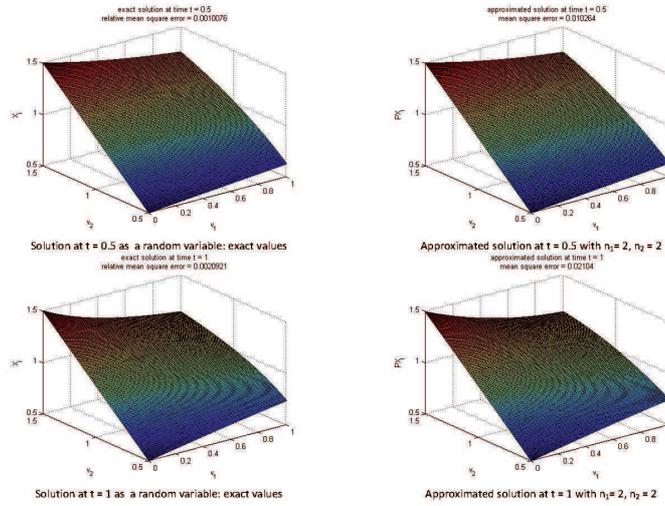


Figura 6.4: Resultados obtidos no Exemplo 6.2.1 ( $n_1 = n_2 = 2$ )

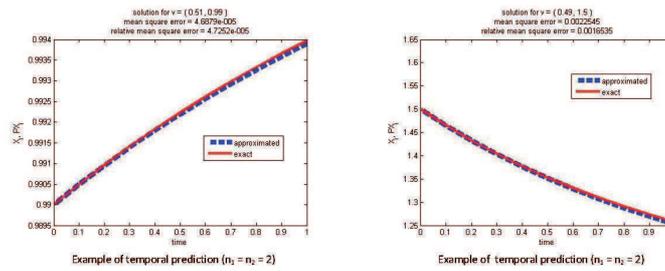


Figura 6.5: Resultados obtidos no Exemplo 6.2.1 ( $n_1 = n_2 = 2$ )

## 6.3 Representação de soluções de equações diferenciais parciais

### 6.3.1 Equações lineares

Equações diferenciais parciais podem ser estudadas utilizando os mesmos métodos, em particular quando escritas em forma variacional. Por exemplo, consideremos

um espaço funcional  $V$ , uma aplicação *bilinear*

$$V \times V \ni (x, y) \longrightarrow a(x, y) \in \mathcal{M}(1, 1) ,$$

um *funcional linear*

$$V \ni y \longrightarrow b(y) \in \mathcal{M}(1, 1) ,$$

e a equação variacional

$$x \in V \text{ e } a(x, y) = b(y), \forall y \in V .$$

Usualmente, a discretização desta última é realizada utilizando de uma família finita  $\{\psi_i\}_{1 \leq i \leq n}$  (tal como, por exemplo, elementos finitos) e o subespaço  $V_n = \left[ \{\psi_i\}_{1 \leq i \leq n} \right]$ . A equação variacional é discretizada sob a forma

$$x \in V_n \text{ and } a(x, y) = b(y), \forall y \in V_n .$$

Consideremos

$$\begin{aligned} A_{ij} &= a(\psi_j, \psi_i) ; B_i = b(\psi_i) ; \\ \mathbf{X} &= (x_1, \dots, x_n)^t ; \mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)^t . \end{aligned}$$

Neste caso, a equação variacional aproximada torna-se

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n \text{ and } \mathbf{Y}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^t \mathbf{B} , \forall \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n ,$$

o que corresponde ao sistema linear

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B} .$$

Aplicando o método apresentado no Capítulo 4 (section 4.1), temos

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{N_X} \mathcal{A}_{rsjk} C_{jk} = \mathcal{B}_{rs} , 1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq N_X ,$$

onde

$$\mathcal{A}_{rsjk} = E(\varphi_s(\mathbf{v}) A_{rj} \varphi_k(\mathbf{v})) , \mathcal{B}_{rs} = E(\varphi_s(\mathbf{v}) B_r) .$$

Assim, introduzindo as mesmas variáveis (ver seção 4.1)  $M = (M_{\alpha\beta}) \in \mathcal{M}(nN_X, nN_X)$ ,  $U = (U_\beta) \in \mathcal{M}(nN_X, 1)$ ,  $N = (N_\alpha) \in \mathcal{M}(nN_X, 1)$  given by

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \mathcal{M}_{rsjk} , N_\alpha = \mathcal{N}_{rs} , U_\beta = C_{jk} , \\ \alpha &= \text{ind}(r, s), \beta = \text{ind}(j, k) , \end{aligned}$$

temos novamente

$$\mathbf{M} \mathbf{U} = \mathbf{N} .$$

### 6.3.2 Equações não lineares

Suponhamos que a aplicação  $(x, y) \rightarrow a(x, y)$  não seja bilinear, mas somente que  $y \rightarrow a(x, y)$  seja linear. Neste caso, a equação variacional aproximada se escreve

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n \text{ e } \mathbf{Y}^t \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \forall \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n,$$

onde

$$F_i(\mathbf{X}) = a\left(\sum_{k=1}^n x_k \psi_k, \psi_i\right) - b_i$$

i. e.,

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n \text{ e } \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}.$$

Aplicando o método apresentado no Capítulo 5 (section 5.1.3), temos

$$\mathcal{F}_{rs}(\boldsymbol{\chi}) = 0, 1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq N_X,$$

onde

$$\mathcal{F}_{rs}(\boldsymbol{\chi}) = E(\varphi_s(\mathbf{v}) F_r(\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{v}))).$$

Assim, introduzindo os mesmos vetores

$$G = (G_\alpha) \in \mathcal{M}(nN_X, 1), U = (U_\beta) \in \mathcal{M}(nN_X, 1)$$

tais que

$$G_\alpha = \mathcal{F}_{rs}, U_\beta = \chi_{jk}, \alpha = \text{ind}(r, s), \beta = \text{ind}(j, k),$$

temos

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}.$$

### 6.3.3 Equações de evolução

Consideremos uma equação variacional dependente do tempo:

$$x \in V \text{ e } \lambda\left(\frac{dx}{dt}, y\right) + a(x, y) = b(t, y), \forall y \in V \text{ and } t \in (0, T),$$

onde  $\lambda: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é bilinear. Seja

$$\Lambda_{ij} = \lambda(\psi_j, \psi_i).$$

Dado que

$$\lambda\left(\frac{dx}{dt}, y\right) = \sum_{i,j=1}^n y_i \lambda(\psi_j, \psi_i) \frac{dx_j}{dt} = \mathbf{Y}^t \boldsymbol{\Lambda} \frac{d\mathbf{X}}{dt},$$

### O caso linear

Para equações lineares, a equação variacional aproximada se escreve

$$\mathbf{\Lambda} \frac{d\mathbf{X}}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} .$$

Introduzindo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{rsjk} &= \delta_{jr} E(\varphi_s(\mathbf{v}) \Lambda_{rj} \varphi_k(\mathbf{v})), \\ \mathcal{A}_{rsjk} &= E(\varphi_s(\mathbf{v}) A_{rj} \varphi_k(\mathbf{v})), \mathcal{C}_{rs}(\mathbf{B}) = E(\varphi_s(\mathbf{v}) B_r), \end{aligned} \quad (6.3.20)$$

temos, para  $1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq N_X$ ,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{N_X} \left[ \mathcal{M}_{rsjk} \frac{d\chi_{jk}}{dt} + \mathcal{A}_{rsjk} \chi_{jk} \right] = \mathcal{C}_{rs}(\mathbf{B}) .$$

Assim, usando as mesmas variáveis  $\mathbf{M} = (M_{\alpha\beta})$ ,  $\mathbf{Q} = (Q_\beta) \in \mathcal{M}(nN_X, 1)$ ,  $\mathbf{N} = (N_{\alpha\beta}) \in \mathcal{M}(nN_X, nN_X)$ ,  $\mathbf{U} = (U_\beta)$ , tais que

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \mathcal{M}_{rsjk}, N_{\alpha\beta} = \mathcal{A}_{rsjk}, Q_\alpha = \mathcal{C}_{rs}(\mathbf{B}), U_\beta = \chi_{jk}, \\ \alpha &= \text{ind}(r, s), \beta = \text{ind}(j, k), \end{aligned} \quad (6.3.21)$$

temos

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{N}\mathbf{U} + \mathbf{Q}$$

### O caso não linear

Numa situação não linear, a equação variacional aproximada se escreve

$$\mathbf{\Lambda} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}),$$

onde

$$f_i(t, \mathbf{X}) = b_i - a \left( \sum_{k=1}^n x_k \psi_k(\boldsymbol{\xi}), \psi_i(\boldsymbol{\xi}) \right) .$$

Assim, considerando

$$F_\alpha(t, \mathbf{U}) = E(\varphi_s(\mathbf{v}) f_r(t, \boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}))) , \alpha = \text{ind}(r, s),$$

temos

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{U}) .$$

## 6.4 Redução de sistemas hamiltonianos

Nesta seção, consideramos equações diferenciais ligadas a *sistemas hamiltonianos*, *i.e.*, equações diferenciais correspondendo às *equações de Hamilton* de um sistema. Neste caso, existem métodos estocásticos de redução do número de incógnitas e é possível gerar equações simplificadas capazes de fornecer valores aproximados de somente um pequeno número de variáveis - eventualmente uma única - sem necessitar o cálculo das demais.

### 6.4.1 Sistemas hamiltonianos

Hamiltonianos são geralmente introduzidos através de transformações de Lagrangianos. Consideremos um sistema descrito pelas coordenadas generalizadas

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n).$$

Utilizamos  $t$  para designar o tempo e  $\dot{\mathbf{q}} = d\mathbf{q}/dt$  para as derivadas temporais. Suponhamos que a energia cinética é  $K = K(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  e a energia potencial total é  $V = V(t, \mathbf{q})$ . O Lagrangiano do sistema é

$$L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(t, \mathbf{q}). \quad (6.4.22)$$

A ação  $\mathcal{A}$  sobre o intervalo de tempo  $(0, \tau)$  é dada por

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \int_0^\tau L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt,$$

e as equações do movimento satisfazem à equação variacional:

$$D\mathcal{A}(\mathbf{q})(\delta\mathbf{q}) = 0, \quad \forall \delta\mathbf{q} \text{ such that } \delta\mathbf{q}(0) = \delta\mathbf{q}(\tau) = 0,$$

onde  $D\mathcal{A}$  é a *derivada de Gateaux* de  $\mathcal{A}$ . Esta equação variacional corresponde às equações de Euler-Lagrange seguintes:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (6.4.23)$$

Consideremos a transformação

$$(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \xrightarrow{\mathbf{T}} (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \quad (6.4.24)$$

dada por

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{q}; \quad \mathbf{P}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{p}; \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (6.4.25)$$

$\mathbf{p}$  é o *momento generalizado*. As Eqs. (6.4.23) se escrevem

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (6.4.26)$$

Seja  $\mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{Q}^{-1}, \mathbf{P}^{-1})$  a transformação inversa associada a  $\mathbf{T}$  (Eq. (6.4.24)). O Hamiltoniano  $H$  do sistema é obtido através da aplicação de uma *transformação de Legendre* ao Lagrangiano  $L$  :

$$H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^t \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - L(t, \mathbf{q}, \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{q}, \mathbf{p})) . \quad (6.4.27)$$

Esta transformação pode ser interpretada como o cálculo da *conjugada de Fenchel* de  $L$  com relação a  $\dot{\mathbf{q}}$ :

$$H(t, \mathbf{q}, \mathbf{s}) = \sup \{ \mathbf{s}^t \mathbf{x} - L(t, \mathbf{q}, \mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \} .$$

Através de uma derivação da expressão de  $\mathbf{s}^t \mathbf{x} - L(t, \mathbf{q}, \mathbf{x})$  com relação a  $x_i$ , o leitor pode verificar facilmente que o máximo é atingido em  $s_i = \partial L / \partial q_i = p_i$ . Temos, por um lado,

$$H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^t \dot{\mathbf{q}} - L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) ; \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) .$$

Assim,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \underbrace{\sum_{j=1}^n \left( p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}}_{=0} = \dot{q}_i . \quad (6.4.28)$$

Por outro lado,

$$L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{p}^t \dot{\mathbf{q}} - H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) ; \quad \mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) .$$

Logo, a Eq. (6.4.28) mostra que

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \left( \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \frac{\partial p_j}{\partial q_i}}_{=0} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

e decorre da Eq. (6.4.26) que

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} .$$

Assim, as equações do movimento se escrevem sob a forma

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (6.4.29)$$

Esta é a *forma hamiltoniana das equações do movimento*.

### 6.4.2 Redução de sistemas hamiltonianos autônomos

Os Hamiltonianos possuem várias propriedades interessantes. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{j=1}^n (-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{q}_j \dot{p}_j) = \frac{\partial H}{\partial t} . \end{aligned}$$

Por conseguinte, um hamiltoniano que não apresenta dependência temporal explícita é constante durante o movimento, i. e.,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \implies \frac{dH}{dt} = 0 . \quad (6.4.30)$$

Um sistem é dito autônomo se e somente se suas equações do movimento não contém dependência temporal explícita. Por exemplo, um sistema tal que  $K = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  and  $V = V(\mathbf{q})$  possui um lagrangiano  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$  e, por conseguinte, um hamiltoniano  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^t \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - L(\mathbf{q}, \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$ , o qual é independente do tempo. Para um tal sistema, a Eq. (6.4.30) mostra que  $H$  é constante e

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \exp(-\lambda H(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$$

define uma função estritamente positiva e independente do tempo.

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) > 0 \quad \text{and} \quad \frac{df}{dt} = 0 .$$

Estas propriedades tornam  $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  um candidato natural para a definição de uma probabilidade independente do tempo no espaço de fase. Por exemplo, podemos considerar

$$\varphi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{A} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) ,$$

onde  $A$  é um fator de normalização. Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial q_i} &= -\lambda f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \frac{\partial H}{\partial q_i} = \lambda f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \dot{p}_i ; \\ \frac{\partial f}{\partial p_i} &= -\lambda f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \frac{\partial H}{\partial p_i} = -\lambda f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \dot{q}_i . \end{aligned}$$

Consideremos  $\Omega = \{1, \dots, n\}$  e dois subconjuntos disjuntos

$$I = \{i_1, \dots, i_m\}, J = \Omega - I = \{j_1, \dots, j_k\} \quad (k = n - m).$$

Suponhamos que estamos interessados somente nas variáveis  $\{(q_i, p_i) : i \in I\}$  e que desejamos eliminar as variáveis  $\{(q_j, p_j) : j \in J\}$ . Sejam

$$\mathbf{q}_I = (q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_m}), \mathbf{p}_I = (p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m})$$

e, de maneira análoga,

$$\mathbf{q}_J = (q_{j_1}, q_{j_2}, \dots, q_{j_k}), \mathbf{p}_J = (p_{j_1}, p_{j_2}, \dots, p_{j_k})$$

Uma idéia simples para obter equações sem as variáveis não desejadas e contendo somente  $(\mathbf{q}_I, \mathbf{p}_I)$ , foi introduzida por Chorin ([17], [18]) e consiste em considerar as equações simplificadas:

$$\frac{dq_i}{dt} = E \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} | (\mathbf{q}_I, \mathbf{p}_I) \right), \quad \frac{dp_i}{dt} = E \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} | (\mathbf{q}_I, \mathbf{p}_I) \right), \quad i \in I, \quad (6.4.31)$$

onde as esperanças condicionais são calculadas usando a densidade  $\varphi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Considerando

$$f_I(\mathbf{q}_I, \mathbf{p}_I) = \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\mathbf{q}_J d\mathbf{p}_J = \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dq_{j_1} dp_{j_1} \dots dq_{j_k} dp_{j_k},$$

temos

$$E \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} | (\mathbf{q}_I, \mathbf{p}_I) \right) = \frac{1}{f_I(\mathbf{q}_I, \mathbf{p}_I)} \int_{S_k} \frac{\partial H}{\partial q_i} f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\mathbf{q}_J d\mathbf{p}_J$$

e

$$E \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} | (\mathbf{q}_I, \mathbf{p}_I) \right) = \frac{1}{f_I(\mathbf{q}_I, \mathbf{p}_I)} \int_{S_k} \frac{\partial H}{\partial p_i} f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\mathbf{q}_J d\mathbf{p}_J.$$

Seja

$$H_I = -\frac{1}{\lambda} \log(f_I(\mathbf{q}_I, \mathbf{p}_I))$$

Temos, para  $i \in I$ .

$$\frac{\partial H_I}{\partial q_i} = \frac{1}{f_I(\mathbf{q}_I, \mathbf{p}_I)} \int_{S_k} \frac{\partial H}{\partial q_i} f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\mathbf{q}_J d\mathbf{p}_J = E \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} | (\mathbf{q}_I, \mathbf{p}_I) \right)$$

e

$$\frac{\partial H_I}{\partial p_i} = \frac{1}{f_I(\mathbf{q}_I, \mathbf{p}_I)} \int_{S_k} \frac{\partial H}{\partial p_i} f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\mathbf{q}_J d\mathbf{p}_J = E \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} | (\mathbf{q}_I, \mathbf{p}_I) \right) .$$

Assim,

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_I}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_I}{\partial q_i}, \quad i \in I, \quad (6.4.32)$$

Esta equação mostra que o sistema reduzido (6.4.31) ainda é hamiltoniano e que seu hamiltoniano é  $H_I$ . Além disto, as equações contêm somente as variáveis de interesse  $(\mathbf{q}_I, \mathbf{p}_I)$ .

## 6.5 Solução local de Equações diferenciais determinísticas através de simulação estocástica

### 6.5.1 Equações diferenciais ordinárias

Consideremos a equação diferencial ordinária

$$\begin{aligned} \alpha(x) u''(x) + \beta(x) u'(x) + \gamma(x) u(x) + f(x) &= 0 \text{ sobre } (0, \ell) ; \\ u(0) = u_0 ; u(\ell) = u_\ell . \end{aligned}$$

Pondo  $\Omega = (0, \ell)$ ,  $\partial\Omega = \{0, \ell\}$ ,

$$u_{\partial\Omega}(x) = u_0, \text{ se } x = 0 ; \quad u_{\partial\Omega}(x) = u_\ell, \text{ se } x = \ell ,$$

temos

$$\begin{aligned} \alpha(x) u''(x) + \beta(x) u'(x) + \gamma(x) u(x) + f(x) &= 0 \text{ sobre } \Omega ; \\ u &= u_{\partial\Omega} \text{ sobre } \partial\Omega . \end{aligned}$$

Supondo  $\alpha \geq 0$ , consideremos

$$a(x) = \sqrt{2\alpha(x)} ; \quad b(x) = \beta(x)$$

e a difusão estocástica

$$dX_t = a(X_t) dW_t + b(X_t) dt ; \quad X(0) = x \in \Omega . \quad (6.5.33)$$

Consideremos o processo

$$Y(t) = u(X(t)) \exp \left( \int_0^t \gamma(X(s)) ds \right).$$

Temos  $Y = F \left( t, X(t), \int_0^t \gamma(X(s)) ds \right)$  onde

$$F(t, x, z) = u(x) \exp(z),$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} &= u(x) \exp(z) ; \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0 ; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = u'(x) \exp(z) ; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= u''(x) \exp(z) . \end{aligned}$$

Assim,

$$dY_t = (A_t dW_t + B_t dt) \exp \left( \int_0^t \gamma(X(s)) ds \right),$$

onde

$$\begin{aligned} A_t &= a(X_t) u'(X_t) ; \\ B_t &= \frac{1}{2} [a(X_t)]^2 u''(X_t) + b(X_t) u'(X_t) + \gamma(X_t) u(X_t) . \end{aligned}$$

Seja

$$\tau = \inf \{ t \geq 0 : X(t) \notin \Omega \} .$$

Para  $t < \tau$ , temos  $X_t \in \Omega$ , de modo que

$$B_t = \underbrace{\frac{1}{2} [a(X_t)]^2 u''(X_t)}_{\alpha(X_t)} + \underbrace{b(X_t) u'(X_t)}_{\beta(X_t)} + \gamma(X_t) u(X_t) = -f(X_t)$$

e, por conseguinte,

$$dY_t = (A_t dW_t - f(X_t) dt) \exp \left( \int_0^t \gamma(X(s)) ds \right).$$

Assim,

$$Y(\tau) - Y(0) = \int_0^\tau A_t \exp\left(\int_0^t \gamma(X(s)) ds\right) dW_t - \int_0^\tau f(X_t) \exp\left(\int_0^t \gamma(X(s)) ds\right) dt .$$

Dado que

$$E\left(\int_0^\tau A_t \exp\left(\int_0^t \gamma(X(s)) ds\right) dW_t\right) = 0 \text{ e } Y_0 = u(x) ,$$

temos

$$u(x) = E(Z(\tau)) ; \\ Z(\tau) = Y(\tau) + \int_0^\tau f(X_t) \exp\left(\int_0^t \gamma(X(s)) ds\right) dt .$$

Para  $t < \tau$ , temos  $X_t \in \Omega$  e para  $t > \tau$ , temos  $X_t \notin \Omega$ , de modo que  $X_\tau \in \partial\Omega$ , de forma que

$$u(x) = E(Z(\tau)) ,$$

onde

$$Z(\tau) = u_{\partial\Omega}(X_\tau) \exp\left(\int_0^\tau \gamma(X(t)) dt\right) + \int_0^\tau f(X(t)) \exp\left(\int_0^t \gamma(X(s)) ds\right) dt .$$

Este resultado pode ser utilizado para a determinação numérica de  $u(x)$ : discretizamos (6.5.33) através de um método usual (Runge-Kutta, Euler, etc.). Por exemplo,

$$X_{n+1} - X_n = a(X_n) \Delta W_n + b(X_n) \Delta t ; X_0 = x \in \Omega . \text{ (Euler)}$$

Esta discretização fornece uma seqüência de valores  $\{X_n\}_{n \geq 0}$ , com a qual podemos determinar

$$n = \min \{i > 0 : X_i \notin \Omega\} ,$$

o que nos permite obter uma aproximação de  $Z(\tau)$

$$Z(\tau) \approx u_{\partial\Omega}(X_n) \exp\left(\Delta t \sum_{j=0}^{n-1} \gamma(X_j)\right) + \Delta t \sum_{i=0}^{n-1} \left[ f(X_i) \exp\left(\Delta t \sum_{j=0}^{i-1} \gamma(X_j)\right) \right].$$

Repetindo este procedimento  $nr$  vezes, construímos uma amostra de  $Z(\tau)$ , formada dos valores  $Z_1, \dots, Z_{nr}$  e podemos estimar

$$u(x) \approx \frac{1}{nr} \sum_{i=0}^{nr} Z_i.$$

### 6.5.2 Equações diferenciais parciais elípticas

Consideremos a equação diferencial ordinária (convenção de soma sobre índices repetidos  $1 \leq i, j \leq n$ )

$$\alpha_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \beta_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \gamma(x) u(x) + f(x) = 0 \text{ sobre } \Omega; \\ u = u_{\partial\Omega} \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Supondo

$$\alpha = \frac{1}{2} a a^t \iff \alpha_{ij} = \frac{1}{2} a_{ik} a_{jk}, \quad (6.5.34)$$

consideremos a difusão estocástica multidimensional

$$dX_t = a(X_t) dW_t + b(X_t) dt \quad (b = \beta); \quad X(0) = x \in \Omega. \quad (6.5.35)$$

e o processo

$$Y(t) = u(X(t)) \exp\left(\int_0^t \gamma(X(s)) ds\right).$$

Temos  $Y = F\left(t, X(t), \int_0^t \gamma(X(s)) ds\right)$  onde

$$F(t, x, z) = u(x) \exp(z).$$

Neste caso,

$$\frac{\partial F}{\partial z} = u(x) \exp(z) ; \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0 ; \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \exp(z) ;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \exp(z) ,$$

de modo que

$$dY_t = ((A_t)_i d(W_t)_i + B_t dt) \exp \left( \int_0^t \gamma(X(s)) ds \right) ,$$

onde

$$A_t = a(X_t) \nabla u(X_t) ;$$

$$B_t = \frac{1}{2} a_{ik}(X_t) a_{jk}(X_t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(X_t)$$

$$+ b_i(X_t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_t) + \gamma(X_t) u(X_t) .$$

De maneira análoga, consideramos

$$\tau = \inf \{ t \geq 0 : X(t) \notin \Omega \} .$$

Para  $t < \tau$ , temos  $X_t \in \Omega$ , de modo que, para  $t < \tau$ ,

$$B_t = -f(X_t)$$

e temos ainda

$$u(x) = E(Z(\tau)) ,$$

onde

$$Z(\tau) = u_{\partial\Omega}(X_\tau) \exp \left( \int_0^\tau \gamma(X(t)) dt \right)$$

$$+ \int_0^\tau f(X(t)) \exp \left( \int_0^t \gamma(X(s)) ds \right) dt .$$

Assim,  $u(x)$  pode ser aproximado pelo método descrito na seção precedente.

### 6.5.3 Equações diferenciais parciais parabólicas

Consideremos a equação diferencial ordinária (convenção de soma em índices repetidos  $1 \leq i, j \leq n$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \alpha_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \beta_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ &+ \gamma(x, t) u(x, t) + f(x, t) \text{ sobre } \Omega \times (0, T) ; \\ u &= u_{\partial\Omega} \text{ sobre } \partial\Omega ; u(x, 0) = u_0(x) \text{ sobre } \Omega \end{aligned}$$

Supondo ainda que (6.5.34) é satisfeita, consideremos a difusão estocástica multidimensional

$$dX_t = a(X_t, S_t) dW_t + b(X_t, S_t) dt \quad (b = \beta) ; dS_t = -dt ; \quad (6.5.36)$$

$$X(0) = x \in \Omega ; S(0) = t \quad (6.5.37)$$

e o processo

$$Y(t) = u(X(t), S(t)) \exp\left(\int_0^t \gamma(X(s), S(s)) ds\right) .$$

$$\text{Pondo } \tilde{X} = (X, S), \text{ temos } Y = F\left(t, \tilde{X}(t), \int_0^t \gamma(\tilde{X}(s)) ds\right) \text{ onde}$$

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

verifica

$$F(t, \tilde{x}, z) = u(\tilde{x}) \exp(z) .$$

Neste caso ainda, para

$$\tau = \inf \left\{ t \geq 0 : \tilde{X}(t) \notin \Omega \times (0, T) \right\}$$

temos

$$u(x) = E(Z(\tau)) ,$$

onde

$$\begin{aligned} Z(\tau) &= u_{\partial\Omega}(X_\tau, S_\tau) \exp\left(\int_0^\tau \gamma(X(t), S(t)) dt\right) \\ &+ \int_0^\tau f(X(t), S(t)) \exp\left(\int_0^t \gamma(X(s), S(s)) ds\right) dt . \end{aligned}$$

Assim, podemos aproximar  $u(x, t)$  pelo método descrito precedentemente. Notemos que

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : X(t) \notin \Omega \text{ ou } S(t) \notin (0, T)\} .$$

#### 6.5.4 Diferenças finitas

Os esquemas de aproximação por diferenças finitas podem ser interpretados em termos probabilistas. Para tanto, consideremos uma seqüência de variáveis aleatórias  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  tais que a lei condicional de  $X_{n+1}$  com relação a  $X_n$  é independente de  $n$  e dada por

$$f(x | X_n = y) = \pi^h(x, y) ,$$

onde  $h > 0$  é um parâmetro.

