

**Volume 50, 2012**

**Editado por**

**Célia A. Zorzo Barcelos**

Universidade Federal de Uberlândia - UFU  
Uberlândia, MG, Brasil

**Eliana X.L. de Andrade**

Universidade Estadual Paulista - UNESP  
São José do Rio Preto, SP, Brasil

**Maurílio Boaventura**

Universidade Estadual Paulista - UNESP  
São José do Rio Preto, SP, Brasil

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7)**, as figuras em eps e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página  
<http://www.sbmac.org.br/notas.php>



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

2012

# Sistemas Dinâmicos Fuzzy: Modelagens Alternativas Para Sistemas Biológicos

Moiseis S. Ceconello  
moiseis@gmail.com

Departamento de Matemática  
Instituto de Ciências Exatas e da Terra  
Universidade Federal de Mato Grosso

João D. M. Silva  
jdmsilva@yahoo.com.br

Departamento de Matemática  
Universidade Federal do Maranhão

Rodney C. Bassanezi  
rodney@ime.unicamp.br

Centro de Matemática, Computação e Cognição  
Universidade Federal do ABC



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil  
2012

Coordenação Editorial: Elbert Einstein Nehrer Macau

Coordenação Editorial da Série: Eliana Xavier Linhares de Andrade

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2012 Moiseis dos Santos Cecconello, João de Deus Mendes da Silva e Rodney Carlos Bassanezi.

Direitos reservados, 2012 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

**Catálogo elaborado pela Biblioteca do IBILCE/UNESP**  
**Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner**

Cecconello, Moiseis S.

Sistemas Dinâmicos Fuzzy: Modelagens Alternativas Para  
Sistemas Biológicos - São Carlos, SP: SBMAC, 2012, 119 p.,  
20.5 cm - (Notas em Matemática Aplicada; v. 50)

e-ISBN 978-85-86883-69-9

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Conjuntos Fuzzy. 3. Biomatemática.  
I. Cecconello, Moiseis S. II. Silva, João D. M. III. Bassanezi,  
Rodney C. IV. Título. V. Série.

CDD - 51

Esta é uma republicação em formato de e-book do livro original do mesmo título publicado em 2010 nesta mesma série pela SBMAC.

# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>7</b>
<b>1 Revisitando os modelos clássicos</b>	<b>11</b>
1.1 Introdução . . . . .	11
1.2 Dinâmica populacional para espécies isoladas . . . . .	11
1.2.1 Modelo de Malthus . . . . .	14
1.2.2 Modelo de Verhulst . . . . .	15
1.2.3 Modelo de Montroll . . . . .	16
1.3 Modelos para interação entre espécies . . . . .	17
1.3.1 Modelo presa - predador de Lotka-Volterra . . . . .	20
1.3.2 Modelo presa - predador de Holling-Tanner . . . . .	24
1.3.3 Equações de Volterra: competição, presa - predador e mutualismo . . . . .	27
1.3.4 Modelos densidade - dependente . . . . .	30
1.3.5 Modelo de Kolmogorov . . . . .	33
1.4 Modelos discretos para dinâmica populacional . . . . .	35
1.4.1 Modelo Logístico discreto . . . . .	37
1.4.2 O Modelo de Nicholson - Bailey . . . . .	38
1.5 Exercícios . . . . .	40
<b>2 Problemas de valor inicial fuzzy</b>	<b>43</b>
2.1 Introdução . . . . .	43
2.2 Conceitos básicos . . . . .	44
2.3 Extensão do campo determinístico . . . . .	46
2.4 Extensão do fluxo determinístico . . . . .	48
2.5 Exercícios . . . . .	57
<b>3 Sistemas variacionais <math>p</math> - fuzzy</b>	<b>59</b>
3.1 Introdução . . . . .	59
3.2 Sistemas variacionais $p$ - <i>fuzzy</i> . . . . .	60

3.3	Pontos de equilíbrio para sistemas p - fuzzy . . . . .	63
3.3.1	Sistemas p - fuzzy unidimensionais . . . . .	64
3.3.2	Sistemas p - fuzzy bidimensionais . . . . .	65
3.4	Exercícios . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Dinâmica populacional com sistemas p - fuzzy</b>	<b>75</b>
4.1	Introdução . . . . .	75
4.2	Base de regras para espécies isoladas . . . . .	76
4.2.1	Ajuste de parâmetros . . . . .	82
4.3	Algoritmo para busca de estados de equilíbrio para sistemas p - fuzzy . . . . .	84
4.4	Modelo p - fuzzy para interações do tipo competição . . . . .	88
4.5	Modelo p - fuzzy para interações do tipo presa - predador . . . . .	92
4.6	Modelo p - fuzzy para interações do tipo mutualismo . . . . .	96
4.7	Modelo p - fuzzy para interações densidade - dependente . . . . .	103
4.7.1	Ajuste de parâmetros . . . . .	107
4.8	Exercícios . . . . .	108
	<b>Bibliografia</b>	<b>111</b>

# Prefácio

*It is the mark of an instructed mind  
to rest satisfied with the degree of pre-  
cision which the nature of the subject  
permits and not to seek an exactness  
where only an approximation of the  
truth is possible.*

Aristóteles

Os sistemas dinâmicos surgiram com a necessidade de compreender fenômenos que evoluem com o tempo, seguindo regras rígidas pré estabelecidas. Os modelos variacionais determinísticos, formulados por meio de equações diferenciais ou de diferenças, tornaram-se ferramentas essenciais para o conhecimento e previsão de muitas situações, especialmente de caráter físico ou biológico.

A característica essencial da modelagem matemática de processos variacionais, utilizando equações determinísticas, é a “exatidão” obtida nas previsões do fenômeno estudado. Evidentemente, tais previsões estão sempre dependentes de “informações precisas” que são inseridas nos modelos por meio de valores médios dos parâmetros envolvidos.

Os modelos clássicos de Biomatemática, particularmente, os modelos de dinâmica populacional e epidemiologia são fundamentados em hipóteses, quase sempre, provenientes da físico - química onde a reação entre duas substâncias (variáveis de estado) é modelada pelo produto de suas concentrações - lei da ação das massas. Esta mesma lei é usada nos modelos de Lotka - Volterra de interação de duas espécies ou nos modelos de Kermack - MacKendrick de epidemiologia. O parâmetro que representa a taxa de predação do modelo presa-predador ou a força de infecção dos modelos epidemiológicos são valores “médios” simulados ou obtidos empiricamente.

Nos modelos que lidam com incerteza como os estocásticos, por exemplo, as soluções são processos estocásticos cujas médias podem ser obtidas a

posteriori, quando se tem as densidades de distribuição das variáveis e/ou dos parâmetros envolvidos no modelo referente ao fenômeno analisado.

Por outro lado, se numa população, além de quantificar seus elementos, pretendemos levar em conta certas qualidades dos indivíduos, as variáveis e/ou parâmetros dos modelos matemáticos devem ser considerados, quase sempre, como sendo imprecisos ou obtidos com dados parciais. Por exemplo, numa população de presas de uma determinada espécie, a cada presa podemos levar em conta a facilidade como é predada, o que pode estar relacionado com a sua idade, seu estado de saúde, habitat etc. Considerações deste tipo (variáveis de estado com adjuntos qualitativos) são muito freqüentes em fenômenos biológicos e muitas vezes essenciais na modelagem e entendimento do fenômeno. Num sistema evolutivo, o que parece ser insignificante inicialmente pode ter importância extrema no futuro.

Os vários tipos de incertezas que aparecem nos fenômenos tratados pela Biomatemática podem ter modelagem bem variadas. Quando optamos pelos modelos estocásticos, implicitamente estamos supondo conhecer, a priori, as distribuições de probabilidades dos parâmetros e condições iniciais do fenômeno estudado. Este é o caso do modelo estocástico malthusiano estudado por Pielou. Entretanto, se no fenômeno em questão pretendemos levar em conta heterogeneidade, como gradualidades, que não são provenientes de aleatoriedades, como modelar matematicamente estas características?

Nosso objetivo aqui é estudar sistemas variacionais fuzzy, oriundos ou não de equações determinísticas, que contemplam a subjetividade dos elementos envolvidos. Os modelos variacionais fuzzy podem comportar vários tipos de incertezas (subjetividades ou *fuzziness*) que podem estar acopladas nos parâmetros, nas condições iniciais ou nas próprias variáveis de estado.

Se a subjetividade vem na variável de estado ou nos parâmetros dos modelos temos, respectivamente, *fuzziness demográfica* ou *fuzziness ambiental*. Assim, quando as variáveis de estado são modeladas por meio de conjuntos fuzzy, temos *fuzziness demográfica*, e *fuzziness demográfica* quando somente os parâmetros são considerados fuzzy. Em geral, ambos os tipos de *fuzziness* estão presentes nos fenômenos biológicos.

Esta nova maneira de modelar problemas ligados à realidade biológica, onde tanto as variáveis de estado como os parâmetros são portadores de subjetividades, vem ganhando terreno na área de Biomatemática com resultados significativos e bastante animadores.

As equações variacionais fuzzy têm sido estudadas por distintos métodos. A primeira tentativa de se contemplar subjetividades do tipo não aleatório em sistemas variacionais foi com o uso da derivada de Hukuhara que não teve muito sucesso, sendo a causa principal o fato que com tal processo nunca se ter estabilidade da solução - a incerteza sempre aumenta sem

limitação. Outra maneira de se contemplar a subjetividade não aleatória é por meio das inclusões diferenciais. Tal procedimento, no entanto, tem-se mostrado muito complicado, mesmo quando aplicado em situações simples. Um método alternativo que temos usado, é aquele que consiste em *fuzzificar* as soluções de um modelo determinístico, usando o princípio da extensão de Zadeh. Mostramos recentemente que este método relativamente simples, sob certas condições, fornece as mesmas soluções que as inclusões diferenciais fuzzy. Mostramos também que estes sistemas fuzzy, obtidos via extensão de Zadeh, se comportam de maneira similar aos modelos determinísticos associados em relação à qualidade de seus pontos estacionários. Em todos os métodos citados o processo fuzzy adotado para se estudar sistemas variacionais é sempre derivado de sistemas clássicos, determinísticos ou estocásticos. Por outro lado, com ferramentas da lógica fuzzy podemos estudar a dinâmica de fenômenos sem os conceitos formais de variações provenientes das derivadas ou diferenças explícitas ou então das inclusões diferenciais. O método consiste, simplesmente, em adotar o processo iterativo, considerando variações obtidas por meio de uma base de regras e um operador (de Mamdani) que as transformam em “números”. Denominamos tais sistemas de sistemas puramente fuzzy ou simplesmente, sistemas p - fuzzy.

As soluções obtidas dos sistemas fuzzy ou p - fuzzy são aparentemente mais grosseiras e menos exatas que as determinísticas porém são muito mais seguras. As soluções dos sistemas fuzzy são apresentadas em formas intervalares em que cada valor tem seu grau de confiabilidade como solução, em cada instante. Os sistemas p - fuzzy têm a vantagem de englobar a subjetividade descrita por um especialista do fenômeno estudado.

Apresentamos neste texto resultados relevantes sobre existência e unicidade de soluções e estabilidade de sistemas fuzzy e p - fuzzy que foram obtidos recentemente.

Este texto é composto de quatro capítulos:

- **Capítulo 1: Revisão dos modelos autônomos clássicos de dinâmica populacional;**
- **Capítulo 2: Problema de valor inicial fuzzy - Sistemas fuzzy;**
- **Capítulo 3: Sistemas p - fuzzy;**
- **Capítulo 4: Aplicações em Biomatemática.**

Santo André, 28 de abril de 2010.

Rodney C. Bassanezi



# Capítulo 1

## Revisitando os modelos clássicos

### 1.1 Introdução

A investigação do crescimento e declínio de populações é, historicamente, o mais antigo ramo da ecologia matemática ([3], [19]). As equações de diferenças e diferenciais, desenvolvidas após o surgimento do cálculo integral e diferencial no final do século XVII, sem dúvidas têm contribuído de maneira significativa para a modelagem matemática de fenômenos biológicos de maneira geral.

Neste capítulo, vamos rever alguns dos principais modelos determinísticos, no contexto histórico, para dinâmica populacional de espécies isoladas e em interação. Algumas propriedades sobre o comportamento qualitativo das soluções de equações diferenciais e de diferenças também serão apresentados para auxiliar na análise matemática dos modelos aqui apresentados.

### 1.2 Dinâmica populacional para espécies isoladas

As mudanças quantitativas que ocorrem na população de uma determinada espécie são ocasionadas por três fatores: a natalidade, a mortalidade e a migração. Sendo assim, a variação com relação ao tempo na quantidade de indivíduos de uma determinada população  $p = p(t)$  é determinada por:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \text{natalidade} - \text{mortalidade} + \text{migração}. \quad (1.2.1)$$

Para simplificar a modelagem matemática, em geral, não consideramos os efeitos do processo migratório, isto é, a população é tratada isoladamente. Se a natalidade e a mortalidade são dadas em função da quantidade de indivíduos  $p(t)$  no instante  $t$ , então a equação (1.2.1) pode ser reescrita como uma equação diferencial autônoma,

$$\frac{dp(t)}{dt} = f(p), \quad (1.2.2)$$

onde a função  $f(p)$  satisfaz  $f(0) = 0$ , isto é, se não há nenhum indivíduo na população então esta não varia pois não pode haver natalidade ou mortalidade em uma população nula. Esta condição é indispensável pois ela coíbe o aparecimento espontâneo de indivíduos.

Se a função  $f(p)$  é suficientemente suave para que possamos expressá-la como uma série polinomial (série de Taylor), então temos

$$f(p) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i. \quad (1.2.3)$$

Porém, como  $f(0) = 0$ , então a primeira parcela da série acima é nula,  $a_0 = 0$ , o que nos permite reescrever a equação (1.2.2) como,

$$\begin{aligned} \frac{dp(t)}{dt} &= p(a_1 + a_2 p^1 + a_3 p^2 + \dots) \\ &= p\lambda(p). \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

A função  $\lambda(p)$  é denominada *índice de crescimento relativo* uma vez que,

$$\lambda(p) = \frac{1}{p} \frac{dp(t)}{dt}.$$

Considerando que no instante inicial  $t = 0$  o número de indivíduos seja  $p(0) = p_0 > 0$ , então temos um problema de valor inicial que representa a dinâmica populacional de uma espécie isolada:

$$\begin{cases} \frac{dp(t)}{dt} = p\lambda(p) \\ p(0) = p_0. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Em geral, queremos determinar o comportamento da dinâmica populacional em um período de tempo. Sendo assim, é importante obter o maior número de informações do modelo que descreve a situação como por exemplo, os estados de equilíbrio.

**Definição 1.1.** Dizemos que um ponto  $p^*$  é um estado de equilíbrio para a equação (1.2.2) quando  $p'(t) = f(p^*) = 0$ .

Se consideramos a dinâmica de uma determinada população modelada conforme (1.2.2) (da qual a equação (1.2.5) é um caso particular) então, pela fórmula de Taylor, temos que, suficientemente próximo de  $p^*$  vale

$$\frac{dp}{dt} = f(p) \approx f(p^*) + f'(p^*)(p - p^*).$$

Logo, como  $f(p^*) = 0$ , separando as variáveis obtemos

$$\frac{dp}{p - p^*} \approx f'(p^*)dt,$$

que por integração no intervalo  $[0, t]$ , nos fornece

$$\ln \frac{|p(t) - p^*|}{|p_0 - p^*|} \approx f'(p^*)t \iff |p(t) - p^*| \approx |p_0 - p^*|e^{f'(p^*)t}.$$

Assim, dependendo do sinal da derivada  $f'(p^*)$ , a solução se aproxima do estado de equilíbrio  $p^*$  ou se afasta de  $p^*$ . Dizemos então que o estado de equilíbrio é localmente:

1. Assintoticamente estável quando  $f'(p^*) < 0$ ;
2. Instável quando  $f'(p^*) > 0$ .

Do ponto de vista de aplicação em biomatemática, os modelos de dinâmica populacional de uma única espécie com crescimento inibido são os mais utilizados. Estes modelos são caracterizados por possuírem um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, isto é, a população tende a se estabilizar com a passagem do tempo. Matematicamente, isto significa que existe uma constante  $k \neq 0$  tal que  $\lambda(k) = 0$ . Este valor é denominado *capacidade suporte*.

Os modelos com crescimento populacional inibido apresentam algumas importantes características básicas:

1. O crescimento relativo  $\lambda(p)$  é decrescente com relação a quantidade de indivíduos,  $p$ , e  $\lambda(p) \rightarrow 0$  quando  $p$  tende à capacidade suporte  $k$  (Figura 1.1a);
2. A variação absoluta é crescente no início e depois decresce tendendo a zero (Figura 1.1b);
3. A variação é negativa se  $p(t) > k$  (Figura 1.1(a-b)).

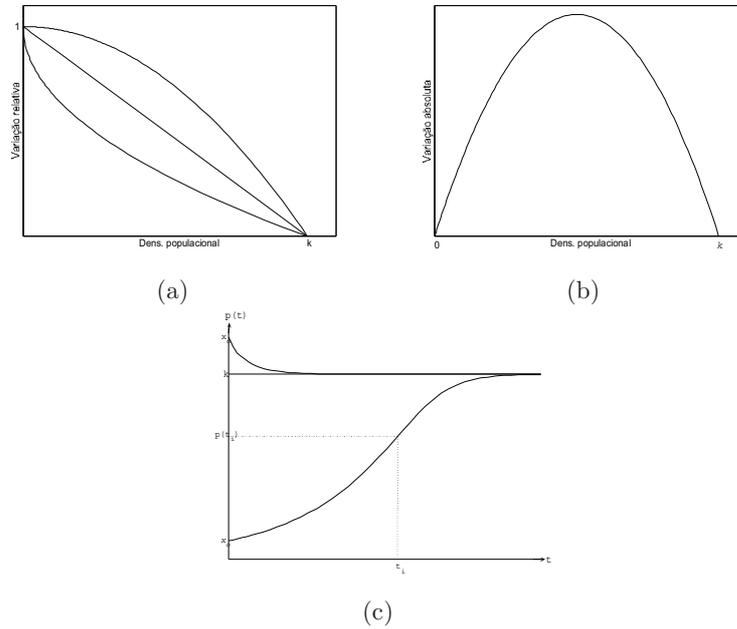


Figura 1.1: Gráficos para modelos inibidos; (a) - variações relativas; (b) - variação absoluta; (c) solução do modelo inibido.

Estimar a capacidade suporte para uma população nem sempre é uma tarefa fácil pois esta depende de diversos fatores ambientais e biológicos que interferem na dinâmica da espécie. Desta forma, as características que apresentamos acima para modelos com crescimento inibido são levadas em consideração em na formulação dos modelos subjetivos usando a teoria fuzzy, que por sua vez, podem ser usados como ferramentas para estimar o parâmetro  $k$ .

A seguir, apresentaremos a formulação em termos de equações diferenciais e as soluções analíticas, de alguns modelos de dinâmica para espécies isoladas. Estes modelos são bem conhecidos na literatura da área.

### 1.2.1 Modelo de Malthus

Em 1798, o economista inglês T. Malthus publicou um artigo sobre o estudo do crescimento populacional humano que atualmente é conhecido como

a primeira proposta de utilização da matemática na tentativa de avaliar a dinâmica populacional. Segundo Malthus, sob certas condições, a variação populacional ocorre à uma razão geométrica.

Embora Malthus não tenha formulado matematicamente, o atualmente conhecido como modelo de Malthus, em termos de equações diferenciais, é dado por:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \lambda p(t), \quad (1.2.6)$$

onde  $\lambda > 0$  é constante.

A equação diferencial (1.2.6) é um caso particular da equação geral (1.2.4) estabelecida na seção precedente como modelo de dinâmica populacional sem migração, onde o índice de crescimento relativo permanece constante ao longo do tempo.

Considerando  $p(0) = p_0 > 0$ , então temos um problema de valor inicial determinado pela equação (1.2.6), cuja solução

$$p(t) = p_0 e^{\lambda t} \quad (1.2.7)$$

é facilmente determinada por separação de variáveis e integração no intervalo  $[0, t]$ .

Biologicamente, as condições pressupostas neste modelo são ideais no sentido que não há restrições físicas e ambientais para o crescimento exponencial do número de indivíduos da população, o que não condiz com a realidade. No entanto, tal modelo serve como aproximação para problemas mais elaborados em intervalos de tempo relativamente curtos.

### 1.2.2 Modelo de Verhulst

Em 1838, Pierre F. Verhulst propôs um modelo de dinâmica populacional para uma espécie que leva em consideração a capacidade do ambiente suportar um número máximo de indivíduos, devido às limitações do espaço físico e disponibilidade de alimentos, ou seja, existe uma capacidade suporte para a população.

No modelo de Verhulst, a função de crescimento relativo é linear, decrescente com relação a quantidade de indivíduos  $p(t)$  e tendendo a zero quando  $p(t) \rightarrow k$ . Isto é, a variação da população é menor quando o número de indivíduos se aproxima da capacidade suporte. Além disso, a variação populacional atinge seu valor máximo quando a população atinge a metade da capacidade suporte ( $p(t_i) = k/2$ ), como podemos observar na equação (1.2.8) que é a formulação matemática do modelo de Verhulst.

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p \left( 1 - \frac{p}{k} \right). \quad (1.2.8)$$

Na equação acima, também conhecida como equação logística, as constantes reais e positivas  $\alpha$  e  $k$  são respectivamente, o índice intrínscico de crescimento e capacidade suporte. O índice intrínscico de crescimento  $\alpha$  representa a capacidade do indivíduo se reproduzir sem a interferência do ambiente.

A solução analítica para o problema de valor inicial determinado pela equação (1.2.8) com condição inicial  $p(0) = p_o > 0$ , é obtida por meio da separação de variáveis e integração no intervalo  $[0, t]$ , obtendo assim a expressão

$$\ln \left| \frac{p}{p_o} \right| - \ln \left| \frac{p-k}{p_o-k} \right| = \alpha t,$$

o que implica em

$$\ln \left| \frac{p(p_o-k)}{p_o(p-k)} \right| = \alpha t,$$

ou ainda,

$$\left| \frac{p_o(p-k)}{p(p_o-k)} \right| = e^{-\alpha t} \Rightarrow \frac{|p-k|}{|p|} = \frac{|p_o-k|}{|p_o|} e^{-\alpha t}.$$

Isolando  $p(t)$  obtemos

$$p(t) = \frac{p_o k}{p_o + (k - p_o) e^{-\alpha t}}.$$

Como o termo exponencial no denominador tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$  então, independentemente da condição inicial  $p_o$ ,  $p(t) \rightarrow k$  quando  $t \rightarrow \infty$ , ou seja, o estado de estabilidade  $p^* = k$  é assintoticamente estável.

### 1.2.3 Modelo de Montroll

O modelo de Montroll, proposto em 1971, pode ser considerado como a generalização do modelo de Verhulst. Neste modelo, o índice de crescimento relativo é decrescente com relação a  $p(t)$ , porém não necessariamente de forma linear como no modelo de Verhulst. A equação diferencial para o modelo de Montroll é:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p \left[ 1 - \left( \frac{p}{k} \right)^\beta \right], \quad (1.2.9)$$

onde  $k > 0$  é a capacidade suporte,  $\alpha$  e  $\beta$  constantes reais positivas.

A diferença fundamental entre os modelos de Motroll e Verhulst está na posição do ponto de maior variação populacional. Enquanto na equação

logística a variação máxima ocorre quando  $p(t_i) = k/2$ , no modelo de Montroll a variação máxima é atingida quando

$$p(t_i) = k \left( \frac{1}{1 + \beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Desta forma, o ponto de inflexão de  $p(t)$  pode ser alterado de acordo com a necessidade do problema, apenas modificando o valor de  $\beta$ . No caso particular em que  $\beta = 1$  temos o modelo de Verhulst.

O estado de equilíbrio não nulo para o modelo de Montroll é  $p^* = k$ . Considerando  $f(p)$  como a expressão à direita do sinal de igualdade na equação (1.2.9), então temos que

$$\frac{df}{dp} = -\alpha\beta < 0.$$

Consequentemente, o estado de equilíbrio  $p^* = k$  é assintoticamente estável. Logo, podemos concluir que, independentemente da condição inicial  $p_0$ ,  $p(t) \rightarrow k$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

A solução do modelo de Montroll é dado por:

$$p(t) = \frac{p_0 k}{[p_0^\beta + (k^\beta - p_0^\beta)e^{-\beta r t}]^{\frac{1}{\beta}}}. \quad (1.2.10)$$

### 1.3 Modelos para interação entre espécies

Na natureza raramente são encontradas espécies isoladas conforme pressupomos na seção anterior. Geralmente as espécies em uma comunidade são encontradas interagindo de alguma forma, podendo essa interação ser prejudicial ou benéfica. Estas interações em geral, provocam alterações na dinâmica populacional dos indivíduos envolvidos. Dentre estas interações se destacam as interações do tipo *competição*, *presa - predador* e *mutualismo*.

É entendido como situação de competição quando o crescimento da população de uma das espécies envolvida na interação implica em decréscimo da população da segunda espécie. Isto geralmente ocorre quando duas espécies disputam os mesmos recursos naturais em um ambiente em comum. Este tipo de interação é prejudicial para ambas as espécies.

Quando o aumento no número de indivíduos de uma das espécies acarreta em aumento populacional à outra, porém o crescimento populacional da segunda espécie leva ao declínio populacional da primeira, então temos

uma interação do tipo presa - predador (ou parasita - hospedeiro ou planta - herbívoro). Na interação presa - predador uma espécie é prejudicada (presa) e a outra é beneficiada (predador) pela interação. Em geral, as interações do tipo presa - predador acontecem quando uma das espécies (a presa) serve como fonte de alimento para a outra espécie (o predador).

No caso em que ambas as espécies são beneficiadas pela interação, ou seja, o crescimento populacional de uma espécie implica em crescimento da população da outra espécie e vice-versa, então temos uma interação denominada mutualismo ou *simbiose*.

Resumidamente, as interações descritas acima podem ser determinadas segundo a influência de cada espécie sobre a outra, isto é, se a interação é benéfica, representada pelo sinal (+), ou prejudicial, representada por (-), para cada espécie. A tabela a seguir fornece um resumo da interação entre as espécies para os três casos aqui considerados:

interação	espécie 1	espécie 2
competição	-	-
presa - predador	+	-
mutualismo	+	+

Na formulação matemática destes modelos, as características de cada interação são essenciais para a definição das funções de crescimento relativo que determinam a dinâmica populacional de cada espécie envolvida na interação. Entender o comportamento da dinâmica populacional é o principal objetivo da modelagem matemática de tais fenômenos.

Sendo assim, devido a dificuldade ou até mesmo impossibilidade de se obter soluções analíticas, desejamos estabelecer critérios que nos permitam avaliar qualitativamente as soluções. Para isso, enunciaremos alguns conceitos e resultados básicos da teoria de estabilidade no sentido de Lyapunov.

Consideremos um sistema dinâmico bidimensional dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y). \end{cases} \quad (1.3.11)$$

**Definição 1.2.** Um ponto  $(x^*, y^*)$  é denominado um estado de equilíbrio, ou estado estacionário, para (1.3.11) quando  $f_1(x^*, y^*) = f_2(x^*, y^*) = 0$ .