Seja  $\{X_t^h\}_{t \geq 0}$  o processo estocástico obtido por interpolação linear de  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  com um passo  $h$ :

$$\begin{aligned} X^h(nh) &= X_n \quad ; \quad t \in (nh, (n+1)h) \implies X^h(t) = \\ &X_n + \left(\frac{t-nh}{h}\right)(X_{n+1} - X_n) . \end{aligned}$$

Consideremos

$$\begin{aligned} a_{ij}^h(x) &= \frac{1}{h} \int_{\|y-x\| \leq 1} (y_i - x_i)(y_j - x_j) \pi^h(x, y) \ell(dy) , \\ b_i^h(x) &= \frac{1}{h} \int_{\|y-x\| \leq 1} (y_i - x_i) \pi^h(x, y) \ell(dy) , \\ A^h(u)(x) &= \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^n} (u(y) - u(x)) \pi^h(x, y) \ell(dy) . \end{aligned}$$

Temos (Cf. [22])

TEOREMA 6.5.1. *Se*

(i)  $a^h(x) \rightarrow a(x)$  e  $b^h(x) \rightarrow b(x)$  *uniformemente sobre todo compacto de*  $\mathbb{R}^n$  *para*  $h \rightarrow 0+$  ;

(ii)  $\{a^h(x)\}_{h > 0}$  e  $\{b^h(x)\}_{h > 0}$  *são limitadas independentemente de*  $x$  ;

(iii)  $\forall \varepsilon > 0 : \sup \left\{ \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^n - B_\varepsilon(x)} \pi^h(x, y) \ell(dy) : x \in \mathbb{R}^n \right\} \rightarrow 0$  *para*  $h \rightarrow 0+$  ;

então, quando  $h \rightarrow 0+$ ,  $X_t^h$  converge em lei para  $X_t$  tal que

$$dX_t = a(X_t) dW_t + b(X_t) dt \quad ; \quad X(0) = x$$

e

$$A^h(u)(x) \rightarrow A(u)(x) = \left. \frac{d}{dt} E(u(X_t) | X_0 = x) \right|_{t=0} .$$

Consideremos a equação

$$\Delta u = -f \text{ sobre } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad ; \quad u = u_{\partial\Omega} \text{ sobre } \partial\Omega$$

Quando usamos a discretização em diferenças finitas seguinte:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} = -f_{i,j} ,$$

temos

$$\frac{1}{h_1^2} u_{i+1,j} + \frac{1}{h_1^2} u_{i-1,j} + \frac{1}{h_2^2} u_{i,j+1} + \frac{1}{h_2^2} u_{i,j-1} - 2 \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) u_{i,j} = -f_{i,j} ,$$

isto é,

$$\Pi_{i+1,j} u_{i+1,j} + \Pi_{i-1,j} u_{i-1,j} + \Pi_{i,j+1} u_{i,j+1} + \Pi_{i,j-1} u_{i,j-1} - u_{i,j} = -h f_{i,j} ,$$

onde

$$h = \frac{h_1^2 h_2^2}{2(h_1^2 + h_2^2)} \quad ; \quad \Pi_{i+1,j} = \Pi_{i-1,j} = \frac{h}{h_1^2} \quad ; \quad \Pi_{i,j+1} = \Pi_{i,j-1} = \frac{h}{h_2^2} .$$

Notemos que

$$\Pi_{i+1,j} + \Pi_{i-1,j} + \Pi_{i,j+1} + \Pi_{i,j-1} = 1 .$$

Seja  $\{e_1, e_2\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$  e

$$\begin{aligned} \pi^h(x, y) = & \Pi_{i-1,j} \delta(x - e_1 - y) + \Pi_{i+1,j} \delta(x + e_1 - y) \\ & + \Pi_{i,j-1} \delta(x - e_2 - y) + \Pi_{i,j+1} \delta(x + e_2 - y) . \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} A^h(u)(x) = & \Pi_{i+1,j} u(x + e_1) + \Pi_{i-1,j} u(x - e_1) \\ & + \Pi_{i,j+1} u(x + e_2) + \Pi_{i,j-1} u(x - e_2) ; \end{aligned}$$

$$a_{ij}^h(x) = 0, \text{ se } i \neq j \quad ; \quad a_{11}^h(x) = \Pi_{i+1,j} + \Pi_{i-1,j} ;$$

$$a_{22}^h(x) = \Pi_{i,j+1} + \Pi_{i,j-1} ; \quad b^h = 0 .$$

Assim, decorre do teorema que

$$\left. \frac{d}{dt} E(u(X_t) | X_0 = x) \right|_{t=0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} A^h(u),$$

de modo que podemos aproximar a solução através de  $X_t^h$ : temos

$$E(u(X_{i+1}) | X_i) - u(X_i) \approx hA^h(u)(X_i) = hf(X_i).$$

Assim, fazendo a soma destas igualdades até o índice  $n - 1$  e tomando a esperança:

$$u(x) \approx E \left( u_{\partial\Omega}(X_n) + h \sum_{i=0}^{n-1} f(X_i) \right)$$

## 6.6 Estatísticas de sistemas dinâmicos

O estudo de sistemas dinâmicos contendo incertezas vem despertando um interesse crescente. Em Mecânica, por exemplo, a variabilidade de parâmetros materiais, de geometria, ou de condições iniciais e de contorno leva a considerar a variabilidade de sistemas dinâmicos. Por exemplo, um pêndulo pode ser afetado por diversas variabilidades: comprimento, massa, rigidez, amortecimento etc, as quais terão um impacto sobre suas frequência naturais e, portanto, sobre sua estabilidade.

Dificuldades específicas surgem quando estamos interessados em movimentos periódicos, dado que os parâmetros usuais (período, autovalores do sistema linearizado, etc.) tornam-se aleatórios. Por exemplo, os autovalores podem ser afetados ao ponto de mudarem de sinal segundo os valores dos parâmetros, com consequências significativas sobre a estabilidade. Além disto, curvas típicas, tais como, por exemplo, ciclos-limite, órbitas periódicas, seções de Poincaré, tornam-se aleatórias.

Como nas demais situações tratadas neste texto, é necessário caracterizar as distribuições de probabilidade e estatísticas destas curvas e dos parâmetros que lhes são associados. Este tipo de análise envolve uma dificuldade particular: ciclos-limite e órbitas são objetos pertencentes a espaços de dimensão infinita: é necessário definir probabilidades e manipular médias e variâncias de objetos se encontrando em espaços funcionais de dimensão infinita. Existe na literatura um procedimento tradicional - as medidas cilíndricas (Cf., por exemplo, [73], [4], [5]) - mas que não é suficientemente operacional. Neste caso, é preferível adotar o ponto de vista apresentado na seção 1.7, o qual leva a uma construção natural das estatísticas.

Consideremos, de forma geral, um sistema dinâmico em  $\mathbb{R}^n$ , tendo por equações

:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) & \forall t \in [O; T], \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (6.6.38)$$

Um exemplo simples é fornecido pelo oscilador harmônico clássico, correspondendo a uma massa-mola:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) & \forall t \in [O; T] \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{X}_0 & \text{aleatório} \end{cases} \quad (6.6.39)$$

onde  $\mathbf{x} = (x_1; x_2)^t$ ,  $k$  é a rigidez da mola,  $m$  é a massa e  $\dot{x}_1 = dx_1/dt$ . As figuras 6.6 e 6.7 (Cf. [20]) mostram o retrato de fase e as trajetórias para diferentes valores de  $\mathbf{x}_0$  com  $k = 1$  e  $m = 1$ . É interessante notar que o ciclo-limite varia com  $\mathbf{x}_0$

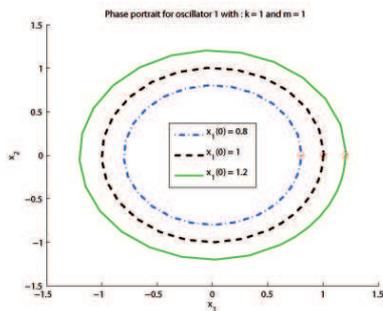


Figura 6.6: Retrato de fase do oscilador 1 para diferentes condições iniciais

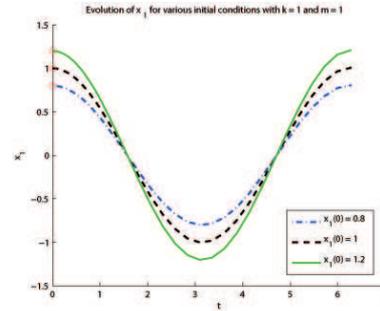


Figura 6.7: Evolução de  $x_1(t)$  do oscilador 1 para diferentes condições iniciais

Um caso mais complexo é fornecido pelo oscilador de Van der Pol [28], que foi muito estudado. Uma de suas propriedades mais interessantes é a existência de um ciclo-limite independente das condições iniciais. Suas equações são as seguintes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & \forall t \in [O; T] \\ \dot{x}_2 = \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 - \Omega_0^2 x_1 \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (6.6.40)$$

no qual  $\varepsilon$  mede o grau de não-linearidade do sistema e  $\Omega_0$  é uma variável aleatória positiva.  $\Omega_0$  influe sobre as propriedades do sistema, como podemos observar nas figuras abaixo: os ciclos-limite são dados na Fig. (figure 6.8) e as trajetórias de  $x_1$  na Fig. (figure 6.9) - utilizamos  $\varepsilon = 1$ . A tabela 6.1 indica os valores do período (Cf. [20])

$\Omega_0$	período	$\max_t x_1(t)$	$\min_t x_1(t)$	$\max_t x_2(t)$	$\min_t x_2(t)$
0.8	8.58	2.01	-2.01	2.35	-2.35
1	6.66	2.00	-2.01	2.67	-2.67
1.2	5.46	2.01	-2.00	3.01	-3.00

Tabela 6.1: Características das órbitas periódicas para diferentes valores de  $\Omega_0$

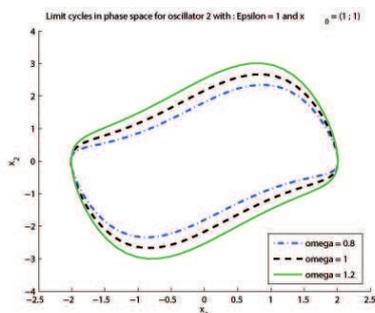


Figura 6.8: Órbitas periódicas para o oscilador 2

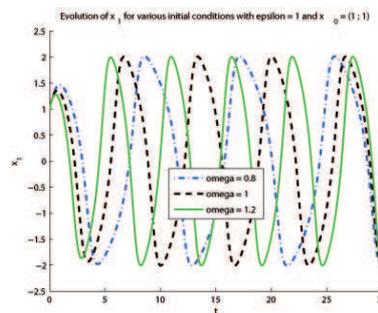


Figura 6.9: Evolução de  $x_1(t)$  para o oscilador 2

### 6.6.1 Cálculo de estatísticas do ciclo-limite

Os ciclos-limite são órbitas periódicas fechadas, de modo que um ciclo-limite é descrito por uma aplicação contínua  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  no qual  $I$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$ . Dado que não estamos interessados nos aspectos temporais, podemos, sem perda de generalidade, considerar  $I = [0; 1]$ . Como apresentado na seção 1.7, consideramos curvas pertencentes a um espaço de Hilbert separável  $V$ , dotado de uma base hilbertiana  $\Phi = \{\phi_n\}_{n \geq 1}$  e exprimimos cada realização de um ciclo-limite nesta base:

$$\mathbf{Y}(\omega)(\cdot) = \sum_{i \geq 1} \mathbf{A}_i(\omega) \phi_i(\cdot) \quad (6.6.41)$$

Assim, o ciclo-limite é uma variável aleatória  $Y(\omega)$  tomando valores em  $V$  e que pode ser identificada à sequência  $\{\mathbf{A}_i(\omega)\}_{i \geq 1}$  dos coeficientes na base hilbertiana

considerada. Usualmente, a média de uma variável aleatória  $X$  de lei  $\mu$  tomando valores em  $\Omega$  é dada por :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} x(\omega) d\mu(\omega) \quad (6.6.42)$$

No caso presente,  $\mu$  é definida em  $V$ , o qual possui dimensão infinita e as definições clássicas de Riemann ou de Lebesgue não podem ser aplicadas. A ferramenta adaptada é a teoria dos espaços funcionais de Bochner (Cf., por exemplo, [12]) e que foi previamente introduzida na seção 1.7: define-se a integral primeiro para funções simples e depois para seqüências de funções simples. A teoria apresenta resultados sobre as condições de convergência para que seja possível escrever (Cf., por exemplo, [30])

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y(\omega)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n A_i \phi_i \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[A_i] \phi_i \end{aligned}$$

Na prática, devemos utilizar uma aproximação de  $Y(\omega)$  em um subespaço  $V_N$  de dimensão  $N$ :

$$p_N \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \phi_i \quad (6.6.43)$$

onde  $p_N(\cdot)$  designa a projeção ortogonal de  $V$  sobre  $V_N$ . Neste caso,

$$p_N(\mathbb{E}[Y(\omega)]) = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[A_i] \phi_i \quad (6.6.44)$$

As Figs. (6.10)-(6.11) mostram resultados obtidos por colocação, utilizando uma base de elementos finitos lineares e uma amostra de 20 órbitas periódicas. Para o oscilador 1,  $\mathbf{x}_0 = (1; U)$  onde  $U$  segue a lei uniforme sobre  $[0.5; 1.5]$ . Para o oscilador de van der Pol, tomamos  $\Omega_0 = U$  (Cf. [20]).

O ciclo-limite exato para o oscilador 1 é :

$$\mathbf{Y}_{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + U \sin(t) \\ -\sin(t) + U \cos(t) \end{pmatrix} \quad (6.6.45)$$

e podemos comparar o resultado obtido com o resultado exato: o resultado calculado é praticamente idêntico ao exato.

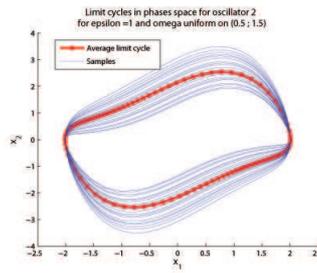
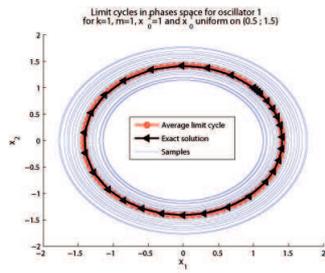


Figura 6.10: Órbita periódica média e amostras de órbitas periódicas no espaço de fases para o oscilador 1  
 Figura 6.11: Órbita periódica média e amostras de órbitas periódicas no espaço de fases para o oscilador 2

Se desejamos determinar as leis dos coeficientes  $\{\mathbf{A}_i(\omega)\}_{i \geq 1}$ , podemos usar as técnicas de representação precedentemente introduzidas: definimos

$$\mathbf{P}\mathbf{Y} = \sum_{n \geq 1} \sum_{j \geq 1} a_{n,j} \psi_j(\{\xi_k(\omega)\}_{k \geq 1}) \phi_n(\cdot) \tag{6.6.46}$$

e buscamos determinar os coeficientes deterministas  $a_{n,j} \in \mathbb{R}^n$ , o que pode ser efetuado, por exemplo, por colocação ou ajuste de momentos. A fig. 6.12 mostra os resultados obtidos para o oscilador de Van der Pol a partir de uma amostra de 40 ciclos-limite e uma base de polinômios de Hermite, com uma aproximação de ordem 2,  $\xi = \xi_1$  de lei uniforme sobre  $[0; 1]$  e coeficientes calculados por colocação. A figura mostra o intervalo de confiança 95% para o ciclo-limite (pontilhado, Cf. [20])

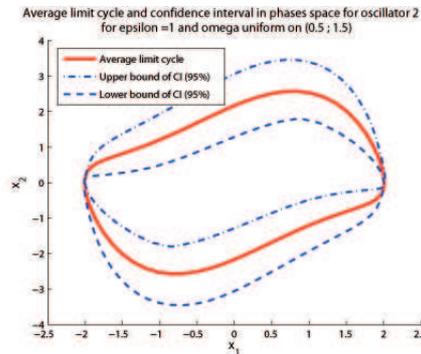


Figura 6.12: Ciclo-limite médio e intervalo de confiança 95% para o oscilador 2 .

## Capítulo 7

# Otimização em Presença de Incertezas

Os procedimentos de otimização buscam determinar os valores de certas variáveis de forma a reduzir o máximo possível custos, respeitando certas restrições. Na situação – frequente – onde alguns destes elementos são definidos ou envolvem de algum modo um vetor de dados, ou parâmetros,  $\mathbf{v}$ , a solução  $\mathbf{x}$  torna-se uma função  $\mathbf{x}(\mathbf{y})$  do vetor  $\mathbf{v}$ . Assim, quando estes parâmetros apresentam variabilidade ou incerteza, a solução do problema de otimização torna-se, ela também, variável ou incerta.

Por exemplo, consideremos a situação simples onde procuramos um número real  $x$  que minimize  $F(x) = (x - v_1)^2$  sob a restrição  $x \geq v_2$ : a solução - óbvia neste caso - é

$$x = \begin{cases} v_1, & \text{if } v_1 \geq v_2 \\ v_2, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } v_1 \geq v_2 \\ (v_2 - v_1)^2, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Se  $v_1$  e  $v_2$  são variáveis aleatórias, a solução ótima  $x$  e o valor ótimo  $F(x)$  também são variáveis aleatórias. Por exemplo, se ambas as variáveis  $v_1$  e  $v_2$  variam no intervalo  $(0, 1)$ ,  $x$  varia no intervalo  $(-1, 1)$  e  $F(x)$  varia no intervalo  $(0, 1)$ .

Um exemplo de variação catastrófica é fornecido pela minimização de

$$F(x_1, x_2) = ((v_1 - 1)^2 + 1)x_1^2 - 4(v_1 - 1)x_1x_2 + 2x_1 - 2x_2 + ((v_1 - 1)^2 + 1)x_2^2.$$

Neste caso, a solução - óbvia também aqui - é, para  $v_1 \neq 0$ ,

$$x_1 = -1/v_1^2, x_2 = 1/v_1^2.$$

Para  $v_1 = 0$ , há uma infinidade de soluções. Se o parâmetro  $v_1$  varia no intervalo  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ , os valores de  $x_1$  variam entre  $-\infty$  e  $-1/\varepsilon^2$ , enquanto os valores de  $x_2$  variam entre  $1/\varepsilon^2$  e  $\infty$ .

Estes exemplos, relativamente simples, mostram que a variabilidade dos pontos e valores de ótimo devem ser levados em conta quando devemos garantir a segurança e a confiabilidade das soluções. Neste capítulo, consideramos o problema da detreminação da distribuição de probabilidades do ponto de ótimo. Um ponto de vista alternativo consistindo em buscar uma solução satisfazendo restrições sobre probabilidades de certos eventos é a otimização baseada em confiabilidade (Reliability-Based Design Optimization, RBDO), apresentada no capítulo 8. Exemplos de problemas de otimização com incertezas podem ser encontrados em [62, 55]

## 7.1 Representação de soluções em otimização sem restrições

Um problema de otimização determinista (Unconstrained Optimization Problem, UOP) se escreve sob a forma geral:

$$\mathbf{x} = \arg \min \{F(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n\}$$

no qual  $F : \mathcal{M}(n, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função a valores reais e  $\mathbf{x} = (x_i) \in \mathcal{M}(n, 1)$  é a incógnita. Na prática,  $F$  pode depender de parâmetros que sofrem de variabilidade ou incerteza. Em tal situação, o UOP acima formulado torna-se um UOP incerto. Por exemplo, consideremos incertezas modeladas por um vetor incerto  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{nr})$  e  $F = F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ . Neste caso, o UOP torna-se

$$\mathbf{X} = \arg \min \{F(\mathbf{Y}, \mathbf{v}) : \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n\} \quad (7.1.1)$$

A situação descrita na Eq. (7.1.1) pode ser estudada por diferentes métodos e procedimentos, tais como programação estocástica, confiabilidade e RBDO, programação nebulosa (fuzzy), programação intervalar, entre outras. Cada uma destas técnicas repousa em teorias distintas. Por exemplo, métodos de programação estocástica e de confiabilidade utilizam variáveis aleatórias para modelar as incertezas ( $\mathbf{v}$  é um vetor aleatório), enquanto as técnicas nebulosas utilizam vetores nebulosos (fuzzy). De maneira análoga, as técnicas intervalares utilizam vetores de intervalos e cálculo intervalar. Usualmente, as técnicas de tipo estocástico são utilizadas nas situações onde as incertezas correspondem a processos estocásticos conhecidos ou identificados, enquanto as demais são adaptadas às situações onde as características estatísticas e probabilísticas das incertezas não podem ser facilmente obtidas, levando em conta a presença de  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{X}$  torna-se um vetor incerto.

Nesta seção, estamos interessados na situação onde  $\mathbf{X}$  é considerado como uma variável aleatória e nosso objetivo é a determinação de sua distribuição de probabilidades - notemos que se trata de um ponto de vista distinto dos já citados: a programação estocástica visa à minimização de características estatísticas de  $F$  - por exemplo, sua média ou variância; a RBDO visa à introdução de restrições sobre as probabilidades de eventos ligados à solução e busca a solução de um problema de minimização de  $F$  sob tais restrições; a otimização nebulosa produz vetores nebulosos e não permite a determinação de distribuições de probabilidade; da mesma forma, os procedimentos intervalares produzem intervalos e tampouco levam à produção de distribuições de probabilidade. Enfim, notemos que a determinação da distribuição de  $\mathbf{X}$  permite a construção de estatísticas e probabilidades de eventos ligados à solução  $\mathbf{X}$  e ao valor ótimo de  $F$ .

De forma análoga às situações precedentemente estudadas, consideramos uma aproximação  $\mathbf{PX}$  de  $\mathbf{X}$  em um subespaço conveniente  $S$  de variáveis aleatórias (Cf. seção 3). Por exemplo, seja  $\mathcal{F} = \{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  uma família convenientemente escolhida de funções,  $N_X \in \mathbb{N}^*$ ,  $\boldsymbol{\xi}$  uma variável aleatória conveniente,  $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) = (\varphi_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, \varphi_p(\boldsymbol{\xi}))^t \in \mathcal{M}(N_X, 1)$  e

$$\mathbf{PX} = \boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=1}^{N_X} \boldsymbol{\chi}_k \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) \left( \text{i.e., } (\mathbf{PX})_j = \sum_{k=0}^{N_X} \boldsymbol{\chi}_{jk} \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) \right), \quad (7.1.2)$$

o que corresponde a

$$S = [\{\varphi_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, \varphi_{N_X}(\boldsymbol{\xi})\}]^n = \left\{ \sum_{k=1}^{N_X} \mathbf{D}_k \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) : \mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^n, 1 \leq k \leq N_X \right\}. \quad (7.1.3)$$

Como nas situações estudadas anteriormente, a incógnita a ser determinada é  $\boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{\chi}_{ij}) \in \mathcal{M}(n, N_X)$ . Por exemplo, a Eq. (7.1.1) pode ser aproximada por

$$\mathbf{PX} = \arg \min \{F(\mathbf{Y}, \mathbf{v}) : \mathbf{Y} \in S\} \quad (7.1.4)$$

e  $\boldsymbol{\chi}$  pode ser determinado através da resolução da Eq. (7.1.4) utilizando uma das técnicas apresentadas abaixo.

### 7.1.1 Colocação

Como nas situações precedentes, a maneira mais simples para determinar  $\mathbf{PX}$  consiste em gerar uma amostra  $\mathcal{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{ns})$  de  $ns$  realizações de  $\mathcal{X}$  e calcular os valores de  $\boldsymbol{\chi}$  resolvendo o sistema linear

$$\mathbf{P}\mathbf{X}(\xi_i) = \mathbf{X}_i \quad , \quad i = 1, \dots, ns \quad . \quad (7.1.5)$$

EXEMPLO 7.1.1. Consideremos a situação onde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  e

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (x_1 - v_1 v_2)^2 + (x_2 - v_1 - v_2)^2 \quad .$$

Neste caso,

$$X = \begin{pmatrix} v_1 v_2 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix} \quad .$$

Consideremos  $(v_1, v_2)$  como um par de variáveis independentes, com  $v_i$  de lei uniforme sobre  $(a_i, b_i)$ . As aproximações utilizam

$$\varphi_k(\mathbf{v}) = \left( \frac{v_1 - a_1}{b_1 - a_1} \right)^r \left( \frac{v_2 - a_2}{b_2 - a_2} \right)^s \quad , \quad k = sn_1 + r \quad , \quad (7.1.6)$$

onde  $n_1 > 0$ ,  $n_2 > 0$ ,  $0 \leq r \leq n_1$ ,  $0 \leq s \leq n_2$ ). Utilizamos  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 1$ ,  $a_2 = -1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 3$ . os resultados para uma grade uniforme de 6 valores de cada variável  $v_i$  se encontram nas Figs. (7.1)-(7.2).

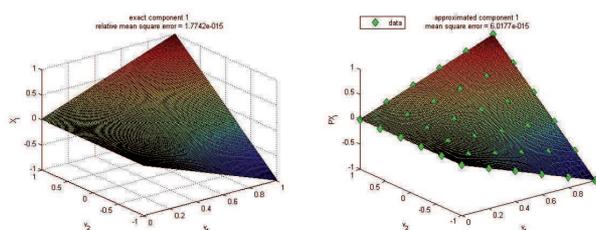


Figura 7.1: Resultados obtidos para  $X_1$  no Exemplo 7.1.1 (grade uniforme)

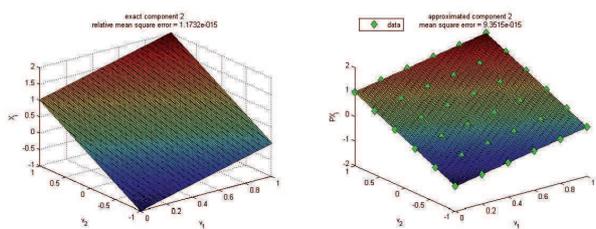


Figura 7.2: Resultados obtidos para  $X_2$  no Exemplo 7.1.1 (grade uniforme)

EXEMPLO 7.1.2. Consideremos o caso onde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  e

$$F(\mathbf{x}, v) = ((2v_1 + 3)x_1 + (v_1 + 3)x_2 - v_1)^2 + ((v_1 + 1)x_1 + (v_1 + 2)x_2 - 1)^2 .$$

Neste caso,

$$X = \frac{1}{v_1^2 + 3v_1 + 3} \begin{pmatrix} v_1^2 + v_1 - 3 \\ -v_1^2 + v_1 + 3 \end{pmatrix} .$$

Seja  $v_1$  de lei uniforme sobre  $(-1, 1)$  e consideremos  $ns = 11$  valores equidistantes de  $v_i$ , com  $v_1 = -1$ ,  $v_{ns} = 1$ . O procedimento apresentado é aplicado com  $N_X = 5$  e uma base polinomial

$$\varphi_k(v) = \left(\frac{v+1}{2}\right)^k .$$

os resultados se encontram na Fig. (7.3).

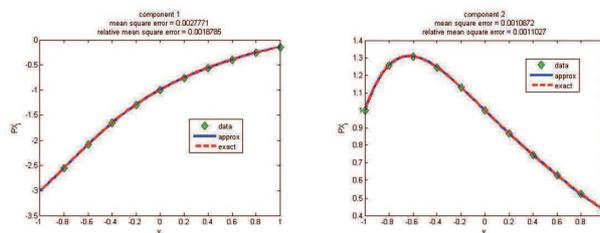


Figura 7.3: Resultados obtidos no exemplo 7.1.2 (11 pontos equidistantes)

## 7.1.2 Ajuste de momentos

Como exposto no capítulo 3), uma amostra também pode ser utilizada para determinar os coeficientes conduzindo à igualdade entre os momentos aproximados  $\mathbf{M}^a(\mathbf{P}\mathbf{X}) = (M_1^a, \dots, M_q^a)$  e os momentos empíricos  $\mathbf{M}^e = (M_1^e, \dots, M_q^e)$  (*método do ajuste dos momentos*). Para a determinação numérica dos coeficientes, podemos resolver as equações não lineares  $\mathbf{M}^a(\boldsymbol{\ell}) = \mathbf{M}^e$  ou minimizar uma pseudo-distância  $d(\mathbf{M}^a(\boldsymbol{\ell}), \mathbf{M}^e)$ .

EXEMPLO 7.1.3. Consideremos novamente a situação descrita no Exemplo 7.1.1 e dados correspondentes a  $np^2$  pontos  $((v_1)_i, (v_2)_j)$ , com, para cada  $r$ ,  $np$  valores  $(v_r)_s$  equidistribuídos sobre  $(a_r, b_r)$ . Consideremos os momentos empíricos  $E(x_1^i x_2^j)$ , com  $i, j \leq m$ . A Fig. (7.4) apresenta alguns resultados obtidos. É

interessante observar que este método é eficiente quando  $\xi \neq \mathbf{v}$ : como nos casos estudados nos capítulos e seções precedentes,  $\mathbf{v}$  pode não ser conhecido, mas somente os valores de  $x_1$  e  $x_2$ . Neste caso, podemos utilizar  $(\xi_r)_s$  equidistribuídos sobre  $(a_r, b_r)$  e considerar  $x_1 = x_1(\xi)$ ,  $x_2 = x_2(\xi)$ .

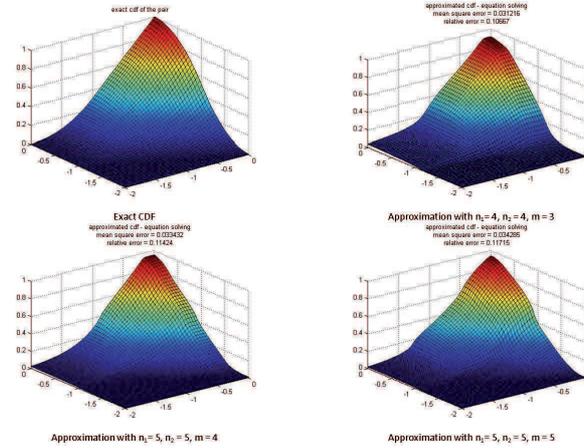


Figura 7.4: Resultados obtidos no Exemplo 7.1.3

EXEMPLO 7.1.4. Consideremos agora a situação descrita no Exemplo 7.1.2 e dados correspondentes a  $n_s = 11$  valores equidistantes de  $v$ . Os resultados obtidos se encontram na Fig. (7.5). É interessante notar que, para  $N_X = 7$ , as variáveis também são corretamente aproximadas, além da distribuição (Fig. (7.6)) - para os outros valores de  $N_X$ , somente a distribuição de  $\mathbf{X}$  é corretamente aproximada, as variáveis não. Como observado previamente, este comportamento pode ser conectado à qualidade da resolução numérica das equações ou do problema de otimização global definindo os coeficientes da aproximação.

### 7.1.3 Otimização estocástica

Os coeficientes desconhecidos também podem ser determinados através da minimização de estatísticas de  $F$ . Por exemplo, podemos minimizar sua média:

$$\chi = \arg \min \{E(F(\mathbf{Y}, \mathbf{v})) : \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n\} . \quad (7.1.7)$$

Este problema pode ser resolvido por *algoritmos de otimização estocástica*, tais como, por exemplo, métodos de quase-gradiente estocástico (Cf., por exemplo, [47]).

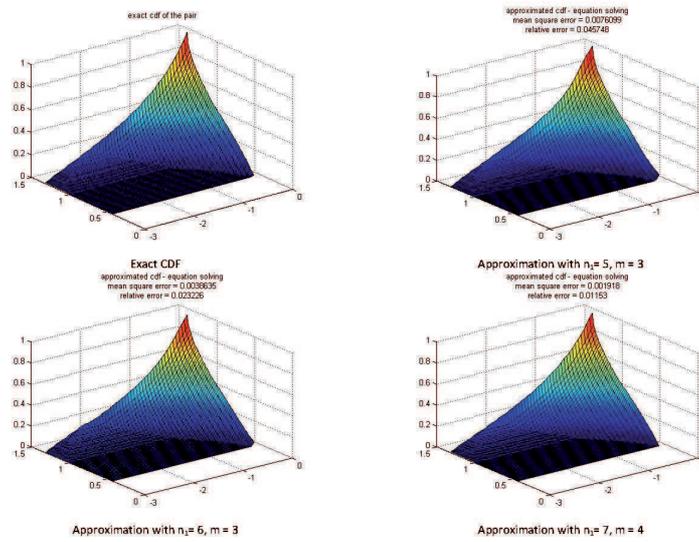


Figura 7.5: Resultados obtidos no Exemplo 7.1.4 (dados  $\xi$  equidistribuídos,  $\mathbf{v}$  aleatórios)

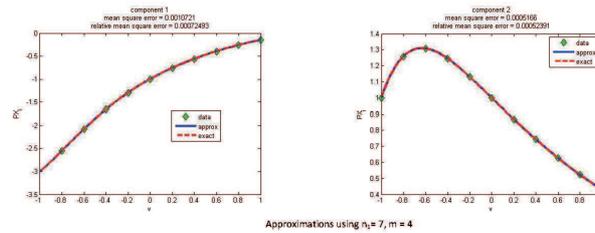


Figura 7.6: Resultados obtidos no Exemplo 7.1.4 (dados  $\xi$  equidistribuídos,  $\mathbf{v}$  aleatórios)

EXEMPLO 7.1.5. Consideremos mais uma vez a situação descrita no Exemplo 7.1.3. Para a resolução numérica da Eq. (7.1.7), as médias são estimadas utilizando as médias empíricas de uma amostra. A Fig. (7.7) mostra alguns dos resultados obtidos. observemos que o procedimento é eficiente mesmo para  $\xi \neq \mathbf{v}$ .

EXEMPLO 7.1.6. Consideremos agora a situação descrita no Exemplo 7.1.4. Novamente, utilizamos médias empíricas de uma amostra para aproximar as médias necessárias à resolução da Eq. (7.1.7). Alguns dos resultados obtidos se encon-

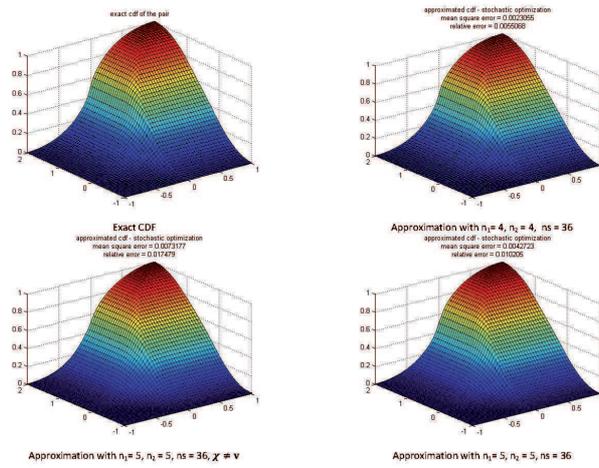


Figura 7.7: Resultados obtidos no Exemplo 7.1.5 (dados equidistribuídos)

tram na Fig. (7.8). Os resultados obtidos para  $\xi \neq \mathbf{v}$  se encontram na Fig. (7.9).

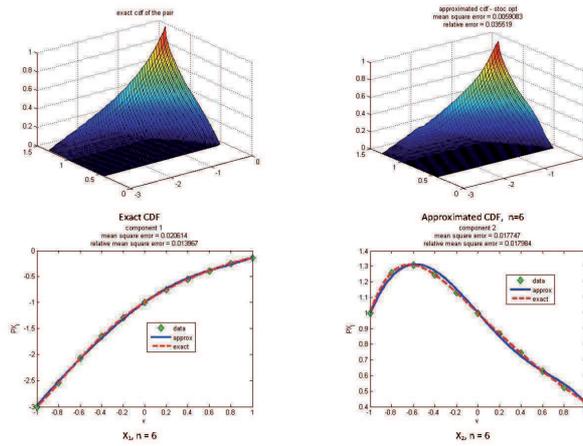


Figura 7.8: Resultados obtidos no Exemplo 7.1.6 (dados equidistribuídos)

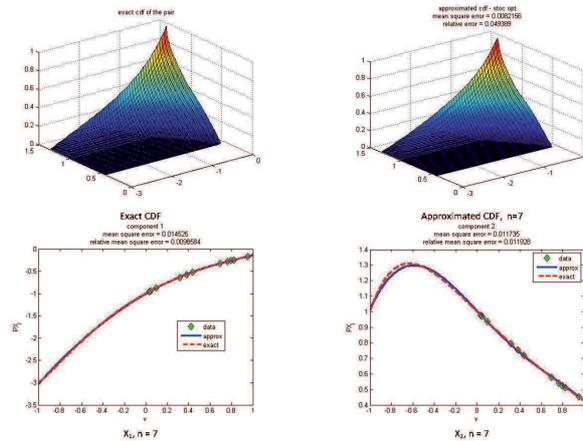


Figura 7.9: Resultados obtidos no Exemplo 7.1.5 (dados  $\xi$  equidistribuídos,  $\mathbf{v}$  aleatórios)

#### 7.1.4 Adaptação de métodos iterativos

O método apresentado na seção 5.1.4 pode ser aplicado na situação presente. por exemplo, consideremos a resolução iterativa da Eq. (7.1.1) utilizando uma função de iteração  $\Psi$ :

$$\mathbf{X}^{(p+1)} = \Psi \left( \mathbf{X}^{(p)} \right) . \quad (7.1.8)$$

Analogamente à seção 5.1.4 , podemos construir uma sequência  $\{\chi^{(p)}\}_{p \geq 0}$  a partir de um ponto inicial  $\chi^{(0)}$  resolvendo uma sequência de sistemas lineares

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{B} . \quad (7.1.9)$$

no qual

$$A_{\alpha\beta} = \mathcal{A}_{rsjk} , B_{\alpha} = \mathcal{B}_{rs} , U_{\beta} = \chi_{jk}^{(p+1)} , \quad (7.1.10)$$

$$\alpha = \text{ind}(r, s) , \beta = \text{ind}(j, k) ,$$

$$\mathcal{A}_{rsjk} = \delta_{jr} E(\varphi_s(\xi) \varphi_k(\xi)) , \quad (7.1.11)$$

$$\mathcal{B}_{rs} = E \left( \varphi_s(\xi) \Psi_r \left( \sum_{k=1}^{N_X} \chi_k^{(p)} \varphi_k(\xi) \right) \right) .$$

EXEMPLO 7.1.7. *Consideremos ainda uma vez a situação descrita no Exemplo 7.1.3. Podemos aplicar o método do gradiente com passo fixo  $\mu = 0.1$ , a partir de um ponto inicial fornecido pelo método de Nelder-Meade intrínseco de MATLAB (função interna fminsearch). Como no exemplo 7.1.3, as médias necessárias às iterações são estimadas utilizando as médias empíricas fornecidas por uma grade uniforme. Os resultados obtidos com  $n_p = 11$  se encontram nas Figs. (7.10)-(7.10).*

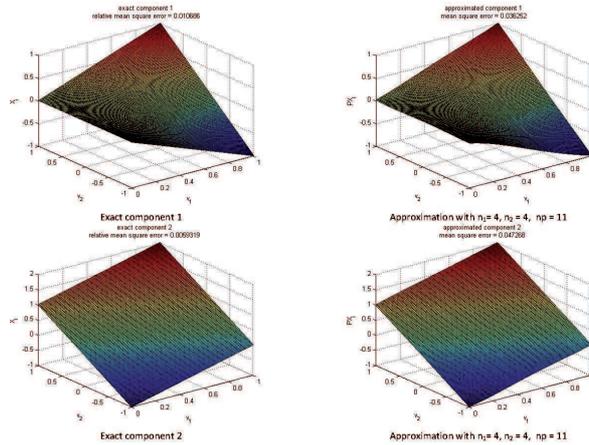


Figura 7.10: Resultados para as variáveis no Exemplo 7.1.7 (grade uniforme)

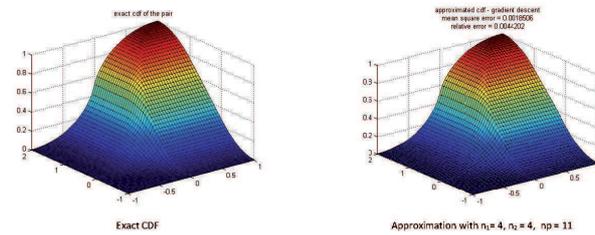


Figura 7.11: Resultados para a função cumulativa no Exemplo 7.1.7 (grade uniforme)

EXEMPLO 7.1.8. *Consideremos novamente a situação do Exemplo 7.1.4. Como no exemplo precedente, consideramos a minimização iterativa pelo método do gradiente a passo fixo  $\mu = 0.1$ , a partir de um ponto inicial fornecido pelo método de Nelder-Meade intrínseco de MATLAB (função interna fminsearch) e as médias*

estimadas pelas médias empíricas de  $ns = 11$  pontos equidistribuídos, como descrito no exemplo 7.1.4. Os resultados se encontram na Fig. (7.12).

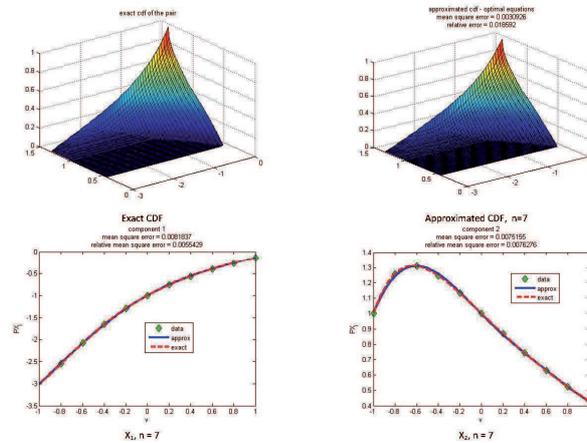


Figura 7.12: Resultados obtidos no Exemplo 7.1.8 (pontos equidistribuídos)

### 7.1.5 Equações do ponto de ótimo

Em certas situações, por exemplo *para uma função objetivo convexa*  $F$ , os pontos de ótimo podem ser caracterizados através de equações algébricas e os métodos apresentados na seção 5.1 podem ser utilizados. Por exemplo, podemos considerar as equações

$$\nabla F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (7.1.12)$$

as quais devem ser satisfeitas pelo ponto de ótimo. Os métodos apresentados na seção 5.1 podem ser aplicados para determinar a aproximação  $\mathbf{PX}$ .

**EXEMPLO 7.1.9.** *Consideremos a situação descrita no Exemplo 7.1.3. A resolução de Eq. (7.1.12) é realizada pelo método variacional, com as médias estimadas a partir dos dados fornecidos por uma grade uniforme. Os resultados obtidos para as variáveis se encontram na Fig. (7.13). As funções cumulativas se encontram na Fig. (7.14).*

**EXEMPLO 7.1.10.** *Consideremos agora a situação descrita no Exemplo 7.1.4. A resolução da Eq. (7.1.12) é realizada novamente pelo método variacional, com as médias estimadas utilizando os dados de  $ns = 11$  pontos equidistribuídos. Os resultados se encontram na Fig. (7.15).*

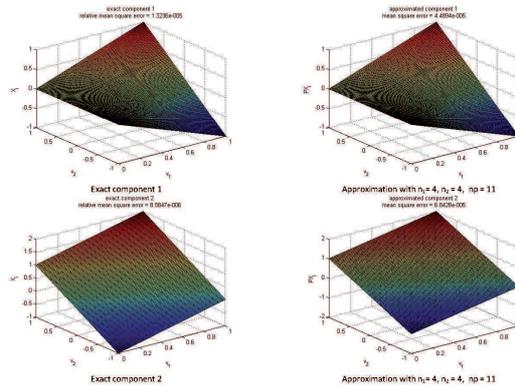


Figura 7.13: Resultados para as variáveis no Exemplo 7.1.9 (grade uniforme)

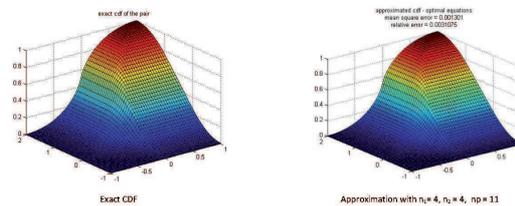


Figura 7.14: Resultados para a função cumulativa no Exemplo 7.1.10 (grade uniforme)

## 7.2 Métodos estocásticos para a otimização determinística

Esta seção apresenta algoritmos numéricos estocásticos para a determinação dos pontos de mínimo global de funções determinísticas suficientemente regulares, *i. e.*, para a otimização global de funções contínuas.

Nesta área, a variedade de métodos propostos na literatura impede toda tentativa de exaustão e todo texto é obrigatoriamente parcial - este texto não escapa a esta limitação e é provável que o leitor não encontre abaixo o algoritmo com o qual trabalha usualmente.

O enfoque utilizado neste documento é ditado pelo interesse na construção de métodos numéricos: menos que descrever algoritmos, este texto busca dar ao leitor os princípios básicos de construção - os quais repousam em alguns teoremas fundamentais expostos no texto abaixo. Os exemplos de construção devem ser

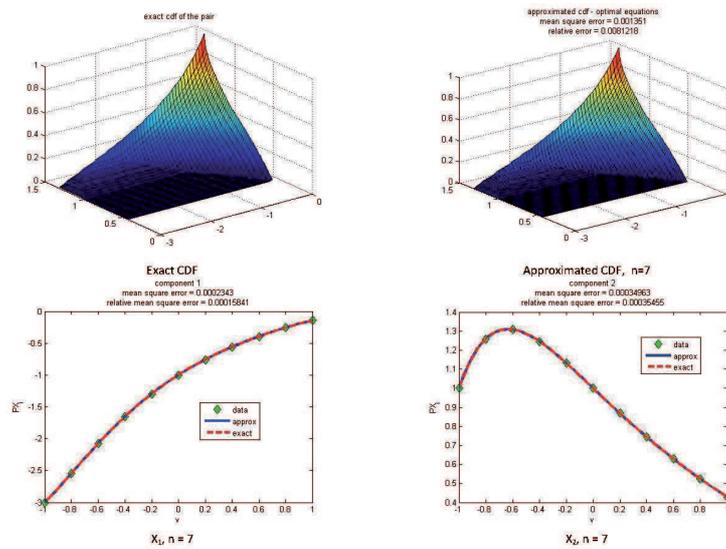


Figura 7.15: Resultados obtidos no Exemplo 7.1.10 (pontos equidistribuídos)

tomados como ilustrações da metodologia que são de natureza geral : para os fins que lhe são próprios, o leitor deve levar em conta a existência provável de algoritmos adaptados, construídos especificamente para a situação que lhe interessa e que exploram particularidades de seu problema para ganhar em eficiência - estes algoritmos podem ser combinados segundo os procedimentos descritos no texto que segue, de modo a produzir novos algoritmos.

De maneira "ingênua", os teoremas podem ser interpretados da maneira seguinte: sorteando pontos de maneira aleatória, mas com uma densidade de probabilidade estritamente positiva em qualquer subregião da região de interesse, a probabilidade de sortear um ponto em uma vizinhança arbitrariamente dada de um ponto de mínimo global é estritamente positiva, aumenta com o número de pontos sorteados e tende a um quando o número de sorteios tende ao infinito.

Obtemos assim uma primeira idéia simples para a minimização de uma função regular  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  : podemos, por exemplo, gerar aleatoriamente  $nr$  pontos  $\{x_i : 1 \leq i \leq nr\}$  e estimar o valor do mínimo,  $m$ , a partir dos valores de  $\{f(x_i) : 1 \leq i \leq nr\}$ . Na prática, é mais conveniente considerar sorteios de exploração de uma vizinhança "controlada" de um ponto: sorteia-se não diretamente um ponto  $x_i$ , mas um incremento  $\Delta x$ . Neste caso, obtemos um algoritmo que pode ser descrito da maneira seguinte:

- 1- **Inicialização:** é dado um ponto de partida  $x_0$

2- **Iterações:** o ponto atual é  $x_n$  e calcula-se  $x_{n+1}$  em duas subetapas

2.1 - **sorteio:** gerar aleatoriamente um incremento  $\Delta x_n$

2.2 - **dinâmica:** definir  $x_{n+1}$  a partir de  $x_n$  e  $t_n = x_n + \Delta x_n$ . Por exemplo, a *dinâmica elitista* conduz a

$$x_{n+1} = \arg \min \{f(x_n), f(t_n)\} .$$

A denominação *elitista* é justificada pela rejeição sistemática dos sorteios que degradam o valor de  $f$ : temos

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n, & \text{se } f(x_n) < f(t_n) \\ t_n, & \text{se } f(x_n) \geq f(t_n) \end{cases} .$$

Usualmente, esta dinâmica é representada sob a forma

$$x_{n+1} = D_n x_n + (1 - D_n) t_n,$$

onde

$$P(D_n = 0 \mid f(x_n) < f(t_n)) = 0; \quad P(D_n = 1 \mid f(x_n) < f(t_n)) = 1$$

$$P(D_n = 0 \mid f(x_n) \geq f(t_n)) = 1; \quad P(D_n = 1 \mid f(x_n) \geq f(t_n)) = 0$$

O algoritmo relativamente simples acima descrito é conhecido como *algoritmo de descida estocástica*. As hipóteses básicas para sua convergência são bastante gerais e não supõem a convexidade de  $f$ :

$$\inf \{f(x) : x \in \mathbb{R}^k\} = m \in \mathbb{R}; \quad (7.2.13)$$

$$\forall \lambda > m : S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^k : f(x) < \lambda\} \\ \text{é limitado, de interior não vazio;} \quad (7.2.14)$$

$$\forall \lambda > m : S_\lambda^c = \{x \in \mathbb{R}^k : f(x) \geq \lambda\} \text{ é de interior não vazio;} \quad (7.2.15)$$

As hipóteses (7.2.14) e (7.2.15) estão verificadas, por exemplo, quando  $f$  é contínua e coerciva ou quando  $f$  é contínua e estamos interessados no mínimo sobre um subconjunto limitado. A hipótese (7.2.15) serve para garantir que  $P(x_n \notin S_\lambda) > 0$  e pode ser relaxada limitando-se aos valores de  $\lambda \in (m, m + \varepsilon)$  para os quais esta hipótese é satisfeita

Entretanto, a velocidade de convergência - e portanto, a eficiência real - de um método puramente baseado em sorteios pode ser fraca. Assim, modificações

deste método básico foram introduzidas e conduziram a outras versões do teorema fundamental. Por exemplo, a utilização da *dinâmica de Metropolis* em lugar da dinâmica elitista conduz ao *algoritmo do recozimento simulado*, o qual é baseado na versão 2. Na *dinâmica de Metropolis*,

$$\begin{aligned} P(D_n = 0 \mid f(x_n) < f(t_n)) &= c_n; \\ P(D_n = 1 \mid f(x_n) < f(t_n)) &= 1 - c_n; \\ P(D_n = 0 \mid f(x_n) \geq f(t_n)) &= 1; \quad P(D_n = 1 \mid f(x_n) \geq f(t_n)) = 0; \\ c_n &= \exp\left(-\left(\frac{f(t_n) - f(x_n) + \alpha}{\theta_n} + \beta\right)\right), \end{aligned}$$

onde  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$  e  $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma seqüência de números reais estritamente positivos tais que  $\theta_n \rightarrow 0$  "lentamente" (em geral, com  $1/\sqrt{\log(n)}$ ). Neste caso,

$$x_{n+1} = \begin{cases} \begin{matrix} x_n, & \text{com probabilidade } 1 - c_n \\ t_n, & \text{com probabilidade } c_n \end{matrix} & , \text{ se } f(x_n) < f(t_n) \\ t_n, & \text{se } f(x_n) \geq f(t_n) \end{cases} .$$

Também é possível considerar uma combinação entre métodos de descida determinística e a descida estocástica, baseada na versão 3 do teorema.

### 7.2.1 Versão 1: descida estocástica

Nesta seção, apresentamos o resultado fundamental que serve de base ao método de descida estocástica.

**TEOREMA 7.2.1.** .- *Seja  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de variáveis aleatórias tal que*

$$\forall n \geq 0 : U_{n+1} \leq U_n \quad \text{q.c.}$$

$$\forall n \geq 0 : U_n \geq m \quad \text{q.c.}$$

$$\forall \lambda > m : \exists \alpha(\lambda) > 0 \text{ tal que } P(U_{n+1} \leq \lambda \mid U_n \geq \lambda) \geq \alpha(\lambda). \quad (7.2.16)$$

Então:

$$U_n \rightarrow m \quad \text{q.c.}$$

*Notemos que a condição (7.2.16) implica que  $P(U_n \geq \lambda) > 0$ . Como veremos no que segue, esta desigualdade é verificada quando a densidade de probabilidade dos sorteios é estritamente positiva em  $\mathbb{R}^n$ .*

A prova desse teorema utiliza os lemas seguintes:

LEMA 7.2.2. .- Seja  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$  uma família de eventos quase certos. Então  $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$  é quase certo.

DEMONSTRAÇÃO: .- Seja  $E_n^c = \Omega - E_n$  o complementar de  $E_n$ . Temos

$$\forall n \geq 0 : P(E_n^c) = 1 - P(E_n) = 1 - 1 = 0.$$

Seja  $E^c = \Omega - E$  o complementar de  $E$ . Temos

$$E^c = \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n^c,$$

de modo que

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n^c\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n^c) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$$

e  $P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - 0 = 1$ . ■

LEMA 7.2.3. .- Seja  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de variáveis aleatórias tal que

$$\forall n \geq 0 : U_{n+1} \leq U_n \quad \text{q.c.}$$

$$\forall n \geq 0 : U_n \geq m \quad \text{q.c.}$$

Então existe uma variável aleatória  $U_\infty$  tal que  $U_n \rightarrow U_\infty$  q.c. e  $U_\infty \geq m$  q. c. Além disto,  $U_n \geq U_\infty$  q. c. para todo  $n \geq 0$ .

DEMONSTRAÇÃO:

1- Sejam

$$A_n = \{\omega \in \Omega : U_{n+1}(\omega) \leq U_n(\omega)\},$$

$$B_n = \{\omega \in \Omega : U_n(\omega) \geq m\}.$$

Denotando  $A_n^c = \Omega - A_n$ ,  $B_n^c = \Omega - B_n$  (complementares de  $A_n$  e  $B_n$ , respectivamente), temos  $P(A_n^c) = P(B_n^c) = 0$ . Seja  $E_n = A_n \cap B_n$ . Então  $E_n^c = (A_n \cap B_n)^c = A_n^c \cup B_n^c$ , de modo que

$$P(E_n^c) = P(A_n^c \cup B_n^c) \leq P(A_n^c) + P(B_n^c) = 0 + 0 = 0.$$

e  $E_n$  é quase certo, pois  $P(E_n) = 1 - P(E_n^c) = 1 - 0 = 1$ . Seja

$$E = \{\omega \in \Omega : m \leq U_{n+1}(\omega) \leq U_n(\omega), \forall n \geq 0\}.$$

Então  $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$ , de modo que decorre do Lema 7.2.2 que  $E$  é quase certo.

- 2- Seja  $\omega \in E$ . Então  $\{U_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  é decrescente e limitada, de modo que existe  $U_\infty(\omega)$  tal que

$$U_n(\omega) \longrightarrow U_\infty(\omega) \quad \text{quando } n \longrightarrow +\infty .$$

Definimos desta maneira uma aplicação numérica  $U_\infty : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ . As propriedades elementares das aplicações mensuráveis (Cf., por exemplo, [40], p. 184) mostram que  $U_\infty$  é uma variável aleatória. Além disto  $U_\infty(\omega) \geq m$ , dado que  $m \leq U_n(\omega), \forall n \geq 0$ .

- 3- Seja

$$F = \{\omega \in \Omega : U_n(\omega) \longrightarrow U_\infty(\omega) \quad \text{quando } n \longrightarrow +\infty \} .$$

Temos  $E \subset F$ , de modo que  $P(F) \geq P(E) = 1$  e  $F$  é quase certo. Seja

$$G = \{\omega \in \Omega : U_\infty(\omega) \geq m \} .$$

Temos  $E \subset G$ , de modo que  $P(G) \geq P(E) = 1$  e  $G$  é quase certo.

- 3- Consideremos

$$H_n = \{\omega \in \Omega : U_n(\omega) \geq U_\infty(\omega) \}$$

Seja  $\omega \in E$ . Como  $\{U_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  é decrescente e limitada, temos  $U_\infty(\omega) \leq U_n(\omega), \forall n \geq 0$ . Assim  $E \subset H_n$ , de modo que  $P(H_n) \geq P(E) = 1$ . Logo,  $H_n$  é quase certo para todo  $n \geq 0$ .

■

LEMA 7.2.4. .- Seja  $U_\infty$  uma variável aleatória tal que

$$\forall \lambda > m : U_\infty \leq \lambda \quad \text{q. c. ,} \quad (7.2.17)$$

$$U_\infty \geq m \quad \text{q. c. .} \quad (7.2.18)$$

Então  $U_\infty = m$  q. c.

DEMONSTRAÇÃO:

- 1- Sejam

$$A = \{\omega \in \Omega : U_\infty(\omega) = m \}$$

$$B = \{\omega \in \Omega : U_\infty(\omega) > m \}$$

A hipótese 7.2.18 mostra que

$$P(A \cup B) = 1.$$

Como

$$A \cap B = \emptyset,$$

temos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Assim,

$$P(A) + P(B) = 1.$$

2- Seja

$$B_n = \left\{ \omega \in \Omega : U_\infty(\omega) \geq m + \frac{1}{n} \right\}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \omega \in B &\implies \exists n > 0 \text{ tal que } U_\infty(\omega) \geq m + \frac{1}{n} \\ &\implies \omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n. \end{aligned}$$

Assim,

$$B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Por outro lado,

$$B_n \subset B, \forall n \geq 0 \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset B,$$

de modo que

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

3- Resulta da primeira hipótese do lema (Eq. (7.2.17)) que

$$B_n \text{ é quase impossível, } \forall n \geq 0.$$

Assim,

$$P(B) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) = 0$$

e  $B$  é quase impossível. Assim,

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - 0 = 1$$

e  $A$  é quase certo. ■

LEMA 7.2.5. .- Sob as hipóteses do teorema 7.2.1, temos

$$\forall \lambda > m : P(U_n \geq \lambda) \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \longrightarrow +\infty.$$

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos a variável aleatória  $Z_n$  definida por

$$Z_n = 0, \text{ se } U_n \geq \lambda, \quad Z_n = 1, \text{ se } U_n < \lambda.$$

Temos

$$P(Z_{n+1} = i) = P(Z_{n+1} = i, Z_n = 0) + P(Z_{n+1} = i, Z_n = 1),$$

de modo que

$$P(Z_{n+1} = i) = P(Z_n = 0)P(Z_{n+1} = i | Z_n = 0) \\ + P(Z_n = 1)P(Z_{n+1} = i | Z_n = 1)$$

e, pondo

$$\pi_n = \begin{pmatrix} P(Z_n = 0) \\ P(Z_n = 1) \end{pmatrix},$$

temos

$$\pi_{n+1} = A\pi_n, \quad A_{ij} = P(Z_{n+1} = i | Z_n = j) \quad (0 \leq i, j \leq 1).$$

Como a seqüência é decrescente q.c.,

$$A_{01} = P(Z_{n+1} = 0 | Z_n = 1) = P(U_{n+1} \geq \lambda | U_n < \lambda) = 0.$$

E, das hipóteses do teorema,

$$A_{00} = P(Z_{n+1} = 0 | Z_n = 0) = \\ 1 - P(U_{n+1} < \lambda | U_n \geq \lambda) \leq 1 - \alpha(\lambda).$$

Assim

$$\forall n \geq 0 : (\pi_{n+1})_0 = A_{00}(\pi_n)_0 + A_{01}(\pi_n)_1 = \\ A_{00}(\pi_n)_0 \leq (1 - \alpha(\lambda))(\pi_n)_0.$$

Esta fórmula de recorrência mostra que

$$\forall n \geq 0 : (\pi_{n+1})_0 \leq (1 - \alpha(\lambda))^{n+1} (\pi_0)_0.$$

Por conseguinte, dado que  $\alpha(\lambda) > 0$ ,

$$(\pi_{n+1})_0 \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow +\infty.$$

■

LEMA 7.2.6. *Sob as hipóteses do teorema 7.2.1, existe  $U_\infty$  tal que  $U_n \longrightarrow U$ . Além disto,*

$$\forall \lambda > m : P(U_\infty \geq \lambda) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO:

- 1- O lema 7.2.3 mostra que existe  $U_\infty$  tal que  $U_n \rightarrow U$  q.c.. Como  $U_n \rightarrow U_\infty$  q.c., temos também  $U_n \rightarrow U_\infty$  p. e, por conseguinte,  $U_n \rightarrow U$  L.
- 2- Sejam  $F_n$  a lei de  $U_n$  e  $F_\infty$  a lei de  $U_\infty$ . A convergência em lei implica que

$$P(U_n < \lambda) = F_n(\lambda) \rightarrow F_\infty(\lambda) = P(U_\infty < \lambda),$$

de modo que

$$P(U_n \geq \lambda) = 1 - F_n(\lambda) \rightarrow 1 - F_\infty(\lambda) = P(U_\infty \geq \lambda).$$

Assim

$$P(U_\infty \geq \lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n \geq \lambda) = 0.$$

■

DEMONSTRAÇÃO do teorema 7.2.1–

- 1- Decorre do lema 7.2.3 que existe uma variável aleatória  $U_\infty$  tal que  $U_n \rightarrow U_\infty$  q.c. e  $U_\infty \geq m$  q. c. Como na demonstração desse mesmo lema, seja

$$E = \{\omega \in \Omega : m \leq U_{n+1}(\omega) \leq U_n(\omega), \forall n \geq 0\}.$$

$E$  é quase certo e  $U_n(\omega) \rightarrow U_\infty(\omega)$ , para todo  $\omega \in E$ .