O comportamento das trajetórias determinadas pelas soluções  $x(t)$  e  $y(t)$  nas proximidades dos estados de equilíbrio são de particular interesse. Na definição a seguir,  $d(A, B)$  é a distância entre dois pontos  $A$  e  $B$  em  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 1.3.** Seja  $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*)$  um ponto de equilíbrio e  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o)$  a solução, com condição inicial  $\mathbf{x}_o = (x_o, y_o)$ , do sistema (1.3.11). Dizemos que  $\mathbf{x}^*$  é estável se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$d(\mathbf{x}_o, \mathbf{x}^*) < \delta \implies d(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o), \mathbf{x}^*) < \varepsilon.$$

O estado de equilíbrio  $\mathbf{x}^*$  é assintoticamente estável quando é estável e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o), \mathbf{x}^*) = 0.$$

O estado de equilíbrio é dito *instável* quando não satisfaz as condições acima.

A análise de estabilidade local, no caso em que as funções  $f_1(x, y)$  e  $f_2(x, y)$  são não-lineares, é feita por meio dos autovalores da matriz jacobiana

$$\mathbf{J}_{(x^*, y^*)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x^*, y^*)}$$

**Teorema 1.1** ( linearização). *Seja  $(x^*, y^*)$  um estado de equilíbrio para o sistema (1.3.11) e  $\lambda_{1,2}$  autovalores da matriz jacobiana em  $(x^*, y^*)$ . Se  $Re(\lambda_{1,2}) < 0$ , então o estado de equilíbrio é localmente assintoticamente estável; se  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ , o estado de equilíbrio é instável (ponto de sela); se  $Re(\lambda_{1,2}) > 0$ , o estado de equilíbrio é instável.*

*Demonstração.* Consultar [21].

É importante observar que o teorema acima não permite conclusão quando os autovalores são imaginários puros (estados de equilíbrios não hiperbólicos). Observamos também, que a natureza do estado de equilíbrio é local, ou seja, as condições iniciais do sistema (1.3.11) devem estar suficientemente próximas de  $(x^*, y^*)$  para que as conclusões sejam garantidas. O teorema a seguir fornece resultados sobre o comportamento global da solução.

**Teorema 1.2.** *Seja  $L(x, y)$  uma função de Lyapunov . O estado de equilíbrio  $(x^*, y^*)$  será:*

- (i) *Estável quando  $\nabla L(x, y) \cdot (f_1, f_2) \leq 0$  para todo  $x, y$ ;*
- (ii) *Assintoticamente estável quando  $\nabla L(x, y) \cdot (f_1, f_2) < 0$  para todo  $x, y$ ;*
- (iii) *Instável quando  $\nabla L(x, y) \cdot (f_1, f_2) > 0$  para todo  $x, y$ .*

Uma *função de Lyapunov* é uma função escalar não negativa, isto é,  $L(x, y) > 0$  para todo  $x \neq x^*$  e  $y \neq y^*$ , com derivadas parciais de primeira ordem contínuas. A instabilidade local de um estado de equilíbrio, abre o questionamento sobre o que acontece com a trajetória da solução no plano de fase quando  $t \rightarrow \infty$ . Se as funções  $x(t)$  e  $y(t)$  são limitadas, é de se esperar que a trajetória não se afaste indefinidamente do estado de equilíbrio. Um dos principais resultados neste sentido é o *Teorema de Bendixson-Poincaré*.

**Teorema 1.3** (Bendixson-Poincaré). *Se para  $t \geq 0$ , a trajetória  $(x(t), y(t))$  do sistema (1.3.11) é limitada no plano- $xy$  e não se aproxima de um estado de equilíbrio, então a trajetória  $(x(t), y(t))$  é fechada ou se aproxima de uma trajetória fechada quando  $t \rightarrow \infty$  (ciclo limite).*

É importante observar que se a trajetória  $(x(t), y(t))$  é limitada, então temos um ciclo limite ou um estado de equilíbrio assintoticamente estável. Logo, análises de estabilidade locais são suficientes para garantir o comportamento global da solução.

Um critério de negação de existência de ciclos limite é denominado *critério de Dulac*.

**Teorema 1.4** (critério de Dulac). *Seja  $\beta(x, y)$  continuamente diferenciável uma região simplesmente conexa  $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^2$  e suponha que*

$$\frac{\partial(\beta f_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta f_2)}{\partial y}$$

*seja estritamente positivo ou estritamente negativo em  $\mathbf{D}$ . Então não há trajetórias fechadas para o sistema (1.3.11).*

A seguir, apresentaremos alguns dos principais modelos para interação entre espécies.

### 1.3.1 Modelo presa - predador de Lotka-Volterra

A primeira representação do comportamento de um sistema presa - predador, foi proposta por volta de 1926 pelo matemático italiano V. Volterra na tentativa de explicar o comportamento das populações de certas espécies de peixes no mar Adriático. Em 1925, o biofísico A. Lotka encontrou as mesmas equações em estudos sobre reações cinéticas.

O atualmente denominada modelo de Lotka-Volterra, leva em consideração as seguintes hipóteses:

1. Na ausência de predadores a população de presas cresce de forma malthusiana;

2. Na ausência de presas a população de predadores decresce proporcionalmente à sua população (malthusianamente);
3. O índice relativo de crescimento da população de presas diminui linearmente em relação à população de predadores;
4. O índice relatido de crescimento da população de predadores cresce linearmente com relação à população de presas.

Matematicamente estas informações estão sintetizadas no sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy, \end{cases} \quad (1.3.12)$$

onde  $x = x(t)$  é a população de presas,  $y = y(t)$  é população de predadores e  $a, b, \alpha, \beta$  são constantes reais positivas.

A solução implícita para o sistema (1.3.12) pode ser obtida eliminado o parâmetro  $t$  através da regra da cadeia

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(a - by)}{y(-c + dx)}.$$

Por separação de variáveis e integração obtemos a seguinte relação entre as variáveis de estado:

$$y^a e^{-\alpha x} = cx^b e^{-\beta x},$$

onde  $c$  é uma constante determinada pela condição inicial  $(x_o, y_o)$ .

Os estados de equilíbrio do sistema (1.3.12) são dados pelo pela solução do sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y) = ax - \alpha xy = 0 \\ f_2(x, y) = -cy + \beta xy = 0 \end{cases} \quad (1.3.13)$$

os quais são  $\mathbf{x}_1^* = (0, 0)$  e  $\mathbf{x}_2^* = (b/\beta, a/\alpha)$ .

A matriz jacobiana avaliada no estado de equilíbrio  $(0, 0)$  é:

$$\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}.$$

Como os autovalores de  $\mathbf{J}_{(0,0)}$  possuem sinais diferentes, então, pelo Teorema 1.1, o estado de equilíbrio  $\mathbf{x}_1^* = (0, 0)$  é localmente instável (ponto de sela).

A matriz jacobiana em  $(b/\beta, a/\alpha)$  é dada por:

$$\mathbf{J}_{(b/\beta, a/\alpha)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\alpha b}{\beta} \\ \frac{a\beta}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

cujos autovalores são  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ab}$ . Como os autovalores de  $\mathbf{J}_{(b/\beta, a/\alpha)}$  são imaginários puros, o Teorema 1.1 não fornece nenhum resultado quanto a natureza da estabilidade em  $\mathbf{x}_2^* = (b/\beta, a/\alpha)$ .

Podemos porém, analisar o comportamento global da solução do sistema (1.3.12) construindo uma função de Lyapunov conveniente, que neste caso é:

$$L(x, y) = x^* \left( \frac{x}{x^*} - \ln \frac{x}{x^*} - 1 \right) + \frac{a}{\beta} \left( \frac{y}{y^*} - \ln \frac{y}{y^*} - 1 \right)$$

onde  $(x^*, y^*)$  é o estado de equilíbrio não nulo. As derivadas parciais de  $L(x, y)$  são:

$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial x} = 1 - \frac{x^*}{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{\beta} \left( \alpha - \frac{a}{y} \right).$$

Por cálculo direto é fácil verificar que  $\nabla L(x, y) \cdot (f_1, f_2) = 0$ . Logo, pelo Teorema 1.2, concluímos que as solução é estável, porém não assintoticamente estável.

Utilizando métodos numéricos para resolução de equações diferenciais, obtemos a solução para o sistema de Lotka-Volterra. As trajetórias determinadas por  $x(t)$  e  $y(t)$  no plano  $xy$ , são fechadas conforme observamos na Figura 1.2 que representa a solução no plano de fase de  $x(t)$  e  $y(t)$ , com distintas condições iniciais.

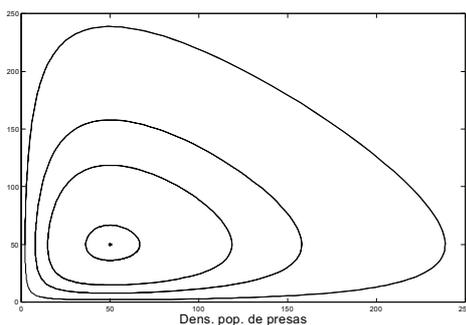


Figura 1.2: Soluções no plano de fase para o sistema (1.3.12) com  $a = b = 0.05$ ,  $\alpha = \beta = 0.001$  e condição iniciais  $(10, 5)$ ,  $(15, 15)$ ,  $(20, 25)$ ,  $(40, 40)$  e  $(50, 50)$ .

É importante observar que as funções  $x(t)$  e  $y(t)$  são periódicas e a amplitude aumenta conforme a condição inicial afasta-se do estado de equilíbrio  $(b/\beta, a/\alpha)$ .

O modelo de Lotka-Volterra é muito criticado por ser um sistema conservativo ([17]), o que é uma idealização tornado-o menos aplicável. Embora oscilações sejam inerentes à populações em processo interativos do tipo presa - predador, o modelo de Lotka-Volterra no entanto, não é apropriado para descrever o comportamento da dinâmica destas interações ([3]). Pois, sendo conservativo, a amplitude das oscilações estão sujeitas às condições iniciais, o que naturalmente não é observável. Pequenas flutuações na condição inicial do sistema, provoca alterações que serão mantidas ao longo do tempo. Além disso, este modelo é estruturalmente instável, uma vez que, se acrescentarmos uma capacidade suporte para a população de presas, o estado de equilíbrio não nulo torna-se assintoticamente estável.

Na tentativa de contornar o problema acima exposto, algumas alterações têm sido propostas para o modelo de Lotka-Volterra. Quando não há competição interespecífica na população de predadores, a generalização do modelo de Lotka-Volterra é dado pelo sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = g(x)x - p(x)y \\ \frac{dy}{dt} = q(x)y, \end{cases} \quad (1.3.14)$$

onde  $g(x)$  é uma função que determina a capacidade suporte das presas;  $p(x)$  é a resposta funcional;  $q(x)$  é a função de crescimento relativo para os predadores.

Algumas hipóteses que determinam as condições de uma interação presa - predador são necessárias às funções  $g$ ,  $p$  e  $q$ :

1.  $g'(x) < 0$ ;  $g(0) > 0 > g(\infty)$ . Na ausência de predadores a população de presas não cresce indefinidamente. A capacidade suporte é um valor  $k$  tal que  $g(k) = 0$ ;
2.  $p(x) > 0$  para  $x > 0$  e  $p(0) = 0$ . De modo geral a *resposta funcional* é limitada, ou seja, a capacidade de ataque dos predadores é limitada ([3], [17]);
3.  $q'(x) > 0$ ;  $q(0) < 0 < q(\infty)$ . O índice de crescimento populacional de predadores é crescente com relação à população de presas.

No que se segue, temos algumas funções que satisfazem as condições expostas acima ([3]).

1. *Capacidade Suporte*: substituição do parâmetro  $a$  em (1.3.12)

$$(a) \quad g(x) = r\left(1 - \frac{x}{k}\right), \quad \text{Pielou (1969);}$$

- (b)  $g(x) = r[(\frac{k}{x})^{-s} - 1]$ , ( $1 \geq s > 0$ )     Rosenzweig (1971);  
 (c)  $g(x) = r(\frac{k}{x} - 1)$ ,     Schoener (1973).

2. *Resposta funcional*: substituição do termo  $bx$  em (1.3.12)

- (a)  $p(x) = m(1 - e^{-cx})$ ,     Ivlev (1961);  
 (b)  $p(x) = \frac{mx^2}{x^2 + d^2}$ ,     Takahashi (1964);  
 (c)  $p(x) = \frac{mx}{x+d}$ ,     Holling (1965);  
 (d)  $p(x) = mx^s$  ( $1 \geq s > 0$ ),     Rosenzweig (1971).

### 1.3.2 Modelo presa - predador de Holling-Tanner

O modelo para interação de espécies conhecido como modelo presa - predador de Holling-Tanner, apresenta algumas características que o torna um pouco mais aplicável do que o modelo de Lotka-Volterra. Além de apresentar uma capacidade suporte para a população de presas, a resposta funcional usada no modelo de Holling-Tanner, é baseado no modelo de Michaelis-Menten para concentrações de substâncias em reações enzimáticas ([27]). O modelo de Holling-Tanner apresenta ainda uma capacidade suporte para a população de predadores, que é proporcional à população de presas em cada instante (modelo de Leslie-Gower).

O modelo Holling-Tanner é determinado pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mxy}{x+d} \\ \frac{dy}{dt} = \alpha y\left(1 - \frac{\beta y}{x}\right), \end{cases} \quad (1.3.15)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $d$ ,  $k$  e  $r$  são constantes reais positivas.

O sistema presa - predador (1.3.15) tem as seguintes características:

1. Na ausência de predador a dinâmica populacional das presas segue o modelo logístico, com capacidade suporte  $k$  e razão intrínseca  $r$ ;
2. A constante  $m$  é o número máximo de presas que podem ser capturadas pelo predador por unidade de tempo;
3. O parâmetro  $d$ , está relacionado com a capacidade da presa evitar a predação. Quanto maior a capacidade da presa de evitar o ataque dos predadores, maior é o valor de  $d$ . Isto é evidente pois, se mantivermos os demais parâmetros constantes, quanto maior for  $d$ , menor será a influência do predador sobre a população de presas;

4. A população de predadores cresce logisticamente com razão intrínseca  $\alpha$  e capacidade suporte proporcional à população de presas. Quanto maior se torna a razão  $y(t)/x(t)$ , menor é o número de presas disponíveis para cada predador e, conseqüentemente, o crescimento populacional dos predadores diminui;
5. O parâmetro  $\beta$  é a quantidade de presas necessárias para alimentar um predador quando as populações encontram-se no estado de equilíbrio não nulo.

O modelo de Holling-Tanner é estruturalmente instável, uma vez que, o comportamento da solução depende dos valores dos parâmetros como veremos a seguir.

Se denotarmos a capacidade suporte e a resposta funcional respectivamente por

$$g(x) = r \left(1 - \frac{x}{k}\right) \quad \text{e} \quad p(x) = \frac{mx}{x+d},$$

então as isóclinas para presas e predadores do sistema (1.3.15) são dadas por

$$h_1(x) = \frac{xg(x)}{p(x)} \quad \text{e} \quad h_2(x) = \frac{x}{\beta}.$$

Os estados de equilíbrio do sistema são:  $(0, 0)$ ,  $(k, 0)$  e a raiz positiva da equação

$$x^2 + \left(d - k + \frac{km}{\beta r}\right)x - kd = 0. \quad (1.3.16)$$

Para os dois primeiros estados de equilíbrio, as matrizes jacobianas são, respectivamente

$$\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_{(k,0)} = \begin{bmatrix} kg'(k) & p(k) \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Como os autovalores de  $\mathbf{J}_{(0,0)}$  são positivos, então o ponto  $(0, 0)$  é instável. Já o estado de equilíbrio  $(k, 0)$  é um ponto de sela, uma vez que,  $g'(k) < 0$  e portanto temos autovalores com sinais diferentes.

Consideremos o estado de equilíbrio  $(x^*, y^*)$ , onde  $x^*$  é a raiz positiva da equação (1.3.16) e  $y^* = x^*/\beta$ . Para este ponto, a matriz jacobiana é:

$$\mathbf{J}_{(x^*, y^*)} = \begin{bmatrix} p(x^*)h_1'(x^*) & -p(x^*) \\ \frac{\alpha}{\beta} & -\alpha \end{bmatrix}$$

Os autovalores de  $\mathbf{J}_{(x^*, y^*)}$  são determinados pela equação

$$\lambda^2 + (\alpha - p(x^*)h'_1(x^*))\lambda + \alpha p(x^*)\left(\frac{1}{\beta} - h'_1(x^*)\right) = 0$$

Portanto, segundo o Teorema 1.1, o estado de equilíbrio  $(x^*, y^*)$  é assintoticamente estável quando

$$\alpha - p(x^*)h'_1(x^*) > 0 \quad e \quad \frac{1}{\beta} - h'_1(x^*) > 0 \quad (1.3.17)$$

No entanto, a segunda condição é sempre satisfeita, uma vez que valem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} - h'_1(x^*) &= \frac{y^*}{x^*} - \frac{r}{km}(-2x^* + k - d) \\ &= \frac{1}{x^*} \left[ y^* - \frac{r}{km}(-2x^* + k - d)x^* \right] \\ &= \frac{r}{x^* km} \left[ (k - x^*)(d + x^*) + 2(x^*)^2 - kx^* + dx^* \right] \\ &= \frac{r}{x^* km} \left[ kd + (x^*)^2 \right] > 0 \end{aligned}$$

Podemos verificar a partir dessas condições que se  $x^*$  é maior que o ponto de máximo de  $h_1(x)$ , isto é,

$$x^* > \frac{k - d}{2},$$

então o ponto  $(x^*, y^*)$  é assintoticamente estável, uma vez que nesse caso,  $h'_1(x^*) < 0$  e então, a primeira condição de (1.3.17) também é satisfeita. Devemos ressaltar que a análise de estabilidade apresentada aqui para o estado  $(x^*, y^*)$  é local. No entanto, a validade global é garantida pelo teorema de Bendixson-Poincaré, conforme veremos abaixo.

A função  $x(t)$  é limitada pela capacidade suporte das presas ou pela condição inicial  $x_o$ . De fato, supondo que exista  $t_o$  tal que  $x(t_o) > m = \max\{x_o, k\}$  então, pela continuidade,  $x(t)$  assume um máximo no intervalo  $[0, t_o]$ , ou seja, existe  $t_1 \in [0, t_o]$  tal que  $x(t_1) \geq x(t_o)$ ; se  $t_1 \in (0, t_o)$ , então  $x'(t_1) = 0$ ; se o máximo for atingido em  $t_o$ , então  $x'_-(t_o) \geq 0$ , de modo que temos um absurdo em ambos os casos já que, se  $x(t) > k$  temos  $x'(t) < 0$ . Por outro lado, se  $t_1 = 0$  então temos que  $x(0) = x_o \geq x(t_o) > x_o$ , outro absurdo; portanto,  $x(t) \leq m$ . Com raciocínio análogo, concluímos que  $y(t) \leq \max\{k/\beta, y_o\}$ .

O fato de  $x(t)$  e  $y(t)$  serem limitadas, permite existência de ciclos limite estáveis quando as condições de estabilidade do estado de equilíbrio  $(x^*, y^*)$  não são satisfeitas. Isto quer dizer que as trajetórias no plano fase converge para uma curva fechada, cuja amplitude e posição dependem somente dos coeficientes. As Figuras (1.3) (a) e (b), são as trajetórias descrita por  $x(t)$  e  $y(t)$  no plano de fase para a solução do sistema (1.3.15) para os casos em que há estabilidade assintótica e ciclo limite estável, respectivamente.

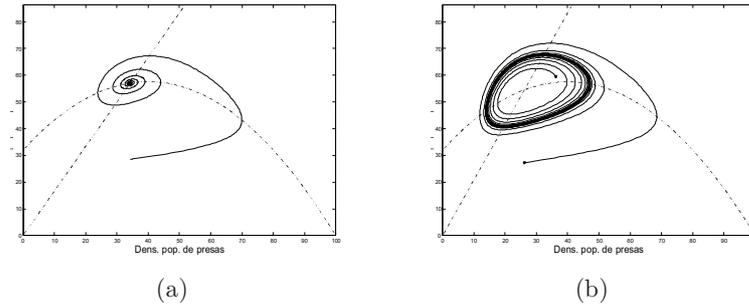


Figura 1.3: Soluções no plano de fase para o sistema (1.3.15). (a) - parâmetros:  $\alpha = 0.01; \beta = 0.48; d = 20; k = 100; m = 0.05; r = 0.01$ . (b) -  $\beta = 0.4$ ; demais parâmetros como em (a).

### 1.3.3 Equações de Volterra: competição, presa - predador e mutualismo

Consideremos uma interação *facultativa* entre duas espécies, isto é, ambas as espécies sobrevivem quando a interação não ocorre.

Um modelo matemático que descreve essa situação, pode ser dado pelo sistema de equações autônomas

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1 x \frac{k_1 - x - \beta_{12}y}{k_1} \\ \frac{dy}{dt} = r_2 y \frac{k_2 - y - \beta_{21}x}{k_2}, \end{cases} \quad (1.3.18)$$

também conhecidas com equações de Volterra, onde  $x(t)$  e  $y(t)$  denotam as densidades populacionais da espécie 1 e 2 respectivamente;  $r_1 > 0$  e  $r_2 > 0$  são os índices intrínscio de crescimento. Na ausência da espécie 1, segue diretamente do sistema (1.3.18) que a espécie 2 cresce logisticamente para

$k_2$ . Analogamente, na ausência da espécie 2 a espécie 1 se estabiliza em  $k_1$ . Portanto,  $k_1 > 0$  e  $k_2 > 0$  são as capacidades suporte para as espécies 1 e 2.

Os parâmetros  $\beta_{12}$  e  $\beta_{21}$ , são responsáveis pela determinação da natureza da interação que o sistema (1.3.18) está modelando. No caso de serem ambos positivos, a interação é do tipo competição, enquanto que se possuem sinais contrários então a interação modelada é do tipo presa - predador. Neste caso, a equação cujo parâmetro é positivo, representa a dinâmica populacional das presas. Por outro lado, se ambos os parâmetros são negativos, as equações modelam um interação de mutualismo.

O sistema (1.3.18) admite como estados de equilíbrio as soluções do sistema não-linear

$$\begin{cases} x(k_1 - x - \beta_{12}y) = 0 \\ y(k_2 - y - \beta_{21}x) = 0 \end{cases} \quad (1.3.19)$$

que são:  $(0, 0)$ ,  $(k_1, 0)$ ,  $(0, k_2)$  e

$$(x^*, y^*) = \left( \frac{\beta_{12}k_2 - k_1}{\beta_{12}\beta_{21} - 1}, \frac{\beta_{21}k_1 - k_2}{\beta_{12}\beta_{21} - 1} \right)$$

caso  $\beta_{12}\beta_{21} \neq 1$ , o que é biologicamente viável somente se o numerador possuir o mesmo sinal do denominador.

As matrizes jacobianas em cada um dos estados de equilíbrio são, respectivamente:

$$\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}_{(k_1,0)} = \begin{bmatrix} -r_1 & r_1\beta_{12} \\ 0 & r_2(1 - \frac{\beta_{21}k_1}{k_2}) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{J}_{(0,k_2)} = \begin{bmatrix} r_1(1 - \frac{\beta_{12}k_2}{k_1}) & 0 \\ r_2\beta_{21} & -r_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}_{(x^*,y^*)} = \begin{bmatrix} \frac{-r_1}{k_1}x^* & \frac{r_1}{k_1}\beta_{12}x^* \\ \frac{r_2}{k_2}\beta_{21}y^* & -\frac{r_2}{k_2}y^* \end{bmatrix}.$$

O estado de equilíbrio  $(0, 0)$  é instável, pois os autovalores de  $\mathbf{J}_{(0,0)}$  são positivos. Para o ponto  $(k_1, 0)$  temos que:

1. se  $\beta_{21}k_1 > k_2$  então  $(k_1, 0)$  é assintoticamente estável;
2. se  $\beta_{21}k_1 < k_2$  então  $(k_1, 0)$  é instável.

De modo análogo, concluímos que o estado se equilíbrio  $(0, k_2)$  é:

1. Assintoticamente estável quando  $\beta_{12}k_2 > k_1$ ;
2. Instável quando  $\beta_{12}k_2 < k_1$ .

Os autovalores de  $\mathbf{J}_{(x^*, y^*)}$  são as raízes da equação

$$\lambda^2 + (ax^* + by^*) + (1 - \beta_{12}\beta_{21})abx^*y^* = 0 \quad a > 0, b > 0.$$

Pelo Teorema (1.1),  $(x^*, y^*)$  é:

1. Instável (ponto de sela) quando  $\beta_{12}\beta_{21} > 1$ , pois o produto dos autovalores é negativo;
2. Assintoticamente estável quando  $\beta_{12}\beta_{21} < 1$ ; neste caso, os autovalores possuem o mesmo sinal e como  $\lambda_1 + \lambda_2 = -(ax^* + dy^*) < 0$ , então  $\lambda_{1,2} < 0$ .

Das análises de estabilidades feitas anteriormente concluímos que:

1. Quando a interação é do tipo *competição* ( $\beta_{12}$  e  $\beta_{21}$  positivos), a instabilidade (estabilidade) do estado de equilíbrio  $(x^*, y^*)$  implica em estabilidade assintótica (instabilidade) de  $(k_1, 0)$  e  $(0, k_2)$ . É possível também, que apenas um dos pontos  $(k_1, 0)$  ou  $(0, k_2)$ , seja assintoticamente estável; isto somente ocorre quando o ponto  $(x^*, y^*)$  não é biologicamente viável. Do ponto de vista biológico, as condições para coexistência das espécies significa que a interação é menos intensa, ou seja, a competição é fraca; por outro lado, quando a competição é forte, uma das espécies é extinta (*princípio da exclusão competitiva*);
2. Se a interação é do tipo presa - predador ( $\beta_{12}$  e  $\beta_{21}$  com sinais contrários), então o ponto biologicamente viável  $(x^*, y^*)$  sempre será assintoticamente estável, já que  $\beta_{12}\beta_{21} < 0 < 1$ ;
3. Para o caso em que a interação é do tipo mutualismo ( $\beta_{12}$  e  $\beta_{21}$  negativos), as condições de estabilidade assintótica para os pontos  $(k_1, 0)$  e  $(0, k_2)$  nunca são satisfeitas. Já o ponto biologicamente viável  $(x^*, y^*)$  pode ser tanto assintoticamente estável quanto instável. Embora cada espécie apresente competição interespecífica, quando o ponto biologicamente viável  $(x^*, y^*)$  é instável, o efeito da interação é maior, de modo que, as soluções crescem indefinidamente e isto não é biologicamente aceitável.

Aplicando o critério de Dulac com  $\beta(x, y) = 1/xy$  no sistema (1.3.18), obtemos

$$\frac{\partial(\beta(x, y)f_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta(x, y)f_2)}{\partial y} = -\frac{r_1}{k_1y} - \frac{r_2}{k_2x} < 0$$

para todo  $x > 0$  e  $y > 0$ . Portanto, as soluções não apresentam periodicidade.