- 2- Seja  $\lambda > m$  : decorre do lema 7.2.6 que  $U_\infty < \lambda$  q. c.. Por conseguinte, decorre do Lema 7.2.4 que  $U_\infty = m$  q. c. .

NOTA 7.2.7. Também é possível mostrar que  $U_\infty = m$  q. c. da forma seguinte:

- 1- Seja  $\lambda > m$  e consideremos

$$A_n(\lambda) = \{\omega \in E : U_n(\omega) < \lambda\}.$$

Temos

$$A_n(\lambda) \subset A_{n+1}(\lambda), \forall n \geq 0.$$

- 2- Seja

$$A(\lambda) = \{\omega \in E : U_\infty(\omega) < \lambda\}.$$

Como  $U_\infty(\omega) \leq U_n(\omega)$  (lema 7.2.3 que), temos

$$\omega \in A_n(\lambda) \implies U_\infty(\omega) \leq U_n(\omega) < \lambda \implies \omega \in A(\lambda).$$

Assim,

$$A_n(\lambda) \subset A(\lambda), \forall n \geq 0.$$

Assim, pondo  $p_n(\lambda) = P(A_n(\lambda))$ , temos

$$P(A(\lambda)) \geq p_n(\lambda), \forall n \geq 0. \quad (7.2.19)$$

3- Pondo  $A_n^c(\lambda) = \Omega - A_n(\lambda)$  e  $B_n(\lambda) = A_{n+1}(\lambda) \cap A_n^c(\lambda)$ , temos

$$A_n(\lambda) \cap B_n(\lambda) = \emptyset.$$

Além disto,

$$\begin{aligned} A_{n+1}(\lambda) &= A_{n+1}(\lambda) \cap \Omega = A_{n+1}(\lambda) \cap \underbrace{(A_n(\lambda) \cup A_n^c(\lambda))}_{=\Omega} = \\ &= \underbrace{(A_{n+1}(\lambda) \cap A_n(\lambda))}_{=A_n(\lambda)} \cup \underbrace{(A_{n+1}(\lambda) \cap A_n^c(\lambda))}_{=B_n(\lambda)}, \end{aligned}$$

de modo que

$$A_{n+1}(\lambda) = A_n(\lambda) \cup B_n(\lambda)$$

e

$$P(A_{n+1}(\lambda)) = P(A_n(\lambda)) + P(B_n(\lambda)) . \quad (7.2.20)$$

4- Temos

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0 : P(A_{n+1}(\lambda) | A_n^c(\lambda)) &= \\ P(U_{n+1} \leq \lambda | U_n \geq \lambda) &\geq \alpha(\lambda) > 0, \end{aligned}$$

de forma que, para todo  $n \geq 0$  : por um lado,  $p_n(\lambda) > 0$  e, por outro lado,

$$\begin{aligned} P(B_n(\lambda)) &= P(A_n^c(\lambda)) P(A_{n+1}(\lambda) | A_n^c(\lambda)) = \\ (1 - p_n(\lambda)) P(A_{n+1}(\lambda) | A_n^c(\lambda)) &\geq (1 - p_n(\lambda)) \alpha(\lambda) . \end{aligned}$$

5- Assim, a Eq. (7.2.20) mostra que

$$\forall n \geq 0 : p_{n+1}(\lambda) \geq p_n(\lambda) + (1 - p_n(\lambda)) \alpha(\lambda) .$$

Pondo  $q_n(\lambda) = 1 - p_n(\lambda)$ , temos

$$\forall n \geq 0 : q_{n+1}(\lambda) \leq (1 - \alpha(\lambda)) q_n(\lambda) .$$

Esta fórmula de recorrência mostra que

$$\forall n \geq 0 : q_n(\lambda) \leq (1 - \alpha(\lambda))^n q_0(\lambda) .$$

Por conseguinte, dado que  $\alpha(\lambda) > 0$ ,

$$q_n(\lambda) \longrightarrow 0 \text{ e } p_n(\lambda) \longrightarrow 1 \text{ quando } n \longrightarrow +\infty .$$

6- Logo, a Eq. (7.2.19) mostra que  $P(A(\lambda)) = 1$  e, por conseguinte,  $U_\infty < \lambda$  q. c. .

7- Decorre do lema 7.2.4 que  $U_\infty = m$  q. c. .

Este teorema sugere um método de minimização: sejam

1.  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  um vetor aleatório contínuo cuja densidade de probabilidade  $\varphi_Z : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  verifica ( $|\bullet|$  é a norma euclidiana)

$$\forall r > 0 : \inf \{ \varphi_Z(z) : |z| \leq r \} \geq a(r) > 0$$

2.  $x_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  um vetor aleatório

Define-se a seqüência de variáveis aleatórias  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  por

$$\forall n \geq 0 : x_{n+1}(\omega) = \arg \min \{ f(x_n(\omega)), f(t_n(\omega)) \}, \\ t_n = x_n + Z;$$

e  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $U_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$U_n(\omega) = f(x_n(\omega)) .$$

Notemos que a densidade de probabilidade condicional de  $t_n$  é

$$\varphi_n(t|x_n = x) = \varphi_Z(t - x) > 0$$

A densidade de probabilidade condicional de  $t_n$  é

$$\varphi_n(t|x_n = x) = \varphi_Z(t - x)$$

e a densidade de probabilidade de  $x_n$  é

$$\phi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t|x_n = x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi_Z(t - x) dx .$$

Assim,

$$\forall r > 0 : \phi_n(t) \geq \int_{|t-x| \leq r} \varphi_Z(t - x) dx \geq a(r) \ell(B_r) > 0,$$

onde  $\ell$  é a medida de Lebesgue e  $B_r$  é a bola raio  $r$  ( $B_r = \{z \in \mathbb{R}^n : |z| \leq r\}$ ).

Temos

TEOREMA 7.2.8.  $U_n \rightarrow m$  q.c.

DEMONSTRAÇÃO:

1- Por construção:

$$\forall n \geq 0 : U_{n+1} \leq U_n \text{ q.c.}$$

e

$$\forall n \geq 0 : U_n \geq m \text{ q.c.}$$

2- Assim, por um lado,

$$\begin{aligned} \int_{S_\lambda} \varphi_n(t|x_n = x) dt &\geq \int_{B(\lambda)} \varphi_n(t|x_n = x) dt = \\ &\int_{B(\lambda)} \varphi_Z(t-x) dt \geq \int_{B(\lambda)} a(\eta_\lambda) dt \end{aligned}$$

e ( $\ell$  é a medida de Lebesgue)

$$\int_{S_\lambda} \varphi_n(t|x_n = x) dt \geq a(\eta_\lambda) \ell(B(\lambda))$$

3- e, por outro lado,

$$\begin{aligned} P(x_{n+1} \in S_\lambda, x_n \notin S_\lambda) &= \int_{S_\lambda^c} \mu_n(dx) \int_{S_\lambda} \varphi_n(t|x_n = x) dt \\ &\geq a(\eta_\lambda) \ell(B(\lambda)) \int_{S_\lambda^c} \mu_n(dx), \end{aligned}$$

onde  $F_n$  é a lei de  $x_n$  e  $\mu_n$  é a medida associada a  $F_n$ . Assim

$$P(x_{n+1} \in S_\lambda, x_n \notin S_\lambda) \geq a(\eta_\lambda) \ell(B(\lambda)) P(x_n \notin S_\lambda) .$$

Da hipótese (7.2.15), existem  $y_\lambda \in S_\lambda^c$  e  $r_\lambda > 0$  tais que

$$C(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^k : |x - y| \leq r_\lambda\} \subset S_\lambda^c.$$

Logo

$$\begin{aligned} P(x_n \notin S_\lambda) &= \int_{S_\lambda^c} \phi_n(x) dx \geq \int_{C(\lambda)} \phi_n(x) dx \\ &\geq a(r_\lambda) \ell(B_{r_\lambda}) > 0 \end{aligned}$$

e, por conseguinte,

$$P(x_{n+1} \in S_\lambda | x_n \notin S_\lambda) = \frac{P(x_{n+1} \in S_\lambda, x_n \notin S_\lambda)}{P(x_n \notin S_\lambda)} \geq a(\eta_\lambda) \ell(B(\lambda)) .$$

4- Pondo

$$\alpha(\lambda) = a(\eta_\lambda) \ell(B(\lambda)) ,$$

temos

$$P(U_{n+1} \leq \lambda | U_n \geq \lambda) \geq \alpha(\lambda) > 0.$$

5- O resultado decorre do teorema 7.2.1. ■

O algoritmo associado a este teorema é o algoritmo de descida estocástica:

1. Inicialização: são dados um ponto de partida  $x_0$  e um número de sorteios  $nr$
2. Iterações: o ponto atual é  $x_n$  e calcula-se  $x_{n+1}$  em duas subetapas
  - (a) sorteio: gerar aleatoriamente um valor  $Z_n$  de  $Z$  e definir  $t_n = x_n + Z_n$ .
  - (b) dinâmica: definir  $x_{n+1}$  :

$$x_{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} x_n, \text{ se } f(x_n) < f(t_n) \\ t_n, \text{ se } f(x_n) \geq f(t_n) \end{array} \right\} .$$

3. se  $n < nr$

- (a) incrementar  $n$  :  $n \leftarrow n + 1$
- (b) retornar a 2.

4. se  $n \geq nr$  : estimar  $m \approx f(x_n)$  e  $x^* \approx x_n$ .

### 7.2.2 Versão 2: dinâmica de Metropolis

Como já observamos, a eficiência do método de descida estocástica pode ser fraca. Assim, encontramos na literatura modificações do método básico introduzidas com o objetivo de melhorar a eficiência. Por exemplo, uma primeira idéia nasce da constatação de que a dinâmica utilizada raramente modifica o ponto atual: o ponto  $t_n$  é rejeitado salvo quando corresponde a uma diminuição do valor da função. Assim, a dinâmica elitista conduz em prática a explorar vizinhanças do ponto atual. Esta análise sugere que uma melhoria pode ser introduzida através de

uma modificação da dinâmica, tendendo a aceitar uma degradação controlada do valor da função objetivo. Um exemplo de modificação é fornecido pela *dinâmica de Metropolis*, a qual consiste em aceitar degradações do valor de  $f$  com uma probabilidade que decresce rapidamente (por exemplo, exponencialmente) com o valor da degradação. A convergência do método resultante da utilização do dinâmica de Metropolis é baseada no seguinte teorema:

TEOREMA 7.2.9. *Seja  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de variáveis aleatórias tal que*

$$\forall n \geq 0 : P(U_{n+1} > U_n) \leq \beta_n \text{ com } \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n < \infty$$

$$\forall n \geq 0 : U_n \geq m \text{ q.c.}$$

$$\forall \lambda > m : \exists \alpha(\lambda) > 0 \text{ tal que } P(U_{n+1} \leq \lambda \mid U_n \geq \lambda) \geq \alpha(\lambda). \quad (7.2.21)$$

Então:

$$U_n \longrightarrow m \text{ q.c.}$$

Como já observamos, a condição (7.2.21) implica que  $P(U_n \geq \lambda) > 0$ . Como no caso precedente, esta desigualdade é verificada quando a densidade de probabilidade dos sorteios é estritamente positiva sobre  $\mathbb{R}^n$ .

Este resultado utiliza os lemas seguintes:

LEMA 7.2.10. *Seja  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$  uma família de eventos tal que  $P(E_n^c) \leq \beta_n$ , com  $\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n < \infty$ . Se  $E \subset \Omega$  é um evento tal que*

$$\forall n \geq 0 : \bigcap_{i=n}^{+\infty} E_i \subset E$$

então  $E$  é quase certo.

DEMONSTRAÇÃO: Notemos inicialmente que, dado que a série é convergente ( $\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n < \infty$ ), a série dos restos verifica

$$R_n = \sum_{i=n}^{+\infty} \beta_i \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow +\infty.$$

Sejam  $E_n^c = \Omega - E_n$ ,  $E^c = \Omega - E$  o complementar de  $E$ . Temos

$$E^c \subset \left( \bigcap_{i=n}^{+\infty} E_i \right)^c = \bigcup_{i=n}^{+\infty} E_i^c,$$

de modo que

$$P(E^c) \leq P\left(\bigcup_{i=n}^{+\infty} E_i^c\right) \leq \sum_{i=n}^{+\infty} P(E_i^c) \leq \sum_{i=n}^{+\infty} \beta_i = R_n.$$

Assim,

$$P(E^c) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0.$$

e  $P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - 0 = 1$ . ■

LEMA 7.2.11. *Seja  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de variáveis aleatórias tal que*

$$\forall n \geq 0 : P(U_{n+1} > U_n) \leq \beta_n \quad \text{com} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n < \infty$$

$$\forall n \geq 0 : U_n \geq m \quad \text{q.c.}$$

*Então existe uma variável aleatória  $U_\infty$  tal que  $U_n \rightarrow U_\infty$  q.c. e  $U_\infty \geq m$  q.c..*

DEMONSTRAÇÃO:

1- Sejam

$$A_n = \{\omega \in \Omega : U_{n+1}(\omega) \leq U_n(\omega)\},$$

$$B_n = \{\omega \in \Omega : U_n(\omega) \geq m\}.$$

Denotando  $A_n^c = \Omega - A_n$ ,  $B_n^c = \Omega - B_n$  (complementares de  $A_n$  e  $B_n$ , respectivamente), temos  $P(A_n^c) = \beta_n$  e  $P(B_n^c) = 0$ . Seja  $E_n = A_n \cap B_n$ . Então  $E_n^c = (A_n \cap B_n)^c = A_n^c \cup B_n^c$ , de modo que

$$P(E_n^c) = P(A_n^c \cup B_n^c) \leq P(A_n^c) + P(B_n^c) \leq \beta_n + 0 = \beta_n.$$

e  $E_n$  é quase certo, pois  $P(E_n) = 1 - P(E_n^c) = 1 - 0 = 1$ . Seja

$$E = \left\{ \omega \in \Omega : \exists n_0(\omega) \text{ tal que } m \leq U_{n+1}(\omega) \leq U_n(\omega), \right. \\ \left. \forall n \geq n_0(\omega) \right\}.$$

Então  $E = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left( \bigcap_{i=n}^{+\infty} E_i \right)$ , de modo que decorre do Lema 7.2.10 que  $E$  é quase certo.

2- Seja  $\omega \in E$ . Então existe  $n \geq 0$  tal que  $\omega \in \bigcap_{i=n}^{+\infty} E_i$ , de modo que

$$\forall i \geq n : m \leq U_{i+1}(\omega) \leq U_i(\omega)$$

e  $\{U_i(\omega)\}_{i \geq n} \subset \mathbb{R}$  é decrescente e limitada, de modo que existe  $U_\infty(\omega)$  tal que

$$U_i(\omega) \longrightarrow U_\infty(\omega) \quad \text{quando } i \longrightarrow +\infty .$$

3- Definimos desta maneira uma aplicação numérica  $U_\infty : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ . As propriedades elementares das aplicações mensuráveis (Cf., por exemplo, [40], p. 184) mostram que  $U_\infty$  é uma variável aleatória. Além disto  $U_\infty(\omega) \geq m$ , dado que  $m \leq U_i(\omega), \forall i \geq n$ .

4- Seja

$$F = \{\omega \in \Omega : U_n(\omega) \longrightarrow U_\infty(\omega) \text{ quando } n \longrightarrow +\infty\} .$$

5- Temos  $E \subset F$ , de modo que  $P(F) \geq P(E) = 1$  e  $F$  é quase certo. Seja

$$G = \{\omega \in \Omega : U_\infty(\omega) \geq m\} .$$

Temos  $E \subset G$ , de modo que  $P(G) \geq P(E) = 1$  e  $G$  é quase certo. ■

LEMA 7.2.12. *Sob as hipóteses do teorema lema 7.2.9, temos*

$$\forall \lambda > m : P(U_n \geq \lambda) \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \longrightarrow +\infty .$$

DEMONSTRAÇÃO:

1- Consideremos a variável aleatória  $Z_n$  definida por

$$Z_n = 0, \text{ se } U_n \geq \lambda, \quad Z_n = 1, \text{ se } U_n < \lambda .$$

Temos

$$P(Z_{n+1} = i) = P(Z_{n+1} = i, Z_n = 0) + P(Z_{n+1} = i, Z_n = 1),$$

de modo que

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = i) &= P(Z_n = 0) P(Z_{n+1} = i | Z_n = 0) \\ &\quad + P(Z_n = 1) P(Z_{n+1} = i | Z_n = 1) \end{aligned}$$

e, pondo

$$\pi_n = \begin{pmatrix} P(Z_n = 0) \\ P(Z_n = 1) \end{pmatrix},$$

temos

$$\pi_{n+1} = A\pi_n, \quad A_{ij} = P(Z_{n+1} = i | Z_n = j) \quad (0 \leq i, j \leq 1).$$

2- Consideremos os eventos

$$F = \{\omega \in \Omega : U_{n+1}(\omega) \geq \lambda \text{ e } U_n(\omega) < \lambda\},$$

$$G = \{\omega \in \Omega : U_{n+1}(\omega) \geq U_n(\omega)\}.$$

Temos  $F \subset G$ , de modo que  $P(F) \leq P(G) \leq \beta_n$ . Por conseguinte,

$$P(Z_{n+1} = 0, Z_n = 1) = P(U_{n+1} \geq \lambda, U_n < \lambda) \leq \beta_n$$

e

$$A_{01}(\pi_n)_1 = P(Z_{n+1} = 0, Z_n = 1) \leq \beta_n.$$

3- Por outro lado,

$$\begin{aligned} A_{00} &= P(Z_{n+1} = 0 | Z_n = 0) = \\ &= 1 - P(U_{n+1} < \lambda | U_n \geq \lambda) \leq 1 - \alpha(\lambda). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0 : (\pi_{n+1})_0 &= A_{00}(\pi_n)_0 + A_{01}(\pi_n)_1 \\ &\leq (1 - \alpha(\lambda))(\pi_n)_0 + \beta_n \end{aligned}$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned} \forall n \geq k : (\pi_{n+1})_0 &\leq (1 - \alpha(\lambda))^{n+1-k} (\pi_k)_0 \\ &\quad + \underbrace{\sum_{i=k}^n (1 - \alpha(\lambda))^{n-i} \beta_i}_{\leq 1} \end{aligned}$$

e temos

$$\forall n \geq k : (\pi_{n+1})_0 \leq (1 - \alpha(\lambda))^{n+1} (\pi_k)_0 + \sum_{i=k}^n \beta_i,$$

de onde

$$\forall n \geq k : (\pi_{n+1})_0 \leq (1 - \alpha(\lambda))^{n+1} (\pi_k)_0 + \sum_{i=k}^{+\infty} \beta_i$$

4- Por conseguinte,

$$\forall k \geq 0 : \lim_n \sup (\pi_{n+1})_0 \leq \sum_{i=k}^{+\infty} \beta_i .$$

Como a série é convergente, temos

$$R_k = \sum_{i=k}^{+\infty} \beta_i \longrightarrow 0 \text{ quando } k \longrightarrow +\infty .$$

Logo,

$$\lim_n \sup (\pi_{n+1})_0 \leq 0 .$$

Assim, dado que  $(\pi_{n+1})_0, \forall n \geq 0$ , temos

$$\lim_n \sup (\pi_{n+1})_0 = 0 .$$

5- Como

$$\lim_n \inf (\pi_{n+1})_0 \leq \lim_n \sup (\pi_{n+1})_0 ,$$

temos também

$$\lim_n \inf (\pi_{n+1})_0 \leq 0 .$$

E, dado que  $(\pi_{n+1})_0, \forall n \geq 0$ , vem

$$\lim_n \inf (\pi_{n+1})_0 = 0 .$$

6- A igualdade dos dois limites mostra que

$$(\pi_{n+1})_0 \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow +\infty .$$

■

Assim,

LEMA 7.2.13. *Sob as hipóteses do teorema 7.2.9 , existe  $U_\infty$  tal que  $U_n \longrightarrow U$ . Além disto,*

$$\forall \lambda > m : P (U_\infty \geq \lambda) = 0 .$$

DEMONSTRAÇÃO:

1- O lema 7.2.3 mostra que existe  $U_\infty$  tal que  $U_n \longrightarrow U$  q.c.. Como  $U_n \longrightarrow U_\infty$  q.c., temos também  $U_n \longrightarrow U_\infty$  p. e, por conseguinte,  $U_n \longrightarrow U$  L..

2- Sejam  $F_n$  a lei de  $U_n$  e  $F_\infty$  a lei de  $U_\infty$ . A convergência em lei implica que

$$P(U_n < \lambda) = F_n(\lambda) \longrightarrow F_\infty(\lambda) = P(U_\infty < \lambda),$$

de modo que

$$P(U_n \geq \lambda) = 1 - F_n(\lambda) \longrightarrow 1 - F_\infty(\lambda) = P(U_\infty \geq \lambda).$$

Assim

$$P(U_\infty \geq \lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n \geq \lambda) = 0.$$

■

DEMONSTRAÇÃO do teorema 7.2.9-

1- Decorre do lema 7.2.11 que existe uma variável aleatória  $U_\infty$  tal que  $U_n \rightarrow U_\infty$  q.c. e  $U_\infty \geq m$  q. c. Como na demonstração desse mesmo lema, seja

$$E = \{\omega \in \Omega : m \leq U_{n+1}(\omega) \leq U_n(\omega), \forall n \geq 0\}.$$

$E$  é quase certo e  $U_n(\omega) \rightarrow U_\infty(\omega)$ , para todo  $\omega \in E$ .

2- Seja  $\lambda > m$  : decorre do lema 7.2.13 que  $U_\infty < \lambda$  q. c.. Por conseguinte, decorre do Lema 7.2.4 que  $U_\infty = m$  q. c. .

■

Este teorema sugere um método de minimização: sejam

1.  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  um vetor aleatório contínuo cuja densidade de probabilidade  $\varphi_Z : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  verifica ( $|\bullet|$  é a norma euclidiana)

$$\forall r > 0 : \inf \{\varphi_Z(z) : |z| \leq r\} \geq a(r) > 0$$

2.  $x_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  um vetor aleatório

3. dois números reais estritamente positivos  $\alpha > 0, \beta > 0$ ,

4.  $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de números reais estritamente positivos  $\theta_n > 0, \forall n \geq 0$  tal que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{\theta_n}\right) < \infty$

Define-se a seqüência de variáveis aleatórias  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  por

$$\forall n \geq 0 : x_{n+1}(\omega) = D_n(\omega) x_n(\omega) + (1 - D_n(\omega)) t_n(\omega),$$

$$t_n = x_n + Z ;$$

$$\begin{aligned} P(D_n = 0 | f(x_n) < f(t_n)) &= 1 - \beta_n ; \\ P(D_n = 1 | f(x_n) < f(t_n)) &= \beta_n ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(D_n = 0 | f(x_n) \geq f(t_n)) &= 1 ; \\ P(D_n = 1 | f(x_n) \geq f(t_n)) &= 0 ; \end{aligned}$$

$$\beta_n = \exp\left(-\left(\frac{\alpha}{\theta_n} + \beta\right)\right) ,$$

e  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $U_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$U_n(\omega) = f(x_n(\omega)) .$$

Como na seção precedente, a densidade de probabilidade condicional de  $t_n$  é

$$\varphi_n(t | x_n = x) = \varphi_Z(t - x)$$

e a densidade de probabilidade de  $x_n$  é

$$\phi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t | x_n = x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi_Z(t - x) dx ,$$

a qual verifica

$$\forall r > 0 : \phi_n(t) \geq a(r) \ell(B_r) > 0 ,$$

onde  $\ell$  é a medida de Lebesgue e  $B_r$  é a bola raio  $r$  ( $B_r = \{z \in \mathbb{R}^n : |z| \leq r\}$ ).

Temos

TEOREMA 7.2.14.  $U_n \rightarrow m$  q.c.

DEMONSTRAÇÃO:

1- Notemos inicialmente que

$$\beta_n = \exp\left(-\left(\frac{\alpha}{\theta_n} + \beta\right)\right) \leq \exp\left(-\frac{\alpha}{\theta_n}\right) ,$$

de modo que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n < \infty .$$

2- Por construção:

$$\forall n \geq 0 : P(U_{n+1} > U_n) \leq \beta_n$$

e

$$\forall n \geq 0 : U_n \geq m \text{ q.c.}$$

3- De maneira análoga à utilizada na demonstração do teorema 7.2.8, temos

$$P(U_{n+1} \leq \lambda | U_n \geq \lambda) \geq \alpha(\lambda) > 0.$$

4- O resultado decorre do teorema 7.2.9. ■

Na prática, é usual utilizar uma variante na qual

$$P(D_n = 0 | f(x_n) < f(t_n)) = c_n;$$

$$P(D_n = 1 | f(x_n) < f(t_n)) = 1 - c_n;$$

$$P(D_n = 0 | f(x_n) \geq f(t_n)) = 1; \quad P(D_n = 1 | f(x_n) \geq f(t_n)) = 0;$$

$$c_n = \exp\left(-\left(\frac{f(t_n) - f(x_n) + \alpha}{\theta_n} + \beta\right)\right).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} c_n &\leq \exp\left(-\left(\frac{\overbrace{f(t_n) - f(x_n) + \alpha}^{\geq 0}}{\theta_n} + \beta\right)\right) \\ &\leq \exp\left(-\left(\frac{\alpha}{\theta_n} + \beta\right)\right) \leq \exp\left(-\frac{\alpha}{\theta_n}\right), \end{aligned}$$

de modo que o teorema 7.2.14 continua válido. O algoritmo associado a esta escolha é o *algoritmo de descida estocástica com dinâmica de Metropolis*, o qual corresponde ao *recozimento simulado*:

1. Inicialização: são dados um ponto de partida  $x_0$  e um número de sorteios  $nr$
2. Iterações: o ponto atual é  $x_n$  e calcula-se  $x_{n+1}$  em duas subetapas
  - (a) sorteio: gerar aleatoriamente um valor  $Z_n$  de  $Z$  e definir  $t_n = x_n + Z_n$ .

- (b) dinâmica: definir  $x_{n+1}$  : se  $f(x_n) \geq f(t_n)$  então  $x_{n+1} = t_n$ . Senão sortear  $a$  de lei uniforme sobre  $(0, 1)$ , se  $a < c_n$  então  $x_{n+1} = t_n$ . Senão  $x_{n+1} = x_n$
3. se  $n < nr$
- (a) incrementar  $n$  :  $n \leftarrow n + 1$
- (b) retornar a 2.
4. se  $n \geq nr$  : estimar  $m \approx f(x_n)$  e  $x^* \approx x_n$ .

NOTA 7.2.15. *O leitor pode encontrar na literatura resultados de convergência baseados em difusões estocásticas. Ver, por exemplo, [3] ou [37].*

### 7.2.3 Versão 3: Métodos híbridos

Apesar da modificação, o método precedente continua sendo puramente baseado em sorteios. Para obter uma maior eficiência, uma idéia simples consiste em combinar os sorteios com um método determinístico. Por exemplo, consideremos iterações de descida da forma:

$$x_{n+1} = Q_n(x_n). \quad (7.2.22)$$

Por exemplo, o método do gradiente a passo fixo corresponde a

$$Q_n(x) = x - \mu \nabla f(x).$$

Uma idéia simples para melhorar os resultados consiste em combinar as iterações de descida com os sorteios. Por exemplo, podemos introduzir uma etapa intermediária em nosso algoritmo básico

1. Inicialização : é dado um ponto de partida  $x_0$
2. Iterações: o ponto atual é  $x_n$  e calcula-se  $x_{n+1}$  em três subetapas
  - (a) descida: gerar um novo ponto  $t_0$  utilizando o método de descida.
  - (b) sorteio: para  $i = 1, \dots, nr$  : gerar aleatoriamente um incremento  $(\Delta x_n)_i$  e colocar  $t_i = t_0 + (\Delta x_n)_i$ .
  - (c) dinâmica: definir o valor de  $x_{n+1}$  a partir de  $x_n$  e  $t_i, i = 0, \dots, nr$ . Por exemplo, a *dinâmica elitista* conduz a

$$x_{n+1} = \arg \min \{f(x_n), f(t_i) : 0 \leq i \leq nr\} .$$

Esta maneira de combinar o método de descida e os sorteios pode ser vista como uma *perturbação estocástica* do método de descida: o algoritmo básico pode ser reescrito

1. Inicialização : é dado um ponto de partida  $x_0$
2. Iterações: o ponto atual é  $x_n$  e calcula-se  $x_{n+1}$  em três subetapas
  - (a) descida: gerar um novo ponto  $t_0$  utilizando o método de descida.
  - (b) perturbação:
  - (c) para  $i = 1, \dots, nr$  : gerar aleatoriamente um incremento  $(\Delta x_n)_i$  e colocar  $t_0 = \tilde{x}_n + (\Delta x_n)_i$  .
  - (d) determinar  $\tilde{x}_n = \arg \min \{ f(t_i) : 0 \leq i \leq nr \}$  .
  - (e) dinâmica: definir o valor de  $x_{n+1}$  a partir de  $x_n$  e  $\tilde{x}_n$  utilizando a dinâmica elitista.

Este algoritmo corresponde às iterações

$$x_{n+1} = Q_n(x_n) + P_n, \quad (7.2.23)$$

onde  $P_n$  é uma variável aleatória. Estas iterações convergem para um mínimo global sob hipóteses bastante gerais, tais como

$$\begin{aligned} \forall M > 0 : \exists a(M) \text{ tal que } |x| \leq M \\ \implies |Q_n(x)| \leq a(M), \forall n \geq 0, \end{aligned} \quad (7.2.24)$$

além das hipóteses precedentes (7.2.13) e (7.2.14) sobre  $f$ . A variável aleatória  $P_n$  deve ser escolhida de maneira que

$$\begin{aligned} \forall \lambda > m : P(U_{n+1} \leq \lambda \mid U_n \geq \lambda) \geq \alpha(n, \lambda) > 0 ; \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha(n, \lambda) = +\infty . \end{aligned} \quad (7.2.25)$$

Estas escolhas repousam sobre o teorema seguinte:

**TEOREMA 7.2.16.** *Seja  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de variáveis aleatórias tal que*

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0 : U_{n+1} \leq U_n \quad q.c. \\ \forall n \geq 0 : U_n \geq m \quad q.c. \\ \forall \lambda > m : \exists \alpha(n, \lambda) > 0 \text{ tal que} \\ P(U_{n+1} \leq \lambda \mid U_n \geq \lambda) \geq \alpha(n, \lambda) \end{aligned} \quad (7.2.26)$$

e

$$\forall \lambda > m : \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha(n, \lambda) = +\infty .$$

Então:

$$U_n \longrightarrow m \text{ q.c.}$$

Aqui também, a condição (7.2.26) implica que  $P(U_n \geq \lambda) > 0$ . Como veremos no que segue, esta desigualdade é verificada quando a densidade de probabilidade dos sorteios é estritamente positiva sobre  $\mathbb{R}^n$ .

A prova deste resultado utiliza o lema seguinte:

LEMA 7.2.17. *Sob as hipóteses do teorema lema 7.2.16, temos*

$$\forall \lambda > m : P(U_n \geq \lambda) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

DEMONSTRAÇÃO:

1- Consideremos a variável aleatória  $Z_n$  definida por

$$Z_n = 0, \text{ se } U_n \geq \lambda, \quad Z_n = 1, \text{ se } U_n < \lambda.$$

Temos

$$P(Z_{n+1} = i) = P(Z_{n+1} = i, Z_n = 0) + P(Z_{n+1} = i, Z_n = 1),$$

de modo que

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = i) &= P(Z_n = 0) P(Z_{n+1} = i | Z_n = 0) \\ &\quad + P(Z_n = 1) P(Z_{n+1} = i | Z_n = 1) \end{aligned}$$

e, pondo

$$\pi_n = \begin{pmatrix} P(Z_n = 0) \\ P(Z_n = 1) \end{pmatrix},$$

temos

$$\pi_{n+1} = A\pi_n, \quad A_{ij} = P(Z_{n+1} = i | Z_n = j) \quad (0 \leq i, j \leq 1).$$

2- Como a seqüência é decrescente q.c., temos

$$P(Z_{n+1} = 0 | Z_n = 1) = 0, \quad P(Z_{n+1} = 1 | Z_n = 1) = 1.$$

Assim,

$$A_{11} (\pi_n)_1 = (\pi_n)_1.$$

3- Por outro lado,

$$A_{10} = P(Z_{n+1} = 1 | Z_n = 0) = \\ P(U_{n+1} < \lambda | U_n \geq \lambda) \geq \alpha(\lambda, n) ,$$

de forma que

$$\forall n \geq 0 : (\pi_{n+1})_1 = A_{10} (\pi_n)_0 + A_{11} (\pi_n)_1 \\ \geq \alpha(\lambda, n) (\pi_n)_0 + (\pi_n)_1$$

e, por conseguinte,

$$\forall n \geq 0 : (\pi_{n+1})_1 \geq \alpha(\lambda, n) (1 - (\pi_n)_1) + (\pi_n)_1 .$$

4- Como  $\alpha(\lambda, n) (1 - (\pi_n)_1) \geq 0$ , resulta desta desigualdade que

$$\forall n \geq 0 : (\pi_{n+1})_1 \geq (\pi_n)_1 .$$

Assim,  $\{(\pi_n)_1\}_{n \in \mathbb{N}}$  é crescente e limitada superiormente por 1. Logo, existe  $p \leq 1$  tal que

$$(\pi_n)_1 \longrightarrow p \text{ quando } n \longrightarrow +\infty .$$

Além disto

$$\forall n \geq 0 : p \geq (\pi_n)_1 .$$

5- Temos então

$$\alpha(\lambda, n) (1 - (\pi_n)_1) \geq \alpha(\lambda, n) (1 - p) ,$$

de forma que

$$\forall n \geq 0 : (\pi_{n+1})_1 \geq \alpha(\lambda, n) (1 - p) + (\pi_n)_1 .$$

Assim,

$$\forall n \geq 0 : (\pi_{n+1})_1 \geq (\pi_0)_0 + (1 - p) \sum_{i=0}^n \alpha(\lambda, i) ,$$

de forma que

$$\forall n \geq 0 : 1 \geq (\pi_0)_0 + (1 - p) \sum_{i=0}^n \alpha(\lambda, i) ,$$

6- Se  $p < 1$ , temos

$$\sum_{i=0}^n \alpha(\lambda, i) \leq \frac{1 - (\pi_0)_0}{1 - p} ,$$

de forma que

$$+\infty = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha(i, \lambda) \leq \frac{1 - (\pi_0)_0}{1 - p},$$

o que é absurdo. Por conseguinte,  $p = 1$  e temos  $(\pi_{n+1})_1 \rightarrow 1$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , de modo que

$$(\pi_{n+1})_0 \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty .$$

■

LEMA 7.2.18. *Sob as hipóteses do teorema 7.2.16 , existe  $U_\infty$  tal que  $U_n \rightarrow U$  L.. Além disto,*

$$\forall \lambda > m : P(U_\infty \geq \lambda) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO:

- 1- O lema 7.2.3 mostra que existe  $U_\infty$  tal que  $U_n \rightarrow U$  q.c.. Como  $U_n \rightarrow U_\infty$  q.c., temos também  $U_n \rightarrow U_\infty$  p. e, por conseguinte,  $U_n \rightarrow U$  L..
- 2- Sejam  $F_n$  a lei de  $U_n$  e  $F_\infty$  a lei de  $U_\infty$ . A convergência em lei implica que

$$P(U_n < \lambda) = F_n(\lambda) \rightarrow F_\infty(\lambda) = P(U_\infty < \lambda),$$

de modo que

$$P(U_n \geq \lambda) = 1 - F_n(\lambda) \rightarrow 1 - F_\infty(\lambda) = P(U_\infty \geq \lambda).$$

Assim

$$P(U_\infty \geq \lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n \geq \lambda) = 0 .$$

■

DEMONSTRAÇÃO do teorema 7.2.16-

- 1- Decorre do lema 7.2.3 que existe uma variável aleatória  $U_\infty$  tal que  $U_n \rightarrow U_\infty$  q.c. e  $U_\infty \geq m$  q. c. Como na demonstração desse mesmo lema, seja

$$E = \{\omega \in \Omega : m \leq U_{n+1}(\omega) \leq U_n(\omega), \forall n \geq 0\} .$$

$E$  é quase certo e  $U_n(\omega) \rightarrow U_\infty(\omega)$ , para todo  $\omega \in E$ .

- 2- Seja  $\lambda > m$  : decorre do lema 7.2.18 que  $U_\infty < \lambda$  q. c.. Por conseguinte, decorre do Lema 7.2.4 que  $U_\infty = m$  q. c. .

■

Este teorema sugere um método de minimização: sejam

1.  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  um vetor aleatório contínuo cuja densidade de probabilidade  $\varphi_Z : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  verifica ( $|\bullet|$  é a norma euclidiana)

$$\forall r > 0 : \inf \{ \varphi_Z(z) : |z| \leq r \} \geq a(r) > 0$$

2.  $x_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  um vetor aleatório

3.  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de números reais estritamente positivos tal que

$$\lambda_n > 0, \forall n \geq 0 \text{ e } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n^k} a\left(\frac{\xi}{\lambda_n}\right) = +\infty, \forall \xi > 0.$$

Esta última condição está satisfeita, por exemplo, quando  $0 < \lambda_n \leq M, \forall n \geq 0$  e  $\sum_{n=0}^{+\infty} a\left(\frac{\xi}{\lambda_n}\right) = +\infty, \forall \xi > 0$ . Em tal caso:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n^k} a\left(\frac{\xi}{\lambda_n}\right) \geq \frac{1}{M^k} \sum_{n=0}^{+\infty} a\left(\frac{\xi}{\lambda_n}\right) = +\infty.$$

Ela também é satisfeita se  $0 < \lambda_n \leq M, \forall n \geq 0$  e  $\xi \mapsto a(\xi)$  é decrescente e estritamente positiva sobre  $(0, +\infty)$ . Neste caso:

$$a\left(\frac{\xi}{\lambda_n}\right) \geq a\left(\frac{\xi}{M}\right) > 0 \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a\left(\frac{\xi}{\lambda_n}\right) = +\infty.$$

Define-se a seqüência de variáveis aleatórias  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, x_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  por

$$\forall n \geq 0 : x_{n+1}(\omega) = \arg \min \{ f(x_n(\omega)), f(t_n(\omega)) \}, \\ t_n = Q_n(x_n) + \lambda_n Z ;$$

e  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}, U_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$U_n(\omega) = f(x_n(\omega)) .$$

Neste caso, a densidade de probabilidade condicional de  $t_n$  é

$$\varphi_n(t | x_n = x) = \frac{1}{\lambda_n^k} \varphi_Z\left(\frac{t - Q_n(x)}{\lambda_n}\right) .$$

e a densidade de  $t_n$  é

$$\phi_n(t) = \frac{1}{\lambda_n^k} \int_{\mathbb{R}} \varphi_Z\left(\frac{t - Q_n(x)}{\lambda_n}\right) dx \\ \geq \frac{1}{\lambda_n^k} \int_{\left|\frac{t - Q_n(x)}{\lambda_n}\right| \leq r} \varphi_Z\left(\frac{t - Q_n(x)}{\lambda_n}\right) dx ,$$

de forma que

$$\begin{aligned} \forall r > 0 : \phi_n(t) &\geq \frac{1}{\lambda_n^k} \int_{\left| \frac{t - Q_n(x)}{\lambda_n} \right| \leq r} \varphi_Z \left( \frac{t - Q_n(x)}{\lambda_n} \right) dx \\ &\geq \frac{1}{\lambda_n^k} a(r) \ell(B_r) > 0, \end{aligned}$$

onde  $\ell$  é a medida de Lebesgue e  $B_r$  é a bola raio  $r$  ( $B_r = \{z \in \mathbb{R}^n : |z| \leq r\}$ ).

Temos

TEOREMA 7.2.19.  $U_n \rightarrow m$  q.c.

DEMONSTRAÇÃO:

1. Por construção:

$$\forall n \geq 0 : U_{n+1} \leq U_n \text{ q.c.}$$

$$\forall n \geq 0 : U_n \geq m \text{ q.c.}$$

2. Seja  $\lambda > m$ . Consideremos  $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^k : f(x) < \lambda\}$  e  $S_\lambda^c = \{x \in \mathbb{R}^k : f(x) \geq \lambda\}$ . Da hipótese (7.2.14), existem  $x_\lambda \in S_\lambda$  e  $\eta_\lambda > 0$  tais que

$$B(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^k : |x - x_\lambda| \leq \eta_\lambda\} \subset S_\lambda,$$

3. Seja  $\gamma > f(x_0)$ :  $S_\gamma$  é limitado, de modo que existe  $M_0 > 0$  tal que  $|x| \leq M_0$  para todo  $x \in S_\gamma$ . Logo,  $|Q_n(x)| \leq b(M_0)$  para todo  $x \in S_\gamma$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int_{S_\lambda} \varphi_n(t|x_n = x) dt &\geq \int_{B(\lambda)} \varphi_n(t|x_n = x) dt \\ &= \frac{1}{\lambda_n^k} \int_{B(\lambda)} \varphi_Z \left( \frac{t - Q_n(x)}{\lambda_n} \right) dt \end{aligned}$$

verifica ( $\ell$  é a medida de Lebesgue)

$$\begin{aligned} \int_{S_\lambda} \varphi_n(t|x_n = x) dt &\geq \frac{1}{\lambda_n^k} \int_{B(\lambda)} b \left( \frac{\eta_\lambda + b(M_0)}{\lambda_n} \right) dt \\ &\geq \frac{1}{\lambda_n^k} a \left( \frac{\eta_\lambda + b(M_0)}{\lambda_n} \right) \ell(B(\lambda)). \end{aligned}$$

4. Sejam  $F_n$  a lei de  $x_n$  e  $\mu_n$  a medida associada a  $F_n$ . Temos

$$\begin{aligned} P(x_{n+1} \in S_\lambda, x_n \notin S_\lambda) &= \int_{S_\lambda^c} \mu_n(dx) \int_{S_\lambda} \varphi_n(t|x_n=x) dt \\ &\geq \int_{C(\lambda)} \mu_n(dx) \int_{S_\lambda} \varphi_n(t|x_n=x) dt \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} P(x_{n+1} \in S_\lambda, x_n \notin S_\lambda) &\geq \\ &\frac{1}{\lambda_n^k} a \left( \frac{\eta_\lambda + b(M_0)}{\lambda_n} \right) \ell(B(\lambda)) \int_{S_\lambda^c} \mu_n(dx), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} P(x_{n+1} \in S_\lambda, x_n \notin S_\lambda) &\geq \\ &\frac{1}{\lambda_n^k} a \left( \frac{\eta_\lambda + b(M_0)}{\lambda_n} \right) \ell(B(\lambda)) P(x_n \notin S_\lambda). \end{aligned}$$

Da hipótese (7.2.15), existem  $y_\lambda \in S_\lambda^c$  e  $r_\lambda > 0$  tais que

$$C(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^k : |x - y| \leq r_\lambda\} \subset S_\lambda^c.$$

Logo

$$\begin{aligned} P(x_n \notin S_\lambda) &= \int_{S_\lambda^c} \phi_n(x) dx \geq \int_{C(\lambda)} \phi_n(x) dx \\ &\geq a(r_\lambda) \ell(B_{r_\lambda}) > 0 \end{aligned}$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned} P(x_{n+1} \in S_\lambda | x_n \notin S_\lambda) &= \frac{P(x_{n+1} \in S_\lambda, x_n \notin S_\lambda)}{P(x_n \notin S_\lambda)} \\ &\geq \frac{1}{\lambda_n^k} a \left( \frac{\eta_\lambda + b(M_0)}{\lambda_n} \right) \ell(B(\lambda)). \end{aligned}$$

5. Pondo

$$\alpha(n, \lambda) = \frac{1}{\lambda_n^k} a \left( \frac{\eta_\lambda + b(M_0)}{\lambda_n} \right) \ell(B(\lambda)),$$

temos

$$P(U_{n+1} \leq \lambda \mid U_n \geq \lambda) \geq \alpha(n, \lambda) > 0$$

e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha(n, \lambda) = +\infty$$

6. O resultado decorre do teorema 7.2.16. ■

O algoritmo associado a este teorema é o *algoritmo de perturbações estocásticas*:

1. Inicialização : são dados um ponto de partida  $x_0$  , um número de sorteios  $nr$  e um máximo de iterações  $nm$
2. Iterações: o ponto atual é  $x_n$  e calcula-se  $x_{n+1}$  em três subetapas
  - (a) descida: gerar  $t_0 = Q_n(x_n)$ .
  - (b) sorteio: para  $i = 1, \dots, nr$ : sortear um valor  $Z_i$  de  $Z$  e definir  $t_i = t_0 + \lambda_n Z_i$ .
  - (c) dinâmica: determinar  $x_{n+1} = \arg \min_{i=0, \dots, nr} \{f(x_n), f(t_i)\}$  :
3. se  $n \geq nm$  : estimar  $m \approx f(x_n)$  e  $x^* \approx x_n$ .

NOTA 7.2.20. A *dinâmica de Metropolis* pode ser implementada de várias maneiras. Por exemplo, podemos

1. determinar  $\tilde{x}_n = \arg \min \{f(t_i) : 0 \leq i \leq nr\}$  .
2. aplicar a *dinâmica de Metropolis* ao par  $(x_n, \tilde{x}_n)$  :

$$\forall n \geq 0 : x_{n+1} = D_n x_n + (1 - D_n) \tilde{x}_n \ ;$$

$$P(D_n = 0 \mid f(x_n) < f(\tilde{x}_n)) = 1 - c_n \ ;$$

$$P(D_n = 1 \mid f(x_n) < f(\tilde{x}_n)) = c_n \ ;$$

$$P(D_n = 0 \mid f(x_n) \geq f(\tilde{x}_n)) = 1;$$

$$P(D_n = 1 \mid f(x_n) \geq f(\tilde{x}_n)) = 0;$$

$$c_n = \exp \left( - \left( \frac{f(t_n) - f(x_n) + \alpha}{\theta_n} + \beta \right) \right) .$$

NOTA 7.2.21. O leitor pode encontrar na literatura outros desenvolvimentos, entre os quais métodos para funções não diferenciáveis e para problemas com restrições. Ver, por exemplo, [57], [2], [26], [25], [53], [32].

### 7.3 Métodos utilizando populações.

Os métodos expostos podem ser aplicados em uma população de pontos iniciais. Por exemplo, consideremos uma população inicial formada de  $np$  elementos:

$$\Pi_0 = \{x_0^1, \dots, x_0^{np}\} .$$

Umé idéia simples consiste em aplicar os algoritmos a cada um dos elementos  $x_0^i$ , de modo a gerar uma seqüência de populações  $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$\Pi_n = \{x_n^1, \dots, x_n^{np}\} .$$

Neste caso utilizamos cada  $x_0^i$  como ponto de partida, o que justifica que falemos de *método multipartidas*. Mas também é possível combinar os elementos calculados. Por exemplo, podemos utilizar o algoritmo seguinte:

1. Inicialização: é dado uma população inicial  $\Pi_0$
2. Iterações: a população atual é  $\Pi_n$  e calcula-se  $\Pi_{n+1}$  em três subetapas
  - (a) descida: gerar  $M_n^0 = \{t_0^1, \dots, t_0^{np}\}$ , onde  $t_0^i = Q_n(x_n^i)$ .
  - (b) sorteio: para  $i = 1, \dots, np$  e  $j = 1, \dots, nr$ : gerar aleatoriamente um incremento  $(\Delta x_n)_j^i$  e colocar  $t_j^i = t_0^i + (\Delta x_n)_j^i$ . Esta subetapa gera  $M_n^1 = \left\{ \begin{matrix} t_j^i & : & i & = & 1, \dots, np \\ & & j = 0, \dots, nr \end{matrix} \right\}$ .
  - (c) colocar  $M_n = M_n^0 \cup M_n^1$ .
  - (d) dinâmica: definir o valor de  $\Pi_{n+1}$  a partir de  $\Pi_n$  e  $t_j^i, i = 1, \dots, np$  e  $j = 0, \dots, nr$ . Por exemplo, a *dinâmica elitista* conduz a selecionar os  $np$  melhores elementos de  $\Pi_n \cup M_n$ .

Muitas variantes deste algoritmo básico são possíveis e podem ser encontradas na literatura. Por exemplo, é possível definir  $M_n$  determinando o melhor elemento de  $\{t_j^i : j = 0, \dots, nr\}$  para  $i$  fixo: a reunião dos resultados para  $i = 1, \dots, np$  forma  $M_n$ . Também é possível introduzir uma etapa suplementar, onde os elementos disponíveis são combinados entre si para produzir novos elementos. Por exemplo, podemos gerar combinações afins aleatórias dos elementos de  $\Pi_n$ :

$$C_n = \{\alpha^{ij} x_n^i + \beta^{ij} x_n^j + \gamma^{ij} : i, j, \alpha^{ij}, \beta^{ij}, \gamma^{ij} \text{ aleatórios}\}$$

Os elementos de  $C_n$  podem ser utilizados em qualquer subetapa. Por exemplo, na dinâmica: são selecionados os  $np$  melhores elementos de  $\Pi_n \cup M_n \cup C_n$ .

## 7.4 Determinação de pontos de partida

A determinação de pontos de partida pode ser efetuada, por exemplo, a partir de uma fórmula de representação. Esta fórmula é válida para espaços de Hilbert gerais, inclusive em dimensão infinita. Por exemplo, consideremos um espaço de Hilbert  $V$  e um funcional  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Estamos interessados na determinação de

$$u = \arg \min_S J, \text{ i.e., } u \in S, J(u) \leq J(v), \forall v \in S. \quad (7.4.27)$$

Suponhamos que  $S \subset V$  é fechado, limitado e não vazio. Então existe uma constante  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\|v\| \leq \alpha, \forall v \in S$ .

Seja  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional contínuo. Suponhamos que existe uma constante  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $|J(v)| \leq \beta, \forall v \in S$ . esta hipótese é verificada quando  $J$  possui um ínfimo real e é coercivo.

Seja  $B_\varepsilon^*$  a parte de  $S$  situada no interior da bola aberta de centro  $u$  e raio  $\varepsilon$  and  $S_\varepsilon^* = S - B_\varepsilon^*$  seu complemento em  $S$ . Suponhamos que existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $\mu(B_\varepsilon^*) > 0, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ . Seja  $\chi_\varepsilon^*$  a função característica de  $B_\varepsilon^*$  e  $\psi_\varepsilon^*$  a função característica de  $S_\varepsilon^*$ . We have  $\chi_\varepsilon^*(v) + \psi_\varepsilon^*(v) = 1, \forall v \in S$ .

Seja  $\lambda > 0$  um número real suficientemente grande (no que segue, tomamos  $\lambda \rightarrow +\infty$ ) e  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $g \geq 0$ . Suponhamos que existem  $\varepsilon_0 > 0$  e duas funções  $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tais que,  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ :

$$\frac{E(vg(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} u, \text{ fracamente em } V. \quad (7.4.28)$$

Então

**TEOREMA 7.4.1.** *Suponhamos que (7.4.30) e (7.4.31) sejam verificadas. Se  $V_d$  é um subespaço vetorial de dimensão finita de  $V$  e  $P_d : V \rightarrow V_d$  é a projeção ortogonal sobre  $V_d$ , então*

$$\frac{E(P_d(v)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} P_d(u), \text{ fortemente em } V. \quad (7.4.29)$$

Além disto, para todo  $\ell \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ ,

$$\frac{E(\ell(P_d(v))g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} \xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{d \rightarrow +\infty} \ell(u);$$

$$\frac{E(P_d(v)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} \xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{d \rightarrow +\infty} u, \text{ fracamente em } V.$$

**COROLÁRIO 7.4.2.** *Suponhamos que, além disto, o teorema de Fubini-Tonnelli se aplique. Então,*

$$E((v, \varphi_n)g(\lambda, J(v))) = (E(vg(\lambda, J(v))), \varphi_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

e

$$E(g(\lambda, J(v))) \geq h_1(\lambda, \varepsilon) > 0 ; E(\psi_\varepsilon^*(v)g(\lambda, J(v))) \leq h_2(\lambda, \varepsilon) \quad (7.4.30)$$

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : \frac{h_2(\lambda, \varepsilon)}{h_1(\lambda, \varepsilon)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0 . \quad (7.4.31)$$

O teorema resulta da proposição seguinte

PROPOSIÇÃO 7.4.3. *Suponhamos que (7.4.30) e (7.4.31) são satisfeitas. Seja  $\ell \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^d)$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ . Então*

$$\ell(u) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{E(\ell(v)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} .$$

DEMONSTRAÇÃO da proposição-

1- Temos

$$\begin{aligned} \frac{E(\ell(v)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} &= \\ \frac{E(\ell(u)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} &+ \frac{E(\ell(v-u)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} . \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{E(\ell(v)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} = \ell(u) + \frac{E(\ell(v-u)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} . \quad (7.4.32)$$

2- Seja  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ . Temos

$$E(\ell(v-u)g(\lambda, J(v))) = E(\ell(v-u)(\chi_\varepsilon^*(v) + \psi_\varepsilon^*(v))g(\lambda, J(v))) .$$

Logo,

$$\begin{aligned} E(\ell(v-u)g(\lambda, J(v))) &= E(\ell(v-u)\chi_\varepsilon^*(v)g(\lambda, J(v))) \\ &+ E(\ell(v-u)\psi_\varepsilon^*(v)g(\lambda, J(v))) . \end{aligned}$$

3- Como  $\ell \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^d)$ , existe uma constante  $M_p \in \mathbb{R}$  tal que, para  $v \in B_\varepsilon^*$ ,

$$|\ell(v-u)|_p \leq M_p \|v-u\| \leq M_p \varepsilon \quad (7.4.33)$$

enquanto, para  $v \in S_\varepsilon^*$ ,

$$|\ell(v-u)|_p \leq M_p \|v-u\| \leq M_p (\|v\| + \|u\|) \leq 2M_p \alpha \quad (7.4.34)$$

4- Por um lado, da desigualdade de Jensen (1.6.18),

$$\begin{aligned} & |E(\ell(v-u)\chi_\varepsilon^*(v)g(\lambda, J(v)))|_p \\ & \leq E\left(|\ell(v-u)|_p \chi_\varepsilon^*(v)g(\lambda, J(v))\right). \end{aligned}$$

e, da Eq. (7.4.33),

$$\begin{aligned} & E\left(|\ell(v-u)|_p \chi_\varepsilon^*(v)g(\lambda, J(v))\right) \\ & \leq M_p \varepsilon E(\chi_\varepsilon^*(v)g(\lambda, J(v))). \end{aligned}$$

Por outro lado, a desigualdade de Jensen (1.6.18) também mostra que,

$$\begin{aligned} & |E(\ell(v-u)\psi_\varepsilon^*(v)g(\lambda, J(v)))|_p \\ & \leq E\left(|\ell(v-u)|_p \psi_\varepsilon^*(v)g(\lambda, J(v))\right). \end{aligned}$$

e temos, de (7.4.34) e (7.4.30),

$$E\left(|\ell(v-u)|_p \psi_\varepsilon^*(v)g(\lambda, J(v))\right) \leq 2M_p \alpha h_2(\lambda, \varepsilon) .$$

5- Assim,

$$\begin{aligned} & |E(\ell(v-u)g(\lambda, J(v)))|_p \\ & \leq \varepsilon M_p E(\chi_\varepsilon^*(v)g(\lambda, J(v))) + 2M_p \alpha h_2(\lambda, \varepsilon) . \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \left| \frac{E(\ell(v-u)\chi_\varepsilon^*(v)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} \right|_p \\ & \leq \frac{\varepsilon M_p E(\chi_\varepsilon^*(v)g(\lambda, J(v))) + 2M_p \alpha h_2(\lambda, \varepsilon)}{E(g(\lambda, J(v)))} \\ & = \frac{\varepsilon M_p E(\chi_\varepsilon^*(v)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} + \frac{2M_p \alpha h_2(\lambda, \varepsilon)}{E(g(\lambda, J(v)))} . \end{aligned}$$

6- Como

$$\frac{E(\chi_\varepsilon^*(v)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} \leq 1$$

e

$$\frac{h_2(\lambda, \varepsilon)}{E(g(\lambda, J(v)))} \leq \frac{h_2(\lambda, \varepsilon)}{h_1(\lambda, \varepsilon)} ,$$

temos

$$\left| \frac{E(\ell(v-u)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} \right|_p \leq \left( \varepsilon + 2\alpha \frac{h_2(\lambda, \varepsilon)}{h_1(\lambda, \varepsilon)} \right) M_p$$

7- esta desigualdade combinada a Eq. (7.4.31) traz

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left| \frac{E(\ell(v-u)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} \right|_p \leq \varepsilon M_p .$$

Logo

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left| \frac{E(\ell(v-u)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} \right|_p = 0$$

e temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{E(\ell(v-u)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} = 0 , \quad (7.4.35)$$

8- Tomando o limite para  $\lambda \rightarrow +\infty$  na Eq. (7.4.32) e utilizando Eq.(7.4.35), temos o resultado. ■

DEMONSTRAÇÃO do teorema-

1- Seja  $\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$  uma base ortonormal de  $V_d$  e  $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}^d$  dada por  $\ell(v) = ((v, \phi_1), \dots, (v, \phi_d))$ .  $\ell$  é linear e  $|\ell(v)|_2 = \|P_d(v)\| \leq \|v\|$ . Assim,  $\ell \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^d)$  e, da proposição 7.4.3:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{E((v, \phi_n)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} = (v, \phi_n) .$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{E(P_d(v)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} &= \sum_{n=0}^d \frac{E((v, \phi_n)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} \phi_n \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^d (v, \phi_n) \phi_n \end{aligned}$$

fortemente em  $V$  e temos o primeiro resultado.