Concluímos, com raciocínio análogo ao apresentado no modelo de Holling-Tanner que, quando a interação é do tipo competição ou presa - predador

as funções  $x(t)$  e  $y(t)$  do sistema (1.3.18) são limitadas. Segue então do teorema de Bendixson-Poincaré, que as trajetórias são periódicas ou convergem para um estado de equilíbrio. Porém, o critério de Dulac exclui as soluções periódicas. Logo, as análises locais são suficientes para estabelecer o comportamento global das soluções.

### 1.3.4 Modelos densidade - dependente

A natureza da interação entre duas espécies pode depender de vários fatores como, por exemplo, a densidade populacional ou condições ambientais. Recentemente, foi apresentado por Hernandez em [6] e [7] um modelo de interação entre espécies capaz de alterar o modo da interação.

Consideremos duas espécies,  $i$  e  $j$ , interagindo segundo o sistema de equações de Volterra

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i \frac{k_i - x_i + \alpha_{ij} x_j}{k_i}. \quad (1.3.20)$$

Suponhamos que a interação é benéfica para a espécie  $i$  quando a densidade populacional da espécie  $j$  é baixa, porém, prejudicial quando  $x_j$  é alto. Neste caso, o coeficiente de interação  $\alpha_{ij}$  não pode ser constante, mas sim uma função da densidade populacional da espécie  $j$ ; com valores positivos quando  $x_j$  é baixo e negativos quando  $x_j$  é alto.

Um modelo geral para  $\alpha_{ij}$  que apresenta este comportamento é:

$$\alpha_{ij} = \frac{b_i x_j - x_j^2}{1 + c_i x_j^2}$$

com  $b_i$  e  $c_i$  constantes reais positivas.

Substituindo  $\alpha_{ij}$  na equação (1.3.20), obtemos o sistema de interação entre duas espécies

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 \left[ 1 - \frac{x_1}{k_1} + \left( \frac{b_1 x_2 - x_2^2}{1 + c_1 x_2^2} \right) \frac{x_2}{k_1} \right] \\ \frac{dx_2}{dt} = r_2 x_2 \left[ 1 - \frac{x_2}{k_2} + \left( \frac{b_2 x_1 - x_1^2}{1 + c_2 x_1^2} \right) \frac{x_1}{k_2} \right], \end{cases} \quad (1.3.21)$$

em que para baixas densidades a interação é do tipo mutualismo; para altas densidades no entanto, a interação é do tipo competição.

Denotando por  $x_j^c$  o ponto de intersecção da isóclina  $x_j'(t) = 0$  com o eixo  $x_i$ , as características do sistema quanto aos estados de equilíbrio podem ser:

1. Se ambos  $k_i < x_j^c$  o sistema apresenta ao menos um estado de equilíbrio assintoticamente estável onde as espécies coexistem, podendo ter mais um ou dois pares de estados instável-estável. Os pontos  $(k_1, 0)$  e  $(0, k_2)$  são instáveis (Figuras 1.5(a-b) e 1.6);
  
2. Se algum  $k_i > x_j^c$  pode existir um par de estados de equilíbrio instável-estável, onde as espécies coexistem. O estado de equilíbrio,  $(k_1, 0)$  ou  $(0, k_2)$ , onde  $k_i > x_j^c$  é assintoticamente estável (Figura 1.4a);
  
3. Se ambos  $k_i > x_j^c$ , então não há estado de equilíbrio estável onde as espécies coexistam. Ambos os estados de equilíbrio  $(k_1, 0)$  e  $(0, k_2)$  são assintoticamente estáveis (Figura 1.4b).

Algumas observações são importantes sobre os parâmetro da função  $\alpha_{ij}$ . Por exemplo, quanto maior for o valor de  $b_i$ , maior deve ser a densidade populacional de espécie  $j$  para que a interação seja prejudicial para a espécie  $i$ ; é esperado portanto, que se a interação é prejudicial para  $i$  em baixas densidades de  $j$  o valor de  $b_i$  seja pequeno. Por outro lado, um aumento em  $c_i$  acarreta em diminuição no valor absoluto de  $a_{ij}$ ; portanto, para espécies onde a interação é menos sensível, é de se esperar que  $c_i$  seja alto. Como observamos, os parâmetros de  $\alpha_{ij}$  alteram o modo de interação entre as espécies e portanto, estes parâmetros são intrínscio da interação.

A convergência da solução do sistema (1.3.21) para os estados de equilíbrio, depende das densidades populacionais das espécies  $i$  e  $j$ . No caso de haver dois estados de equilíbrio estáveis, as espécies podem coexistir em mutualismo, presa - predador ou ambas as interações. A Figura 1.5(a), apresenta dois estados de equilíbrio estáveis, onde as espécies coexistem em mutualismo em ambos os estados. Já na Figura 1.5(b), um dos estados estáveis a coexistência é no modo presa - predador enquanto que no outro a interação é mutualismo. As espécies podem coexistir também em interação presa - predador em ambos os estados de equilíbrio; neste caso, a espécie predadora em um estado de equilíbrio é a presa no outro ponto, conforme podemos observar na Figura 1.5(b).

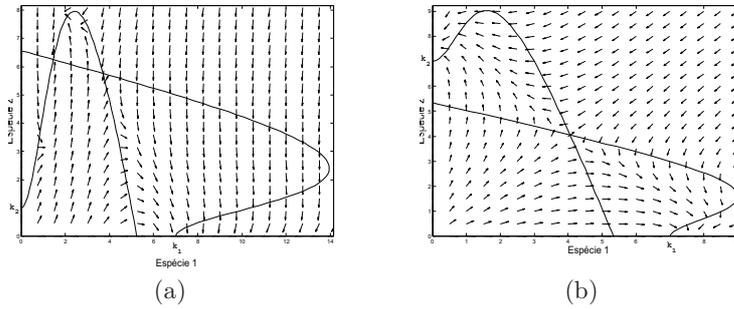


Figura 1.4: Campo de variações para o sistema 1.3.21. (a) - Parâmetros  $r_1 = r_2 = 0.1$ ;  $k_1 = 7$  e  $k_2 = 1$ ;  $b_1 = b_2 = 5$ ;  $c_1 = c_2 = 0.2$ . (b) -  $r_1 = r_2 = 0.1$ ;  $k_1 = k_2 = 7$ ;  $c_1 = c_2 = 0.3$ ;  $b_1 = b_2 = 3$ .

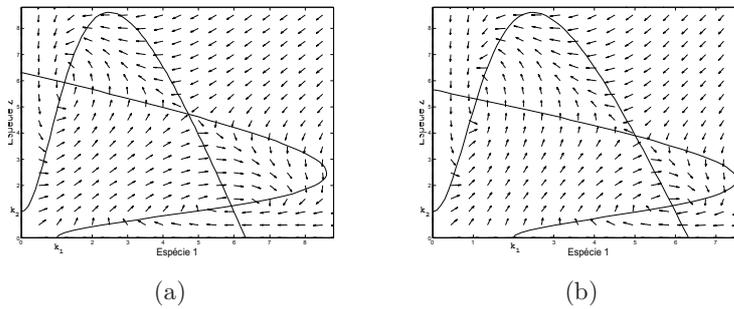


Figura 1.5: Campo de variações para o sistema 1.3.21. (a) -  $r_1 = r_2 = 0.1$ ;  $k_1 = k_2 = 1$ ;  $c_1 = c_2 = 0.3$ ;  $b_1 = b_2 = 6$ ; estados de equilíbrio estáveis:  $(1.22, 5.93)$  e  $(5.93, 1.23)$ ; ambos os estados em mutualismo. (b) -  $r_1 = r_2 = 0.1$ ;  $k_1 = 2$  e  $k_2 = 1$ ;  $b_1 = 5$  e  $b_2 = 6$ ;  $c_1 = 0.3$ ;  $c_2 = 0.4$ ; estados estáveis:  $(5.92, 1.23)$  coexistência em mutualismo;  $(1.09, 5.92)$  coexistência em presa - predador.

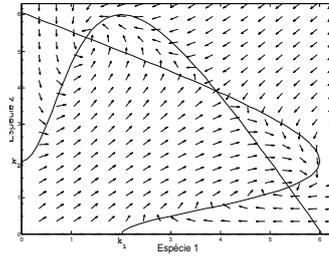


Figura 1.6: Campo de variações para o sistema (1.3.21). Parâmetros:  $r_1 = r_2 = 0.1$ ;  $k_1 = k_2 = 2$ ;  $b_1 = b_2 = 5$ ;  $c_1 = c_2 = 0.5$  estados de equilíbrio estáveis: (5.38, 1.29) e (1.29, 5.38); coexistência em presa - predador em ambos os pontos.

É importante ressaltar que na definição da função  $\alpha_{ij}$  é utilizado termos subjetivos como *baixo* e *alto*, sendo assim possível a modelagem por meio de teoria fuzzy, como veremos no Capítulo 4.

### 1.3.5 Modelo de Kolmogorov

Suponhamos que em um sistema interativo, as variações dependam somente das densidades populacionais das espécies em cada instante de tempo. Então, um modelo geral pode ser dado pelo sistema de equações autônomas

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xf(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = yg(x, y), \end{cases} \quad (1.3.22)$$

onde as características da interação é determinadas pelas funções  $f$  e  $g$ . O sistema (1.3.22) foi proposto por A. N. Kolmogorov em 1936.

Se a interação considerada é uma competição, então ambas as espécies são prejudicadas, o que matematicamente pode ser representado por:

$$\frac{\partial f}{\partial y} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x} < 0.$$

Supondo que a interação é presa - predador, então uma espécie é prejudicada e a outra beneficiada. Neste caso as funções satisfazem

$$\frac{\partial f}{\partial y} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x} > 0.$$

Quando ambas as espécies são beneficiadas pela interação, ou seja, interação é do tipo mutualismo, então temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x} > 0.$$

Como no início desta seção, as características das funções  $f$  e  $g$  com relações às densidades populacionais  $y(t)$  e  $x(t)$  respectivamente, podem ser resumidas na seguinte tabela:

interação	$\partial f/\partial y$	$\partial g/\partial x$
competição	-	-
presa - predador	+	-
mutualismo	+	+

Quando a competição interespecífica é levada em consideração, então as funções  $f$  e  $g$  devem ser decrescentes com relação à  $x(t)$  e  $y(t)$ , pelo menos quando as densidades populacionais são altas. Isto significa que

$$\frac{\partial f}{\partial x} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial y} < 0. \quad (1.3.23)$$

Além disso, quando a interação é facultativa para alguma espécie, então é razoável pensar que existe uma capacidade suporte para tal. No caso de ser facultativa para ambas as espécies, devem existir  $k_1 > 0$  e  $k_2 > 0$  tais que  $f(k_1, 0) = 0$  e  $g(0, k_2) = 0$ .

Pelo critério de Dulac, se as funções  $f$  e  $g$  satisfazem (1.3.23) para todo  $x$  e  $y$  respectivamente, então a órbita determinada por  $(x(t), y(t))$  não converge para um ciclo limite. De fato, pois tomando  $\beta(x, y) = 1/xy$  temos

$$\frac{\partial(\beta(x, y)xf(x, y))}{\partial x} + \frac{\partial(\beta(x, y)yg(x, y))}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial g}{\partial y} < 0.$$

Se as funções  $x(t)$  e  $y(t)$  são limitadas, então o teorema de Bendixson-Poincaré garante a existência de ciclo limite ou ponto de equilíbrio estável. Porém, como o resultado acima não permite soluções periódicas, a análise local é suficiente para determinar o comportamento global da solução.

Para a interação do tipo presa - predador, Kolmogorov estabeleceu condições para que as soluções  $x(t)$   $y(t)$  sejam oscilatórias como veremos no próximo teorema.

**Teorema 1.5** (Kolmogorov, [3]). *Para um sistema dinâmico como (1.3.22), suponhamos que as funções  $f$  e  $g$  satisfaçam as seguintes condições:*

1.  $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$ ;

2.  $\frac{\partial g}{\partial x} > 0$ ;
3. Para algum  $y_1 > 0$ ,  $f(0, y_1) = 0$ ;
4. Para algum  $x_1 > 0$ ,  $g(x_1, 0) = 0$ ;
5. Existe  $\bar{x}_2$  tal que  $f(\bar{x}_2, 0) = 0$
6.  $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$  para  $x$  grande (equivalentemente,  $\bar{x}_2 > x_1$ ), porém para  $x$  pequeno,  $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$ ;
7.  $\frac{\partial g}{\partial y} < 0$ ;
8. Existe um estado de equilíbrio positivo  $(x^*, y^*)$  instável.

Então existe um ciclo limite estritamente positivo.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [2].

As duas primeiras condições do teorema garantem que a interação modelada pelo sistema (1.3.22) é do tipo presa - predador. Biologicamente, a terceira condição significa que existe um valor de densidade populacional de predadores que evita o crescimento das presas quando sua densidade populacional é baixa e, pelo quarto item, existe uma quantidade mínima de presas necessária para o crescimento populacional dos predadores. Isto significa que a interação é obrigatória aos predadores.

Das condições exigidas pelos itens 5, 6 e 7, concluímos que existe uma capacidade suporte para a população de presas e que os predadores competem entre si na busca pela presa. A condição 8 é necessária para a existência de ciclo limite pelo teorema de *Bendixson-Poincaré*.

## 1.4 Modelos discretos para dinâmica populacional

Existem situações em que as equações de diferenças são mais apropriadas para uma modelagem do que as equações diferenciais. Nesta seção, analisaremos alguns modelos de dinâmica populacional discretos.

Uma equação de diferenças de ordem  $k$  tem a forma

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-k}, t),$$

onde  $f$  é uma função linear ou não, cuja solução é uma sequência numérica  $(x_t)_{t \in \mathbb{N}}$ .

Na modelagem de dinâmica populacional, podemos considerar que os fatores ambientais permanecem inalterados em um intervalo de tempo. Além disso, podemos considerar também que a variação no número de indivíduos entre os instantes  $t$  e  $t + 1$  depende somente da população no instante  $t$ . Portanto, a forma geral neste caso passa a ser

$$x_{t+1} = F(x_t) \quad \text{ou} \quad x_{t+1} = x_t f(x_t). \quad (1.4.24)$$

Por razões biológicas, é suposto que  $f(x) > 0$  para todo  $x > 0$  e  $f(0) = 0$ . As limitações nos recursos naturais exigem que  $f(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \infty$ .

Novamente, estamos interessados no que acontece com a sequência gerada por  $x_t$ , ou seja, se a solução da equação de diferenças é convergente ou divergente.

### Exemplo 1.1. Modelo de Malthus discreto

Consideremos a equação de diferenças

$$x_{t+1} = r x_t. \quad (1.4.25)$$

Dada uma condição inicial  $x_0$  é possível determinar  $x_t$  em qualquer instante neste caso, pois a solução é  $x_t = r^t x_0$ . Vemos que a sequência é crescente, tendendo ao infinito quando  $r > 1$  e decrescente tendendo a zero quando  $0 < r < 1$ . Para  $r < 0$  a solução converge oscilando para zero se  $-1 < r < 0$  ou diverge de forma oscilatória se  $r < -1$ .

Um estado de equilíbrio ocorre quando não há variação, que no caso discreto significa:

$$x_{t+1} = x_t = x^* \quad \text{ou} \quad f(x_t) = 1.$$

Analogamente ao caso contínuo, dizemos que um estado de equilíbrio é estável quando toda solução, partindo de valores suficientemente próximo de  $x^*$ , permanece suficientemente próximo de  $x^*$ . Além disso, se a solução converge para  $x^*$  então temos uma estabilidade assintótica. Por outro lado, se soluções como valores iniciais próximos de  $x^*$  afastam-se do estado de equilíbrio, então  $x^*$  é instável.

A expansão em série de Taylor de  $F$  em torno de  $x^*$  resulta em

$$x_{t+1} = x^* + F'(x^*)(x_t - x^*) \quad \text{ou} \quad y_{t+1} = F'(x^*)y_t.$$

Portanto:

1.  $x^*$  é assintoticamente estável se  $|F'(x^*)| < 1$ ;

2. Instável se  $|F'(x^*)| > 1$ .

As equações de diferenças também admitem a existência comportamento caótico ou ciclos, isto é, a partir de um instante  $t_o$ , a solução torna-se periódica. Podem ainda admitir comportamento caótico, ou seja, não é possível prever o comportamento da solução a partir de uma da condição inicial ([9]).

Para o caso bidimensional, isto é, quando temos um sistema do tipo

$$\begin{cases} x_{t+1} = F(x_t, y_t) \\ y_{t+1} = G(x_t, y_t), \end{cases} \quad (1.4.26)$$

a análise de estabilidade dos estados de equilíbrio é feita por meio dos autovalores da matriz jacobiana  $\mathbf{J}_{(x^*, y^*)}$ . Neste caso, se  $|Re(\lambda_{1,2})| < 1$ , então o estado de equilíbrio é assintoticamente estável. Caso contrário o estado de equilíbrio é instável.

### 1.4.1 Modelo Logístico discreto

O modelo discreto análoga a equação logística (1.2.8) é dado pela equação de diferenças não-linear

$$x_{t+1} = x_t \left[ 1 + \alpha \left( 1 - \frac{x_t}{k} \right) \right]. \quad (1.4.27)$$

Entretanto, se para algum  $t$ ,  $x_t$  exceder  $k(1+r)/r$  então  $x_{t+1} < 0$  o que não faz sentido biologicamente.

Um modelo com comportamento parecido, porém sem a inconveniência apresentada acima, é o modelo proposto por May em 1975:

$$x_{t+1} = x_t \exp \{ r(1 - x_t/k) \}$$

com  $r$  e  $k$  sendo a razão de crescimento e  $k$  a capacidade suporte ([20]).

O estado de equilíbrio não nulo para o modelo de May é  $x^* = k$ . Como  $F'(k) = 1 - r$ , então o estado de equilíbrio  $x^* = k$  é localmente:

1. Instável se  $r < 0$  ou  $r > 2$ ;
2. Assintoticamente estável se  $0 < r < 2$ .

Para  $2 < r < 3.102$ , o sistema apresenta  $2^n$ -ciclos estáveis, enquanto que para  $r > 3.102$ , a solução se torna caótica ([24]).

### 1.4.2 O Modelo de Nicholson - Bailey

Sistemas de equações de diferenças são fundamentais na modelagem de interações envolvendo espécies que possuem ciclos de vida distintos, em particular em interações *parasita - hospedeiro*.

Os modelos para interações parasita - hospedeiro, têm em comum as seguintes hipóteses:

1. Os hospedeiros que foram parasitados darão origem à próxima geração de parasitas;
2. Os hospedeiros que não foram parasitados darão origem a outros hospedeiros;
3. A fração de hospedeiros parasitados depende do encontro entre as duas espécies; em geral, esta fração depende de ambas as espécies.

Um dos primeiros modelos discretos para este tipo de interação, foi proposto em 1935 por A. J. Nicholson e V. A. Bailey. Considerando  $N_t$  e  $P_t$  as populações de hospedeiros e parasitas no instante  $t$  respectivamente, o modelo de Nicholson - Bailey é dado por:

$$\begin{cases} N_{t+1} = \lambda N_t e^{-aP_t} \\ P_{t+1} = cN_t(1 - e^{-aP_t}), \end{cases} \quad (1.4.28)$$

onde  $c$  é o número médio de novos parasitas gerados por hospedeiro,  $a$  é uma constante que determina a eficiência dos parasitas e  $\lambda$  é a razão de reprodução dos hospedeiros.

Neste modelo, a fração dos hospedeiros que não foram parasitados é representada por  $e^{-aP_t}$ ; conseqüentemente,  $1 - e^{-aP_t}$  representa a fração dos hospedeiros parasitados.

Os estados de equilíbrio do modelo de Nicholson - Bailey são:  $(0, 0)$  e  $(N^*, P^*)$ ,

$$N^* = \frac{\lambda \ln \lambda}{(\lambda - 1)ac} \quad \text{e} \quad P^* = \frac{\ln \lambda}{a},$$

com matriz jacobiana

$$\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}_{(N^*, P^*)} = \begin{bmatrix} 1 & aN^* \\ c(1 - \frac{1}{\lambda}) & ca\frac{N^*}{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Como  $(N^*, P^*)$  faz sentido biologicamente somente se  $\lambda > 1$ , então o estado de equilíbrio  $(0, 0)$  é instável. O determinante de  $\mathbf{J}_{(N^*, P^*)}$  é

$$ca\frac{N^*}{a} - caN^*\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\lambda \ln \lambda}{\lambda - 1} > 1$$

quando  $\lambda > 1$  ([3]). Logo o estado  $(N^*, P^*)$  é instável. A Figura (1.7) representa a solução para o modelo (1.4.28)

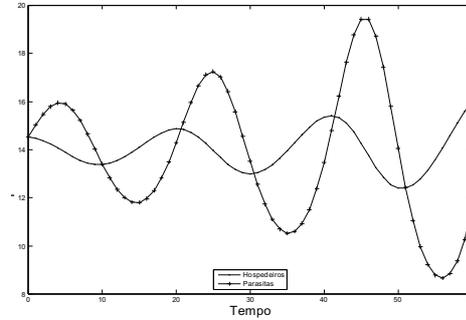


Figura 1.7: Gráfico do modelo de Nicholson - Bailey com  $a = 0.0068$ ,  $c = 11$ ,  $\lambda = 1.1$  e  $(N_o, P_o) = (14.52, 14.52)$ ;  $(N^*, P^*) = (14.01, 14.01)$

Pelo fato das oscilações divergirem, o modelo de Nicholson - Bailey não é satisfatório para representar um sistema de interação entre espécies, em particular para um sistema parasita - hospedeiro. Os modelos mais adequados incorporam uma capacidade suporte para a população de hospedeiros. A forma geral para estes modelos é dada por:

$$\begin{cases} N_{t+1} = \lambda N_t f(N_t, P_t) \\ P_{t+1} = c N_t [1 - f(N_t, P_t)], \end{cases} \quad (1.4.29)$$

com  $f(N_t, P_t)$  sendo a fração que representa os hospedeiros não parasitados.

Consideremos o caso particular de (1.4.29)

$$\begin{cases} N_{t+1} = N_t \exp \left[ r \left( 1 - \frac{N_t}{k} \right) - a P_t \right] \\ P_{t+1} = c N_t [1 - \exp(-a P_t)]. \end{cases} \quad (1.4.30)$$

Este modelo é uma modificação do modelo de Nicholson - Bailey, apresentando uma capacidade suporte para a população de hospedeiros.

Os estados de equilíbrio neste caso são:

1.  $(0, 0)$ , instável;
2.  $(k, 0)$ , instável;

3.  $(N^*, P^*)$ , onde

$$P^* = \frac{r}{a} \left(1 - \frac{N^*}{k}\right)$$

e  $N^*$  satisfaz

$$\frac{r}{aN^*} \left(1 - \frac{N^*}{k}\right) = 1 - \exp \left[ -r \left(1 - \frac{N^*}{k}\right) \right],$$

cuja estabilidade depende de  $r$  e  $N^*/k$  ([17]).

As Figuras (1.8) (a) e (b), são as trajetórias para o sistema (1.4.30). Na primeira, o estado de equilíbrio  $(N^*, P^*)$  é localmente instável; porém, como  $N_t$  é limitada, temos um ciclo limite. Na segunda figura,  $(N^*, P^*)$  é assintoticamente estável, convergindo em espiral com “três ramos”.

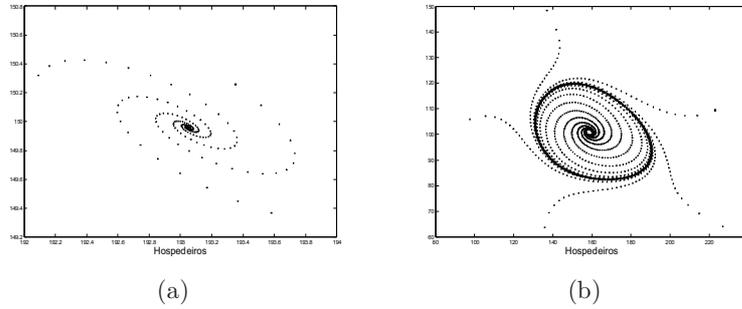


Figura 1.8: Solução do sistema (1.4.30) no plano  $NP$ . Parâmetros: (a) -  $a = 0.01$ ,  $r = 3.78$  e  $k = 320$ ; (b) -  $r = 2$  e demais parâmetros como em (a).

## 1.5 Exercícios

**Exercício 1** - Suponha que a dinâmica populacional de uma população seja determinada pela equação

$$\frac{dp}{dt} = \lambda(t)p.$$

Mostre que o número de indivíduos no instante  $t > 0$  é dado por

$$p(t) = p_o \exp \left( \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right).$$

Qual deve ser a condição sobre a função  $\lambda(t)$  para que a população tenha crescimento inibido?

**Exercício 2** - Encontre a solução para o modelo de Montroll dado pela Equação (1.2.9)

**Exercício 3** - (Modelo de von Bertalanffy generalizado) Determine a natureza da estabilidade dos pontos de equilíbrio da equação

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^\gamma - \beta p.$$

**Exercício 4** - (Efeito Allee [27]) Considere uma espécie cuja dinâmica populacional é governada pela equação diferencial

$$\frac{dp}{dt} = rp \left(1 - \frac{p}{k}\right) \left(\frac{p}{a} - 1\right).$$

Quais são os pontos de equilíbrio desta equação? Determine a estabilidade de cada um desses pontos. Qual seria a interpretação biológica para a dinâmica desta espécie?

**Exercício 5** - O modelo proposto por Prout & McChesney ([23]) para a dinâmica populacional de determinadas espécies de insetos é dado pela equação de diferenças

$$p_{t+1} = \frac{1}{2} F^* S^* e^{-(r+s)p_t} p_t,$$

onde  $F^*$ ,  $S^*$ ,  $r$  e  $s$  são constantes positivas. Determine a estabilidade dos pontos de equilíbrio deste modelo.

**Exercício 6** - Suponha que a interação entre duas espécies seja dada pelas equações

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k_1 + \alpha y}\right), \quad \frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{k_2 + \beta x}\right),$$

onde  $x(t)$  e  $y(t)$  é a quantidade de indivíduos das espécies envolvidas na interação e  $\alpha\beta < 1$ .

1. A interação entre as espécies é uma competição, mutualismo ou presa-predador?
2. Faça uma análise qualitativa determinando o comportamento da solução ao longo do tempo.

3. Por que é necessário assumir que  $\alpha\beta < 1$ ?
4. Forneça uma explicação biológica para os parâmetros envolvidos nas equações.

## Capítulo 2

# Problemas de valor inicial fuzzy

### 2.1 Introdução

Como vimos no capítulo anterior, os modelos de dinâmica populacional envolvem parâmetros que determinam as características ambientais, da espécie e até mesmo da interação, como por exemplo, a capacidade suporte e índice de crescimento relativo. De modo geral, estes parâmetros são obtidos por meio de observações e experimentos e portanto, estão sujeitos a imprecisões.

A principal característica dos sistemas determinísticos é a precisão obtida pela solução. No entanto, esta precisão está comprometida quando os parâmetros envolvidos na formulação não são precisos o que, em geral, é o caso dos modelos para dinâmica populacional. Quando a subjetividade está na condição inicial, denominamos *fuzziness demográfica*, se a incerteza está nos parâmetros chamamos de *fuzziness ambiental*.