2- Sejam  $\ell \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ ,  $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset V$  uma base hilbertiana ortonormal (base de Schauder),  $V_d = [\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}]$ ,  $P_d(v) = \sum_{n=1}^d (v, \varphi_n) \varphi_n$  a projecção ortogonal de  $v$  sobre  $V_d$ . Como  $\ell$  é linear e contínua, temos:

$$|\ell(v)| \leq M_1 \|v\| \quad \text{e} \quad |\ell(P_d(v))| \leq M_1 \|P_d(v)\| \leq M_1 \|v\| .$$

Como  $S$  é limitado, existe uma constante  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\|v\| \leq \alpha$ ,  $\forall v \in S$  e temos  $|\ell(P_d(v))| \leq M_1 \alpha$ ,  $\forall v \in S$ . Seja

$$L(d, \lambda) = \frac{E(\ell(P_d(v))g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))}$$

De (1.6.18):

$$|L(d, \lambda)| \leq \frac{E(|\ell(P_d(v))|g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} \leq M_1 \alpha.$$

3- Seja  $L = \limsup L(d, \lambda)$ . Então,

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0: \lambda \geq \lambda_0(\varepsilon) \text{ e } d \geq d_0(\varepsilon) \\ \implies \sup L(d, \lambda) - \varepsilon \leq L \leq \sup L(d, \lambda) \end{aligned}$$

Como  $L(d, \lambda) \rightarrow \ell(P_d(u))$  for  $\lambda \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} \forall \eta > 0: \lambda \geq \lambda_1(\eta, d) \implies \\ \ell(P_d(u)) - \eta \leq L(d, \lambda) \leq \ell(P_d(u)) + \eta. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lambda \geq \lambda_1(\eta, d) \implies \ell(P_d(u)) - \eta \leq \sup L(d, \lambda) \leq \ell(P_d(u)) + \eta$$

e

$$\begin{aligned} d \geq d_0(\varepsilon) \text{ and } \lambda \geq \lambda_1(\eta, d) \\ \implies \ell(P_d(u)) - \eta - \varepsilon \leq L \leq \ell(P_d(u)) + \eta. \end{aligned}$$

Para  $\eta \rightarrow 0$ , temos

$$d \geq d_0(\varepsilon) \implies \ell(P_d(u)) - \varepsilon \leq L \leq \ell(P_d(u)).$$

Além disto, como  $P_d(u) \rightarrow u$  fortemente em  $V$ ,  $\ell(P_d(u)) \rightarrow \ell(u)$ : temos  $\ell(u) - \varepsilon \leq L \leq \ell(u)$ . Assim, tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$ :  $L = \ell(u)$ .

4- De maneira análoga, obtemos  $\liminf L(d, \lambda) = \ell(u)$ . Assim,  $\liminf L(d, \lambda) = \limsup L(d, \lambda) = \ell(u)$ . Logo  $\ell(u) = \lim L(d, \lambda)$ .

5- Seja

$$\begin{aligned} u(d, \lambda) &= \frac{E(P_d(v)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} = \sum_{n=1}^k a_n(\lambda) \varphi_n; \quad a_n(\lambda) \\ &= \frac{E((v, \varphi_n)g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))}. \end{aligned}$$

e  $\ell \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ . Temos  $\ell(u(d, \lambda)) = \sum_{n=1}^k a_n(\lambda) \ell(\varphi_n) = L(d, \lambda)$ . Assim, como demonstrado precedentemente,

$$\ell(u(d, \lambda)) = L(d, \lambda) \rightarrow \ell(u) \text{ para } \lambda \rightarrow +\infty, d \rightarrow +\infty.$$

Logo,  $u(d, \lambda) \rightarrow u$ , fracamente em  $V$ .

DEMONSTRAÇÃO do corolário– Se ■

$$E((v, \varphi_n) g(\lambda, J(v))) = (E(vg(\lambda, J(v)), \varphi_n),$$

então,

$$a_n(\lambda) = \frac{(E(v, \varphi_n) g(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} \implies u(d, \lambda) = \frac{P_d(E(vg(\lambda, J(v))))}{E(g(\lambda, J(v)))}.$$

Tomando  $d \rightarrow +\infty$ , temos

$$u_\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(\lambda) \varphi_n = \frac{E(vg(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))}.$$

Como  $u_\lambda \rightarrow u$ , fracamente em  $V$ , para  $\lambda \rightarrow +\infty$ , temos o resultado. ■

NOTA 7.4.4. *Num espaço de dimensão finita, a convergência fraca implica a convergência forte, de modo que, se  $V$  é de dimensão finita,*

$$\frac{E(vg(\lambda, J(v)))}{E(g(\lambda, J(v)))} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} u \text{ em } V. \quad (7.4.36)$$

A escolha de  $g$  pode ser guiada pelo resultado seguinte:

PROPOSIÇÃO 7.4.5. *Suponhamos que  $S_\varepsilon^*$  é fracamente compacto para  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  e  $J$  é fracamente s.c.i.. Seja  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $g > 0$  e  $\xi \rightarrow g(\lambda, \xi)$  é estritamente decrescente para todo  $\lambda > 0$ . Então temos (7.4.30) e (7.4.31).*

A demonstração utiliza o resultado auxiliar:

LEMA 7.4.6. *Seja  $\varepsilon_0 > 0$  suficientemente pequeno e  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ . Se  $S_\varepsilon^*$  é fracamente fechado e  $J$  é fracamente s.c.i., então*

$$\exists \theta = \theta(\varepsilon) > 0 \text{ such that } \max_{S_\varepsilon^*} g(\lambda, J(v)) \leq g(\lambda, J(u)) \exp(-\lambda\theta). \quad (7.4.37)$$

*Além disto, para todo  $\delta > 0$  tal que  $\delta < \theta$ , existe  $\eta = \eta(\delta) > 0$  tal que:*

$$\min_{B_\eta^*} g(\lambda, J(v)) \geq g(\lambda, J(u)) \exp(-\lambda\delta).$$

DEMONSTRAÇÃO do lema–

1. Como  $g$  é decrescente, Eq. (7.4.27) implica que

$$\forall x \in S : g(\lambda, J(v)) \leq g(\lambda, J(u)) \quad .$$

Assim,

$$\max_{S_\varepsilon^*} g(\lambda, J(v)) \leq g(\lambda, J(u)) \quad . \quad (7.4.38)$$

2. Existe uma seqüência  $\{u_n\}_{n \geq 0} \subset S_\varepsilon^*$  tal que

$$g(\lambda, J(u_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \max_{S_\varepsilon^*} g(\lambda, J(v)) \quad .$$

Como  $S_\varepsilon^*$  é fracamente compacto, esta seqüência tem um ponto de acumulação fraco  $\bar{u} \in S_\varepsilon^*$ .

3. Como  $J$  é fracamente s.c.i., temos

$$J(\bar{u}) \leq \liminf J(u_n)$$

e

$$g(\lambda, J(\bar{u})) \geq \limsup g(\lambda, J(u_n)) = \max_{S_\varepsilon^*} g(\lambda, J(v)) \quad . \quad (7.4.39)$$

4. Eq. (7.4.38) mostra que  $g(\lambda, J(\bar{u})) \leq g(\lambda, J(u))$ . Esta desigualdade, combinada a Eq. (7.4.39), mostra que

$$\max_{S_\varepsilon^*} g(\lambda, J(v)) = g(\lambda, J(\bar{u})) \leq g(\lambda, J(u)) \quad . \quad (7.4.40)$$

5. Suponhamos

$$\max_{S_\varepsilon^*} g(\lambda, J(v)) = g(\lambda, J(u)) \quad . \quad (7.4.41)$$

Eq. (7.4.40) mostra que  $g(\lambda, J(\bar{u})) = g(\lambda, J(u))$ . Como  $\xi \rightarrow g(\lambda, \xi)$  é estritamente decrescente, temos  $J(\bar{u}) = J(u)$  e a unicidade de  $u$  mostra que  $\bar{u} = u$ . Assim,  $\|\bar{u} - u\| = 0$ . Mas  $\bar{u} \in S_\varepsilon^*$  e  $\|\bar{u} - u\| \geq \varepsilon$ : temos  $0 \geq \varepsilon > 0$ , o que é absurdo.

6. Como (7.4.41) leva a uma contradição, deduzimos de Eq. (7.4.38) que

$$\max_{S_\varepsilon^*} g(\lambda, J(v)) < g(\lambda, J(u)) \quad . \quad (7.4.42)$$

Assim, temos (7.4.37).

7. Seja  $\eta > 0$  suficientemente pequeno e  $m(\eta) = \max_{B_\eta^*} J(v)$ . A continuidade de  $J$  mostra que  $m(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0^+} J(u)$ , e a continuidade de  $g$  mostra que

$$\frac{g(\lambda, m(\eta))}{g(\lambda, J(u))} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0^+} 1 . \quad (7.4.43)$$

Seja  $\delta > 0$  dado. Da Eq. (7.4.43): existe  $\eta(\delta) > 0$  tal que

$$\forall 0 \leq \eta \leq \eta(\delta) : \frac{g(\lambda, m(\eta))}{g(\lambda, J(u))} \geq \exp(-\lambda\delta) .$$

Assim,  $g(\lambda, m(\eta)) \geq g(\lambda, J(u)) \exp(-\lambda\delta)$ . Além disto,

$$\forall u \in B_\eta^* : m(\eta) \geq J(v) .$$

Como  $g$  é estritamente decrescente,

$$\forall x \in B_\eta^* : g(\lambda, m(\eta)) \leq g(\lambda, J(v))$$

e temos

$$\min_{B_\eta^*} g(\lambda, J(v)) \geq g(\lambda, m(\eta)) \geq g(\lambda, J(u)) \exp(-\lambda\delta) .$$

■

DEMONSTRAÇÃO da proposição— O lema 7.4.6 mostra que (ver Eq. (7.4.37))

$$E(\psi_\varepsilon^*(v)g(\lambda, J(v))) \leq g(\lambda, J(u)) \exp(-\lambda\theta) E(\psi_\varepsilon^*(v)) .$$

Seja  $h_2(\lambda, \varepsilon) = g(\lambda, J(u)) \exp(-\lambda\theta) \mu(S_\varepsilon^*)$ . Da Eq. (7.4.37) (Cf. Lema 7.4.6) :

$$E(g(\lambda, J(v))) \geq E(\chi_\eta^*(v)g(\lambda, J(v))) \geq g(\lambda, J(u)) \exp(-\lambda\delta) E(\psi_\eta^*(v)) .$$

Assim, pondo  $h_1(\lambda, \varepsilon) = g(\lambda, J(u)) \exp(-\lambda\delta) \mu(B_\eta^*)$ , temos

$$E(g(\lambda, J(v))) \geq h_1(\lambda, \varepsilon) > 0$$

e,  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{h_2(\lambda, \varepsilon)}{h_1(\lambda, \varepsilon)} &= \frac{\exp(-\lambda\theta) g(\lambda, J(u)) \mu(S_\varepsilon^*)}{\exp(-\lambda\delta) g(\lambda, J(u)) \mu(B_\eta^*)} \\ &= \frac{\mu(S_\varepsilon^*)}{\mu(B_\eta^*)} \exp(-\lambda(\theta - \delta)) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0 . \end{aligned}$$

■

Estes resultados sugerem um método numérico  $u$ , baseado na geração de amostras finitas das variáveis aleatórias introduzidas. Por exemplo, podemos escolher  $\lambda$  suficientemente grande e gerar uma amostra  $\mathbb{V} = (v_1, \dots, v_{nr})$  de  $nr$  valores de  $v$ . Assim,

$$u \approx u_a = \sum_{i=1}^{nr} v_i g(\lambda, J(v_i)) / \sum_{i=1}^{nr} g(\lambda, J(v_i)), \quad (7.4.44)$$

o que corresponde às aproximações

$$E(vg(\lambda, J(v))) \approx \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^{nr} v_i g(\lambda, J(v_i)) \quad ;$$

$$E(g(\lambda, J(v))) \approx \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^{nr} g(\lambda, J(v_i)) .$$

A amostra  $\mathbb{V}$  pode ser obtida a partir de geradores usuais de números aleatórios. Por exemplo, um elemento aleatório de  $(\mathbb{N}^*)^k \times \mathbb{R}^k$  pode ser obtido gerando, por um lado, uma amostra  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$  de  $k$  elementos aleatórios de  $\mathbb{N}^*$  e, por outro lado, um elemento aleatório  $\mathbf{x} = (x_{n_1}, \dots, x_{n_k})$  de  $\mathbb{R}^k$ . Para tanto, é preciso utilizar um gerador de inteiros aleatórios para  $\mathbf{n} \in (\mathbb{N}^*)^k$  e um gerador de reais aleatórios para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ . Elementos aleatórios de  $\mathbb{R}_0^\infty$  podem ser obtidos através de uma seleção aleatória do índice  $k$  seguida da geração de um elemento aleatório de  $(\mathbb{N}^*)^k \times \mathbb{R}^k$ . Este procedimento não envolve aproximações em dimensão finita: os valores de  $k$  e  $\mathbf{n}$  cobrem o espaço todo, e o procedimento gera o espaço  $\mathbb{R}_0^\infty$ .

Podemos ilustrar este procedimento com um algoritmo *M1*: seja  $k \in \mathbb{N}^*$  dado e consideremos a geração de um elemento de  $(\mathbb{N}^*)^k \times \mathbb{R}^k$ . Para tanto, consideremos dados dois reais estritamente positivos  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ .

*M1.1*: Por  $i \leftarrow 0$ .

*M1.2*: Selecionar  $k$  elementos de  $\mathbb{N}^*$  utilizando  $\mathbf{n} = (m_1 + 1, \dots, m_k + 1)$ , onde  $(m_1, \dots, m_k)$  é uma amostra de  $k$  valores da distribuição de Poisson  $\mathcal{P}(\theta)$

*M1.3*: Selecionar  $\mathbf{x} = (x_{n_1}, \dots, x_{n_k})$  como uma amostra de  $k$  valores da distribuição gaussiana  $\mathcal{N}(0, \sigma)$ .

*M1.4*: Por  $v_i = \sum_{j=1}^k v_{nj} \varphi_{nj}$  (ou  $\sum_{j=1}^k v_{nj} \psi_{nj}$ ).

*M1.5* Incrementar  $i : i \leftarrow i + 1$ . Se  $i = nr$ , aproximar a solução utilizando Eq. (7.4.44). Senão, retornar a *M1.2*.

Uma variante  $M2$  é a seguinte: consideremos quatro números estritamente positivos  $k_0 \in \mathbb{N}^*$ ,  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ .

$M2.1$ : Por  $i \leftarrow 0$ .

$M2.2$ : Selecionar  $k = k_0 + m \in \mathbb{N}^*$ , onde  $m \in \mathbb{N}^*$  é um valor da distribuição de Poisson  $\mathcal{P}(\theta_0)$

$M2.2$ : Selecionar  $k$  elementos de  $\mathbb{N}^*$  utilizando  $\mathbf{n} = (m_1 + 1, \dots, m_k + 1)$ , onde  $(m_1, \dots, m_k)$  é uma amostra de  $k$  valores da distribuição de Poisson  $\mathcal{P}(\theta)$

$M2.4$ : Selecionar  $\mathbf{x} = (x_{n_1}, \dots, x_{n_k})$  como uma amostra de  $k$  valores da distribuição gaussiana  $\mathcal{N}(0, \sigma)$ .

$M2.5$ : Por  $v_i = \sum_{j=1}^k v_{nj} \varphi_{nj}$  (or  $\sum_{i=1}^k v_{nj} \psi_{nj}$ ).

$M2.6$ : Incrementar  $i : i \leftarrow i + 1$ . Se  $i = nr$ , aproximar a solução utilizando Eq. (7.4.44). Senão, retornar a  $M2.2$ .

O leitor encontrará na literatura exemplos de aplicações em dimensão finita ou infinita. Ver por exemplo, [24], [9], [8], [10].

## Capítulo 8

# Otimização Baseada em Confiabilidade

A otimização de estruturas busca determinar o melhor projeto possível para elementos estruturais. Frequentemente, o objetivo é uma redução de custo ou de massa e restrições devem ser levadas em conta: por exemplo, o espaço disponível limita as dimensões da peça e seu movimento, um critério de falha deve ser incluído, etc. Na prática, tanto o objetivo como as restrições podem conter elementos incertos, oriundos de diferentes variabilidades do material, da geometria ou do carregamento. Por exemplo, o carregamento exterior pode ser relacionado às condições de operação e resulta frequentemente incerto: por exemplo, uma estrutura pode ser submetida ao vento, à ação das ondas do mar, ou vibrações de tipo aleatório, além de ser formada de um material contendo imperfeições. Assim, a variabilidade e as incertezas devem ser levadas em conta na otimização a fim de produzir um resultado suficientemente robusto. Isto leva a dificuldades, pois

- pequenas variações de certos parâmetros podem causar variações significativas do resultado (perda de robustez)
- o resultado ótimo não pode ser implementável na prática, dado que os processos de fabricação e instalação são sistematizados e não são exatos, mas implicam em erros e tolerâncias (variabilidade e incerteza)
- a não homogeneidade do material, a variabilidade dos processos de elaboração, do ambiente externo, e das condições de contorno podem levar a situações onde o projeto ótimo não atende às condições mínimas de segurança exigidas (falta de confiabilidade)

Para evitar estas dificuldades, é necessário levar em conta já no projeto os eventuais erros de implementação, assim como as variabilidades dos materiais e das cargas. Podemos visar, por exemplo, a caracterização completa da variabilidade das soluções : neste caso, devemos utilizar as técnicas apresentadas no Capítulo 7 , mas é possível que o projetista esteja simplesmente interessado em obter um desenho com algumas propriedades de robustez, tais como restrições sobre as probabilidades de falha.

Uma primeira idéia consiste em utilizar *coeficientes de segurança*, i.e., em modificar os resultados ou o problema de otimização de modo a levar em conta carregamentos maiores ou resistências menores que as realmente esperadas e, assim, obter a satisfação de restrições de tipo probabilista. Os coeficientes de segurança são geralmente fatores multiplicativos que devem ser aplicados aos carregamentos ou às variáveis de projeto. As principais limitações deste procedimento são, por um lado, que tais coeficientes são fortemente dependentes da situação particular estudada e não podem ser utilizados em outras situações e, por outro lado, os coeficientes são geralmente produto da experiência acumulada e do histórico de falhas observadas, o que torna difícil a sua previsão em novos casos ou em situações para as quais o número de observações é pequeno.

Para contornar estes limites, métodos alternativos foram propostos. Por exemplo, uma idéia simples consiste em introduzir uma probabilidade máxima de falha como uma restrição de otimização - o que equivale a definir uma confiabilidade mínima para o projeto ótimo. Esta idéia simples leva à otimização baseada em confiabilidade (Realibility-Based Design Optimization, RBDO), que é apresentada a seguir.

## 8.1 A situação-modelo

A confiabilidade é caracterizada por um *índice de confiabilidade*, que notaremos por  $\beta$  e que depende das variáveis de projeto. O índice de confiabilidade é definido para estruturas cujo estado é definido por um vetor de parâmetros  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  - as componentes do vetor são usualmente chamadas de *variáveis físicas*, ou de projeto. Uma falha corresponde a valores negativos de uma função real  $z = g(\mathbf{x})$ , na qual  $g$  é uma função conhecida, geralmente de forma empírica, e  $z = 0$  é frequentemente chamada de *curva limite* (veja que se trata de uma variedade, mas chamada de curva na literatura), ou *curva de falha*. Esta variedade divide  $\mathbb{R}^n$  em duas regiões disjuntas  $S$  e  $D$ .  $S$  corresponde a  $z$  positivo, e é chamada *região de segurança* - um ponto  $x \in S$  corresponde a um caso onde a estrutura não está em situação de falha, sendo portanto segura.  $D$  corresponde a  $z$  negativo, e é chamada *região de falha* - um ponto  $x \in D$  corresponde a uma falha da estrutura (ou Defeito, para gravar a notação). A variedade-limite  $z = 0$ , notada por  $C$ , é a fronteira comum

às duas regiões  $C = \partial S = \partial D$ .

$$\begin{aligned} S &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) \leq 0\}, \\ D &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) > 0\}, \\ C &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) = 0\}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 8.1.1. .- *Um exemplo simples é o caso em que desejamos projetar uma estrutura cuja tensão máxima é inferior ou igual a um valor  $\sigma_{max}$ . Por exemplo, consideremos  $x_1$  e  $x_2$  como sendo a tensão  $\sigma$  e o máximo admissível  $\sigma_{max}$ , respectivamente, i.e.,  $x = (\sigma, \sigma_{max})$ . Então  $g(x) = x_1 - x_2 = \sigma - \sigma_{max}$ . Outros exemplos clássicos são as curvas de Wohler.*

Incertezas são introduzidas na formulação do problema considerando, por exemplo, que o estado da estrutura não é definido pelos valores nominais  $\mathbf{x}$ , devidos a problemas de fabricação, mas por  $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = \mathbf{x} + \mathbf{V}$ , na qual  $\mathbf{V}$  é um vetor aleatório representando a incerteza. Neste caso, a variedade-limite é dada por

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = g(\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{V})) = 0$$

A situação é análoga se  $g$  depende de um vetor aleatório,  $\mathbf{V}$ , ou  $\mathbf{R}$  é uma função mais complexa: em todos os casos, a variedade-limite torna-se um processo estocástico, isto é, uma função aleatória, como se chamava originalmente. Assim, a função definindo a falha torna-se

$$Z = G(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = g(\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{V})) . \quad (8.1.1)$$

$Z$ , como definido na Eq. (8.1.1), é uma variável aleatória e as desigualdades  $Z \leq 0$  e  $Z \geq 0$  definem eventos complementares. Por exemplo, a *probabilidade de falha* associada a  $\bar{\mathbf{x}}$  é

$$P_f(\bar{\mathbf{x}}) = P(Z \geq 0 \mid \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}) , \quad (8.1.2)$$

enquanto que a *confiabilidade* associada a  $\bar{\mathbf{x}}$  é

$$1 - P_f(\bar{\mathbf{x}}) = P(Z \leq 0 \mid \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}) , \quad (8.1.3)$$

O problema-modelo da RBDO é

PROBLEMA-MODELO 8.1. *Seja dada um probabilidade-alvo máxima,  $P_t$ , para a probabilidade de falha. Determinar  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que*

$$\mathbf{x} = \arg \min \{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{A}\} , \mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : P_f(\mathbf{x}) \leq P_t\} . \quad (8.1.4)$$

Esta formulação busca o mínimo da função objetivo  $F$  de forma que o estado tem uma probabilidade de falha no máximo igual a  $P_t$ . É possível considerar outras restrições através da definição do conjunto admissível  $\mathcal{A}$ . Uma alternativa consiste em buscar a máxima confiabilidade para um dado valor máximo  $F_t$  da função objetivo  $F$ :

PROBLEMA-MODELO 8.2. *Seja dado um custo máximo  $F_t$ . Determinar  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que*

$$\mathbf{x} = \arg \min \{P_f(\bar{\mathbf{x}}) : \bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{A}\}, \mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : F(\mathbf{x}) \leq F_t\}. \quad (8.1.5)$$

## 8.2 Índice de confiabilidade

O procedimento usual em análise de confiabilidade consiste em considerar um *índice de confiabilidade*  $\beta$ , tal que aumentar  $\beta$  corresponda a aumentar a confiabilidade, *i. e.*, diminuir a probabilidade de falha.  $\beta$  é geralmente definido para variáveis independentes e normalizadas,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ , tais que:

- cada componente de  $\mathbf{u}$  tem média zero e variância unitária;
- $\mathbf{u}$  possui uma função cumulativa  $F$  dependente de  $\|\mathbf{u}\|$ :  $F(\mathbf{u}) = \Phi(\|\mathbf{u}\|)$
- $t \rightarrow \Phi(t)$  é estritamente crescente.

Por exemplo, a transformação clássica proposta por Nataf ([54]) transforma  $\mathbf{v}$  em um vetor  $\mathbf{u}$  de variáveis gaussianas independentes e satisfaz estas hipóteses. Assim, aumentar  $\|\mathbf{u}\|$  corresponde a diminuir a probabilidade de falha  $P_t$ : esta propriedade é usada para definir o índice de confiabilidade.

Do ponto de vista matemático, seja a transformação  $\boldsymbol{\tau} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  relacionando os pares  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  e  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ . Então, existe uma função  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  tal que  $\mathbf{v} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ .

Em geral,  $\mathbf{T}$  é uma transformação complexa e sua construção pode apresentar dificuldades. Em situações simples,  $\mathbf{T}$  é uma transformação afim  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{B}(\mathbf{x})$ , onde  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  são matrizes, independentes de  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$ . Por exemplo se, por um lado,  $\mathbf{v}$  é formado por variáveis independentes e, por outro lado, a distribuição de cada componente  $v_i$  corresponde à função cumulativa  $F_i(u_i) = \Phi(|u_i|)$ , de média  $m_i$  e desvio-padrão standard  $s_i$ , podemos considerar variáveis normalizadas dadas por  $u_i = (v_i - m_i)/s_i$  e temos  $\mathbf{v} = \mathbf{m} + \text{diag}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{u}$ , onde  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$  é o vetor das médias e  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  é o vetor dos desvios-padrões.

Utilizando  $\mathbf{T}$ , temos

$$\mathbf{Z} = H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{u})) ; \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{u})) . \quad (8.2.6)$$

e é natural considerar o espaço de trabalho

$$V = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \\ \mathbf{u} \text{ vetor de variáveis normalizadas independentes}\}.$$

$V$  é chamado *espaço híbrido*. Temos  $V = V_{\mathbf{x}} \times V_{\mathbf{u}}$ , onde  $V_{\mathbf{x}} = \mathbb{R}^n$  é o espaço físico e  $V_{\mathbf{u}}$  é o espaço das variáveis aleatórias normalizadas (média zero, variância unitária), chamado *espaço normalizado*. Temos

$$S = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in V : H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq 0\}, D = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in V : H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) > 0\}, \\ C = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in V : H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0\}.$$

O índice de confiabilidade,  $\beta(\mathbf{x})$ , para um valor de  $\mathbf{x}$  fixado, é determinado no espaço normalizado e é definido por:

$$\beta(\mathbf{x}) = \|\mathbf{u}(\mathbf{x})\| = \min\{\|\mathbf{u}\| : H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0\} = \min\{\|\mathbf{u}\| : H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0\}. \quad (8.2.7)$$

$\mathbf{u}(\mathbf{x})$  é associado às variáveis físicas  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$  e corresponde ao estado da estrutura  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}))$  ou  $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$ . Os pontos  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{R}(\mathbf{x})$  são usualmente chamados *pontos de falha mais prováveis* (ou simplesmente *pontos mais prováveis*) associados ao estado  $\mathbf{x}$ . Por vezes, a expressão *pontos de projeto* também pode ser utilizada para designá-los.

A determinação de  $\beta(\mathbf{x})$  é designada pela expressão *análise de confiabilidade do ponto x*.

### 8.3 FORM

O cálculo prático de  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  e  $\beta(\mathbf{x})$  exige a solução de problemas de otimização com restrições - Eq. (8.2.7) para cada  $\mathbf{x}$  considerado, o que leva a um custo computacional elevado, além das dificuldades intrínsecas aos procedimentos de otimização, tais como os efeitos das não-convexidades.

Para aumentar a eficiência e economizar tempo computacional, uma idéia simples consiste em utilizar linearizações da variedade-limite, o que leva ao método universalmente conhecido como First Order Reliability Method (FORM), que é capaz de fornecer rapidamente uma estimativa de  $\mathbf{u}(\mathbf{x}^{(k)})$  e  $\beta(\mathbf{x}^{(k)})$ .

Para um ponto inicial  $\mathbf{u}^{(0)}$ , FORM gera uma sequência  $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \dots$ , que esperamos seja convergente para  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , através de uma sequência de aproximações afins da curva-limite  $C$  (isto é, de uma sequência de linearizações desta mesma

curva). Para um dado  $\mathbf{u}^{(i)}$ , determina-se uma função afim  $\mathbf{u} \rightarrow H^{(i)}(\mathbf{u})$  tal que  $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx H^{(i)}(\mathbf{u})$  na vizinhança de  $\mathbf{u}^{(i)}$ . Então, determina-se

$$\mathbf{u}^{(i+1)} = \arg \min \{ \|\mathbf{u}\| : H^{(i)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0 \}.$$

Observemos que esta equação corresponde à aproximação da região de falha  $D$  pelo semi-espço  $D^{(i)}$ . FORM é um método extremamente popular, dado a sua facilidade de implementação e sua rapidez de convergência (porém cuidado: o limite pode ser diferente de  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ). Breitung and Der Kiureghian ([13, 45, 46]) propuseram um método análogo, baseado em aproximações quadráticas de  $C$  – conhecido como SORM (Second Order Reliability Method).

Ambos os procedimentos, FORM/SORM, necessitam da construção de aproximações da variedade-limite  $C$ . Nos casos mais complexos, onde tal aproximação não é facilmente feita,  $\beta(\mathbf{x})$  pode ser estimado por amostragem: gera-se uma amostra de pontos de  $D$  e  $\beta(\mathbf{x})$  é aproximado pelo valor empírico determinado na amostra:

$$\beta(\mathbf{x}) \approx \min \{ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_i\| : (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N) \text{ amostras de pontos de } D \}.$$

Para variáveis gaussianas, esta aproximação é equivalente a um método de tipo Monte Carlo para o cálculo da probabilidade de falha.