Sendo assim, ferramentas que incorporam informações imprecisas são fundamentais para a modelagem. Em particular, a teoria dos conjuntos fuzzy é uma ferramenta que pode ser usada para modelagem de fenômenos envolvendo imprecisões e subjetividade.

Neste capítulo, vamos fazer uso desta teoria para resolução de sistemas de equações diferenciais em que os parâmetros, a condição inicial ou ambos são incertos de tal modo que possam ser modelados por conjuntos fuzzy. Para isso, consideremos um sistema autônomo

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = f(x(t)) \\ \tilde{x}(0) = \hat{x}_o \end{cases} \quad (2.1.1)$$

onde a condição inicial é imprecisa, isto é,  $\hat{x}_o \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

Vamos abordar o sistema acima de duas maneiras distintas. Um delas, proposta por Kaleva ([8]) e Seikkala ([22]), consiste em aplicar o princípio da extensão de Zadeh ao campo determinístico determinado por  $f$ , obtendo assim um campo fuzzy a partir do qual, são usados conceitos como a derivada de Hukuhara. A segunda, consiste em determinar primeiramente o solução determinística  $\varphi_t(x_o)$  e então, aplicar o princípio da extensão de Zadeh, obtendo uma solução fuzzy  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$  ([18]). Informalmente, na primeira abordagem primeiramente *fuzzificamos* o problema e então encontramos a solução, enquanto que no segundo método, primeiramente a solução clássica é determinada e então fuzzificamos esta solução.

## 2.2 Conceitos básicos

Como pré-requisito para as próximas seções deste capítulo, em que apresentaremos cada uma das abordagens acima citadas, vamos definir os conceitos de conjuntos fuzzy e números fuzzy bem como alguns resultados que utilizaremos posteriormente.

**Definição 2.1.** *Um subconjunto fuzzy  $F$  em  $X$  é caracterizado por uma função  $\mu_F : X \rightarrow [0, 1]$ , chamada função de pertinência do conjunto  $F$ , onde  $\mu_F(x) = 1$  e  $\mu_F = 0$  indicam respectivamente a pertinência e não pertinência do elemento  $x$  em  $F$ .*

Segundo esta definição, cada subconjunto clássico de  $X$  é um subconjunto fuzzy em  $X$ , onde a função de pertinência é a função característica do subconjunto. Se  $A \subset X$ , denotaremos por  $\chi_A$  o subconjunto fuzzy determinado pela função característica de  $A$ . Em particular, para todo  $a \in X$  a notação  $\chi_{\{a\}}$  indica o subconjunto fuzzy cuja função de pertinência  $\mu_{\chi_{\{a\}}}(x) = 0$  se  $x \neq a$  e  $\mu_{\chi_{\{a\}}}(a) = 1$ .

**Definição 2.2.** *Seja  $X = \mathbb{R}$ . Dizemos que um subconjunto fuzzy  $A$  em  $\mathbb{R}$  é um número fuzzy quando:*

1.  $\mu_A(x_o) = 1$  para um único  $x_o$ ;
2. O suporte  $\{x : \mu_A(x) > 0\} = \text{supp}A$  é limitado;
3. Os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são intervalos fechados.

O conjunto fuzzy definido pela função de pertinência

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } x < b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

satisfaz as propriedades de um número fuzzy e é denominado *número fuzzy triangular*. Usaremos a notação  $A = (a/b/c)$  para representar um número fuzzy triangular em que  $\mu_A(a) = \mu_A(c) = 0$  e  $\mu_A(b) = 1$ .

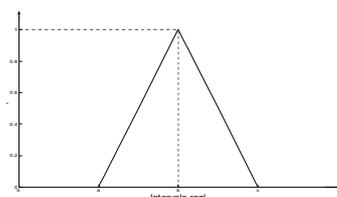


Figura 2.1: Número fuzzy triangular (a/b/c).

Observemos que se o domínio de  $\mu_A : [a, c] \rightarrow [0, 1]$  é multiplicado por uma constante  $\lambda$ , então obtemos um número fuzzy triangular  $\lambda A = (\lambda a/\lambda b/\lambda c)$  onde  $\mu_{\lambda A}(\lambda x) = \mu_A(x)$  para todo  $x \in [a, c]$ . Esta propriedade não é um caso particular somente dos números fuzzy triangulares.

Usaremos a notação  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  para a família de subconjuntos fuzzy de  $\mathbb{R}^n$ , onde os  $\alpha$ -níveis são dados por:

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad \text{para todo } \alpha \in [0, 1] \quad \text{e}$$

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}A}$$

são compactos e não vazios.

Dada uma função  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , podemos definir uma função  $\hat{f}$  que para cada subconjunto fuzzy de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$  associa um subconjunto fuzzy de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ . Esta função  $\hat{f}$  satisfaz  $\hat{f}(\chi_{\{a\}}) = \chi_{\{f(a)\}}$  de modo que podemos ver  $\hat{f}$  como uma extensão de  $f$  para os subconjuntos fuzzy de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.3.** A extensão de Zadeh de uma função  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a função  $\hat{f}$  tal que,

$$\mu_{\hat{f}(U)}(x) = \begin{cases} \sup_{\tau \in f^{-1}(x)} \mu_U(\tau) & \text{se } f^{-1}(x) \neq \phi \\ 0 & \text{se } f^{-1}(x) = \phi, \end{cases}$$

onde  $U$  é um subconjunto fuzzy com suporte em  $\mathbb{R}^m$ .

A extensão de Zadeh  $\hat{f}$  e a função  $f$  estão relacionadas pelo seguinte teorema cuja demonstração pode ser encontrada em [1].

**Teorema 2.1.** *Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua, então a extensão de Zadeh  $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  está bem definida e,*

$$[\hat{f}(u)]^\alpha = f([u]^\alpha)$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$

Aplicando o Teorema 2.1 à função  $\hat{f}(U) = \lambda U$ , obtemos  $[\hat{f}(U)]^\alpha = [\lambda A]^\alpha = \lambda[A]^\alpha$  de modo que multiplicar um número fuzzy  $A$  por escalar  $\lambda$ , é equivalente à multiplicar todos os  $\alpha$ -níveis de  $A$  por  $\lambda$ . Portanto temos que:  $x \in [A]^\alpha$  se, e somente se  $\lambda x \in [\lambda A]^\alpha$ , ou equivalentemente  $\mu_A(x) = \mu_{\lambda A}(\lambda x)$ .

## 2.3 Extensão do campo determinístico

Consideremos a equação autônoma

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_o \end{cases} \quad (2.3.2)$$

com  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $x_o \in \mathbb{R}$ . Supondo que a variável de estado seja incerta, a idéia proposta por Seikkala ([22]), consiste em aplicar o princípio da extensão de Zadeh ao campo determinístico  $f$  obtendo assim um problema de valor inicial fuzzy proveniente do sistema (2.3.2)

$$\begin{cases} \hat{x}'(t) = \hat{f}(\hat{x}(t)) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_o \end{cases} \quad (2.3.3)$$

com  $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$  e  $\hat{x}_o$  subconjunto fuzzy de  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

Como a função  $f$  é contínua, o Teorema 2.1 garante que os  $\alpha$ -níveis do campo fuzzy  $\hat{f}$  satisfazem

$$[\hat{f}(u)]^\alpha = f([u]^\alpha) = [f_1(x_1^\alpha, x_2^\alpha), f_2(x_1^\alpha, x_2^\alpha)]$$

onde

$$\begin{cases} f_1(x_1^\alpha, x_2^\alpha) = \min\{f(x) : x \in [\hat{x}(t)]^\alpha\} \\ f_2(x_1^\alpha, x_2^\alpha) = \max\{f(x) : x \in [\hat{x}(t)]^\alpha\}. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Uma função  $\hat{x}(t)$  que associa à cada  $t \in [0, T]$  um subconjunto fuzzy em  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ , está bem definida se existem funções  $x_1^\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_2^\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que para todo  $\alpha \in [0, 1]$

$$[\hat{x}(t)]^\alpha = [x_1^\alpha(t), x_2^\alpha(t)].$$

Se a função  $\hat{x}(t) : [0, T] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$  for diferenciável no sentido de Hukuhara ([1],[8]), então a derivada de  $\hat{x}(t)$  pode ser definida como a função  $\hat{x}'(t) : (0, T) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$  cujos  $\alpha$ -níveis satisfazem

$$[\hat{x}'(t)]^\alpha = [(x_1^\alpha)'(t), (x_2^\alpha)'(t)].$$

Pelas igualdades acima, o sistema associado (2.3.3) pode então ser reformulado em um sistema bidimensional determinístico

$$\begin{cases} (\hat{x}_1^\alpha)'(t) = f_1(x_1^\alpha, x_2^\alpha), & x_1^\alpha(0) = x_{01}^\alpha \\ (\hat{x}_2^\alpha)'(t) = f_2(x_1^\alpha, x_2^\alpha), & x_2^\alpha(0) = x_{02}^\alpha \end{cases} \quad (2.3.5)$$

de modo que para cada  $\alpha \in [0, 1]$  as funções  $x_1^\alpha$  e  $x_2^\alpha$  determinam os  $\alpha$ -níveis de  $\hat{x}(t)$ .

A existência de solução única para o sistema (2.3.3) é garantida pelo teorema abaixo devido à Seikkala.

**Teorema 2.2** ([22]). *Suponha que  $f$  satisfaça*

$$|f(t, x) - f(t, \bar{x})| \leq g(t, |x - \bar{x}|), \quad t \geq 0, \quad x, \bar{x} \in \mathbb{R}$$

onde  $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  é contínua tal que  $r \rightarrow g(t, r)$  é não decrescente e o problema de valor inicial

$$u'(t) = g(t, u(t)), \quad u(0) = u_o \quad (2.3.6)$$

tem uma solução em  $\mathbb{R}_+$  para  $u_o > 0$  e que  $u(t) \equiv 0$  é a única solução de (2.3.6) para  $u_o = 0$ . Então o problema de valor inicial (2.3.3) tem solução fuzzy única.

**Exemplo 2.1.** Consideremos a equação diferencial fuzzy

$$\begin{cases} \hat{x}'(t) = -\hat{x}(t) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_o \end{cases} \quad (2.3.7)$$

que é a extensão de Zadeh do modelo de Malthus. Para este problema, tomando a função  $g(t, r) = r$ , as condições do Teorema (2.2) são satisfeitas. A solução única é determinada pelo sistema determinístico bidimensional

$$\begin{cases} (x_1^\alpha)'(t) = -x_2^\alpha(t), & x_{01}^\alpha(x_2^\alpha)'(t) = -x_1^\alpha(t), & x_{02}^\alpha \end{cases} \quad (2.3.8)$$

cuja solução

$$x_1^\alpha(t) = \frac{x_{01}^\alpha - x_{02}^\alpha}{2} e^t + \frac{x_{01}^\alpha + x_{02}^\alpha}{2} e^{-t}, \quad x_2^\alpha(t) = \frac{x_{02}^\alpha - x_{01}^\alpha}{2} e^t + \frac{x_{01}^\alpha + x_{02}^\alpha}{2} e^{-t}$$

são os  $\alpha$ -níveis de  $\hat{x}(t)$ .

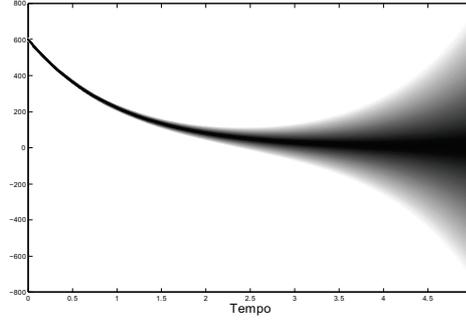


Figura 2.2: Solução do sistema fuzzy (2.3.7) com  $\text{supp}\hat{x}_0 = (595, 605)$ .

Na Figura 2.2, temos o gráfico da solução fuzzy  $\hat{x}(t)$  do sistema 2.3.2 com condição inicial como sendo o número fuzzy triangular  $\hat{x}_0 = (595/600/605)$ .

É importante observar que o comprimento do suporte de  $\hat{x}(t)$  é crescente em relação ao tempo, uma vez que,  $x_1^\alpha(t)$  é decrescente e  $x_2^\alpha(t)$  é crescente para todo  $0 \leq \alpha < 1$ . Portanto, conceitos relacionados aos estados de equilíbrio do sistema associado não estão bem definidos.

O fato do suporte da solução fuzzy  $\hat{x}(t)$  ser crescente com relação à  $t$  não é um caso particular do exemplo acima segundo [8].

**Teorema 2.3.** *Se  $\hat{x} : I \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  é diferenciável em  $I = [0, T]$  então, para cada  $\alpha \in [0, 1]$  a função  $t \rightarrow \text{diam}[\hat{x}(t)]^\alpha$  é não decrescente em  $I$ .*

## 2.4 Extensão do fluxo determinístico

Consideremos o sistema de equações autônomas

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.4.9)$$

Vamos supor que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , satisfaça algum critério que garanta existência e unicidade de solução. Neste caso, a solução  $x(t)$  do sistema

(2.4.9) é unicamente determinada pela condição inicial e o tempo  $t$  ([21]). Para enfatizar isto, vamos representar tal solução por

$$\varphi_t(x_o) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ou seja,  $\varphi_0(x_o) = x_o$  e  $\varphi'_t(x_o) = f(\varphi_t(x_o))$ ; a solução  $\varphi_t(x_o)$  é denominada *fluxo* gerado pela campo vetorial  $f$ .

Admitindo que a condição inicial seja incerta, ou seja,  $x(0) = \hat{x}_o \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , então temos um sistema fuzzy associado

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = \hat{x}_o \end{cases} \quad (2.4.10)$$

Neste caso, a solução depende de uma condição inicial fuzzy. A *solução fuzzy ou fluxo fuzzy* para o sistema associado (2.4.10) por esta abordagem é definida como sendo a função obtida pela aplicação do princípio da extensão de Zadeh ao fluxo determinístico  $\varphi_t(x_o)$ , obtendo assim

$$\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o) : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n).$$

Pela continuidade de  $\varphi_t(x_o)$  com relação à condição inicial  $x_o$  ([21]), a igualdade

$$[\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)]^\alpha = \varphi_t([\hat{x}_o]^\alpha) \quad (2.4.11)$$

é satisfeita para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Portanto, a trajetória determinada por  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$ , consiste de uma família de trajetórias determinísticas dadas por  $\varphi_t$ . Para cada  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , o grau de pertinência da trajetória  $\varphi_t(\bar{x})$  em  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$  é igual ao grau de pertinência de  $\bar{x}$  em  $\hat{x}_o$  pois, pelo princípio da extensão de Zadeh

$$\mu_{\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)}(\varphi_t(\bar{x})) = \sup\{\mu_{\hat{x}_o}(\tau) : \varphi_t(\tau) = \varphi_t(\bar{x})\}.$$

A igualdade  $\varphi_t(\tau) = \varphi_t(\bar{x})$  vale em particular para  $t = 0$ , ou seja,  $\tau = \bar{x}$ . Logo, o supremo é tomado em um conjunto unitário e, portanto,

$$\mu_{\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)}(\varphi_t(\bar{x})) = \mu_{\hat{x}_o}(\bar{x}).$$

Para o caso em que  $\hat{x}_o$  é um subconjunto fuzzy de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  então, temos os  $\alpha$ -níveis de  $\hat{x}_o$  são compactos e como consequência,  $\varphi_t([\hat{x}_o]^\alpha)$  também é compacto para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Sendo assim,  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$  é um subconjunto fuzzy de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Se considerarmos o caso em que a subjetividade aparece nos parâmetros da função  $f$ , então precisamos aplicar a extensão de Zadeh ao fluxo do sistema determinístico

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), b) \\ x(0) = x_o \end{cases} \quad (2.4.12)$$

onde  $x_o \in \mathbb{R}^n$  e  $b \in \mathbb{R}^m$  é um vetor de parâmetros para  $f$ . Portanto, adicionando ao sistema acima as equações

$$\begin{cases} b'_1 = 0 \\ b'_b = 0 \\ \vdots \\ b'_m = 0 \end{cases} \quad (2.4.13)$$

temos um novo sistema de dimensão  $n + m$

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ b'(t) = 0 \\ x(0) = (x_o, b) \end{cases} \quad (2.4.14)$$

onde o vetor de parâmetros  $b$  aparece agora na condição inicial. Dessa forma, voltamos ao caso descrito acima onde somente a condição inicial é fuzzy.

Vale observar que ao acrescentarmos os parâmetros como condição inicial, conforme procedimento indicado acima, aumentamos a dimensão do sistema de modo que a solução da equação (2.4.14) é dada por

$$\psi_t(x_o, b) = (\varphi_t(x_o, b), b),$$

onde  $\varphi_t(x_o, b)$  é a solução da equação (2.4.12).

Para a metodologia apresentada nesta seção, Marina T. Mizukoshi ([16]) verificou algumas propriedades sobre a estabilidade da solução fuzzy  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$ . A definição de estados de equilíbrio e estabilidade dada em ([16]) é análogo ao caso clássico, apresentado no capítulo anterior. Porém como estamos sobre espaços dos números fuzzy, a métrica utilizada é a métrica induzida pela métrica de Hausdorff ([1],[16]).

A distância entre dois conjuntos  $A$  e  $B \subset \mathbb{R}^n$  pela métrica de Hausdorff é dada por:

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\|\} \\ &= \max\{\text{dist}(A, B), \text{dist}(B, A)\}. \end{aligned}$$

Dados dois subconjuntos fuzzy  $\hat{a}, \hat{b} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  definimos a distância entre  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  pela expressão

$$d_\infty(\hat{a}, \hat{b}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H([\hat{a}]^\alpha, [\hat{b}]^\alpha).$$

**Definição 2.4.** Dizemos que  $\hat{x}_e \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  é um ponto de equilíbrio fuzzy  $\hat{\varphi}_t$  quando

$$\hat{\varphi}_t(\hat{x}_e) = \hat{x}_e$$

para todo  $t \geq 0$ .

Baseado nesta definição e nos conceitos de estabilidade e estabilidade assintótica para pontos de equilíbrio é possível mostrar a seguinte relação entre os pontos de equilíbrio das soluções clássica e fuzzy de uma equação diferencial autônoma.

**Teorema 2.4.** *Se  $x^*$  é um estado de equilíbrio para (2.4.9) então  $\chi_{\{x^*\}}$  é um estado de equilíbrio para (2.4.10). Além disso:*

1.  $\chi_{\{x^*\}}$  é estável para o sistema (2.4.10) se, e somente se,  $x^*$  é estável para (2.4.9);
2.  $\chi_{\{x^*\}}$  é assintoticamente estável para (2.4.10) se, e somente se,  $x^*$  é assintoticamente estável para (2.4.9);
3.  $\chi_{\{x^*\}}$  é instável para (2.4.10) se, e somente se,  $x^*$  é instável para (2.4.9).

Demonstração: Consultar [16]. ■

Em [4] buscamos algumas generalizações que tornam mais abrangente a análise qualitativa de sistemas variacionais fuzzy. Por exemplo, quando a solução determinística apresenta soluções periódicas, o fluxo fuzzy também apresenta um comportamento periódico. Em [4] o leitor encontra vários exemplos de aplicações em diversos modelos que ilustram a teoria desenvolvida.

**Teorema 2.5.** *Sejam  $x^* : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua,  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\hat{x}_o \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  com  $[\hat{x}_o]^\alpha \subset A$  e  $\hat{x}_e = \hat{x}^*(\hat{x}_o)$ . Sob essas condições temos:*

1. Se  $\varphi_t(x^*(x)) = x^*(x)$  para todo  $x \in A$  então  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_e) = \hat{x}_e$  para todo  $t \geq 0$ ;
2. Se  $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  converge uniformemente, em  $[\hat{x}_o]^0 \subset A$ , para  $x^* : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  quando  $t \rightarrow \infty$ , então  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$  converge para  $\hat{x}_e$ .

Quando os parâmetros também são considerados fuzzy então a extensão de Zadeh é aplicado sobre a solução determinística  $\psi_t(x_o, b) = (\varphi_t(x_o, b), b)$  da equação (2.4.14), no qual  $\varphi_t(x_o, b)$  é a solução determinística da equação (2.4.12). No entanto, em [4] mostramos que, nas mesmas hipóteses do teorema anterior, a extensão de Zadeh  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o, \hat{b})$  converge para  $\hat{x}_e = \hat{x}^*(\hat{x}_o, \hat{b})$ .

**Teorema 2.6.** *Sejam  $x^* : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua,  $\hat{x}_o \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\hat{b} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$  e  $\hat{x}_e = \hat{x}^*(\hat{x}_o, \hat{b})$ . Se  $\varphi_t : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  converge uniformemente, em  $[\hat{x}_o]^0 \times [\hat{b}]^0$ , para  $x^* : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  quando  $t \rightarrow \infty$ , então  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o, \hat{b})$  converge para  $\hat{x}_e$ .*

A afirmação abaixo é semelhante ao teorema de Poincaré - Bendixson, para o fluxo fuzzy obtido pela extensão de Zadeh de uma solução determinística.

**Teorema 2.7.** *Sejam  $K \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto compacto e invariante,  $x^*$  o único ponto de equilíbrio em  $K$  e  $\hat{x}_o \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ . Se  $x^*$  é instável então existe uma região  $A \subset K$  tal que para  $\hat{x}_o \subset A$ ,  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$  converge para uma órbita periódica fuzzy.*

Como já mencionado, as demonstrações de ambos os resultados são encontradas em [4]. A seguir, apresentamos alguns exemplos para facilitar a compreensão destas ferramentas.

**Exemplo 2.2.** Consideremos a equação fuzzy proveniente do modelo de Malthus:

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x \\ x(0) = \hat{x}_o. \end{cases}$$

O estado de equilíbrio para este sistema é  $x^* = 0$  que satisfaz as condições do Teorema 2.4 quando  $\lambda < 0$ . Portanto, podemos concluir que o fluxo fuzzy  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$  converge para o ponto  $\chi_{\{0\}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  quando o tempo cresce. De fato pois a solução para o modelo determinístico acima é  $\varphi_t(x_o) = x_o e^{\lambda t}$  e pelo Teorema 2.1 temos que os  $\alpha$ -níveis de  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$  são dados por

$$[\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)]^\alpha = [\hat{x}_o]^\alpha e^{\lambda t} = \{x_o e^{\lambda t} : x_o \in [\hat{x}_o]^\alpha\}.$$

Logo, se  $\lambda < 0$  o termo exponencial tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$ . A Figura 2.3 ilustra a solução fuzzy  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$  onde a condição inicial é o número fuzzy triangular  $\hat{x}_o = (5/10/15)$ .

Na Figura 2.3, como nas demais que aparecem neste texto, usamos o sistema de cores RGB para representar graficamente a solução fuzzy de uma equação diferencial fuzzy. No sistema de cores RGB, cada cor é expressa por uma combinação de três valores, considerado aqui estarem no intervalo  $[0,1]$ . Podemos portanto, considerar cada cor como uma função  $\text{RGB}(x, y, z)$ , com  $x, y, z \in [0, 1]$ , onde  $\text{RGB}(0, 0, 0)$  representa a cor preta enquanto que  $\text{RGB}(1, 1, 1)$  representa a cor branca.

Assim, dada um  $\alpha \in [0, 1]$  a região no plano delimitada pelo  $\alpha$  - nível  $\varphi_t([\hat{x}_o]^\alpha)$  é preenchida com a cor  $\text{RGB}(1 - \alpha, 1 - \alpha, 1 - \alpha)$ . Se  $\alpha = 0$  então a região delimitada por  $\varphi_t([\hat{x}_o]^0)$  é preenchida com a cor branca, ao passo que se  $\alpha = 1$  então a região delimitada por  $\varphi_t([\hat{x}_o]^1)$  é preenchida com a cor preta. Desta forma, quanto maior for o grau de pertinência de um ponto  $x$ , mais escura será a sua cor.

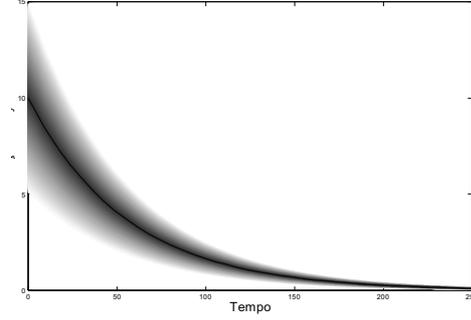


Figura 2.3: Solução fuzzy do modelo de Malthus. Condição inicial fuzzy:  $\hat{x}_o = (5/10/15)$  e  $\lambda = -0.012$ .

Na prática, fazemos uma partição

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_i < \dots < \alpha_n = 1$$

no intervalo  $[0, 1]$  e, para cada  $\alpha_i$ , usamos a igualdade  $[\varphi_t(\hat{x}_o)]^\alpha = \varphi_t(\hat{x}_o)$  para determinamos o conjunto  $[\varphi_t(\hat{x}_o)]^{\alpha_i}$ . Quanto maior o valor de  $\alpha_i$ , mais escura é cor usada para preencher a região delimitado pelo conjunto  $[\varphi_t(\hat{x}_o)]^{\alpha_i}$ .

**Exemplo 2.3.** A solução determística da equação logística é dada por

$$p_t(p_o, \lambda, k) = \frac{kp_o}{p_o + (k - p_o)e^{-\lambda t}}. \quad (2.4.15)$$

Considerando que a capacidade suporte  $k$  seja incerta, então os  $\alpha$ -níveis da solução fuzzy são dados por

$$[\hat{p}_t(\hat{k})]^\alpha = p_t([\hat{k}]^\alpha) = \left\{ \frac{kp_o}{p_o + (k - p_o)e^{-\lambda t}} : k \in [\hat{k}]^\alpha \right\}. \quad (2.4.16)$$

O Teorema 2.6 garante que a solução fuzzy converge para  $\hat{k}$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Na Figura 2.4a temos a representação gráfica da solução fuzzy de (2.4.15)(a) para  $\hat{k} = (225/245/265)$ .

Para o caso em que o índice de crescimento relativo  $\lambda$  é fuzzy, os  $\alpha$ -níveis da solução fuzzy são dados por

$$[\hat{p}_t(\hat{\lambda})]^\alpha = p_t([\hat{\lambda}]^\alpha) = \left\{ \frac{kp_o}{p_o + (k - p_o)e^{-\lambda t}} : \lambda \in [\hat{\lambda}]^\alpha \right\}. \quad (2.4.17)$$

Neste caso, o Teorema 2.6 também garante que a solução fuzzy converge para o ponto de  $\chi_{\{k\}}$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Para a representação gráfica da solução fuzzy da Figura 2.4(b) consideramos  $\hat{\lambda} = (0.009/0.012/0.015)$ .

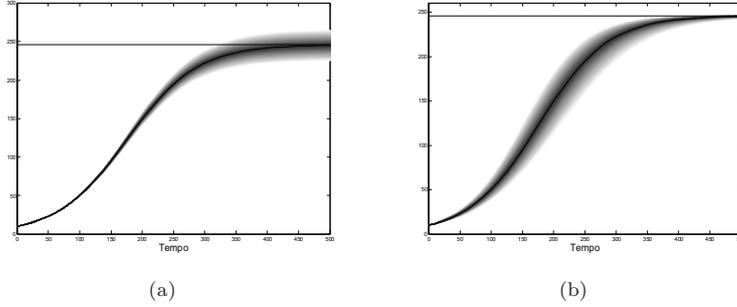


Figura 2.4: Solução fuzzy da equação logística. (a) - capacidade suporte fuzzy:  $\hat{k} = (225/245/265)$ ,  $r = 0.012$  e  $x_o = 10$ . (b) - parâmetro intrínscio de crescimento fuzzy:  $\hat{\lambda} = (0.009/0.012/0.015)$ ,  $k = 245$  e  $x_o = 10$ .

Se a condição inicial é fuzzy, o Teorema 2.4 garante que a solução fuzzy tem como limite o valor  $\chi_{\{k\}}$ . De fato, se a condição inicial é incerta, os  $\alpha$ -níveis da solução fuzzy da equação logística são dados por:

$$[\hat{p}_t(\hat{p}_o)]^\alpha = p_t([\hat{p}_o]^\alpha) = \left\{ \frac{kp_o}{p_o + (k - p_o)e^{-\lambda t}} : p_o \in [\hat{p}_o]^\alpha \right\}. \quad (2.4.18)$$

Logo, fazendo  $t \rightarrow \infty$ , temos que  $\text{supp}(\hat{p}_t(\hat{p}_o)) \rightarrow \{k\}$ . A representação solução fuzzy para  $\hat{p}_o = (10/15/20)$  é mostrada na Figura 2.5.

Como podemos notar na Figura 2.5, o diâmetro da solução fuzzy aumenta até um determinado instante a partir do qual volta a diminuir. Segundo [28], esta é uma característica apresentada pelos modelos com crescimento inibido cuja condição inicial é fuzzy.

**Exemplo 2.4.** Suponhamos que a condição inicial  $x_o$  ou  $y_o$  do modelo de Lotka-Volterra seja um número fuzzy. Por definição de produto cartesiano fuzzy, o grau de pertinência do par  $\hat{x}_o = (\hat{x}_o, \hat{y}_o)$  é dado por  $\mu_{\hat{x}_o}(x_o, y_o) = \min\{\mu_{\hat{x}_o}(x_o), \mu_{\hat{y}_o}(y_o)\}$ .

Das análises do Capítulo 1, vimos que o estado de equilíbrio não nulo do modelo de Lotka - Volterra é estável. Pelo fato de  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$  ser constituído de trajetórias determinísticas, então é esperado que a solução fuzzy  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$  apresente periodicidade em torno do estado de equilíbrio. No entanto, a solução fuzzy do modelo de Lotka - Volterra não apresenta periodicidade.

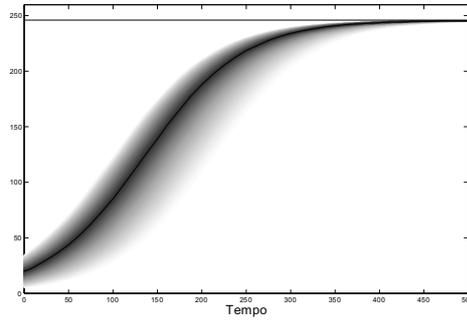


Figura 2.5: Solução fuzzy para a equação logística com condição inicial fuzzy:  $\hat{p}_o = (10/15/20)$ ,  $k = 245$  e  $\lambda = 0.012$ .

Isto é, diferentemente da solução determinística, a solução fuzzy não retorna para a condição inicial em nenhum instante de tempo. Uma análise detalhada do modelo de Lotka - Volterra pode ser encontrada em [4].

Nas Figuras 2.6(a-b), apenas a condição inicial para presas é considerado incerta dada pelo número fuzzy  $\hat{x}_o = (90/100/110)$ . Notemos que embora somente a condição inicial de presas seja imprecisa, a população de predadores também é afetada por esta imprecisão.

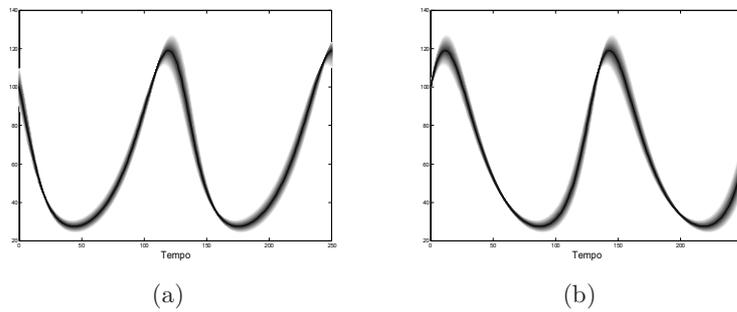


Figura 2.6: Solução fuzzy para o modelo de Lotka-volterra. Parâmetros:  $a = 0.05$ ,  $b = 0.08$ ,  $\alpha = \beta = 0.0008$  e condição inicial  $\hat{x}_o = (90/100/110)$  e  $y_o = 100$ ; (a) - população de presas; (b) - população de predadores.

A solução para o caso em que ambas as condições iniciais são fuzzy pode

ser vistas nas Figuras 2.7(a-b).

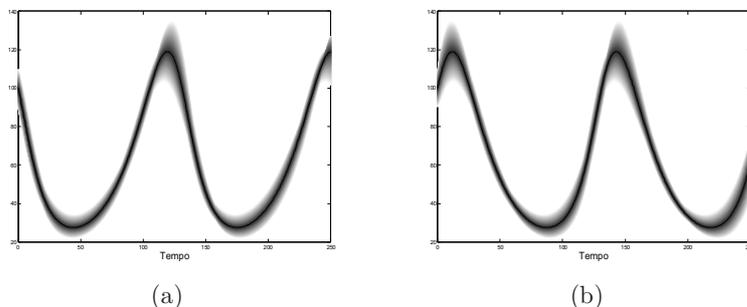


Figura 2.7: Solução fuzzy para o modelo de Lotka-volterra. Parâmetros:  $a = b = 0.08$ ,  $\alpha = 0.05$  e  $\beta = 0.0008$  e condição inicial  $\hat{x}_o = \hat{y}_o = (90/100/110)$ ; (a) - população de presas; (b) - população de predadores.

As soluções fuzzy no plano de fase não é viável de serem representado, pois uma mesma trajetória pode assumir distintos valores de pertinência.

**Exemplo 2.5.** Como mostramos no Capítulo 1, sob certas condições, o modelo de Holling - Tanner admite a existência de um ciclo limite assintoticamente estável que independe da condição inicial. Pelo Teorema 2.7, a solução fuzzy  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$  do sistema associado ao determinístico converge para uma órbita periódica quando  $t \rightarrow \infty$ . O gráfico de  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$  para a condição inicial dada por  $\hat{x} = \hat{y} = (70/80/90)$  pode ser visto nas Figuras 2.8(a-b).

Para o caso em que a solução determinística converge para o ponto de equilíbrio assintoticamente estável, o Teorema 2.5 garante que a solução fuzzy vai também convergir para um ponto de equilíbrio.

A Figura 2.9 e representam a evolução da solução fuzzy do modelo de Holling - Tanner com condição inicial fuzzy dada pela função de pertinência

$$\mu_{x_o}(x, y) = \max\{1 - 0.05(x - 30) - 0.01(y - 220), 0\}.$$

Para esta solução, os parâmetros para o modelo de Holling - Tanner são:  $r = 0.2$ ;  $k = 100$ ;  $m = 0.03$ ;  $d = 20$ ;  $a = 0.02$  e  $b = 0.155$ . Para estes parâmetros, o ponto de equilíbrio não nulo é assintoticamente estável.

Os resultados apresentados neste capítulo são importantes na análise qualitativa de soluções fuzzy. Como podemos ver por meio dos exemplos, o comportamento da solução fuzzy pode ser analisado através da análise qualitativa da solução determinística.

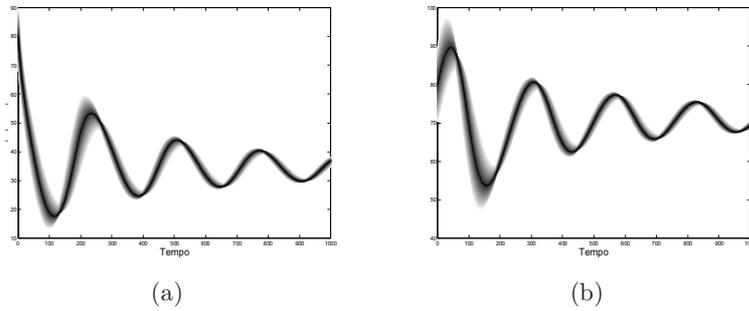


Figura 2.8: Solução fuzzy para o modelo de Holling - Tanner. Parâmetros para ambas as figuras:  $\alpha = 0.01$ ,  $\beta = 0.48$ ,  $d = 20$ ,  $k = 100$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $m = 0.05$  e condição inicial  $\hat{x}_o = \hat{y}_o = (70/80/90)$ .

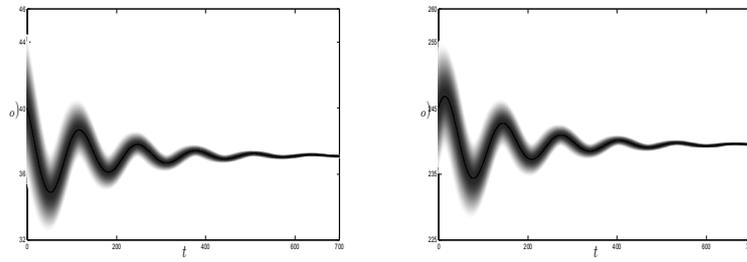


Figura 2.9: Solução fuzzy para o modelos de Holling - Tanner.

## 2.5 Exercícios

**Exercício 1** - Suponha que o parâmetro de crescimento relativo  $\lambda$ , a capacidade suporte  $k$  e a condição inicial da equação logística sejam incertos. Com base nos resultados apresentados neste capítulo, mostre que a solução fuzzy  $\hat{p}_t(\hat{p}_o, \hat{\lambda}, \hat{k})$  converge para  $\hat{k}$ .

**Exercício 2** - Considere a dinâmica populacional dada pela equação

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^\gamma - \beta p.$$

Determine o comportamento da solução fuzzy quando:

1. Somente a condição inicial é fuzzy;

2. A condição inicial e o parâmetro  $\alpha$  são fuzzy;
3. Todos os parâmetros são fuzzy.

**Exercício 3** - Faça uma análise qualitativa para a solução fuzzy da equação que descreve o efeito Allee

$$\frac{dp}{dt} = rp \left(1 - \frac{p}{k}\right) \left(\frac{p}{a} - 1\right).$$

Supondo que o parâmetro  $a$  seja fuzzy, qual seria o comportamento da solução fuzzy desta equação?

**Exercício 4** - Analise qualitativamente o comportamento da solução fuzzy do modelo  $SI$ , dado pelas equações

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI.$$

## Capítulo 3

# Sistemas variacionais p - fuzzy

### 3.1 Introdução

As equações diferenciais e de diferenças determinísticas constituem uma poderosa ferramenta para a modelagem de fenômenos cujas as variáveis de estados estão sujeitas às variações ao longo do tempo. No entanto, para a modelagem determinística ser eficiente é necessário que tenhamos um conhecimento um tanto profundo das relações existentes entre as variáveis e suas variações. É o conhecimento do fenômeno que torna possível a escolha das funções que determinam as variações com relação ao estado (valor) da variável. Em muitas situações porém, esta relação entre variáveis e variações é somente conhecida parcialmente, o que torna a modelagem determinística menos aplicável.

Por outro lado, a modelagem por meio de equações variacionais fuzzy embora comportando subjetividades, também não são aplicáveis à modelagem de fenômenos com relações parcialmente conhecidas. Isto vem do fato de que estes modelos são provenientes de modelos determinísticos. A subjetividade suportada pelas equações fuzzy se refere à imprecisões quanto aos estados iniciais das variáveis (*fuzziness demográfica*) quanto aos parâmetros (*fuzziness ambiental*). De modo geral, ambos os tipos de *fuzziness* estão presentes em equações de Biomatemática.

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados sobre estabilidade para sistemas iterativos baseados em regras fuzzy ou, sistemas *p - fuzzy*. Os sistemas *p - fuzzy* incorporam informações subjetivas tanto nas variáveis quanto nas variações e suas relações com as variáveis, sendo portanto uma

ferramenta muito útil para modelagem de fenômenos cujo comportamento é somente parcialmente conhecido.

### 3.2 Sistemas variacionais *p* - fuzzy

Denominamos por sistema *p* - fuzzy ao sistema iterativo

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) \\ x_o \in \mathbb{R}^n \text{ dado} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é quase linear, isto é,  $f(x) = x + \Delta(x)$ ,  $\Delta(x) \in \mathbb{R}^n$  e  $\Delta(x)$  é obtido por um sistema baseado em regras fuzzy.

Os sistemas *p* - fuzzy são basicamente constituídos de *variáveis linguísticas* de entrada e saída e um *controlador fuzzy*, esquematizados conforme Figura 3.1. As variáveis de entrada e saída são, em nomenclatura de funções, as variáveis independente e dependente, respectivamente.

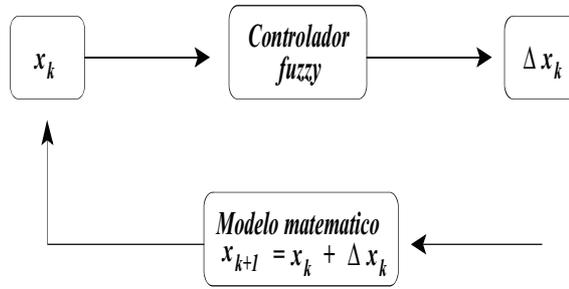


Figura 3.1: Estrutura de funcionamento de um sistema *p* - fuzzy.

*Variáveis linguísticas* são variáveis de estado que, quantitativamente, são expressas por conjuntos fuzzy. Os conjuntos fuzzy representam os estados da variável que, em geral, são expressos por valores subjetivos como *pequeno*, *muito*, *alto* e etc. Por exemplo, supondo que a variável linguística seja *população*, seus estados subjetivamente podem ser *baixa*, *média* e *alta*. Os termos subjetivos que determinam os estados das variáveis são denominados *termos linguísticos*. Os termos linguísticos são importantes para a modelagem pois definem os estados das variáveis. Quanto mais termos linguísticos, mais precisos estão os estados assumidos pelas variáveis.

Um *controlador fuzzy* é constituído basicamente por um *fuzzificador*, uma *base de regras*, um *método de inferência* e um *defuzzificador* (veja a Figura 3.2).

No *fuzzificador* cada entrada do sistema é transformada em um conjunto fuzzy, ou seja, se  $x_o \in \mathbb{R}^n$  é uma entrada do sistema, o fuzzificador associa a esta entrada uma função de pertinência  $\mu_{x_o}(a)$ . Em muitos casos, a função  $\mu_{x_o}(a)$  é a própria função característica de  $x_o$ .

A *base de regras* é um conjunto formado por regras fuzzy que relaciona os termos linguísticos das variáveis de entrada e saída (ou das variáveis independente e dependente). A base de regras é considerada como um elemento integrante do núcleo do controlador fuzzy. Cada regra da base satisfaz a seguinte estrutura:

$$\text{SE } a \text{ está em } A_i \text{ ENTÃO } b \text{ está em } B_i,$$

onde  $A_i$  e  $B_i$  são conjuntos fuzzy que representam termos linguísticos das variáveis de entrada e saída respectivamente. A expressão *a está em  $A_i$*  significa que  $\mu_{A_i}(a) \in [0, 1]$ . Tanto o conjunto fuzzy  $A_i$  quanto  $B_i$  pode ser produto cartesiano de conjuntos fuzzy, isto é,  $A_i = A_{i1} \times A_{i2} \times \dots \times A_{im}$  e  $B_i = A_{i1} \times B_{i2} \times \dots \times B_{in}$ . Neste caso, cada conjunto fuzzy  $A_{ij}$  e  $B_{ik}$  representa um termo linguístico para a  $j$ -ésima variável de entrada e  $k$ -ésima variável de saída e, a expressão *a está em  $A_i$*  significa que

$$\mu_{A_i}(a) = \min\{\mu_{A_{i1}}(a), \mu_{A_{i2}}(a), \dots, \mu_{A_{im}}(a)\} \in [0, 1].$$

É na definição da base de regras que as informações do fenômeno em estudo são utilizadas. Para cada estado definido pelos termos linguísticos da variável de entrada, é definido uma regra. Sendo assim, quanto mais termos linguísticos mais informações são incorporadas na modelagem.

O *método de inferência* é o mecanismo pelo qual as informações subjetivas definida pela base de regras são avaliadas matematicamente. É neste estágio que para cada valor assumido pelas variáveis de entrada (independente), o valor das variáveis de saída (dependente) são determinadas de acordo com a base de regras. Assim como a base de regras, o método de inferência é considerado parte integrante do núcleo do controlador fuzzy. O método de inferência utilizado neste texto é conhecido como método de inferência de Mamdani ou método MAX - MIN. Neste método, cada regra é considerado como um relação fuzzy e não como implicação lógica. A relação entre as variáveis linguísticas é caracterizada pelo operador MIN, isto é, cada regra é considerada uma relação fuzzy  $R_i$  onde o grau de pertinência para cada para  $(a, b)$  é:

$$\mu_{R_i}(a, b) = \min\{\mu_{A_i}(a), \mu_{B_i}(b)\}.$$

A relação entre cada regra é caracterizada pelo operador máximo, ou seja, a relação fuzzy  $R$  que representa o modelo determinado por uma base de

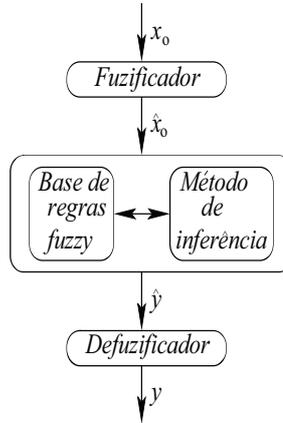


Figura 3.2: Estrutura do controlador fuzzy.

regras, é obtida pela união (máximo) de cada regra individual, de modo que para cada par  $(a, b)$  temos:

$$\mu_R(a, b) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\mu_{A_i}(a) \wedge \mu_{B_i}(b)\}$$

onde  $\wedge$  representa o operador MIN. Agora, para cada entrada desejamos

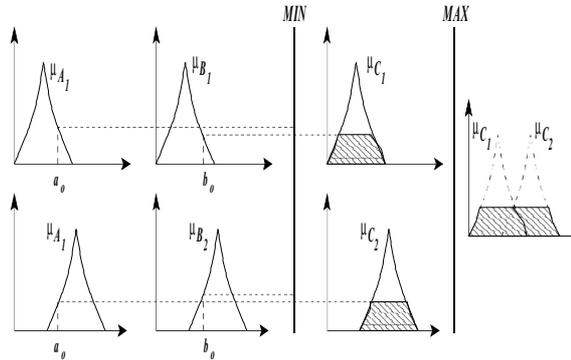


Figura 3.3: Mecanismo de inferência de Mamdani com duas variáveis linguísticas de entrada e uma de saída.

encontrar uma ação correspondente, isto é, para conjunto  $A$  de dados de

entrada, queremos determinar um conjunto  $B$  de dados de saída. Pelo método de Mamdani, a função de pertinência de  $B$  é dada por:

$$\mu_B(b) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \max_a \{ \mu_{A_i}(a) \} \wedge \mu_{B_i}(b) \}.$$

Se a entrada for um conjunto clássico unitário, então  $\mu_A(a) = 1$  e  $\mu_{A_i}(a) \leq 1$ . Logo, a expressão acima resulta em:

$$\mu_B(b) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \mu_{B_i}(b) \}$$

e portanto, temos o conjunto fuzzy  $B$  que representa a ação para cada entrada  $A$  (Figura 3.3).

O papel do *defuzzificador* é converter cada conclusão obtida pelo método de inferência em um número real que melhor representa a ação a ser tomada. No caso dos sistemas p - fuzzy, o número real obtido pela defuzzificação é acrescentado ao valor assumido pela variável de entrada no instante  $k$ , alimentando o sistema iterativo.

Um dos principais métodos de defuzzificação é o centro de massa que, para variáveis contínuas, é dado pela expressão

$$m(B) = \frac{\int_{\Omega} b \mu_B(b) db}{\int_{\Omega} \mu_B(b) db}.$$

Este método de defuzzificação será usado por todo este texto.

Notemos que o controlador fuzzy pode ser visto como uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , já que dado um valor de entrada, existe um único valor de saída correspondente.

### 3.3 Pontos de equilíbrio para sistemas p - fuzzy

Os sistemas p - fuzzy, da forma que definidos anteriormente, podem ser vistos como sistemas dinâmicos discretos de modo que faz sentido se perguntar sobre a existência e estabilidade de pontos de equilíbrio. Nesta seção, faremos algumas definições e enunciaremos alguns resultados importantes sobre a existência e unicidade de estados de equilíbrio para sistemas p - fuzzy unidimensionais e bidimensionais.

Estes resultados serão úteis para determinarmos o comportamento de modelos para dinâmica populacional, por meio de sistemas p - fuzzy, que construiremos no próximo capítulo.

### 3.3.1 Sistemas p - fuzzy unidimensionais

Consideremos o sistema p - fuzzy unidimensional

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta(x_k) \\ x_o \in \mathbb{R} \end{cases} . \quad (3.3.2)$$

onde  $\Delta(x)$  é a saída defuzzificada de um controlador fuzzy tipo Mamdani. O sistema acima está em estado de equilíbrio quando

$$x^* = x_k = x_{k+1} \iff \Delta(x_k) = 0.$$

**Definição 3.1.** *Seja  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$  de subconjuntos fuzzy com  $\text{supp}A_i = (a_i^1, a_{i+1}^2)$ . Dizemos que os conjuntos  $A_i$  são sucessivos se satisfazem:*

1.  $\text{supp}(A_i) \cap \text{supp}A_{(i+1)} \neq \phi$ ;
2.  $\text{supp}(A_i) \cap \text{supp}(A_j) = \phi$  se  $|i - j| \geq 2$ ;
3. seja  $\hat{x}$  e  $\bar{x}$  tais que  $\mu_{A_i}(\hat{x}) = \mu_{A_{i+1}}(\bar{x}) = 1$ , então  $\hat{x} < \bar{x}$ .

As Figuras 4.3, 4.4 e 4.6 são exemplos de conjuntos sucessivos.

**Definição 3.2.** *Consideremos um sistema p - fuzzy e uma família de subconjuntos sucessivos  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ . Se para  $x_1, x_2 \in \text{supp}(A_i \cup A_{i+1})$  as variações  $\Delta(x_1)$  e  $\Delta(x_2)$  possuem sinais contrários, então o subconjunto fuzzy  $A^* = A_i \cap A_{i+1}$  é denominado conjunto viável de equilíbrio e  $\text{supp}(A^*)$  é uma região viável de equilíbrio.*

Como veremos nos resultados seguintes, o sistema p - fuzzy admite um estado de equilíbrio, digamos  $x^*$ , sempre que há uma região de equilíbrio  $\text{supp}(A^*)$ . Neste caso, as regras associadas aos conjuntos  $A_i$  e  $A_{i+1}$  da definição acima satisfazem:

1. se  $a$  é  $A_i$  então  $b$  é  $B_i$ ;
2. se  $a$  é  $A_{i+1}$  então  $b$  é  $B_{i+1}$ ;

com  $\text{supp}A_i \subset \mathbb{R}_+(\mathbb{R}_-)$  e  $\text{supp}(A_{i+1}) \subset \mathbb{R}_-(\mathbb{R}_+)$ .

**Teorema 3.1.** *Se um sistema p - fuzzy  $S$  admite uma região viável de equilíbrio  $\text{supp}(A^*)$ , então  $S$  possui ao menos um estado de equilíbrio em  $\text{supp}(A^*)$ , ou seja, existe  $x^* \in \text{supp}(A^*)$  tal que  $\Delta(x^*) = 0$ .*

Demonstração: Consultar [15]. ■

A unicidade do estado de equilíbrio exige algumas restrições dos conjuntos sucessivos que determinam os termos linguísticos do sistema p - fuzzy  $S$ .

**Teorema 3.2.** *Sejam  $\mu_{A_i}$  e  $\mu_{A_{i+1}}$  monótonas em  $\text{supp}(A^*) = (a_{i+1}^1, a_i^2)$ ,  $a_i$  e  $a_{i+1}$  tais que  $\mu_{A_i}(a_i) = \mu_{A_{i+1}}(a_{i+1}) = 1$ . Se  $a_i < a_{i+1}^1$  e  $a_{i+1} < a_i^2$  então o estado de equilíbrio é único em  $\text{supp}(A^*)$ .*

Demonstração: Consultar [15]. ■

A análise de estabilidade do estado de equilíbrio de um sistema p - fuzzy unidimensional é feita de modo análogo ao caso determinístico, isto é, avaliando a derivada de  $f(x) = x + \Delta(x)$  em  $x^*$ . Portanto, o sistema p - fuzzy será estável quando  $0 < \Delta'(x^*) < 2$  e instável caso contrário.

### 3.3.2 Sistemas p - fuzzy bidimensionais

Consideremos um sistema p - fuzzy bidimensional

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta_x(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \Delta_y(x_k, y_k). \end{cases} \quad (3.3.3)$$

As variações  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$  do sistema acima são dadas por regras que satisfazem a seguinte estrutura:

*Se  $x$  está em  $A_i$  e  $y$  está em  $B_i$  então  $\Delta_x$  está em  $C_i$  e  $\Delta_y$  está em  $D_i$ .*

Os valores assumidos pelas variações  $\Delta_x(x_k, y_k)$  e  $\Delta_y(x_k, y_k)$  são determinados pela defuzzificação dos conjuntos fuzzy  $C_i^*$  e  $D_i^*$  obtidos por meio da inferência de Mamdani. Pelo fato das variações dependerem somente dos valores de entrada, então podemos considerar que cada uma das variações  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$  são determinadas por regras da forma

*Se  $x$  está em  $A_i$  e  $y$  está em  $B_i$  então  $\Delta_c$  está em  $C_i$ .*

Obviamente regras com apenas uma variável de saída não fazem parte da base de regras de um sistema p - fuzzy bidimensional. No entanto, esta estrutura nos permite avaliar cada variação isoladamente, o que será útil para a determinação de condições para existência e unicidade de estados de equilíbrio para o sistema (3.3.3).

Como veremos a seguir, sempre existe um estado de equilíbrio para o sistema (3.3.3) se em alguma região do domínio cada uma das variações  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$  são determinadas por regras do tipo:

1. se  $x$  está em  $A_1$  e  $y$  está em  $B_1$  então  $\Delta_c$  está em  $C_1$
2. se  $x$  está em  $A_1$  e  $y$  está em  $B_2$  então  $\Delta_c$  está em  $C_2$  (1)

3. se  $x$  está em  $A_2$  e  $y$  está em  $B_1$  então  $\Delta_c$  está em  $C_3$   
 4. se  $x$  está em  $A_2$  e  $y$  está em  $B_2$  então  $\Delta_c$  está em  $C_4$

com  $\text{supp}(C_1 \cup C_2) \subset \mathbb{R}_-$  e  $\text{supp}(C_3 \cup C_4) \subset \mathbb{R}_+$  e os conjuntos fuzzy  $A_i$  e  $B_i$  sucessivos. Neste caso, o conjunto fuzzy  $A^* = A_1 \cap A_2$  é o conjunto viável de equilíbrio para  $\Delta_c$ .