## 8.4 Método a dois níveis (bi-level ou double-loop)

O problema-modelo RBDO 8.1 se escreve sob a forma

$$\mathbf{x} = \arg \min \{ F(\mathbf{x}) : H(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) \leq 0 \text{ and } \beta(\mathbf{x}) = \|\mathbf{u}(\mathbf{x})\| \geq \beta_t \}, \quad (8.4.8)$$

onde  $\beta_t$  é o *índice de confiabilidade alvo*. A formulação alternativa 8.2 se escreve

$$\beta = \arg \max \{ \beta(\mathbf{x}) : H(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) \leq 0, \text{ and } F(\mathbf{x}) \leq F_t \} \quad (8.4.9)$$

Ambos os problemas (8.4.8) e (8.4.9) contêm dificuldades ainda não solucionadas nesta data, tais como, por exemplo, aquelas ligadas à não convexidade e ao cálculo de  $\beta(\mathbf{x})$ . Ambas as formulações conduzem a *problemas de otimização a dois níveis*. Por exemplo, Eq. (8.4.8) busca  $\mathbf{x}$  no nível superior, mas exige a determinação de  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  no nível inferior. Analogamente, a Eq. (8.4.9) busca  $\beta$  no nível superior, mas exige a determinação de  $\mathbf{x}$  no nível inferior. As iterações típicas para a resolução destes problemas consistem em gerar um sequência  $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots$  da maneira seguinte:

**Algorithm 4** Bi-level ou double-loop RBDO**Require:**  $kmax > 0$ ,  $precmin > 0$ ;**Require:** um ponto inicial admissível  $\mathbf{x}^{(0)}$ ;**Require:** um método para a determinação de  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  para um dado  $\mathbf{x}$ ;**Require:** um método para a correção de  $\mathbf{x}$  para um dado  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ;

1.  $k := 0$ ;
  2. **nível inferior (loop interno)** : determinar  $\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(k)})$ ;
  3. **nível superior (loop externo)** : determinar  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  corrigindo  $\mathbf{x}^{(k)}$  para  $\mathbf{u}(\mathbf{x}^{(k)})$  dado;
  4.  $k := k + 1$ ;
  5. Testar as condições de parada:  $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\| \leq precmin$  ou  $k \geq kmax$ . Se as condições de parada não são verificadas, ir para 2.
- return**  $\mathbf{x}^{(k)}$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}^{(k)})$

Exemplos de métodos de correção de  $\mathbf{x}^{(k)}$  podem ser encontrados na literatura. A determinação de  $\mathbf{u}^{(k)}$  é usualmente chamada *nível de confiabilidade*, enquanto a determinação de  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  é chamada *nível de otimização*. A resolução do problema pode exigir uma grande número de chamadas para cada um dos níveis. Assim, métodos de simplificação têm sido propostos na literatura - tais como, por exemplo, o uso de FORM no nível inferior. Examinaremos a seguir outros métodos de simplificação.

Um método alternativo consiste em gerar  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  determinando sucessivamente

$$\mathbf{u}^{(k)} = \arg \min \{ \|\mathbf{u}\| : H(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}) \geq 0 \text{ and } \|\mathbf{u}\| \geq \beta_t \}$$

e

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \arg \min \{ F(\mathbf{x}) : H(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(k)}) \leq 0 \}.$$

Neste caso,  $\mathbf{u}^{(k)} \neq \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(k)})$ .

## 8.5 Método a um nível (one-level ou single-loop)

Uma maneira de reduzir o custo computacional consiste em reduzir o custo associado ao nível inferior (ou interno), isto é, à análise de confiabilidade. Por exemplo, podemos utilizar as aproximações FORM/SORM, mas também é possível transformar o problema a dois níveis em um problema a um único nível, no qual as variáveis  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$  são consideradas como independentes e a igualdade  $\|\mathbf{u}\| = \beta(\mathbf{x})$  somente é verificada no limite das iterações, *i. e.*, no ponto de ótimo. Esta idéia

leva à introdução de uma nova função-objetivo  $J_d$ , onde um termo de «penalidade» modifica a função-objetivo original, de modo a garantir que o ponto de ótimo  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  verifica  $\|\mathbf{u}\| = \beta(\mathbf{x})$ . Por exemplo, podemos considerar uma função positiva  $d: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, por um lado,  $a \rightarrow d(a, b)$  é crescente para todo  $b > 0$  e, por outro lado,  $b \rightarrow d(a, b)$  é decrescente para todo  $a > 0$ . Neste caso, seja

$$J_d(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = J(\mathbf{x})d(\|\mathbf{u}\|, \beta(\mathbf{x})),$$

e consideremos o problema

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \arg \min \{ J_d(\mathbf{x}, \mathbf{u}) : (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}_d \} ; \\ \mathcal{A}_d &= \{ (\mathbf{x}, \mathbf{u}) : H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, \|\mathbf{u}\| \geq \beta_t \} . \end{aligned} \quad (8.5.10)$$

Dadas as propriedades de  $d$ , espera-se que os procedimentos de otimização diminuam o valor de  $\|\mathbf{u}\|$  ao mesmo tempo que aumentam  $\beta(\mathbf{x})$ . Espera-se que, no limite das iterações,  $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0$ ,  $\|\mathbf{u}\| \geq \beta_t$ , minimizando  $\|\mathbf{u}\|$  e correspondendo ao maior valor de  $\beta(\mathbf{x})$  compatível com as restrições: o conjunto destas propriedades implica a igualdade  $\|\mathbf{u}\| = \beta(\mathbf{x}) \geq \beta_t$ , dado que a minimalidade de  $\|\mathbf{u}\|$  conjugada à condição  $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq 0$  (i. e., à admissibilidade de  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ) leva a  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ . Espera-se que esta nova formulação reduza o tempo de cálculo, dado que a análise de confiabilidade não é mais realizada a cada iteração - este método gera uma sequência  $(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)})$ ,  $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)})$ ,  $(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{u}^{(2)})$ , ... tal que a condição  $\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(k)})$  não é satisfeita a cada iteração  $k$ . O problema formulado na Eq. (8.5.10) deve ser resolvido por um método de descida apropriado e pode ser implementado pelo algoritmo 5:

---

**Algorithm 5** one-level ou single-loop RBDO

---

**Require:**  $kmax > 0$ ,  $precmín > 0$ ;

**Require:** um ponto inicial admissível  $(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)})$ ;

**Require:** um método de descida para a minimização de  $J_d$ ;

1.  $k := 0$ ;
  2. Determinar  $(\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{u}^{(k+1)}) \in \mathcal{A}_d$  através de uma iteração do método de descida ;
  3.  $k := k + 1$ ;
  4. Testar as condições de parada:  $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\| \leq precmín$  ou  $k \geq kmax$ . Se as condições de parada não são verificadas, ir para 2.
- return**  $\mathbf{x}^{(k)}$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}^{(k)})$
- 

O leitor encontrará na literatura exemplos de  $d$ . Uma escolha simples e conveniente é  $d(a, b) = a$ , o que corresponde a

$$J_d(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = J(\mathbf{x}) \|\mathbf{u}\| .$$

Esta escolha mostrou ser eficiente em exemplos acadêmicos, tais como, por exemplo, situações onde a resposta de um sistema mecânico pode ser determinada de forma analítica (i.e., sistemas onde um modelo relaciona de forma explícita as variáveis de projeto e a resposta). Analogamente ao procedimento com dois níveis, a Eq. (8.5.10) contém dificuldades não resolvidas nesta data, tais como, por exemplo, aquelas ligadas à não-convexidade - as iterações podem ter como limite um ponto de mínimo local e não global. Além disto, este método tende a dar a mesma importância aos valores de  $\|\mathbf{u}\|$  e  $J$ , o que pode ser um inconveniente em certos casos. A literatura apresenta tentativas para obter funções-objetivo mais equilibradas tais como, por exemplo,

$$J_{d,R}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = J_d(\mathbf{x}, \mathbf{u}) J(E(\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{u}))),$$

na qual  $E(\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$  é a média de  $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  - as variáveis definido o estado do sistema. Neste caso, determina-se

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \arg \min \{ J_{d,R}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) : (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}_{d,R} \} ; \\ \mathcal{A}_{d,R} &= \{ (\mathbf{x}, \mathbf{u}) : H(\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{u}) = 0, \|\mathbf{u}\| \geq \beta_t \}. \end{aligned}$$

Entretanto, escolher uma função mais equilibrada, como, por exemplo,  $J_{d,R}$  frequentemente tem um impacto computacional, causando um aumento significativo do custo do cálculo, o que pode tornar esta idéia ineficaz. Uma alternativa consiste em utilizar métodos semi-analíticos, tais como coeficientes de segurança ótimos.

## 8.6 Coeficientes de segurança ótimos

Um coeficiente de segurança é geralmente um número real associado a uma variável e destinado - geralmente por uma operação de multiplicação - a aumentar a confiabilidade. Tais coeficientes são geralmente utilizados para os fatores considerados como críticos, tais como, por exemplo, carregamentos externos, tensões máximas, deslocamentos e deformações de zonas críticas, etc. Seus valores resultam geralmente da experiência e da observação de falhas precedentes. Em geral, a determinação de coeficientes exige testes e análise empírica, o que leva a problemas de definição de experimentos, calibração e problemas inversos. Porém, a idéia fundamental consistindo em aplicar uma correção aos valores das variáveis pode ser explorada de outro modo: as equações caracterizando a solução ótima, tais como as condições KKT, podem ser utilizadas para determinar correções. Em tal caso, as

correções são usualmente chamadas de *coeficientes de segurança ótimos* (optimal safety factors, OSF), mas o leitor deve precaver-se pois *não se trata* de coeficientes empíricos, mas de correções numéricas destinadas a melhorar os procedimentos previamente apresentados.

Para gerar uma correção, lembremos que  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  verifica:

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\| = \min\{\|\mathbf{u}\| : H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0\}.$$

este problema pode ser reformulado sob a forma seguinte:

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|^2 = \min\{\|\mathbf{u}\|^2 : H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0\}.$$

Consideremos o multiplicador de Lagrange  $\lambda \geq 0$  associado à restrição  $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0$  : o Lagrangiano associado a este problema é

$$L(\mathbf{u}, \lambda) = \|\mathbf{u}\|^2 - \lambda H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) .$$

os pontos estacionários de  $L$  satisfazem

$$\nabla_{\mathbf{u}}L(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \lambda) = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad H(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) \geq 0, \quad \lambda H(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = 0.$$

i. e.,

$$2\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \lambda \nabla_{\mathbf{u}}H(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = 0 \implies \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{\lambda}{2} \nabla_{\mathbf{u}}H(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$$

e

$$\beta(\mathbf{x})^2 = \|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|^2 = \frac{\lambda^2}{4} \|\nabla_{\mathbf{u}}H(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))\|^2 .$$

Suponhamos  $\beta(\mathbf{x}) > 0$ : então,

$$\frac{\lambda^2}{4} \|\nabla_{\mathbf{u}}H(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))\|^2 \neq 0 \implies \lambda \neq 0 \text{ and } \nabla_{\mathbf{u}}H(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) \neq \mathbf{0} .$$

Assim,

$$\frac{\lambda}{2} = \left| \frac{\lambda}{2} \right| = \frac{\beta(\mathbf{x})}{\|\nabla_{\mathbf{u}}H(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))\|}$$

e temos

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x}) \frac{\nabla_{\mathbf{u}}H(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))}{\|\nabla_{\mathbf{u}}H(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))\|}$$

Se  $\beta(\mathbf{x}) = \beta_t$ , então

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \beta_t \frac{\nabla_{\mathbf{u}} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))}{\|\nabla_{\mathbf{u}} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))\|} \quad (8.6.11)$$

A Eq. (8.6.11) pode ser utilizada de várias maneiras: por um lado, ela define um sistema de equações não lineares que pode ser resolvido para determinar  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ; por outro lado, ela pode ser utilizada para corrigir  $\mathbf{u}^{(k)}$ . Por exemplo, podemos escolher um número de subiterações  $i_{\max} > 0$  e iterar  $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k+1, i_{\max})}$ , no qual

$$\mathbf{u}^{(k+1, i)} = \beta_t \frac{\nabla_{\mathbf{u}} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(k+1, i-1)})}{\|\nabla_{\mathbf{u}} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(k+1, i-1)})\|}, \quad i = 1, \dots, i_{\max}; \quad \mathbf{u}^{(k+1, 0)} = \mathbf{u}^{(k)}. \quad (8.6.12)$$

Um método alternativo de correção, envolvendo uma única subiteração é dado por

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(k)}) - \left( \beta_t - \beta(\mathbf{x}^{(k)}) \right) \frac{\nabla_{\mathbf{u}} H(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(k)}))}{\|\nabla_{\mathbf{u}} H(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(k)}))\|}, \quad i = 0, \dots, i_{\max} \quad (8.6.13)$$

Estas correções podem ser interpretadas como uma aplicação de fatores multiplicativos, isto é, como o uso de coeficientes de segurança, nas situações em que  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \text{diag}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{u}$ . Lembrando que

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{u})),$$

temos

$$\nabla_{\mathbf{u}} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = [\nabla_{\mathbf{u}} T(\mathbf{x}, \mathbf{u})]^t \nabla_{\mathbf{v}} G(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$$

Assim,

$$\|\nabla_{\mathbf{u}} H(\mathbf{x}, \mathbf{u})\|^2 = [\nabla_{\mathbf{v}} G(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}, \mathbf{u}))]^t \nabla_{\mathbf{u}} T(\mathbf{x}, \mathbf{u}) [\nabla_{\mathbf{u}} T(\mathbf{x}, \mathbf{u})]^t \nabla_{\mathbf{v}} G(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$$

e temos

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x}) \frac{[\nabla_{\mathbf{u}} T(\mathbf{x}, \mathbf{u})]^t \nabla_{\mathbf{v}} G(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}, \mathbf{u}))}{\sqrt{[\nabla_{\mathbf{v}} G(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}, \mathbf{u}))]^t \nabla_{\mathbf{u}} T(\mathbf{x}, \mathbf{u}) [\nabla_{\mathbf{u}} T(\mathbf{x}, \mathbf{u})]^t \nabla_{\mathbf{v}} G(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}, \mathbf{u}))}}$$

levando em conta que  $T(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x} + \text{diag}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{u}$ , temos

$$\nabla_{\mathbf{u}} T(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \text{diag}(\boldsymbol{\sigma})$$

e

$$u_i(\mathbf{x}) = \sigma_i \eta_i, \quad \eta_i = \beta(\mathbf{x}) \frac{\frac{\partial G}{\partial v_i}(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}, \mathbf{u}))}{\sqrt{\sum \sigma_i^2 \left( \frac{\partial G}{\partial v_i}(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}, \mathbf{u})) \right)^2}}.$$

Seja  $\gamma_i = \sigma_i/x_i$  o coeficiente de variação de  $v_i$ : temos  $u_i(\mathbf{x}) = \eta_i \gamma_i x_i$  e  $v_i(\mathbf{x}) = (1 + \eta_i \gamma_i) x_i$ . Assim, o fator  $S_i = 1 + \eta_i \gamma_i$  aparece como um fator multiplicativo a ser aplicado às variáveis deterministas  $\mathbf{x}$  para aumentar a confiabilidade. Nesta situação,  $S_i$  é chamado *coeficiente de segurança, ótimo associado à variável  $i$* .

A Eq. (8.6.11) pode ser utilizada pelos algoritmos precedentes para corrigir o valor de  $\mathbf{u}^{(k)}$ . Por exemplo, podemos utilizar algoritmo 6:

---

**Algorithm 6** RBDO usando OSF
 

---

**Require:**  $kmax > 0$ ,  $precmin > 0$ ,  $\beta_t > 0$ ;

**Require:** um ponto inicial admissível  $(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)})$ ;

1.  $k := 0$ ;
2. determinar  $\mathbf{u}^{(k+1)}$  corrigindo  $\mathbf{u}^{(k)}$  (por exemplo, usar a Eq. (8.6.12) ou a Eq. (8.6.13) );
3. determinar  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \arg \min \{ J(\mathbf{x}) : H(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(k+1)}) \leq 0 \}$  (ou outro método de correção)
4.  $k := k + 1$ ;
5. Testar as condições de parada:  $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\| \leq precmin$  or  $k \geq kmax$ . Se as condições de parada não são verificadas, ir para 2.

**return**  $\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}$

---

## Capítulo 9

# Exercícios

EXERCÍCIO 9.1. Consideremos  $\Omega = (0, 1)$ ,  $P(d\omega) = d\omega$  e as variáveis aleatórias  $X(\omega) = \omega$ ,  $Y(\omega) = \omega^2$ .

A repartição de  $X$  é  $F_X(x) = P(X < x)$ :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0; \\ x, & \text{se } 0 < x \leq 1; \\ 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

e a densidade de probabilidade é  $f_X = F'_X$  :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ 1, & \text{se } 0 < x < 1; \\ 0, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

De forma análoga,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \leq 0; \\ \sqrt{y}, & \text{se } 0 < y \leq 1; \\ 1, & \text{se } y > 1. \end{cases}$$

e a densidade de probabilidade é  $f_Y = F'_Y$  :

$$f_Y(Y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 0; \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}, & \text{se } 0 < y < 1; \\ 0, & \text{se } y > 1. \end{cases}$$

1 - Determinar a projeção de  $Y$  sobre o subespaço gerado por

$$\{1, X, X^2, \dots, X^n\},$$

isto é, sobre a base tal que  $\varphi_i(X) = X^{i-1}$ ,  $1 \leq i \leq n+1$ . Comparar os resultados obtidos quando os produtos escalares  $E(\varphi_i(X)\varphi_j(X))$  e  $E(Y\varphi_i(X))$  são calculados de forma analítica, por integração numérica ou estimados a partir de uma amostra de  $ns$  pares  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, ns$ . Notar que as médias correspondem a integrais

$$E(\varphi_i(X)\varphi_j(X)) = \int_a^b \varphi_i(X(\omega))\varphi_j(X(\omega))P(d\omega);$$

$$E(Y\varphi_i(X)) = \int_a^b Y(\omega)\varphi_i(X(\omega))P(d\omega),$$

onde

$$P(d\omega) = \phi(\omega)d\omega,$$

$\phi$  é a densidade de probabilidade de  $\omega$  (para a lei uniforme sobre  $(a, b)$ ):  $\phi(\omega) = 1/(b-a)$ .

- 2 - Substituir  $X$  por uma variável gaussiana (isto é, de lei  $N(0, 1)$ ). Utilizar uma amostra de  $ns$  pares  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, ns$  para determinar a solução. Como no caso precedente, é necessário estimar os produtos escalares

$$E(\varphi_i(X)\varphi_j(X)) \text{ e } E(Y\varphi_i(X))$$

a partir da amostra.

- 3 - Retomar as partes 1 e 2 usando agora uma base formada por polinômios de Legendre.

EXERCÍCIO 9.2. Consideremos  $\Omega = (0, 1)$ ,  $P(d\omega) = d\omega$  e as variáveis aleatórias  $X(\omega) = \sqrt{\omega}$ ,  $Y(\omega) = e^\omega$ .

A repartição de  $X$  é  $F_X(x) = P(X < x)$ :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0; \\ x^2, & \text{se } 0 < x \leq 1; \\ 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

e a densidade de probabilidade é  $f_X = F'_X$ :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ 2x, & \text{se } 0 < x < 1; \\ 0, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

De forma análoga,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \leq 1; \\ \log(y), & \text{se } 1 < y \leq e; \\ 1, & \text{se } y > e. \end{cases}$$

e a densidade de probabilidade é  $f_Y = F'_Y$  :

$$f_Y(Y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 1; \\ \frac{1}{y}, & \text{se } 1 < y < e; \\ 0, & \text{se } y > 1. \end{cases}$$

1 - Determinar a projeção de  $Y$  no subespaço gerado por

$$\{1, X, X^2, \dots, X^n\},$$

isto é, no subespaço gerado pela base tal que

$$\varphi_i(X) = X^{i-1}, 1 \leq i \leq n+1.$$

Comparar os resultados obtidos quando os produtos escalares

$$E(\varphi_i(X)\varphi_j(X)) \text{ e } E(Y\varphi_i(X))$$

são calculados de forma analítica, por integração numérica ou estimados a partir de uma amostra de  $ns$  pares  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, ns$ .

2 - Substituir  $X$  por uma variável gaussiana (isto é, de lei  $N(0,1)$ ). Utilizar uma amostra de  $ns$  pares  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, ns$  para determinar a solução. Como no caso precedente, é necessário estimar os produtos escalares

$$E(\varphi_i(X)\varphi_j(X)) \text{ e } E(Y\varphi_i(X))$$

a partir da amostra.

3 - Retomar as partes 1 e 2 usando agora uma base formada por polinômios de Legendre.

EXERCÍCIO 9.3. Consideremos  $\Omega = (0, 1)$ ,  $P(d\omega) = d\omega$  e a variável aleatória  $Y(\omega) = \omega^2$ . A repartição de  $Y$  é  $F_Y(x) = P(Y < x)$ :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \leq 0; \\ \sqrt{y}, & \text{se } 0 < y \leq 1; \\ 1, & \text{se } y > 1. \end{cases}$$

e a densidade de probabilidade é  $f_Y = F'_Y$  :

$$f_Y(Y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 0; \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}, & \text{se } 0 < y < 1; \\ 0, & \text{se } y > 1. \end{cases}$$

Consideremos uma variável aleatória  $X$  de lei gaussiana  $N(0, 1)$ , independente de  $Y$ .

1 - Determinar a projeção de  $Y$  no subespaço gerado por

$$\{1, X, X^2, \dots, X^n\},$$

isto é, no subespaço cuja base é tal que

$$\varphi_i(X) = X^{i-1}, 1 \leq i \leq n+1.$$

Comparar os resultados obtidos quando os produtos escalares

$$E(\varphi_i(X)\varphi_j(X)) \text{ e } E(Y\varphi_i(X))$$

são calculados de forma analítica, por integração numérica ou estimados a partir de uma amostra de  $ns$  pares  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, ns$ .

- 2 - Determinar a aproximação pelo método de ajuste dos momentos, utilizando uma medida de distância entre os momentos. Por exemplo, média quadrática dos erros relativos (isto é, a raiz quadrada da soma dos quadrados dos erros relativos)
- 3 - Retomar a parte 1 utilizando uma variável  $X$  que é uma função de  $Y$  (por exemplo,  $X = \sin(Y)$  ou  $X = \log(1 + |Y|)$ ).
- 4 - Retomar a parte 1 utilizando uma variável  $X$  que é a soma de uma função de  $Y$  e de uma variável gaussiana independente  $Z$  (Por exemplo,  $X = Z + \sin(Y)$  ou  $X = Z + \log(1 + |Y|)$ ).
- 5 - Retomar a parte 3 utilizando utilizando o método de ajuste dos momentos e a medida de distância entre os momentos utilizada na parte 2.

6 - Retomar a parte 4 utilizando o método de ajuste dos momentos e a medida de distância entre os momentos utilizada na parte 2.

EXERCÍCIO 9.4. Consideremos  $\Omega = (0,1)$ ,  $P(d\omega) = d\omega$  e a variável aleatória  $Y(\omega) = \omega^2$ . A repartição de  $Y$  é  $F_Y(x) = P(Y < y)$ :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \leq 0; \\ \sqrt{y}, & \text{se } 0 < y \leq 1; \\ 1, & \text{se } y > 1. \end{cases}$$

e a densidade de probabilidade é  $f_Y = F'_Y$  :

$$f_Y(Y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 0; \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}, & \text{se } 0 < y < 1; \\ 0, & \text{se } y > 1. \end{cases}$$

Consideremos duas variáveis aleatórias  $X_1, X_2$ , ambas de lei gaussiana, independentes entre si e independentes de  $Y$ .

1 - Determinar a projeção de  $Y$  sobre o subespaço gerado pelos polinômios de  $X_1$  e de  $X_2$  cujo grau máximo em  $X_1$  é  $n_1$  e cujo grau máximo em  $X_2$  é  $n_2$ , isto é, o termo de grau máximo é  $X_1^{n_1} X_2^{n_2}$ .

2 - Determinar a aproximação pelo método de ajuste dos momentos, utilizando uma medida de distância entre os momentos. Por exemplo, média quadrática dos erros relativos (isto é, a raiz quadrada da soma dos quadrados dos erros relativos)

EXERCÍCIO 9.5. Consideremos  $\Omega = (0,1)$ ,  $P(d\omega) = d\omega$  e a variável aleatória  $Y(\omega) = \omega^2$ . A repartição de  $Y$  é  $F_Y(x) = P(Y < y)$ :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \leq 0; \\ \sqrt{y}, & \text{se } 0 < y \leq 1; \\ 1, & \text{se } y > 1. \end{cases}$$

e a densidade de probabilidade é  $f_Y = F'_Y$  :

$$f_Y(Y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 0; \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}, & \text{se } 0 < y < 1; \\ 0, & \text{se } y > 1. \end{cases}$$

Consideremos uma segunda variável aleatória  $X$  e uma amostra  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, ns$  do par  $(X, Y)$ .

Podemos então considerar  $U = (U_1, \dots, U_n)$ ,  $PY = \sum_{i=1}^n U_i \varphi_i(X)$  e as equações:

$$F_i(U) = PY(X_i) - Y_i = 0, \text{ para } 1 \leq i \leq ns.$$

Trata-se de um sistema linear.

1 - Seja  $X$  gaussiana e independente de  $Y$ .

- a) Resolver o sistema linear, determinar  $PY$  e compará-la com a distribuição de  $Y$ .
- b) Determinar  $PY$  através do ajuste de momentos e comparar com o resultado da parte 1.

2 - Seja  $X = Y + cZ$ , onde  $Z$  é gaussiana, independente de  $Y$  e  $0 \leq c \leq 1$ . Resolver o sistema linear, determinar  $PY$  e compará-la com a distribuição de  $Y$  para os valores  $c = 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0$ .

EXERCÍCIO 9.6. Consideremos a equação do segundo grau:

$$e(x) = x^2 - 2x + b = 0,$$

onde  $b$  é uma variável aleatória de lei uniforme sobre  $(0, 1)$ . Esta equação tem duas soluções:

$$x_1 = 1 + \sqrt{1 - b}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{1 - b},$$

ambas positivas. A imagem de  $x_1$  é o intervalo  $(1, 2)$  e a imagem de  $x_2$  é o intervalo  $(0, 1)$ . Temos

$$P(x_1 < x) = P(b > 1 - (x - 1)^2) = (x - 1)^2, \text{ para } x \in (1, 2);$$

$$P(x_2 < x) = P(b < 1 - (x - 1)^2) = 1 - (x - 1)^2, \text{ para } x \in (0, 1).$$

Assim, as densidades de probabilidades  $f_1$  de  $x_1$  e  $f_2$  de  $x_2$  verificam

$$f_1(x) = 2(x - 1), \text{ para } x \in (1, 2)$$

$$f_2(x) = 2(1 - x), \text{ para } x \in (0, 1).$$

1 - Seja  $X$  uma raiz da equação - a priori, não sabemos se se trata de  $x_1$  ou de  $x_2$ . Consideramos uma aproximação da forma

$$X \approx PX = u_0 + u_1b + u_2b^2 + \dots + u_nb^n,$$

isto é uma aproximação de  $X$  no subespaço gerado pelos polinômios em  $b$  de grau  $n$ . Podemos determinar os coeficientes  $U = (u_0, \dots, u_n)$  impondo, por exemplo,

$$F_i(U) = (e(PX), b^i) = E(e(PX)b^i) = 0, \text{ para } 0 \leq i \leq n.$$

Trata-se de um sistema não linear que pode ser resolvido por métodos usuais - quando admite uma solução. Também é possível determinar solução aproximadas através de procedimentos de otimização: basta minimizar

$$\|F(U)\|, \quad F(U) = (F_0(U), \dots, F_n(U)),$$

onde  $\|\bullet\|$  é uma norma. Por exemplo, a solução de mínimos quadrados é obtida utilizando a norma euclidiana. Determinar  $PX$  e compará-la com as distribuições de  $x_1$  e de  $x_2$ . Para tanto, podemos utilizar uma amostra  $(b_1, \dots, b_{ns})$  de  $b$  que permite o cálculo aproximado das médias.

2 - Uma segunda solução consiste em considerar uma amostra

$$(b_1, \dots, b_{ns})$$

de  $b$  e as equações

$$F_i(U) = e(PX(b_i)) = 0, \text{ para } 1 \leq i \leq ns.$$

Trata-se de um sistema não linear. Como no caso precedente, é possível determinar soluções aproximadas através de procedimentos de otimização: basta minimizar

$$\|F(U)\|, \quad F(U) = (F_0(U), \dots, F_n(U)),$$

onde  $\|\bullet\|$  é uma norma. Determinar  $PX$  e compará-la com as distribuições de  $x_1$  e de  $x_2$ .

3 - Uma terceira solução consiste em utilizar uma amostra

$$(b_1, \dots, b_{ns})$$

de  $b$  para gerar uma amostra de  $x_2$ . Obtemos assim uma amostra do par  $(b, x_2)$  ao qual podemos aplicar as técnicas de aproximação. Por exemplo, a técnica de interpolação:

$$F_i(U) = PX(b_i) - X(b_i) = 0, \text{ para } 1 \leq i \leq ns.$$

Neste caso, trata-se de um sistema linear. Determinar  $PX$  e compará-la com a distribuição de  $x_2$ .