**Definição 3.3.** *Seja  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$  e  $\{B_i\}_{1 \leq i \leq m}$  subconjuntos fuzzy sucessivos para os termos linguísticos das variáveis de entrada. Se  $A^*$  e  $B^*$  são conjuntos viáveis de equilíbrio para as variações  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$ , então dizemos que  $R^* = \text{supp}(A^*) \times \text{supp}(B^*)$  é uma região viável de equilíbrio para o sistema (3.3.3).*

O próximo lema assegura que a função de pertinência do conjunto fuzzy  $C_i^*$  obtido pela inferência de Mamdani de cada regra da base de regras (1) é decrescente com relação a variável  $a$  se  $\mu_{A_i}$  é decrescente e,  $\mu_{C_i^*}$  é crescente com relação a  $a$  caso  $\mu_{A_i}$  seja crescente. Antes de enunciarmos o lema, vamos fazer algumas definições que serão úteis para a sua demonstração.

$$\begin{aligned} \beta_1(a, b) &= \min\{\mu_{A_1}(a), \mu_{B_1}(b)\} & \beta_2(a, b) &= \min\{\mu_{A_1}(a), \mu_{B_2}(b)\} \\ \beta_3(a, b) &= \min\{\mu_{A_2}(a), \mu_{B_1}(b)\} & \beta_4(a, b) &= \min\{\mu_{A_2}(a), \mu_{B_2}(b)\} \\ \mu_{C_1^*}(c) &= \min\{\mu_{C_1}(c), \max\{\beta_1(a, b), \beta_2(a, b)\}\} \\ \mu_{C_2^*}(c) &= \min\{\mu_{C_2}(c), \max\{\beta_3(a, b), \beta_4(a, b)\}\} \end{aligned}$$

onde  $C_1 = C_1 \cup C_2$  e  $C_2 = C_3 \cup C_4$ .

Para simplificar, vamos convencionar que  $\tilde{\beta}_i = \beta_i(\tilde{a}, b_o)$ ,  $\hat{\beta}_i = \beta_i(\hat{a}, b_o)$  e que  $\tilde{\mu}_{C_i^*}(c)$  e  $\hat{\mu}_{C_i^*}(c)$  seja  $\mu_{C_i^*}(c)$  em  $\tilde{\beta}_i$  e  $\hat{\beta}_i$ , respectivamente.

**Lema 3.1.** *Sejam  $\{A_k\}_{k=1,2}$  e  $\{B_k\}_{k=1,2}$  conjuntos fuzzy sucessivos,  $b_o \in \Omega_B = \text{supp}(B_1 \cap B_2)$ ,  $\hat{a}$  e  $\tilde{a} \in \Omega_A = \text{supp}(A_1 \cap A_2)$  com as funções de pertinência satisfazendo:*

- (i)  $\mu_{A_1}(a)$  é decrescente e  $\mu_{A_2}(a)$  é crescente em  $\Omega_A$ ;  
 (ii)  $\mu_{B_1}(b)$  é decrescente e  $\mu_{B_2}(b)$  é crescente em  $\Omega_B$ ;  
 (iii) se  $a_i \in \Omega_A$  e  $b_i \in \Omega_B$  são tais que  $\mu_{A_1}(a_i) = \mu_{A_2}(a_i)$  e  $\mu_{B_1}(b_i) = \mu_{B_2}(b_i)$  então  $\mu_{A_1}(a_i) = \mu_{B_1}(b_i)$ .  
 Se  $\hat{a} > \tilde{a}$  então

$$\hat{\mu}_{C_1^*}(c) \leq \tilde{\mu}_{C_1^*}(c) \quad \text{e} \quad \hat{\mu}_{C_2^*}(c) \geq \tilde{\mu}_{C_2^*}(c).$$

Além disso, existe  $\bar{c}$  tal que

$$\hat{\mu}_{C_1^*}(\bar{c}) < \tilde{\mu}_{C_1^*}(\bar{c}) \quad \text{ou} \quad \hat{\mu}_{C_2^*}(\bar{c}) > \tilde{\mu}_{C_2^*}(\bar{c}).$$

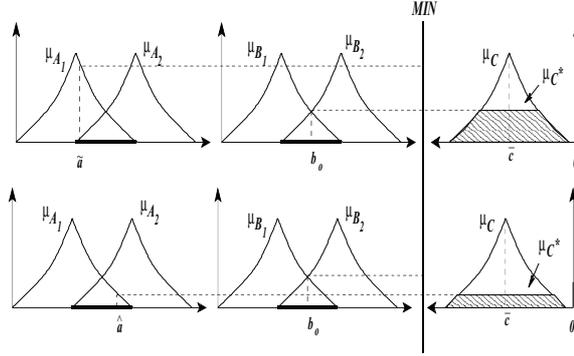


Figura 3.4: Representação geométrica do Lema 3.1 para a função de pertinência  $\mu_{C_1^*}(c)$ .

Demonstração: Como  $\mu_{A_1}$  é decrescente e  $\mu_{A_2}$  é crescente em  $\Omega_A$  então,  $\mu_{A_1}(\hat{a}) < \mu_{A_1}(\tilde{a})$  e  $\mu_{A_2}(\hat{a}) > \mu_{A_2}(\tilde{a})$ . Assim temos que

$$\hat{\mu}_{C_1^*}(c) \leq \tilde{\mu}_{C_1^*}(c) \quad \text{e} \quad \hat{\mu}_{C_2^*}(c) \geq \tilde{\mu}_{C_2^*}(c),$$

o que prova a primeira parte do lema.

Para provar a segunda afirmação, vamos considerar quatro casos:  $b_o \leq b_i$  e  $\hat{a} \leq a_i$ ;  $b_o \geq b_i$  e  $\tilde{a} \geq a_i$ ;  $b_o \leq b_i$  e  $\tilde{a} \geq a_i$ ;  $b_o \geq b_i$  e  $\hat{a} \leq a_i$ . Como as demonstrações em cada um dos casos são semelhantes, vamos apresentar aqui apenas as demonstrações dos dois primeiros casos.

*1º caso.* Suponha  $b_o \leq b_i$  e  $\hat{a} \leq a_i$ . Com efeito tomemos  $\bar{c}$  tal que  $\mu_{C_2}(\bar{c}) = 1$ . Neste caso o grau de pertinência de  $\bar{c}$  no conjunto fuzzy  $C_2^*$  com entradas  $(\hat{a}, b_o)$  e  $(\tilde{a}, b_o)$  são dados respectivamente por  $\hat{\mu}_{C_2^*}(\bar{c}) = \max\{\hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4\}$  e  $\tilde{\mu}_{C_2^*}(\bar{c}) = \max\{\tilde{\beta}_3, \tilde{\beta}_4\}$ .

Segue diretamente das hipóteses que

$$\mu_{A_2}(\tilde{a}) \stackrel{(i)}{<} \mu_{A_2}(\hat{a}) \stackrel{(i)}{\leq} \mu_{A_2}(a_i) \stackrel{(iii)}{=} \mu_{B_1}(b_i) \stackrel{(ii)}{\leq} \mu_{B_1}(b_o),$$

portanto, segue da definição de  $\beta_i$  que  $\hat{\mu}_{C_2^*}(\bar{c}) = \mu_{A_2}(\hat{a})$  e  $\tilde{\mu}_{C_2^*}(\bar{c}) = \mu_{A_2}(\tilde{a})$ . Logo, pelo ítem (i) da hipótese segue que

$$\hat{\mu}_{C_2^*}(\bar{c}) > \tilde{\mu}_{C_2^*}(\bar{c}).$$

*2º caso.* Suponha  $b_i \leq b_o$  e  $\tilde{a} \geq a_i$ . Tomando  $\bar{c}$  tal que  $\mu_{C_1} = 1$ , então o grau

de pertinência de  $\bar{c}$  no conjunto fuzzy  $C_1^*$  dado por  $\hat{\mu}_{C_1^*}(\bar{c}) = \max\{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\}$  se a entrada é  $(\hat{a}, b_o)$  e  $\tilde{\mu}_{C_1^*}(\bar{c}) = \max\{\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2\}$  para entrada  $(\tilde{a}, b_o)$ . Por hipótese temos que

$$\mu_{A_1}(\hat{a}) \stackrel{(i)}{<} \mu_{A_1}(\tilde{a}) \stackrel{(i)}{\leq} \mu_{A_1}(a_i) \stackrel{(iii)}{=} \mu_{B_2}(b_i) \stackrel{(ii)}{\leq} \mu_{B_2}(b_o).$$

Portanto,  $\hat{\mu}_{C_1^*}(\bar{c}) = \mu_{A_1}(\hat{a})$  e  $\tilde{\mu}_{C_1^*}(\bar{c}) = \mu_{A_1}(\tilde{a})$ . Novamente pelo item (i) da hipótese temos que

$$\hat{\mu}_{C_1^*}(\bar{c}) < \tilde{\mu}_{C_1^*}(\bar{c}).$$

O caso em que  $\tilde{a} < a_i < \hat{a}$  segue por combinação dos casos acima. ■

O lema que acabamos de demonstrar é essencial para garantir a existência de um estado de equilíbrio para um sistema p - fuzzy bidimensional em uma região viável de equilíbrio.

O próximo teorema surgiu na tentativa de validar a escolha de um passo para o algoritmo que propomos para a busca de um estado de equilíbrio. No entanto, foram obtidos alguns outros resultados importantes como a existência única de estados de equilíbrio para o sistema p - fuzzy quando a base de regras satisfaz algumas condições. A condição que vamos exigir é que cada variação do sistema p - fuzzy admita um conjunto viável de equilíbrio, ou seja, as variações em alguma região do domínio são determinadas pelas regras

1. Se  $a \in A_1$  e  $b \in B_1$  então  $c \in C_1$
2. Se  $a \in A_1$  e  $b \in B_2$  então  $c \in C_2$  (2)
3. Se  $a \in A_2$  e  $b \in B_1$  então  $c \in C_3$
4. Se  $a \in A_2$  e  $b \in B_2$  então  $c \in C_4$

com os conjuntos fuzzy sucessivos  $\{A_k\}_{k=1,2}$  e  $\{B_k\}_{k=1,2}$ , satisfazendo

1.  $\mu_{A_1}$  e  $\mu_{A_2}$  são contínuas e decrescente e crescente em  $\Omega_A$  respectivamente;
2.  $\mu_{B_1}$  e  $\mu_{B_2}$  são contínuas e decrescente e crescente em  $\Omega_B$  respectivamente;
3.  $\mu_{A_1}(a_{min}) > \mu_{A_2}(a_{min}) = 0$ ,  $\mu_{A_2}(a_{max}) > \mu_{A_1}(a_{max}) = 0$  e analogamente para  $\mu_{B_1}$  e  $\mu_{B_2}$ ;
4. se  $a_i \in \Omega_A$  e  $b_i \in \Omega_B$  são tais que  $\mu_{A_1}(a_i) = \mu_{A_2}(a_i)$  e  $\mu_{B_1}(b_i) = \mu_{B_2}(b_i)$  então  $\mu_{A_1}(a_i) = \mu_{B_1}(b_i)$ .

5.  $C_1 = \text{supp}(C_1 \cup C_2)$  e  $C_2 = \text{supp}(C_3 \cup C_4)$  são conjuntos fuzzy com  $\text{supp}(C_1) \subset \mathbb{R}_-$  e  $\text{supp}(C_2) \subset \mathbb{R}_+$  e  $\mu_{C_i^*}$  contínuas.

As funções  $\hat{\mu}_{C_1^*}(c)$  e  $\tilde{\mu}_{C_2^*}(c)$ , são funções de pertinência de  $c$  obtida pela inferência de Mamdani com entradas  $(\hat{a}, b_o)$  e  $(\tilde{a}, b_o)$  respectivamente.

**Teorema 3.3.** *Seja  $\Omega_A = (a_{min}, a_{max})$ , o suporte do conjunto viável de equilíbrio  $A^*$ ,  $\Omega_B = \text{supp}(B_1 \cap B_2)$  e  $\Delta_c(a, b)$  o centro de massa da região obtida pela inferência de Mamdani por meio da base de regras (2) no ponto  $(a, b)$ . Suponha que as condições (1-5) acima sejam satisfeitas. Então são válidas as seguintes afirmações:*

- (a)  $\Delta_c(a_{min}, b_o) < 0$  e  $\Delta_c(a_{max}, b_o) > 0$ ,  $b_o \in \Omega_B$ ;  
 (b) existe um único  $a^* \in \Omega_A$  tal que  $\Delta_c(a^*, b_o) = 0$ ;  
 (c) se  $\tilde{a} < a^* < \hat{a}$ ,  $\hat{a}$  e  $\tilde{a} \in \Omega_A$  então  $\Delta_c(\tilde{a}, b_o) < 0$  e  $\Delta_c(\hat{a}, b_o) > 0$ .

**Demonstração:** Seja  $\Omega_1 = \text{supp}(C_1)$  e  $\Omega_2 = \text{supp}(C_2)$ . Por hipótese (item 5)  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são disjuntos e portanto, o centro de massa da região delimitada por  $\mu_{C_1^*}$  e  $\mu_{C_2^*}$  pode ser calculado pela expressão

$$\Delta_c(a, b) = \frac{\int_{\Omega_1} c \mu_{C_1^*}(c) dc + \int_{\Omega_2} c \mu_{C_2^*}(c) dc}{\int_{\Omega_1} \mu_{C_1^*}(c) dc + \int_{\Omega_2} \mu_{C_2^*}(c) dc}. \quad (3.3.4)$$

- (a) Pelo item 3,  $\mu_{A_2}(a_{min}) = 0$ , então  $\mu_{C_2^*}(c) = 0$  para todo  $c \in \Omega_2$ , assim

$$\int_{\Omega_2} c \mu_{C_2^*}(c) dc = 0.$$

Portanto a expressão (3.3.4) se reduz à

$$\Delta_c(a_{min}, b_o) = \frac{\int_{\Omega_1} c \mu_{C_1^*}(c) dc}{\int_{\Omega_1} \mu_{C_1^*}(c) dc}.$$

Mas, como  $c \mu_{C_1^*}(c) < 0$  para todo  $c \in \Omega_1$ , então  $\Delta_c(a_{min}, b_o) < 0$ . Por outro lado  $\mu_{A_1}(a_{max}) = 0$ , dessa forma  $\mu_{C_1^*}(c) = 0$  para todo  $c \in \Omega_1$ . Então a expressão (3.3.4) se reduz à

$$\Delta_c(a_{max}, b_o) = \frac{\int_{\Omega_2} c \mu_{C_2^*}(c) dc}{\int_{\Omega_2} \mu_{C_2^*}(c) dc}.$$

Como  $c \mu_{C_2^*}(c) > 0$  para todo  $c \in \Omega_2$ , então  $\Delta_c(a_{max}, b_o) > 0$ .

- (b) As funções de pertinência  $\mu_{C_1^*}$  e  $\mu_{C_2^*}$  obtidas pela inferência de Mamdani

são contínuas para todo  $(a, b) \in \Omega_A \times \Omega_B$  já que são definidas por máximos e mínimos das funções  $\mu_{A_i}$ ,  $\mu_{B_i}$  e  $\mu_{C_i}$  que são contínuas por hipótese. Dessa forma  $\Delta_c(a, b)$  também é contínua (veja [12], página 43), e pelo item anterior  $\Delta_c(a_{min}, b_o) < 0$  e  $\Delta_c(a_{max}, b_o) > 0$ . Logo, pelo teorema do valor intermediário, existe  $a^* \in \Omega_A$  tal que  $\Delta_c(a^*, b_o) = 0$ .

Para demonstrar a unicidade vamos considerar  $\eta(a, b)$  o numerador da expressão (3.3.4), ou seja,

$$\eta(a, b) = \int_{\Omega_1} c\mu_{C_1^*}(c) dc + \int_{\Omega_2} c\mu_{C_2^*}(c) dc.$$

Pelo Lema 3.1, se  $\tilde{a} < \hat{a}$  então  $\tilde{\mu}_{C_1^*}(c) \geq \hat{\mu}_{C_1^*}(c)$  e  $\tilde{\mu}_{C_2^*}(c) \leq \hat{\mu}_{C_2^*}(c)$ . Além disso existe  $\bar{c}$  tal que a desigualdade estrita é satisfeita. Como  $c < 0$  se  $c \in \Omega_1$  e  $c > 0$  se  $c \in \Omega_2$  concluímos que:

$$\int_{\Omega_1} c\hat{\mu}_{C_1^*}(c) dc > \int_{\Omega_1} c\tilde{\mu}_{C_1^*}(c) dc \quad \text{e}$$

$$\int_{\Omega_2} c\hat{\mu}_{C_2^*}(c) dc > \int_{\Omega_2} c\tilde{\mu}_{C_2^*}(c) dc,$$

portanto  $\eta(\tilde{a}, b_o) < \eta(\hat{a}, b_o)$ , ou seja,  $\eta(a, b_o)$  é crescente e com relação a variável  $a$ . Agora  $\Delta_c(a^*, b_o) = 0$  se e somente se  $\eta(a^*, b_o) = 0$ . Dessa forma, supondo que existe  $\bar{a}$  tal que  $\eta(\bar{a}, b_o) = 0$  temos pelo fato de  $\eta(a, b_o)$  ser crescente, que  $\bar{a} = a^*$  e portanto a unicidade está garantida.

(c) Como  $\eta(a, b_o)$  é crescente, então  $\eta(\tilde{a}, b_o) < \eta(a^*, b_o)$  e  $\eta(\hat{a}, b_o) > \eta(a^*, b_o)$ . Pelo fato do numerador da expressão (3.3.4) ser sempre positivo, então  $\Delta_c(\tilde{a}, b_o) < 0$  e  $\Delta_c(\hat{a}, b_o) > 0$ . ■

Segue diretamente do teorema acima o seguinte resultado.

**Corolário 3.1.** *Suponhamos que no Teorema (3.3)  $\text{supp}C_1 \subset \mathbb{R}_+$  e  $\text{supp}C_2 \subset \mathbb{R}_-$  então:*

1. (a)  $\Delta_c(a_{min}, b_o) > 0$  e  $\Delta_c(a_{max}, b_o) < 0$ ;
2. (b) se  $\tilde{a} < a^* < \hat{a}$  então  $\Delta_c(\tilde{a}, b_o) > 0$  e  $\Delta_c(\hat{a}, b_o) < 0$ .

Demonstração: Substituindo  $c$  por  $-c$  nas expressões obtidas na demonstração do teorema anterior obtemos as desigualdades dos itens (a) e (b). ■

O que acabamos de demonstrar nos permite concluir que quando existem conjuntos viáveis de equilíbrio  $A^*$  e  $B^*$  para as variações  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$  satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.3 ou do Corolário 3.1, existem  $x^*$  e  $y^*$  tais que  $\Delta(x^*, y) = \Delta(x, y^*) = 0$ . Porém a existência de um ponto  $(x^*, y^*)$  tal que  $\Delta(x^*, y^*) = \Delta(x^*, y^*) = 0$  é garantida pelo próximo resultado.

**Corolário 3.2.** *Seja  $A^*$  e  $B^*$  conjuntos viáveis de equilíbrio para as variações  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$  do sistema (3.3.3). Então existe um único estado de equilíbrio  $(x^*, y^*)$  para (3.3.3) em  $R^* = \text{supp}(A^*) \times \text{supp}(B^*)$ .*

Demonstração: Pelo Teorema 3.3, para cada  $y \in \text{supp}(B^*)$  existe um único  $x \in \text{supp}(A^*)$  tal que  $\Delta_x(x, y) = 0$  e para cada  $x \in \text{supp}(A^*)$  existe um único  $y \in \text{supp}(B^*)$  tal que  $\Delta_y(x, y) = 0$ . Portanto, as trajetórias  $\Delta_x(x, y) = 0$  e  $\Delta_y(x, y) = 0$  em  $R^*$  são funções contínuas ([11]) com domínio em  $\text{supp}(B^*)$  e  $\text{supp}(A^*)$  respectivamente, isto é  $x = g(y)$  e  $y = f(x)$ . Para mostrar que existe  $(x^*, y^*)$  tais que  $\Delta_x(x^*, y^*) = \Delta_y(x^*, y^*) = 0$  precisamos mostrar que as funções se interceptam em  $R^*$ , ou seja, devemos mostrar que  $x^*$  e  $y^*$  são tais que  $x^* = g(y^*)$  e  $y^* = f(x^*)$ . Para isso, definamos a função  $h(y) = y - f(g(y))$ . Como  $\text{Im}(f) \subset \text{supp}(B^*)$ , então existem  $y_1$  e  $y_2$  tais que  $h(y_1) \leq 0 \leq h(y_2)$ . Logo, pelo teorema do valor intermediário, existe  $y^*$  tal que  $h(y^*) = 0$ , ou seja,  $y^* = f(x^*)$  e  $x^* = g(y^*)$ . Para a unicidade veja a demonstração em [15]. ■

As funções  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$  são deriváveis em  $(x^*, y^*)$  ([15]) e portanto, a análise de estabilidade pode ser feita como no caso discreto determinístico apenas verificando os autovalores de  $\mathbf{J}_{(x^*, y^*)}$ .

Os estados de equilíbrio para um sistema p - fuzzy, dependem unicamente das regras da base de regras associada ao sistema e do domínio de definição das regras.

Se  $A^*$  é um conjunto viável de equilíbrio para a variação  $\Delta_c(a, b)$ , então o conjunto fuzzy  $\lambda A^*$  obtido da multiplicação de  $A^*$  por  $\lambda$  também é um conjunto viável de equilíbrio para  $\Delta_c(a, b)$ , já que  $\mu_{A^*}(a) = \mu_{\lambda A^*}(\lambda a)$  (veja página 46), consequentemente  $\Delta_c(a, b) = \Delta_c(\lambda a, b)$ . Além disso, se  $a^* \in \text{supp}(A^*)$  é um estado de equilíbrio então, pela igualdade anterior  $\lambda a^* \in \text{supp}(\lambda A^*)$  também é um estado de equilíbrio. De uma forma geral temos o seguinte resultado.

**Teorema 3.4.** *Seja  $\Delta_c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a variação de um sistema p - fuzzy.  $\Delta_c(a^*, b_o) = 0$  em  $[a, b]$  se, e somente se,  $\Delta_c(\lambda a^*, b_o) = 0$  em  $[\lambda a, b]$ .*

Este teorema pode ser útil quando se pretende dar exemplos fictícios de sistemas p - fuzzy e seus pontos de equilíbrio. Num exemplo de fenômeno

real, basta multiplicar o domínio por  $\lambda$  que o ponto de equilíbrio também será multiplicado por  $\lambda$ .

### 3.4 Exercícios

**Exercício 1** - Considere o sistema  $p$  - fuzzy  $S$ , onde  $x$  é a variável de entrada definida pela família de números fuzzy sucessivos (Figura 3.5):  $B$ ,  $MB$ ,  $M$ ,  $MA$ ,  $A$  e  $AL$ , a variável de saída,  $\Delta_x$  (Figura 3.6) definida pelos números fuzzy:  $BN$ ,  $BP$ ,  $MP$  e  $AP$  e cuja base de regras é:

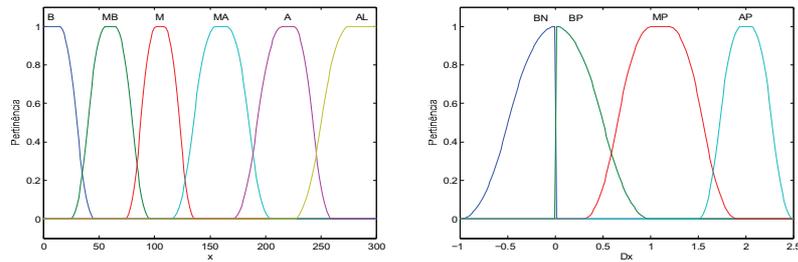


Figura 3.5: Variável de entrada:  $x$  . Figura 3.6: Variável de saída:  $\Delta_x$ .

- Se  $x$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $BP$ ;
- Se  $x$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MP$ ;
- Se  $x$  é  $M$  então  $\Delta_x$  é  $AP$ ;
- Se  $x$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MP$ ;
- Se  $x$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $BP$ ;
- Se  $x$  é  $AL$  então  $\Delta_x$  é  $BN$ .

1. Verifique que  $\text{supp}(A^*) = A \cap AL$  é uma região viável de equilíbrio de  $S$ ;
2. Determine numericamente (experimentos computacionais) o ponto de equilíbrio de  $S$ ,  $x^*$ , na região  $\text{supp}(A^*)$ ;
3. Faça modificações em  $\Delta_x$ , sempre mantendo simétricas as funções de pertinência de  $BN$  e  $BP$ , em relação a zero. O que acontece com o ponto de equilíbrio?

4. As funções de pertinência de  $A$  e  $AL$  são respectivamente:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - 2 \left( \frac{x-260}{35} \right)^2, & \text{se } 225 < x \leq 242.5 \\ 2 \left( \frac{260-x}{35} \right)^2, & \text{se } 242.5 < x \leq 260 \end{cases}$$

e

$$\mu_{AL}(x) = \begin{cases} 2 \left( \frac{x-225}{35} \right)^2, & \text{se } 225 < x \leq 242.5 \\ 1 - 2 \left( \frac{x-260}{35} \right)^2, & \text{se } 242.5 < x \leq 260 \end{cases}.$$

Verifique que o ponto de equilíbrio, encontrado no item anterior, é a solução da equação  $\mu_A(x) = \mu_{AL}(x)$ ;

**Exercício 2** - Considere o sistema p - fuzzy  $S$  com a mesma base de regras dada no exercício anterior e com variáveis de entrada e saída dadas, respectivamente, por:

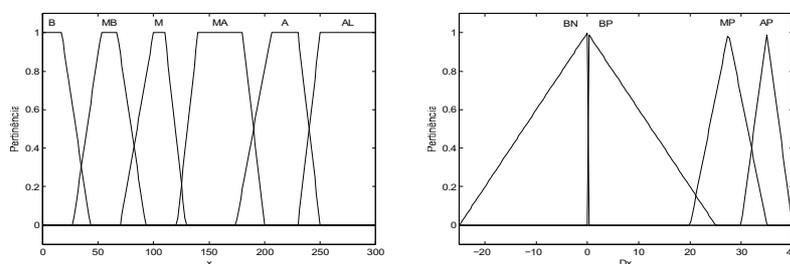


Figura 3.7:  $x$ ,  $\text{supp}(A^*) = [121, 129]$ . Figura 3.8:  $\Delta_x$ : domínio  $[-25, 40]$ .

1. Identifique uma região viável de equilíbrio e encontre o ponto de equilíbrio,  $x^*$ , de  $S$ ;
2. Verifique a estabilidade de  $x^*$ ;
3. Faça modificações na variável de saída de tal forma que  $x^*$  seja estável.
4. Altere, apenas o domínio da variável de saída, e verifique a estabilidade de  $x^*$ ; encontre o ponto de equilíbrio e verifique a estabilidade. Compare os resultados encontrados com o Teorema 3.4.



## Capítulo 4

# Dinâmica populacional com sistemas $p$ - fuzzy

### 4.1 Introdução

Neste capítulo temos como objetivo o desenvolvimento de bases de regras para dinâmica populacional de espécies isoladas com crescimento inibido e duas espécies em interação. Estas bases de regras serão determinadas a partir das informações subjetivas estabelecidas no primeiro capítulo deste texto.

Para a dinâmica populacional de uma espécie com crescimento inibido, sabemos que existe uma determinada quantidade máxima de indivíduos que o ambiente consegue suportar - a capacidade suporte. Se o número de indivíduos é superior à capacidade suporte, o taxa de crescimento da população é negativa. Por outro lado, se o número de indivíduos é inferior a capacidade suporte, então a população aumenta com o tempo.

Vimos também no primeiro capítulo que a natureza da interação entre duas espécies, modelada por um sistema de equações autônomas

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xf(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = yg(x, y), \end{cases} \quad (4.1.1)$$

pode ser definida apenas impondo algumas condições sobre as funções  $f$  e  $g$ .

Assim, estas informações podem ser utilizadas para estabelecer uma base de regras para um sistema p - fuzzy bidimensional discreto

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta_x(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \Delta_y(x_k, y_k) \end{cases} \quad (4.1.2)$$

que representem a dinâmica populacional das espécies envolvidas na interação. As variações  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$  devem satisfazer as mesmas condições impostas às funções  $F(x, y) = xf(x, y)$  e  $G(x, y) = yg(x, y)$ . Como as características que definem as interações são dadas pelas derivadas parciais  $f_y$  e  $g_x$ , o comportamento de  $F(x, y)$  e  $G(x, y)$  com relação à  $y$  e  $x$  respectivamente são semelhantes a das funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$ , uma vez que

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = x \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = y \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}.$$

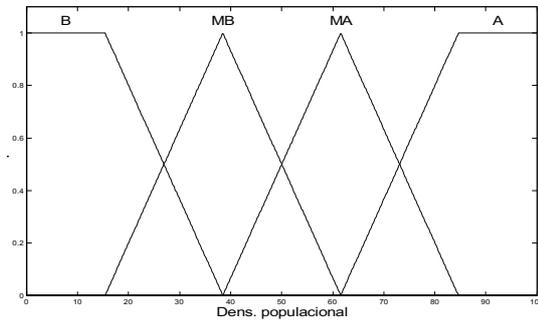
Por todo este capítulo será usado os conjuntos de termos linguísticos  $T_p = \{baixa, \text{média baixa}, \text{média alta}, alta\}$  e  $T_{\Delta_p} = \{alta negativa, \text{média alta negativa}, \text{média baixa negativa}, baixa negativa, baixa positiva, \text{média baixa positiva}, \text{média alta positiva}, alta positiva\}$  para determinar os estados subjetivos assumidos pelas variáveis linguísticas *população* e *variação da população* de ambas as espécies. Os conjuntos fuzzy de cada termo linguístico estão representados na Figura 4.1(a-b) onde a abreviação é evidente.

O fato de considerarmos o domínio de ambas as espécies iguais nos exemplos apresentados neste capítulo, pode biologicamente não fazer sentido. No entanto, da Proposição 3.4 no capítulo anterior, as análises quanto aos estados de equilíbrio aqui apresentadas são semelhantes para qualquer múltiplo dos domínios das variáveis *população* e *variação da população*.

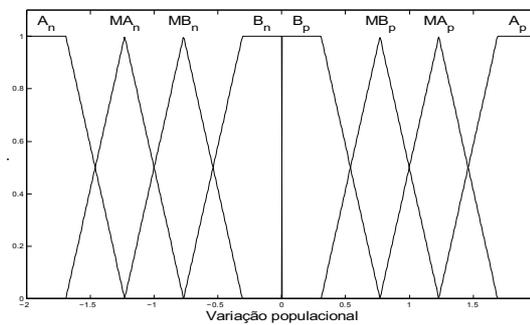
Neste capítulo também apresentaremos um algoritmo, baseado em regras fuzzy, para a determinação numérica de estados de equilíbrio de sistemas p - fuzzy bidimensionais. Além disso, faremos o ajuste de parâmetros para alguns modelos determinísticos a partir das bases de regras apresentadas.

## 4.2 Base de regras para espécies isoladas

Como no capítulo anterior, as partes fundamentais na modelagem por meio de um sistema p - fuzzy são a base de regras e os termos linguístico que definem subjetivamente os estados das variáveis. É na base de regras que estão incorporadas as informações do fenômeno modelado. Quanto mais precisas forem estas informações, melhor determinado estão os estados assumidos pelas variáveis de entrada e saída e conseqüentemente, maior o



(a)



(b)

Figura 4.1: Conjuntos fuzzy para os termos linguísticos:(a) - termos linguísticos  $T_p$ ; (b) - termos linguísticos  $T_{\Delta_p}$ .

número de termos linguísticos. Neste caso, a base de regras também pode incorporar mais regras de modo que o sistema p - fuzzy descreve mais detalhadamente o fenômeno.

Nesta seção vamos elaborar um conjunto de regras básicas para modelos de dinâmica populacional de espécies isoladas, em particular espécies com crescimento inibido.

Os modelos com crescimento inibido são aqueles que pressupõe a existência de uma capacidade suporte  $k > 0$ , geralmente determinada por fatores ambientais e intrínscos à espécie. Como vimos no capítulo 1, quando a população está acima da capacidade suporte, então o número de indivíduos da espécie diminui, de modo que temos uma variação negativa. O contrário

acontece quando o número de indivíduos é menor do que  $k$ . Se a quantidade de indivíduos é menor do que a capacidade suporte, a espécie tende a aumentar o número de indivíduos.



Figura 4.2: Campo de variações: ( $\leftarrow$ ) - variação negativa; ( $\rightarrow$ ) - variação positiva

Esta relação entre variáveis e variação pode ser determinada por uma equação

$$\frac{dp}{dt} = f(p)$$

que pode ser aproximada por discretização resultando  $p_{t+h} = p_t + hf(p)$ ,  $h > 0$ . Se  $p_t < k$ , então  $f(p_t) > 0$  e se  $p_t > k$ ,  $f(p_t) < 0$ .

No entanto, se a dinâmica populacional de uma espécie é somente parcialmente conhecida, a capacidade suporte não pode ser precisamente determinada e, como consequência, também não sabemos com exatidão quando a variação é positiva ou negativa. Porém, é possível dizer que quando o número de indivíduos é *muito grande* a população decresce.

Isto sugere que usemos termos linguísticos para fazer a relação entre a população  $p$  e a variação  $f(p)$ , ou seja, devemos determinar o campo determinístico  $f$  por um controlador fuzzy. Para a escolha das regras que vão formar a base de regras para dinâmica populacional com crescimento inibido, vamos levar em consideração a hipótese geral sobre variação absoluta para dinâmicas com crescimento inibido, isto é, a variação absoluta é crescente no início atingindo um valor máximo a partir do qual decresce assumindo valores negativos quando a densidade populacional está acima da capacidade suporte. No entanto, podemos também usar as informações referentes ao crescimento relativo da espécie, como veremos mais adiante.

Vamos utilizar o conjunto de termos linguístico  $T_p = \{baixa, média\ baixa, média, média\ alta, alta, altíssima\}$  para determinar subjetivamente os estados assumidos pela variável *população* e  $T_{\Delta p} = \{baixa\ negativa, baixa\ positiva, média\ positiva, alta\ positiva\}$  para os estados assumido pela variável linguística *variação da população*. Considerando  $A_i$  e  $B_i$  os conjuntos fuzzy para os termos linguísticos dos conjuntos  $T_p$  e  $T_{\Delta p}$ , uma base de regras para dinâmica populacional com crescimento inibido pode ser dado pelas seis regras seguintes:

1. Se a população é *baixa* ( $B$ ) então a variação é *baixa positiva* ( $B_p$ );
2. Se a população é *média baixa* ( $MB$ ) então a variação é *média positiva* ( $M_p$ );

3. Se a população é média ( $M$ ) então a variação é alta positiva ( $A_p$ );
4. Se a população é média alta ( $MA_p$ ) então a variação é média positiva  $M_p$ ; (1)
5. Se a população é alta ( $A$ ) então a variação é baixa positiva ( $B_p$ );
6. Se a população é altíssima ( $AL$ ) então a variação é baixa negativa ( $B_n$ ).

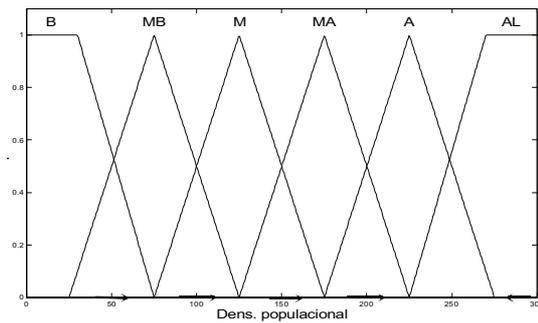


Figura 4.3: Conjuntos fuzzy dos termos linguísticos da variável *população*  $T_p$ .

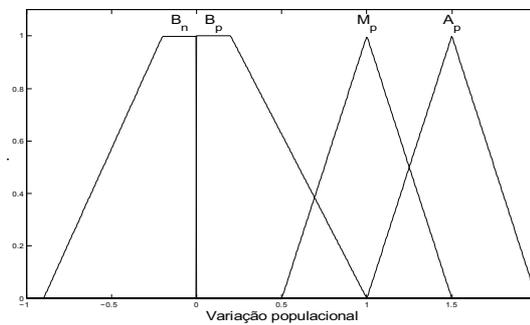


Figura 4.4: Conjuntos fuzzy dos termos linguísticos da variável *variação da população*  $T_{\Delta p}$ .

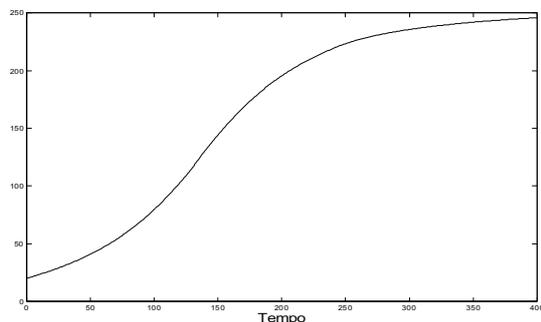


Figura 4.5: Solução do sistema p - fuzzy pela base de regras (1) e termos linguísticos como nas Figuras 4.3 e 4.4

As Figuras 4.3 e 4.4 são exemplos de conjuntos fuzzy  $A_i$  e  $B_i$ . A base de regras de regras está representada no domínio da variável população. As flechas apontadas para a direita (esquerda) na Figura 4.3 simbolizam variações positivas (negativas). Observemos que enquanto a população não atingir um valor *altíssimo* a variação é sempre positiva, ou seja, a população está crescendo.

Conforme podemos ver na Figura 4.5, o sistema p - fuzzy com controlador fuzzy alimentado por meio da base regras (1) e termos linguístico como nas Figuras 4.3 e 4.4, gera uma sequência limitada como esperado. O conjunto viável de equilíbrio para a base de regras (1) é  $A^* = A \cap AL$ , portanto existe  $x^* \in \text{supp}(A^*) = (240, 260)$  tal que  $\Delta(x^*) = 0$ , isto é, o sistema p - fuzzy está em equilíbrio, mais precisamente,  $x^* = 248.71$ . Como o conjunto fuzzy  $A^*$  satisfaz as condições do Teorema 3.2 então,  $x^*$  é único.

A base de regras (1) fornece a variação absoluta da população em cada instante de tempo. No entanto, é possível também estabelecer o comportamento de uma dinâmica populacional com crescimento inibido por meio de uma base de regras que define a variação relativa. Neste caso, a iteração não é feita por um sistema p - fuzzy, mas por um sistema iterativo da forma

$$x_{k+1} = (1 + \Delta(x_k))x_k$$

onde  $\Delta(x_k)$  é fornecido por um controlador fuzzy. Obviamente, as bases de regras para variações absolutas e relativas não devem ser as mesmas. As informações para a montagem da base de regras devem ser coerente com as características de variação relativa para crescimento inibido, ou seja, a

variação deve ser decrescente com relação a população. No exemplo a seguir elaboramos uma base de regras para a variação relativa.

**Exemplo 4.1.** Consideremos o conjunto de termos linguísticos  $T_p$  para a variável de entrada análogo ao da base regras (1) e para a variável de saída  $T_{\Delta_{prel}} = \{baixa\ negativa, baixa\ positiva, média\ baixa\ positiva, média\ positiva, média\ alta\ positiva, alta\ positiva\}$ . Consideremos também  $T_{\Delta_{prel}}$  modelado pelos conjuntos fuzzy sucessivos conforme Figura 4.6 A base de regras que estabelecemos abaixo leva em consideração as características de um variação relativa para crescimento inibido:

1. se a população é  $B$  então a variação é  $A_p$ ;
2. se a população é  $MB$  então a variação é  $MA_p$ ;
3. se a população é  $M$  então a variação é  $M_p$ ;
4. se a população é  $MA$  então a variação é  $MB_p$ ;
5. se a população é  $A$  então a variação é  $B_p$ ;
6. se a população é  $AL$  então a variação é  $B_n$ .

A Figura 4.7(a) mostra a trajetória da sequência gerada pelo sistema iterativo  $x_{k+1} = (1 + \Delta(x_k))x_k$ .

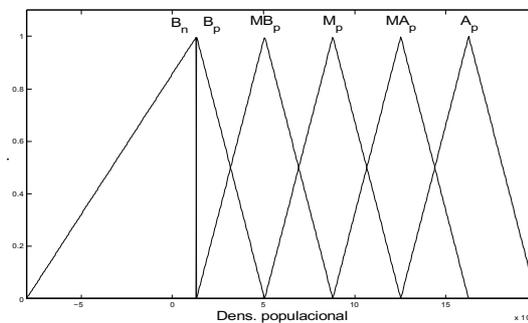


Figura 4.6: Conjuntos fuzzy dos termos linguísticos da variável *variação relativa da população*  $T_{\Delta_{prel}}$ .

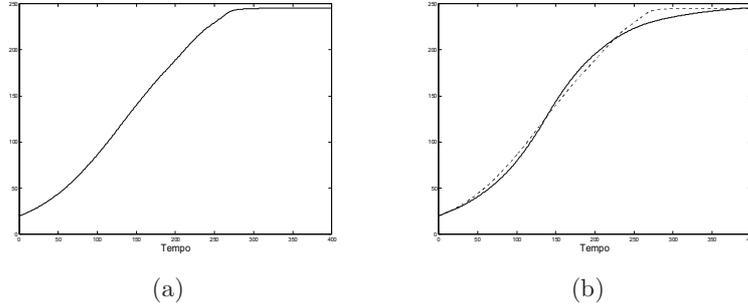


Figura 4.7: Crescimento inibido: (a) - trajetória do sistema iterativo com variação relativa (base de regras (2)); (b) - trajetórias gerada com variação relativa (linha segmentada) e absoluta (linha contínua).

### 4.2.1 Ajuste de parâmetros

A base de regras fornece um conjunto de dados por meio do controlador fuzzy que pode ser usado para estimativa de parâmetros de campos determinísticos. Nesta seção, vamos utilizar o método dos quadrados mínimos para obter parâmetros de campos determinísticos para dinâmica populacional com crescimento inibido.

Dado um conjunto de dados  $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq n}$  o método dos quadrados mínimos consiste em encontrar  $z_o \in \mathbb{R}^m$  que minimiza a soma

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i, z) - y_i|^2.$$

Se  $f$  é uma combinação linear de funções,  $f(x, z) = \sum_{k=1}^m z_k f_k(x)$ , então o problema equivalente à soma acima é determinar  $z_o \in \mathbb{R}^m$  que minimiza a norma usual em  $\mathbb{R}^2$  do resíduo

$$r = Az - y$$

onde  $z = (z_1, z_2, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$  e  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  com  $a_{i,j} = f_j(x_i)$ . Quando  $n > m$ , se as colunas de  $A$  são linearmente independente, então existe uma única solução para o problema de quadrados mínimos (veja [25]). Tal solução é dado por

$$z_o = (A^t A)^{-1} A^t y.$$

**Exemplo 4.2.** Consideremos o modelo de Verhulst para dinâmica populacional de espécies isoladas. A variação absoluta neste modelo é dada por

$$f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) = z_1 x + z_2 x^2$$

onde  $z_1 = r$  e  $z_2 = -r/k$ . A solução do problema de quadrados mínimos para  $x = (0, 1, 2, \dots, 300)$  e  $y = \Delta_x(x)$  obtido por controlador fuzzy é,  $z_1 = 0.0185$  e  $z_2 = 0.7^{-5}$  que é única pois as colunas de  $A$ , formadas por  $x$  e  $x^2$ , são linearmente independentes.

Na Figura 4.8 temos as soluções do modelo de Verhulst (segmentada) com  $r = 0.18$  e  $k = 257$  e p - fuzzy (contínua) com condição inicial  $x_o = 20$ . A trajetória pontilhada é a sequência gerada pelo modelo discreto de May com os mesmos parâmetros acima.

**Exemplo 4.3.** A variação do modelo de Montroll é dada por

$$f(x) = rx \left[1 - \left(\frac{x}{k}\right)^\beta\right].$$

Os parâmetros  $r$ ,  $k$  e  $\beta$  podem ser obtidos por minimização de  $F(r, k, \beta) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - \Delta_x(x_i)|^2$ . Para  $x = (0, 1, 2, \dots, 300)$  temos  $r = 0.023$ ,  $k = 257.707$  e  $\beta = 0.648$ . A solução do modelo de Montroll como estes parâmetros pode ser vista Na Figura 4.8.

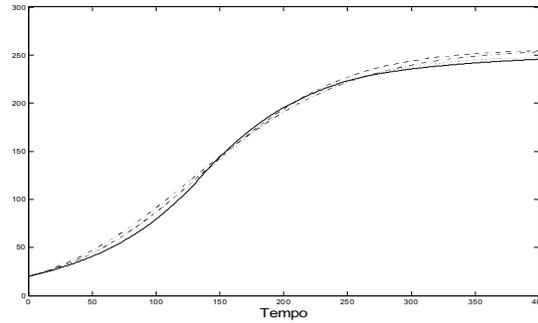
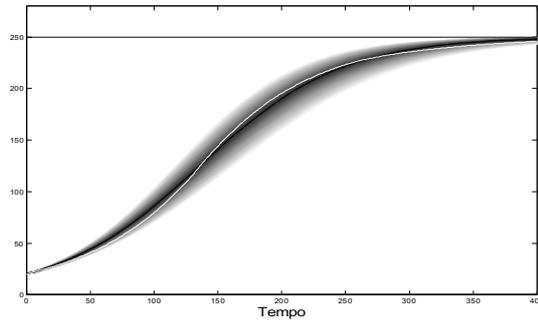


Figura 4.8: Ajuste de parâmetros: soluções dos modelos de Verhulst (segmentada), May (pontilhada), Montroll (ponto-segmentada) e p - fuzzy (linha contínua).

Como podemos observar na Figura 4.8, as soluções de modelos determinísticos contínuos e discretos apresentam comportamentos semelhantes ao modelo p - fuzzy.

**Exemplo 4.4.** Podemos considerar o parâmetro intrínscio de crescimento do modelo de Verhulst como sendo um número triangular fuzzy com  $\hat{r} = (0.015/0.018/0.021)$  conforme Capítulo 2. Neste caso, usando o método da extensão de Zadeh do fluxo determinístico apresentado no Capítulo 2, obtemos a solução fuzzy da Figura 4.9.

Observemos que a solução do sistema p - fuzzy (linha branca na Figura 4.9) pertence ao suporte do conjunto fuzzy obtido pela extensão do fluxo.



(b)

Figura 4.9: solução fuzzy do modelo de Verulst com  $\hat{r} = (0.015/0.018/0.021)$  e condição inicial  $x_o = 20$ .

### 4.3 Algoritmo para busca de estados de equilíbrio para sistemas p - fuzzy

Consideremos o sistema p - fuzzy bidimensional

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta_x(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \Delta_y(x_k, y_k). \end{cases} \quad (4.3.3)$$

Como vimos na seção 3.3.2 do capítulo anterior, o sistema (4.3.3) admite um estado de equilíbrio em uma região  $R^*$  se os conjuntos fuzzy da base

de regras satisfazem as hipótese do Teorema 3.3. Exceto no caso em que os conjuntos fuzzy das variáveis de saída são simétricos, isto é,  $\mu_{C_1}(-c) = \mu_{C_2}(c)$  o estado de equilíbrio não é fácil de ser determinado. A dificuldade se torna ainda maior se o estado de equilíbrio é instável.

O que propomos nesta seção é um algoritmo para aproximação numérica do estado de equilíbrio baseado nas regras do sistema (4.3.3) que é equivalente a encontrar o minimizador de  $\|\Delta_{xy}(x, y)\|$  com  $\Delta_{xy} = (\Delta_x, \Delta_y)$ . O algoritmo aqui proposto consiste em determinar uma aproximação  $\tilde{v}_{k+1} = (\tilde{x}_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})$  a partir de um determinado  $\tilde{v}_k$  de modo que  $\|\Delta_{xy}(\tilde{v}_{k+1})\| < \|\Delta_{xy}(\tilde{v}_k)\|$ . Para isso dado  $\tilde{v}_k$ , devemos encontrar uma *direção de descida*  $d_k = (d_1(\tilde{v}_k), d_2(\tilde{v}_k))$  tal que  $\tilde{v}_{k+1} = \tilde{v}_k + d_k$  ou ainda,

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k + d_1(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \\ \tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + d_2(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Embora algoritmos para minimizar funções que usam direções de descidas seja bem conhecidos e estruturados matematicamente, conforme vemos em [5] e [14], aqui entretanto, não podemos utilizar tais métodos. Para garantir a convergência eles dependem do valor da derivada da função em cada iteração, o que pode não ser o caso de  $\|\Delta_{xy}(v_k)\|$ . Então um método para minimizar  $\|\Delta_{xy}(v_k)\|$  onde  $\Delta_{xy}$  é dado por regras fuzzy, deve levar em consideração a possibilidade de ela não ser derivável.

A proposição a seguir fornece a uma condição suficiente para garantir a convergência do sistema (4.3.4).

**Teorema 4.1.** *Se a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \|d_k\|$  converge então, a sequência gerada pelo sistema (4.3.4) converge.*

Demonstração: Seja  $\tilde{v}_k = (\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$  e  $d_k = (d_1(\tilde{v}_k), d_2(\tilde{v}_k))$ . A sequência gerada pelo sistema (4.3.4) é dada por

$$\tilde{v}_k = \tilde{v}_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \|d_i\|.$$

Colocando  $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n-1} \|d_i\|$ , então se  $n > m$ ,

$$\|\tilde{v}_n - \tilde{v}_m\| = \left\| \sum_{i=m}^{n-1} d_i \right\| \leq \sum_{i=m}^{n-1} \|d_i\| = |\sigma_n - \sigma_m| \leq |\sigma_n - \sigma| + |\sigma - \sigma_m|$$

onde  $\sigma$  é o limite da série  $\sum \|d_k\|$ . Dessa forma, tomando o limite em  $m$  e  $n$ , temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{v}_n - \tilde{v}_m\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n - \sigma| + \lim_{m \rightarrow \infty} |\sigma - \sigma_m| = 0.$$

Como  $\mathbb{R}^2$  é completo, então a sequência  $\tilde{v}_k$  é convergente, ou seja, existe  $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$  tal que

$$\bar{v} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{v}_k,$$

o que confirma a proposição. ■

A proposição que acabamos de demonstrar é fundamental para o desenvolvimento do algoritmo, uma vez que podemos agora determinar uma condição para a convergência da série de valores reais  $\sum \|d_k\|$ . O teste da razão nos garante que se existir uma constante  $\alpha$  tal que

$$\frac{\|d_{k+1}\|}{\|d_k\|} \leq \alpha < 1 \quad (4.3.5)$$

então a série  $\sum \|d_k\|$  será absolutamente convergente e, como consequência, convergente ([13]). Sendo assim, vamos pedir que o passo  $d_k$  satisfaça (4.3.5).

No entanto somente a convergência do sistema (4.3.4) não é suficiente para garantir que  $\|\Delta_{xy}(v_k)\| \rightarrow 0$ , pois pode ocorrer que o passo  $d_k$  convirja a zero antes mesmo que  $\Delta_{xy}$ . Sendo assim, vamos exigir que  $\|d_k\| \geq \beta \|\Delta_{xy}(v_k)\|$  para algum  $\beta > 0$ .

Podemos agora já estabelecer um algoritmo incorporando as informações citadas anteriormente.

**Algoritmo 4.1.** *Seja  $\alpha \in (0, 1)$  e  $\beta > 0$ . Dado  $\tilde{v}_k$  tal que  $\|\Delta_{xy}(\tilde{v}_k)\| > 0$ , então a nova aproximação  $\tilde{v}_{k+1}$  é encontrada por meio dos seguintes passos.*

1º passo: encontrar  $d_k$  satisfazendo:

$$\|d_{k+1}\| \leq \alpha \|d_k\| \quad \text{e} \quad \|d_k\| \geq \beta \|\Delta_{xy}(\tilde{v}_k)\|$$

2º passo: calcular a nova aproximação

$$\tilde{v}_{k+1} = \tilde{v}_k + d_k$$

3º passo: verificar se  $\|\Delta_{xy}(\tilde{v}_{k+1})\| = 0$ . Caso contrário, retornar ao 1º passo.

O teorema a seguir garante a convergência do algoritmo para um ponto de equilíbrio do sistema (4.3.3).

**Teorema 4.2.** *A sequência  $\tilde{v}_k$  gerada pelo algoritmo 4.1 é tal que:*

1. (a)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{v}_k = \bar{v}$ ;
2. (b)  $\|\Delta_{xy}(\bar{v})\| = 0$ .

Demonstração: (a) como  $\|d_{k+1}\| \leq \alpha \|d_k\|$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , então  $\sum \|d_k\|$  converge. Logo, pela proposição (4.1), existe  $\bar{v}$  tal que

$$\bar{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{v}_k.$$

(b) Sabemos que  $\|\Delta_{xy}(\tilde{v}_k)\| \leq \beta \|d_k\|$ . Portanto

$$\|\Delta_{xy}(\bar{v})\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta_{xy}(\tilde{v}_k)\| \leq \beta \lim_{k \rightarrow \infty} \|d_k\| = \beta \lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{v}_{k+1} - \tilde{v}_k\| = 0,$$

logo  $\|\Delta_{xy}(\bar{v})\| = 0$ , o que prova (b). ■

Observemos que a condição  $\|d_{k+1}\| \leq \alpha \|d_k\|$  é suficiente para a convergência do algoritmo 4.1 e não necessária. O exigido é que o sequência  $\tilde{v}_k$  gerada pelo algoritmo seja convergente pois neste caso  $\|d_k\| \rightarrow 0$  e portanto o item (b) do teorema acima ainda continua válido.

A escolha da direção do passo em algoritmos de minimização é fundamental para a convergência de maneira eficiente para o ponto desejado. Entretanto, tal direção nem sempre é fácil de ser determinada. Em geral, esta escolha leva em consideração a direção do gradiente da função. Para encontrar o estado de equilíbrio de uma base de regras no entanto, a direção do passo pode ser facilmente identificada apenas verificando os sinais das variações  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$  em um dado ponto  $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$  conforme garantido pelo item (c) do Teorema 3.3.