EXERCÍCIO 9.7. Seja  $\Omega = (a, b)$ ,  $P(d\omega) = d\omega/(b-a)$  e a variável aleatória  $U(\omega) = \omega$ . A repartição de  $U$  é  $F_U(u) = P(U < u)$ :

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } u < a; \\ (u-a)/(b-a), & \text{se } a < u \leq b; \\ 1, & \text{se } u > b. \end{cases}$$

e a densidade de probabilidade é  $f_U = F'_U$  :

$$f_U(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } u < a; \\ 1/(b-a), & \text{se } a < u \leq b; \\ 0, & \text{se } u > b. \end{cases}$$

Seja  $b < 1$ . A equação

$$F(X, U) = X^2 + 2X + U = 0$$

possue duas soluções

$$X_1 = -1 - \sqrt{1-U}, \quad X_2 = -1 + \sqrt{1-U}.$$

Deseja-se determinar as projeções  $PX_1$  e  $PX_2$  destas variáveis no espaço gerado por  $\{1, U, U^2, \dots, U^n\}$ ,  $S = \{[1, U, U^2, \dots, U^n]\}$  - i. e., no subespaço gerado pela base tal que  $\varphi_i(U) = U^{i-1}$ ,  $1 \leq i \leq n+1$ .

- 1 - Utilizar um método não intrusivo : gerar uma amostra  $(U_i, X_i)$ ,  $i = 1, \dots, ns$  e utilizar esta amostra para determinar os coeficientes (colocação ou regressão).
- 2 - Utilizar um método semi-intrusivo : gerar uma amostra de  $U$  et utilizar essa amostra para definir uma função associando a  $Z \in S$  o valor de  $E(|F(Z, U)|)$ ; em seguida determinar  $PX \in S$  calculando o mínimo desta função.
- 3 - Utilizar um método intrusivo :  $PX \in S$  satisfaz  $E(\varphi_i(U)F(PX, U)) = 0$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Estas equações formam um sistema não-linear de  $n$  equações para  $n$  incógnitas. Gerar um amostra de  $U$ , utilizá-la para estimar as médias e determinar a projeção.
- 4 - Utilizar um método de adaptação : dado um método iterativo  $x^{(k+1)} = \psi(x^{(k)})$  para a resolução de  $F(X, U) = 0$  para  $U$  fixo e dado, podemos reescrever

$$E(\varphi_i(U)PX^{(k+1)}) = E(\varphi_i(U)\psi(PX^{(k)})), \quad \text{para } 1 \leq i \leq n,$$

o que leva a um sistema linear  $AX^{(k+1)} = B$ , com

$$B_i = E(\varphi_i(U)\psi(PX^{(k)})) \quad \text{e} \quad A_{ij} = E(\varphi_i(U)\varphi_j(U)).$$





Mostrar em seguida que a adaptação das potências iteradas se escreve

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{nb} \mathbb{C}_{iljk} Y_{jk}^{(p)} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{nb} D_{iljk} X_{jk}^{(p-1)}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq l \leq nb,$$

com

$$\mathbb{C}_{iljk} = \delta_{ij} E(\varphi_l(U) \varphi_k(U)) ; \quad \mathbb{D}_{iljk} = E(\varphi_k(U) A_{ij}(U) \varphi_l(U)),$$

Transformar esta igualdade em um sistema linear: por exemplo, definindo

$$\mathcal{C}_{rs} = \mathbb{C}_{iljk}; \quad \mathcal{D}_{rs} = \mathbb{D}_{iljk}, \quad \mathcal{Y}_s^{(p)} = Y_{jk}^{(p)}, \quad \mathcal{X}_s^{(p)} = X_{jk}^{(p)},$$

onde  $r = (i-1)nb + l$ ,  $s = (j-1)nb + k$ .

EXERCÍCIO 9.11. Retomar o Exercício 10 com o método dos subespaços iterados. Neste caso, deve-se gerar uma seqüência de famílias

$$F^{(p)} = \{X^{(p,1)}, \dots, X^{(p,n_v)}\}, \quad p, n_v > 0$$

através das iterações:

$$Y^{(p,m)} = AX^{(p-1,m)}, \quad 1 \leq m \leq n_v ;$$

$$F^{(p)} \text{ resulta da ortonormalização de } \{Y^{(p,1)}, \dots, Y^{(p,n_v)}\};$$

$$\lambda^{(p,m)} = X^{(p,m)t} AX^{(p,m)} \quad (1 \leq m \leq n_v) .$$

A adaptação deste método é análoga a do método das potências iteradas.

EXERCÍCIO 9.12. Determinar a distribuição da primeira freqüência natural da coluna do Exercício 10 (estudar os três casos).

EXERCÍCIO 9.13. Consideremos uma função  $F = F(X, U)$  tomando valores em  $\mathbb{R}$  e definida para  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ , uma variável aleatória  $U$  definida sobre  $\Omega$ , isto é,  $F : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Consideremos

$$\mathbf{X}(U) = \arg \min \{F(\mathbf{Y}, U) : \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n\}.$$

$X = X(U)$  é uma variável aleatória. Podemos considerar uma família total  $\{\varphi_j : j \in \mathbb{N}\}$  e, para  $nb > 0$ ,

$$\mathbf{X} \approx P\mathbf{X} = \sum_{k=1}^{nb} \mathbf{X}_k \varphi_k(U),$$

isto é,

$$X_i \approx PX_i = \sum_{k=1}^{nb} X_{ik} \varphi_k(U).$$

Os coeficientes desconhecidos podem ser determinados pelos métodos apresentados. Por exemplo, seja o conjunto das matrizes  $n \times nb$  de elementos reais:  $\mathbb{R}^{n \times nb} = \{\mathcal{Y} = (Y_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq nb}}, Y_{jk} \in \mathbb{R}\}$  e

$$F(\mathcal{Y}) = E(F(P\mathcal{Y}, U)), \quad PY_i = \sum_{k=1}^{nb} Y_{ik} \varphi_k(U), \quad i = 1, \dots, n.$$

Podemos determinar

$$\mathcal{X} = \arg \min \{F(\mathcal{Y}) : \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n \times nb}\}.$$

1 - Testar este método com  $U$  de lei uniforme sobre  $(a, b)$  e

$$F(Y, U) = \sum_{i=1}^n (Y_i - z_i(U))^2$$

onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $z_i(U) = \alpha * u + i * \beta$  e  $\varphi_k(U) = \left(\frac{U-a}{b-a}\right)^{(k-1)}$ .

2 - Gerar uma amostra do par  $(U, X)$  e aplicar os procedimentos apresentados: interpolação, ajuste de momentos, variacional. Comparar com o resultado precedente.

3 - Retomar as questões precedentes com  $z_i(U) = \sin(\alpha * u + i * \beta * \pi)$ .

EXERCÍCIO 9.14. Consideremos a equação diferencial:

$$y' = \frac{dy}{dx} = ay, \quad y(0) = 1,$$

na qual  $a$  é uma variável aleatória, de lei uniforme em  $(0, 1)$ . Neste caso, os coeficientes da projeção  $Py$  de  $y$  dependem de  $x$ , isto é,

$$Py = y_1(x)\varphi_1(a) + \dots + y_n(x)\varphi_n(a)$$

1 - Determinar os coeficientes por um método intrusivo:

$$Y = (y_1, \dots, y_n)^t$$

verifica

$$AY' = BY, \quad AY(0) = C,$$

na qual

$$A_{ij} = E(\varphi_i(a)\varphi_j(a)), \quad B_{ij} = E(a\varphi_i(a)\varphi_j(a)), \\ C_i = E(\varphi_i(a)).$$

Calcular numericamente as médias.

- 2 - Retomar o caso 1 calculando as médias a partir de uma amostra.
- 3 - Determinar os coeficientes por um método não intrusivo: gerar uma amostra do par  $(a, Y)$  - isto é, gerar  $a = (a_1, \dots, a_{n_s})$  e determinar  $Y = (y(x, a_1), \dots, y(x, a_{n_s}))$ . Em seguida, determinar os coeficientes  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  utilizando essa amostra ( a determinação pode ser feita para um conjunto discreto de valores  $(x_1, \dots, x_{n_x})$ ).

EXERCÍCIO 9.15. Consideremos uma viga termoelástica em flexão simples, com condições de contorno mal conhecidas : sejam  $(0, \ell)$  o segmento representando a viga,  $E$  seu módulo de elasticidade,  $\alpha$  seu coeficiente de dilatação isobárico,  $I$  sua inércia,  $S$  sua seção reta,  $\rho$  sua massa por unidade de volume. Sob um carregamento externo de densidade linear  $p$  e uma força externa  $F$  aplicada à extremidade  $\ell$ , o modelo é

$$\frac{d^2}{dx^2}(EI \frac{d^2 w}{dx^2}) + p = 0; \quad w(0) = w(\ell) = 0;$$

$$\gamma w'(0) + (1 - \gamma)w''(0) = 0; \quad EIw'''(\ell) = F$$

O comportamento médio do material formando a viga é dado por  $E = 110 \text{ GPa}$ ,  $\alpha = 2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ ,  $\rho = 8500 \text{ kg/m}^3$ . De forma análoga, a geometria média da viga corresponde a  $I = 1.4 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ ,  $S = 1.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $\ell = 2 \text{ m}$ . O carregamento externo tem uma densidade linear  $p = 750 \text{ N/m}$ ,  $F = 1000 \text{ N}$ .  $\gamma \in (0, 1)$  é um parâmetro definindo as condições de contorno.

- 1 - Todos os parâmetros são fixados a seus valores médios et considera-se  $\gamma = u$  como uma variável aleatória de lei uniforme sobre  $(0, 1)$ . Determinar a distribuição de  $w(\ell)$ . Qual é a probabilidade para que  $w(\ell)$  seja inferior a 80 % de seu valor máximo possível ?
- 2 - Seja  $\gamma = 1$ . Todos os parâmetros são fixados a seus valores médios, salvo  $p = 750(1 + u)$ , com  $u$  de lei uniforme sobre

$$(-0.25, 0.25).$$

Determinar a distribuição de  $w(\ell)$  e calcular a probabilidade para que  $w(\ell)$  seja inferior a 80 % de seu valor máximo possível.

- 3 - A temperatura exterior modifica a geometria e o comportamento da viga: para uma variação  $\Delta\theta$  da temperatura,  $\ell = (1 + \alpha\Delta\theta)\bar{\ell}$  e  $EI = \overline{EI}/(1 + \alpha\Delta\theta)^2$ . Considera-se  $\gamma = 1$  e todos os parâmetros são fixados a seus valores médios, salvo os que dependem de  $\Delta\theta = u$ , o qual é uma variável aleatória de lei uniforme sobre  $(a, b)$ . Determinar a distribuição de  $w(\ell)$  e calcular a probabilidade de que  $w(\ell)$  seja inferior a 80 % de seu valor máximo possível para as três situações seguintes:  $a = -15, b = 10$ ;  $a = -5, b = 30$ ;  $a = 0, b = 50$ .
- 4 - Seja  $\gamma = 1$ . Todos os parâmetros são fixados a seus valores médios, salvo módulo de elasticidade :  $E = u$ , com  $u$  de lei uniforme sobre  $(94, 121)$  GPa. Determinar a distribuição de  $w(\ell)$  e calcular a probabilidade para que  $w(\ell)$  seja inferior a 80 % de seu valor máximo possível.
- 5 - Estudamos a flambagem da viga para o caso onde  $\gamma = 1$ . Determinar a distribuição do primeiro autovalor do sistema nos casos seguintes:
- Todos os parâmetros são fixados a seus valores médios, salvo módulo de elasticidade :  $E = u$ , com  $u$  de lei uniforme sobre  $(94, 121)$  GPa.
  - Todos os parâmetros são fixados a seus valores médios, salvo  $\rho = u$ , com  $u$  de lei uniforme sobre  $(8000, 9000)$  kg/m<sup>3</sup>.
  - Todos os parâmetros são fixados a seus valores médios, salvo  $I = \bar{I}(1 + \alpha\Delta\theta)$  e  $EI = \overline{EI}/(1 + \alpha\Delta\theta)^2$ .  $\Delta\theta = u$  é uma variável aleatória de lei uniforme sobre  $(a, b)$ . Determinar a distribuição de  $w(\ell)$  e calcular a probabilidade para que  $w(\ell)$  seja inferior a 80 % de seu valor máximo possível para as três situações seguintes:  $a = -15, b = 10$ ;  $a = -5, b = 30$ ;  $a = 0, b = 50$ .
  - Todos os parâmetros são fixados a seus valores médios, salvo  $\rho = u$  e  $E = 0,03\rho - 150$ , com  $u$  de lei uniforme sobre  $(8000, 9000)$  kg/m<sup>3</sup>.

# Bibliografia

- [1] J. P. Albuquerque e W. Finamore. *Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos*. Editora PUC–Rio e Editora Interciência, Rio de Janeiro, Brasil, 2008. 334 pp.
- [2] L. Autrique e J. E. S. de Cursi. On stochastic modification for global optimization problems: an efficient implementation for the control of the vulcanization process. *International Journal of Control*, 67(1):1–22, 1997.
- [3] R. Azencott. Simulated annealing. In *Séminaire Bourbaki, 40ème année*, 1987-88.
- [4] A. Badrikian. *Séminaire sur les fonctions aléatoires et les mesures cylindriques*, volume 139 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1970.
- [5] A. Badrikian e S. Chevet. *Mesures cylindriques, espaces de Wiener et fonctions aléatoires gaussiennes*, volume 379 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1974.
- [6] S. Bellizzi e R. Sampaio. POM analysis of randomly vibrating systems obtained from Karhunen-Loève. *Journal of Sound and Vibration*, 303:774–793, 2006.
- [7] S. Bellizzi e R. Sampaio. Karhunen-Loève modes obtained from displacement and velocity fields: assessments and comparisons. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(4):1218–1222, 2009.
- [8] E. T. Bez, J. E. S. de Cursi, e M. B. Gonçalves. A hybrid method for continuous global optimization involving the representation of the solution. In *6th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*. Rio de Janeiro, Brésil, 2005.
- [9] E. T. Bez, J. E. S. de Cursi, e M. B. Gonçalves. A hybrid method for continuous global optimization involving the representation of the solution. In *Proceedings of EngOpt 2008, Rio de Janeiro, Brésil*, 2008.

- [10] E. T. Bez, M. B. Gonçalves, e J. E. S. de Cursi. A procedure of global optimization and its application to estimate parameters in interaction spatial models. *International Journal for Simulation and Multidisciplinary Design Optimization*, 4(2):85 – 100, 2010.
- [11] Z. Bhai e J. Silverstein. *Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices*. Springer, New York, 2010.
- [12] S. Bochner. Integration von funktionen, deren werte die elemente eines vectorraumes sind. *Fundamenta Mathematicae*, 20:262–276, 1933.
- [13] K. Breitung. Asymptotic approximation for multi-normal integrals. *J. Engrg. Mech., ASCE*, 110(3):357–366, 1984.
- [14] R. Cameron e W. Martin. The orthogonal development of nonlinear functionals in series of fourier-hermite functionals. *Ann. Math.*, 48(2):385, 1947.
- [15] E. Cataldo, C. Soize, R. Sampaio, e C. Desceliers. Probabilistic modeling of a nonlinear dynamical system used for producing voice. *Computational Mechanics*, 43(2):265–275, 2009.
- [16] G. Choquet. Le problème des moments. *Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse.*, 1(4):1–10, 1962.
- [17] A. J. Chorin, A. P. Kast, e R. Kupferman. Optimal prediction of underresolved dynamics. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 95:4094–4098, 1998.
- [18] A. J. Chorin, R. Kupferman, e D. Levy. Optimal prediction for hamiltonian partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 162:267–297, 2000.
- [19] L. N. Choup. Edgeworth expansion of the largest eigenvalue distribution function of gaussian orthogonal ensemble. *J. Math. Phys.*, 50:013512, 2009.
- [20] R. Croquet e J. E. S. de Cursi. Statistics of uncertain dynamical systems. In B. Topping, J. Adam, F. Pallares, R. Bru, and M. Romero, editors, *Proceedings of the Tenth International Conference on Computational Structures Technology*, pages 541–561. Civil-Comp Press, Stirlingshire, UK, 2010.
- [21] K. B. Datta. *Matrix and Linear Algebra : Aided with Matlab*. Prentice-Hall of India, 2009.
- [22] R. Dautray. *Méthodes probabilistes pour les équations de la physique*. Dunod, Paris, France, 1989.

- [23] J. E. S. de Cursi. *Introduction aux probabilités et statistiques*. Ecole Centrale Nantes, Nantes, France, 1992.
- [24] J. E. S. de Cursi. *Variational Formulations in Mechanics: Theory and Applications*, chapter Representation of Solutions in Variational Calculus, pages 87–106. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Barcelona, Espagne, 2007.
- [25] J. E. S. de Cursi, R. Ellaia, e M. Bouhadi. Global optimization under nonlinear restrictions by using stochastic perturbations of the projected gradient. In C. A. Floudas and P. M. Pardalos, editors, *Frontiers in global optimization*, pages 541–561. Kluwer Academic Press, Dordrecht, Pays-Bas, 2004.
- [26] J. E. S. de Cursi, R. Ellaia, e M. Bouhadi. Stochastic perturbation methods for affine restrictions. In C. A. Floudas and P. M. Pardalos, editors, *Advances in Convex Analysis and Global Optimization*, pages 487–499. Kluwer Academic Press, Dordrecht, Pays-Bas, 2004.
- [27] J. E. S. de Cursi e R. Sampaio. *Modélisation et convexité*. Hermès, Paris, France, 2008.
- [28] B. V. der Pol e J. V. der Mark. The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart. *Philosophical Magazine Supplement*, 6:763–775, 1928.
- [29] L. Devroye e D. P. Kroese. *Non-Uniform Random Variate Generation*. Springer-Verlag, New York, USA, 1986.
- [30] J. Diestel e J.-J. Uhl. *Vector Measure*. American Mathematical Society, 1977.
- [31] F. Dorini e R. Sampaio. Some results on the random wear coefficient of the archard model. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, in press, 2012.
- [32] M. Es-Sadek, R. Ellaia, e J. E. S. de Cursi. Application of an hybrid algorithm in a logistic problem. *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics*, 1(1):34 – 52, 2009.
- [33] P. J. Forrester e M. Krishnapur. Derivation of an eigenvalue probability density function relating to the poincare disk. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 38(42):385204, 2009.
- [34] P. N. Gavriliadis e G. A. Athanassoulis. Moment data can be analytically completed. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 18(4):329–338, 2003.

- [35] P. N. Gavriliadis e G. A. Athanassoulis. Moment information for probability distributions, without solving the moment problem. i: Where is the mode? *Communications in Statistics -Theory and Methods*, 37(5):671–681, 2008.
- [36] P. N. Gavriliadis e G. A. Athanassoulis. Moment information for probability distributions, without solving the moment problem. ii: Main-mass, tails and shape approximation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 229(1):7–15, 2009.
- [37] S. Geman e C.-R. Hwang. Diffusions for global optimization. *SIAM J. Control Optim*, 24(5):1031–1043, 1986.
- [38] R. Ghanem e P. Spanos. *Stochastic Finite Elements: a Spectral Approach*. Springer, 1991.
- [39] D. H. Griffel. *Applied functional analysis*. Dover, Mineola, New York, Etats-Unis, 2002.
- [40] P. Halmos. *Measure Theory*. Van Nostrand, 1964.
- [41] M. Handelman. A generalized eigenvalue distribution. *J. Math. Phys.*, 19(12):2509–2513, 1978.
- [42] E. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *The Physical Review*, 106(4):620–630, 1957.
- [43] E. Jaynes. Information theory and statistical mechanics ii. *The Physical Review*, 108:171–190, 1957.
- [44] J. N. Kapur e H. K. Kesavan. *Entropy Optimization Principles with Applications*. Academic Press, Inc., USA, 1992. 408 pp.
- [45] A. D. Kiureghian, H. Z. Lin, e S. J. Hwang. Second-order reliability approximations. *J. Engrg. Mech., ASCE*, 113(8):1208–1225, 1987.
- [46] A. D. Kiureghian e M. D. Stefano. Efficient algorithm for second-order reliability analysis. *J. Engrg. Mech., ASCE*, 117(12):2904–2923, 1991.
- [47] A. J. Kleywegt e A. Shapiro. *Optimization, 3rd Edition of the Handbook of Industrial Engineering*. John Wiley, New York, 2001.
- [48] D. Knuth. *Seminumerical Algorithms: The Art of Computer Programming Vol. 2*, volume Vol. 2. Addison Wesley, USA, third edition edition, 1998. 774 pp.

- [49] R. H. Lopez, J. E. S. de Cursi, e D. Lemosse. Approximating the probability density function of the optimal point of an optimization problem. *Engineering Optimization*, 43(3):281–303, 2011.
- [50] C. S. Manohar e A. J. Keane. Axial vibrations of stochastic rod. *Journal of Sound and Vibration*, 165(2):341–359, 1993.
- [51] C. S. Manohar e R. N. Lyengar. Probability distribution of the eigenvalues of systems governed by the stochastic wave equation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 8:57–64, 1993.
- [52] J. Mauprivez, E. Cataldo, e R. Sampaio. Estimation of random variables associated to a model for the vocal folds using anns. *Inverse Problems in Science & Engineering*, 20(2):209–225, 2012.
- [53] A. E. Mouatasim, R. Ellaia, e J. E. S. de Cursi. Random perturbation of the variable metric method for unconstrained nonsmooth nonconvex optimization. *Applied Mathematics and Computer Science*, 16(4):463–474, 2006.
- [54] A. Nataf. Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont données. *C. R. Acad. Sci.*, 225:42–43, 1962.
- [55] E. Pagnacco, H. Zidani, R. Sampaio, R. Ellaia, e J. E. S. de Cursi. Multi-objective optimization of a bridge pillar and a truss structure subjected to random load by a new hybridized method. In O. Möller, J. W. Signorelli, and M. A. Storti, editors, *Mecánica Computacional*, volume 30, pages 3339–3355. AMCA, AMCA, 2011.
- [56] A. Papoulis. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill Science, USA, third edition edition, 1991. 678 pp.
- [57] M. Pogu e J. E. S. de Cursi. Global optimization by random perturbation of the gradient method with a fixed parameter. *Journal of Global Optimization*, 5(2):159–180, 1994.
- [58] S. Rahman. A solution of the random eigenvalue problem by a dimensional decomposition method. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 67:1318–1340, 2006.
- [59] S. Rahman. Stochastic dynamic systems with complex-valued eigensolutions. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 71:963–986, 2007.
- [60] S. Rahman. Probability distributions of natural frequencies of uncertain dynamic systems. *AIAA Journal*, 47(6):1579–1589, 2009.

- [61] S. Rahman e V. Yadav. Orthogonal polynomial expansions for solving random eigenvalue problem. *International Journal for Uncertainty Quantification*, 1(2):163–187, 2011.
- [62] T. Ritto, R. Holdorf, R. Sampaio, e J. E. S. de Cursi. Robust optimization of a flexible rotor-bearing system using the campbell diagram. *Engineering Optimization*, 43(1):77–96, 2011.
- [63] T. G. Ritto e R. Sampaio. Stochastic drill-string dynamics with uncertainty on the imposed speed and on the bit-rock parameters. *International Journal for Uncertainty Quantification*, 2(2):111–124, 2012.
- [64] T. G. Ritto, R. Sampaio, e E. Cataldo. Timoshenko beam with uncertainty on the boundary conditions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 30(4):291–299, 2008.
- [65] T. G. Ritto, C. Soize, e R. Sampaio. Nonlinear dynamics of a drill-string with uncertain model of the bit-rock interaction. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44(8):865–876, 2009.
- [66] T. G. Ritto, C. Soize, e R. Sampaio. Probabilistic model identification of the bit-rock-interaction-model uncertainties in nonlinear dynamics of a drill-string. *Mechanics Research Communications*, 37(6):584–589, 2010.
- [67] T. G. Ritto, C. Soize, e R. Sampaio. Robust optimization of the rate of penetration of a drill-string using a stochastic nonlinear dynamical model. *Computational Mechanics*, 45:415–427, 2010.
- [68] S. M. Ross. *Simulation*. Elsevier, USA, 2006.
- [69] R. Y. Rubinstein. *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley & Sons, USA, 2008.
- [70] R. Sampaio e E. Cataldo. Two strategies to model uncertainties in structural dynamics. *Shock and Vibration*, 17(2):171–186, 2010.
- [71] R. Sampaio e T. G. Ritto. Short course on dynamics of flexible structures – deterministic and stochastic analysis. *Seminar on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling, PUC-Rio, September, 2008*.
- [72] R. Sampaio e C. Soize. On measures of nonlinearity effects for uncertain dynamical systems - application to a vibro-impact system. *Journal of Sound and Vibration*, 303:659–674, 2007.
- [73] L. Schwartz. Probabilités cylindriques et applications radonifiantes. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 265:646–648, 1969.

- [74] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Tech. J.*, 27:379–423 and 623–659, 1948.
- [75] R. Shonkwiler e F. Mendivil. *Explorations in Monte Carlo Methods*. Springer, New York, USA, 2009. 256 pp.
- [76] C. Soize. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15:277–294, 2000.
- [77] T. Tao e V. Vu. Universality of the spectral distribution of random matrices. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 46:377–396, 2009.
- [78] T. Tao e V. Vu. Random matrices: the distribution of the smallest singular values. *Geometric And Functional Analysis*, 20(1):260–297, 2010.
- [79] M. A. Trindade, C. Wolter, e R. Sampaio. Karhunen–Loève decomposition of coupled axial/bending of beams subjected to impacts. *Journal of Sound and Vibration*, 279:1015–1036, 2005.
- [80] N. Wiener. The homogeneous chaos. *Amer. J. Math.*, 60(4):897–936, 1938.
- [81] P. Wirsching e K. Ortiz. *Random Vibrations: Theory and Practice*. John Wiley & Sons, USA, 1995. 448 pp.
- [82] D. Xiu. *Numerical Methods for Stochastic Computations*. Princeton University Press, USA, 2010. 142 pp.

# Índice

- $\sigma$  – álgebra, 33
- aproximação
  - característica numérica
    - afim, 27
    - constante, 26
    - esperança condicional, 27
  - variável aleatória
    - afim, 27
    - constante, 26
    - esperança condicional, 27
- característica numérica, 18
  - aproximação
    - afim, 27
    - constante, 26
    - esperança condicional, 27
  - correlação linear, 27
  - duplas, 21
  - esperança, 26
  - função cumulativa, 21, 23
  - função de repartição, 21, 23
  - independência, 29
  - lei condicional, 28
  - média, 26
  - norma, 25
  - pares, 21
  - produto escalar, 25
  - projeção ortogonal, 25
  - tabela, 20, 21
- conjunto
  - função característica, 39
  - Lebesgue-mensurável, 38
  - mensurável, 33
- covariância
  - população finita, 23
- desprezível, 32
- duplas
  - correlação linear, 27
  - covariância, 23
  - esperança condicional, 27
  - independência, 29
  - lei condicional, 28
  - população finita, 21
- esperança
  - linearidade, 19
  - população finita, 18, 20, 22
- evento
  - desprezível, 32
  - quase certo, 32
  - quase impossível, 32
- freqüência relativa, 18
- função
  - característica
    - conjunto, 39
  - cumulativa
    - característica numérica, 21, 23
    - duplas, 23
    - população finita, 21, 23
    - variável aleatória, 58
  - densidade de probabilidade, 63
  - equivalente, 38

- mensurável, 39, 42
      - positiva, 42
    - repartição
      - característica numérica, 21, 23
      - pares, 23
      - população finita, 21, 23
      - variável aleatória, 58
    - simples
      - integral, 42
      - partição, 41
      - retangular, 40
  - função de repartição
    - variável aleatória, 58
- integral
  - desigualdade da norma, 43
  - desigualdade de Jensen, 43
  - dimensão infinita, 55
  - função mensurável, 42
  - função mensurável positiva, 42
  - função simples, 42
  - propriedades, 42
- média
  - linearidade, 19
  - população finita, 18, 20, 22
- medida, 30
  - $\sigma$  – álgebra, 33
  - Borel, 37
  - conjunto mensurável, 33
  - construção, 32
  - definida por densidade, 46
  - dimensão infinita, 47
    - finita, 51
  - externa, 33
  - finita
    - dimensão infinita, 51
  - função mensurável, 39
  - funções equivalentes, 38
  - interna, 33
  - Lebesgue, 37, 38
  - nula, 32
- medida finita, 30
- mensurável
  - conjunto, 33
  - função, 39
- momentos
  - população finita, 20, 21, 23
- norma
  - característica numérica, 25
  - variável aleatória, 25
- pares
  - correlação linear, 27
  - covariância, 23
  - esperança condicional, 27
  - independência, 29
  - lei condicional, 28
  - população finita, 21
- partição
  - de intervalo, 41
  - função simples, 41
- população finita
  - característica numérica, 18
    - duplas, 21
    - pares, 21
    - tabela, 20, 21
  - covariância, 23
  - duplas, 21
  - esperança, 18, 20, 22
  - freqüência relativa, 18
  - função cumulativa, 21, 23
  - função de repartição, 21, 23
  - média, 18, 20, 22
  - momentos, 20, 21, 23
  - pares, 21
  - probabilidade, 18
  - variância, 19, 23
- probabilidade, 18, 32
- produto escalar
  - característica numérica, 25
  - variável aleatória, 25
- projeção ortogonal

característica numérica, 25  
variável aleatória, 25

quase certo, 32  
quase impossível, 32  
quase nenhuma parte, 31  
quase nunca, 31  
quase sempre, 31  
quase toda parte, 31

variável aleatória, 57  
  aproximação  
    afim, 27  
    constante, 26  
    esperança condicional, 27  
  correlação linear, 27  
  densidade de probabilidade, 63  
  esperança, 26  
  função cumulativa, 58  
  função de repartição, 58  
  independência, 29  
  lei condicional, 28  
  média, 26  
  norma, 25  
  probabilidade, 32  
  produto escalar, 25  
  projeção ortogonal, 25  
variância  
  população finita, 19, 23