**Exemplo 4.5.** Como veremos nas próximas seções, as variações do sistema p - fuzzy na região viável de equilíbrio para interação do tipo presa - predador pela base de regras da Figura 4.17 são dadas pelas regras:

1. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ ;
2. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MB_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ ;
3. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ ;
4. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MB_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ .

Os conjuntos viáveis de equilíbrio  $A^* = B^* = MB \cap MA$  satisfazem as condições do Teorema 3.3, portanto pelo item (c) do mesmo teorema temos que se  $x_1 < x^* < x_2$  então  $\Delta_y(x_1, y) < 0 < \Delta_y(x_2, y)$  e pelo Corolário 3.1,

se  $y_1 < y^* < y_2$  então  $\Delta_x(x, y_2) < 0 < \Delta_x(x, y_1)$ . Dessa forma, é possível determinar a localização de um ponto  $(\bar{x}, \bar{y})$  como relação à  $(x^*, y^*)$ , apenas verificando os sinais de  $\Delta_x(\bar{x}, \bar{y})$  e  $\Delta_y(\bar{x}, \bar{y})$ , conseqüentemente, a escolha da direção do passo pode ser baseado nesta informação.

É importante observar que se  $\bar{x} \approx x^*$  então  $\Delta_y(\bar{x}, y) \approx 0$  e, se  $\bar{y} \approx y^*$  então  $\Delta_x(x, \bar{y}) \approx 0$ . Neste caso, o passo escolhido neste exemplo em particular será  $d_k = 10(-\Delta_y(\bar{v}_k), \Delta_x(\bar{v}_k)) \cdot \bar{y}$ . A segunda condição exigida para o passo do algoritmo 4.1 é satisfeito uma vez que  $\|d_k\| = 10\|\Delta_{xy}(\bar{v}_k)\|$ . A primeira condição,  $\|d_{k+1}\| \leq \alpha\|d_k\|$ , também é satisfeita conforme podemos observar na Figura 4.11.

A seqüência gerada pelo algoritmo com aproximação inicial (42, 61) pode ser vista na Figura 4.10a. O ponto obtido após 67 iterações é  $(\bar{x}, \bar{y}) = (49.9995, 50.0005)$  com  $\|\Delta_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\| \leq 10^{-10}$ . A Figura 4.10b mostra a seqüência no plano de fase; podemos observar que a direção escolhida para o passo segue aproximadamente a direção da reta ligando a aproximação inicial e o estado de equilíbrio.

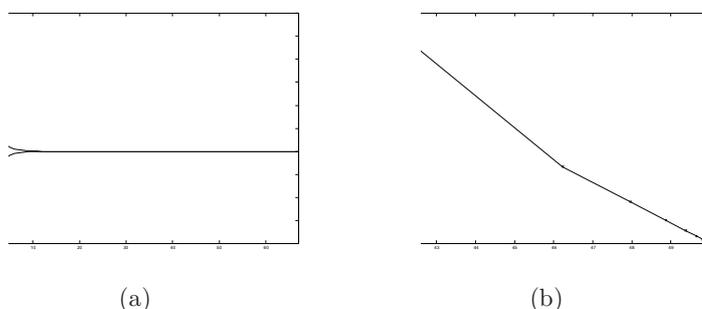


Figura 4.10: Seqüência gerada pelo algoritmo 4.1 com aproximação inicial (42, 61). (a) - Iteração versus aproximação. (b) - Seqüência no plano de fase

#### 4.4 Modelo p - fuzzy para interações do tipo competição

O modelo geral proposto por Kolmogorov considera que a variação populacional de uma espécie é decrescente com relação a outra quando as espécies estão em competição. Além disso, se a interação é facultativa para ambas as espécies, então é assumido que existe uma capacidade suporte para cada espécie.

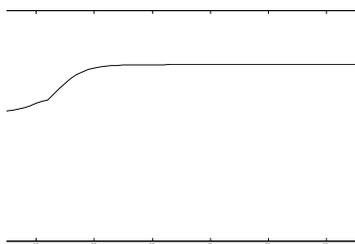


Figura 4.11: Gráfico de  $\alpha_k = \|d_k\|/\|d_{k+1}\|$ .

Devido à competição interespecífica, é razoável considerarmos que as populações de ambas as espécies crescem de forma inibida, quando ausentes da interação, isto é, a variação absoluta é crescente quando as densidades populacionais são baixas, porém decrescentes à partir de um valor atingido pela densidade populacional.

Se considerarmos os termos linguísticos das variáveis de entrada e saída dados pelos conjuntos  $T_p$  e  $T_{\Delta_p}$  respectivamente, então uma base de regras que satisfaz as condições de uma interação do tipo competição pode ser dada pelas 16 regras abaixo:

1. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $MA_p$  e  $\Delta_y$  é  $MA_p$ ;
2. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MA_p$  e  $\Delta_y$  é  $A_p$ ;
3. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ ;
4. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $B_p$  e  $\Delta_y$  é  $B_n$ ;
5. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $A_p$  e  $\Delta_y$  é  $MA_p$ ;
6. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ ;
7. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $B_p$  e  $\Delta_y$  é  $B_n$ ;
8. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ ;
9. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ ;
10. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_p$ ;
11. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MB_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ ;

- 12. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $MA_n$  e  $\Delta_y$  é  $MA_n$ ;
- 13. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_p$ ;
- 14. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MB_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_n$ ;
- 15. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MA_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ ;
- 16. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $A_n$  e  $\Delta_y$  é  $A_n$ .

Graficamente podemos representar esta base de regras no “plano de fase” delimitado pelo domínio das variáveis *população* conforme Figura 4.12.

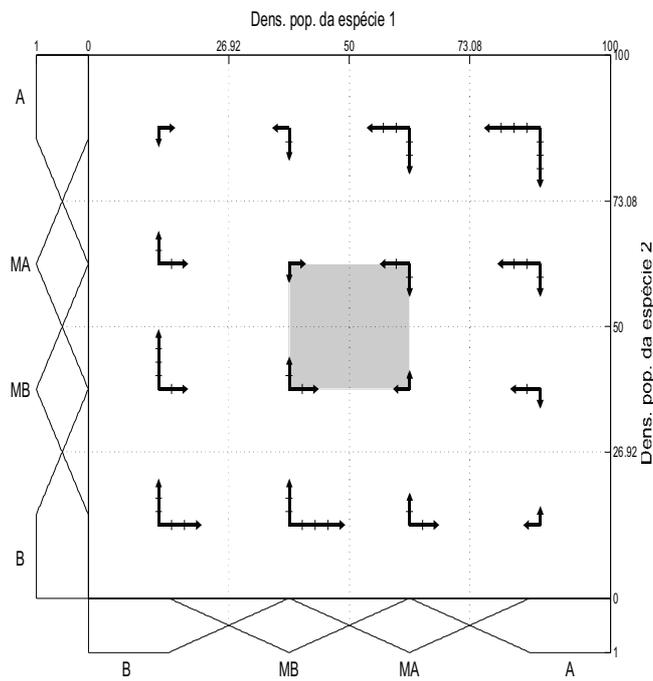


Figura 4.12: Base de regras para interações do tipo competição. As variações negativas são representadas pelos símbolos ↓ e ← enquanto que variações positivas são representadas por ↑ e →

Conforme podemos observar na Figura 4.13 as variações da população da espécie 1 é decrescente com relação à espécie 2 e analogamente para a variação da população da espécie 2.

A área destacada na Figura 4.12 é a região viável de equilíbrio do sistema p - fuzzy. Nesta região, as variações do sistema são dadas pelas regras

1. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ ;
2. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $B_p$  e  $\Delta_y$  é  $B_n$ ;
3. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_p$ ;
4. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MB_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ .

Os conjuntos fuzzy  $A^* = B^* = MB \cap MA$ , são conjuntos viáveis de equilíbrio para as variações  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$  respectivamente. Ambos os conjuntos satisfazem as hipóteses do Teorema 3.3 e Corolário 3.1. Logo, pelo Corolário 3.2 existe um único estado de equilíbrio em  $R^* = \text{supp}(A^* \cap B^*)$  para o sistema p - fuzzy com base de regras da Figura 4.12. Considerando o domínio das variáveis conforme Figuras 4.1(a-b) o estado de equilíbrio não nulo é  $(50, 50)$ . A capacidade suporte das espécies em isolamento é  $k_1 = k_2 = 79.53$ .

Os autovalores da matriz jacobiana no estado de equilíbrio não nulo são  $\lambda_1 = 0.98$  e  $\lambda_2 = 0.97$ , portanto  $(x^*, y^*)$  é assintoticamente estável.

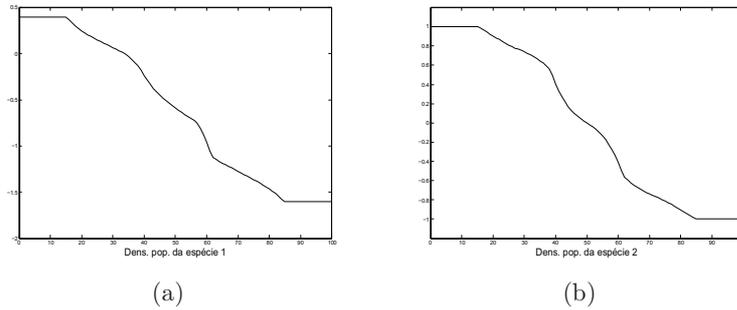


Figura 4.13: Variações de uma espécie com relação a outra: (a) - Variação da espécie 1 com relação a espécie 2; (b) - Variação da espécie 2 com relação a espécie 1.

As Figuras 4.14(a-b) são as soluções do sistema p - fuzzy para espécies 1 e 2 respectivamente. A trajetória segmentada representa a dinâmica populacional das espécies em isolamento, enquanto que a trajetória contínua

é a dinâmica de cada espécie em interação. Como é de característica de espécies em competição, as densidades populacionais das espécies 1 e 2 se estabilizam em valores inferiores a sua respectiva capacidade suporte.

Embora a interação seja de competição, a densidade populacional de ambas as espécies é crescente no início. Isto se deve ao fato de que a contribuição negativa para a espécie 1, provocada pela interação com a espécie 2, é menor inicialmente do que o crescimento populacional da espécie 1.

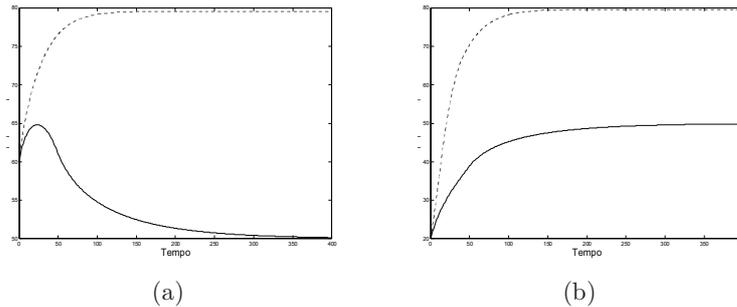


Figura 4.14: Solução do modelo  $p$  - fuzzy pela base de regras da Figura 4.12. (a) - espécie 1 em isolamento (segmentada) e em interação (linha contínua); (b) - espécie 2 em isolamento (segmentada) e em interação (linha contínua).

## 4.5 Modelo $p$ - fuzzy para interações do tipo presa - predador

Uma interação do tipo presa - predador tem como característica principal ser prejudicial para uma espécie e benéfica à outra. Quando a interação é facultativa para ambas as espécies então as densidades populacionais de presas e predadores são limitadas por suas respectivas capacidades suporte. Neste caso, a densidade populacional dos predadores é maior no estado de equilíbrio não nulo do que sua capacidade suporte; por outro lado, a densidade populacional das presas é menor no estado de equilíbrio do que a capacidade suporte.

De modo geral a interação é obrigatória para os predadores, isto é, a presença de presas é essencial para a sobrevivência dos predadores.

De acordo com o Modelo geral de Kolmogorov, para uma interação do tipo presa - predador as variações populacionais devem satisfazer basicamente duas condições:

1. a variação populacional para presas é decrescente com relação a população de predadores ( $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$ );
2. a variação populacional para predadores é crescente com relação a população de presas ( $\frac{\partial g}{\partial x} > 0$ ).

Para estabelecimento de uma base de regras para interações do tipo presa - predador, vamos considerar ainda que a interação é facultativa para as presas, de modo que quando a densidade populacional de presas é alta a variação seja negativa. A base de regras a seguir incorpora todas as informações essenciais expostas acima:

1. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MA_p$ ;
2. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MA_p$  e  $\Delta_y$  é  $A_p$ ;
3. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ ;
4. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_n$ ;
5. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $A_p$  e  $\Delta_y$  é  $MA_p$ ;
6. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ ;
7. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $B_p$  e  $\Delta_y$  é  $B_n$ ;
8. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ ;
9. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ ;
10. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_p$ ;
11. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MB_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ ;
12. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $MA_n$  e  $\Delta_y$  é  $MA_n$ ;
13. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_p$ ;
14. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MB_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_n$ ;
15. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MA_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ ;
16. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $A_n$  e  $\Delta_y$  é  $A_n$ .

A Figura 4.15 representa cada uma das regras no “plano de fase” delimitado pelo domínio das variáveis *população* de presas e predadores.

As variações do sistema na região de equilíbrio destacada na figura, são determinadas pelas regras

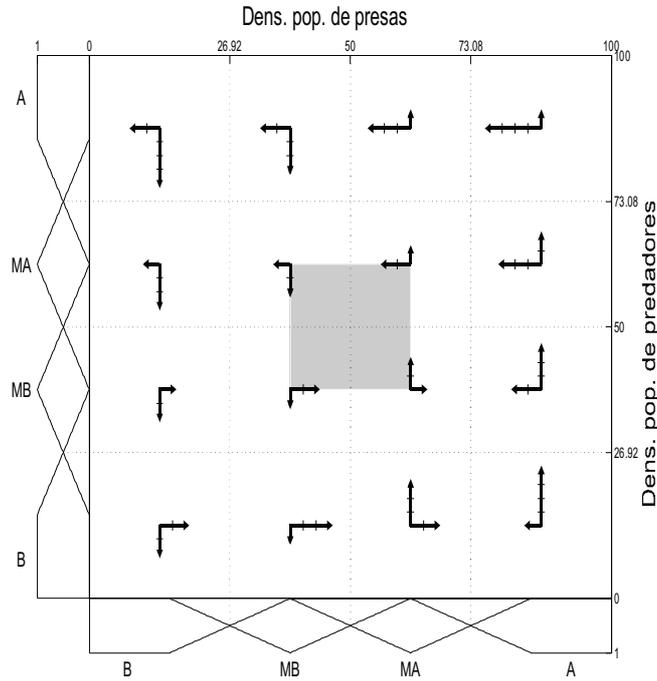


Figura 4.15: Base de regras para uma interação presa - predador.

1. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $B_n$ ;
2. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ ;
3. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $B_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ ;
4. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MB_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_p$ .

Pelo Teorema 3.3 e Corolários 3.1 e 3.2, o estado de equilíbrio  $(50, 50)$  é único em  $R^*$ . Os autovalores de  $\mathbf{J}_{(x^*, y^*)}$  são  $\lambda_{1,2} = 0.991 \pm 0.0201i$  e portanto  $(x^*, y^*)$  é assintoticamente estável. A capacidade suporte para as presas na ausência de predadores é  $k_1 = 79.53$ . Na Figura 4.16 temos a solução do sistema p - fuzzy com base de regras da Figura 4.15. A trajetória pontilhada é a solução para a população de presas na ausência de predadores

enquanto que a curva ponto-segmentada é solução da população de presas em interação. A trajetória contínua é a solução de predadores em interação.

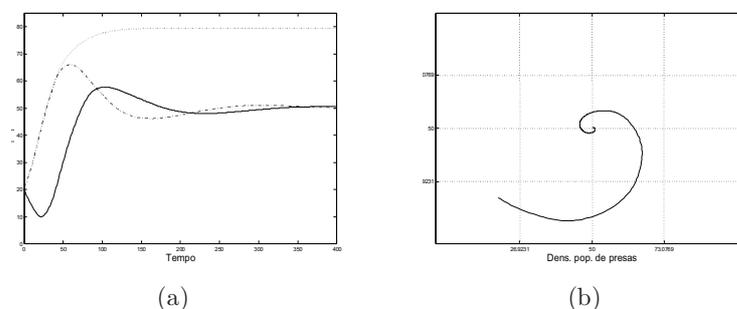


Figura 4.16: Solução do modelo p - fuzzy com base de regras conforme Figura 4.15.

Em interações do tipo presa - predador as densidades populacionais em geral apresentam flutuações em torno do estado de equilíbrio ao longo do tempo. Embora a solução do sistema p - fuzzy gerada pela base de regras da Figura 4.15 apresente oscilações, estas oscilações desaparecem quando  $t \rightarrow \infty$ . No entanto, é possível obter soluções com periodicidade apenas fazendo algumas alterações na base de regras da Figura 4.15, de modo que as características de interações presa - predador sejam mantidas.

Na região destacada na Figura 4.17 as variações do sistema p - fuzzy são dadas pelas regras:

1. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ ;
2. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MB_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ ;
3. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ ;
4. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MB_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ .

O estado de equilíbrio para esta base de regras é  $(50, 50)$ . Os autovalores de  $\mathbf{J}_{(50,50)}$  são  $\lambda_{1,2} = 1.012 \pm 0.031i$ , logo o estado de equilíbrio é instável.

A solução do sistema p - fuzzy com a base de regras da Figura 4.17 pode ser vista nas Figuras 4.18(a-b). Como o estado de equilíbrio é instável, então as trajetórias se afastam do ponto  $(50, 50)$ . No entanto, como existe a capacidade suporte para a população de presas, as oscilações das soluções não podem crescer indefinidamente, como podemos observar pela Figura

4.18, de modo que as soluções tendem a se tornarem periódicas, ou equivalentemente, as trajetórias do sistema  $p$  - fuzzy no plano de fase convergem para um ciclo limite.

Como nos modelos determinísticos, a solução da população de predadores está em atraso com relação a população de presas.

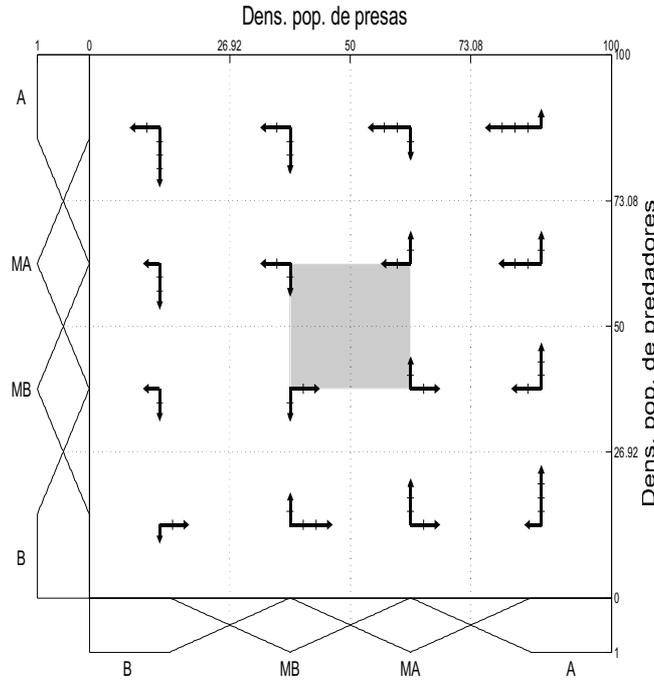


Figura 4.17: Base de regras para uma interação presa - predador com ciclo limite.

## 4.6 Modelo $p$ - fuzzy para interações do tipo mutualismo

A principal característica de um interação do tipo mutualismo é que ambas as espécies envolvidas na interação são beneficiadas. Para modelagem,

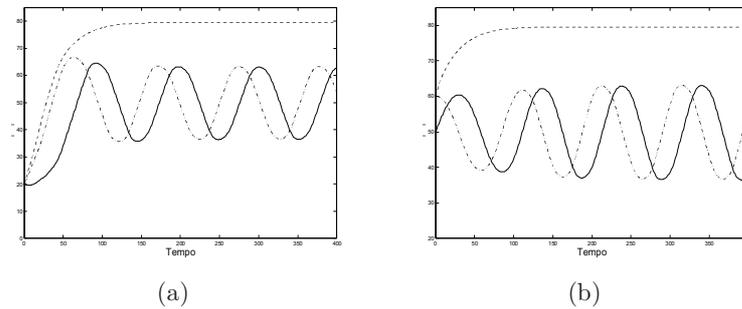


Figura 4.18: Solução do modelo p - fuzzy com base de regras conforme Figura 4.17.

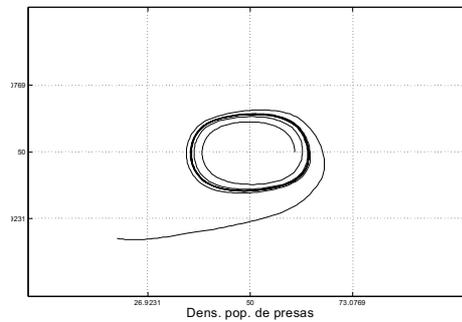


Figura 4.19: Plano de fase do sistema p - fuzzy associado à base de regras da Figura 4.17.

Kolmogorov considera que a variação de uma espécie é crescente com relação a outra.

O mutualismo pode ser tanto facultativo quanto obrigatório para as espécies. Nesta seção, vamos elaborar uma base de regras para cada um dos casos. Como já mencionamos, se a interação é facultativa, é razoável considerarmos uma limitação para o crescimento populacional devido á disponibilidade de recursos naturais. Outro fato importante a ser considerado é que quando as populações atingem valores altos de densidade, a contribuição dever ser anulada pela competição interepecífica da espécie para evitar crescimento indefinido.

Na base de regras que propomos abaixo, a variação populacional para a espécie 2 é crescente com relação à espécie 1 e, analogamente, para a variação populacional da espécie 1 é crescente com relação à espécie 2. Estas regras estão ilustradas na Figura 4.20.

1. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MA_p$ ;
2. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MA_p$  e  $\Delta_y$  é  $A_p$ ;
3. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ ;
4. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_n$ ;
5. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $A_p$  e  $\Delta_y$  é  $MA_p$ ;
6. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ ;
7. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $B_p$  e  $\Delta_y$  é  $B_n$ ;
8. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ ;
9. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ ;
10. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_p$ ;
11. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MB_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ ;
12. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $MA_n$  e  $\Delta_y$  é  $MA_n$ ;
13. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_p$ ;
14. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MB_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_n$ ;
15. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MA_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ ;
16. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $A_n$  e  $\Delta_y$  é  $A_n$ .

Observemos que na regra 16, ambas as variações poderiam ser positivas que ainda assim as características de mutualismo ainda seriam satisfeitas. No entanto, como mencionamos anteriormente isto faria com que a competição interespecífica fosse superado pela interação mesmo em altas densidades populacionais.

Como podemos ver na Figura 4.21, a densidade populacional da espécie 1 é decrescente no início. Isto pode ser explicado pelo fato de que a densidade populacional da espécie 2 é baixa e da espécie 1 está acima da capacidade suporte, de modo que a contribuição da interação não supera a competição

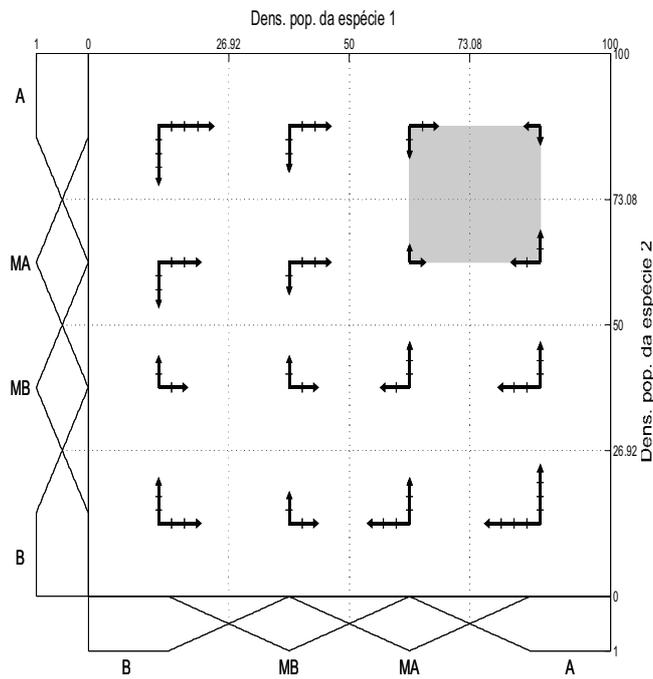


Figura 4.20: Base de regras para mutualismo facultativo

interespecífica da espécie 1. Na Figura 4.21, a curva segmentada representa a dinâmica populacional das espécies quando isoladamente.

O estado de equilíbrio para o sistema p - fuzzy determinado pela base de regras da Figura 4.20 é (73.08, 73.08). Este estado de equilíbrio é assintoticamente estável já que os autovalores da matriz jacobiana neste ponto são:  $\lambda_1 = 0.98$ ;  $\lambda_2 = 0.97$ . A capacidade suporte de cada espécie,  $k_1 = k_2 = 46.16$  são ambas menores do que  $x^*$  e  $y^*$ , respectivamente, como esperado de um interação de mutualismo.

Podemos considerar também que o mutualismo é obrigatório para ambas as espécies. Neste caso, se uma das populações está abaixo de um valor crítico, ambas as espécies tendem a desaparecer do ambiente. Também é considerado que para altas densidades populacionais a contribuição da interação é menor que a competição interespecífica.

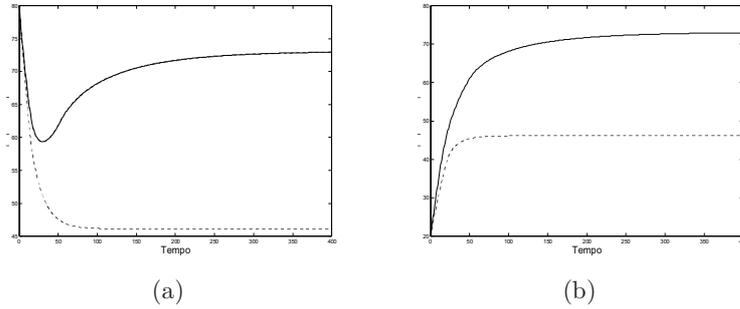


Figura 4.21: Solução do modelo p - fuzzy com base de regras conforme Figura 4.20

As regras que determinam um mutualismo obrigatório podem ser:

1. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_n$ ;
2. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $B_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ ;
3. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MA_n$ ;
4. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $MA_p$  e  $\Delta_y$  é  $A_n$ ;
5. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $MB_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_p$ ;
6. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $B_p$  e  $\Delta_y$  é  $B_p$ ;
7. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $B_n$ ;
8. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ ;
9. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $MA_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ ;
10. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ ;
11. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $B_p$  e  $\Delta_y$  é  $B_p$ ;
12. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $B_n$ ;
13. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $A_n$  e  $\Delta_y$  é  $MA_p$ ;
14. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MB_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ ;
15. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_p$ ;

16. Se  $x$  é A e  $y$  é A então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_n$

Na Figura 4.22 temos a representação gráfica da base de regras para interações do tipo mutualismo obrigatório para ambas as espécies.

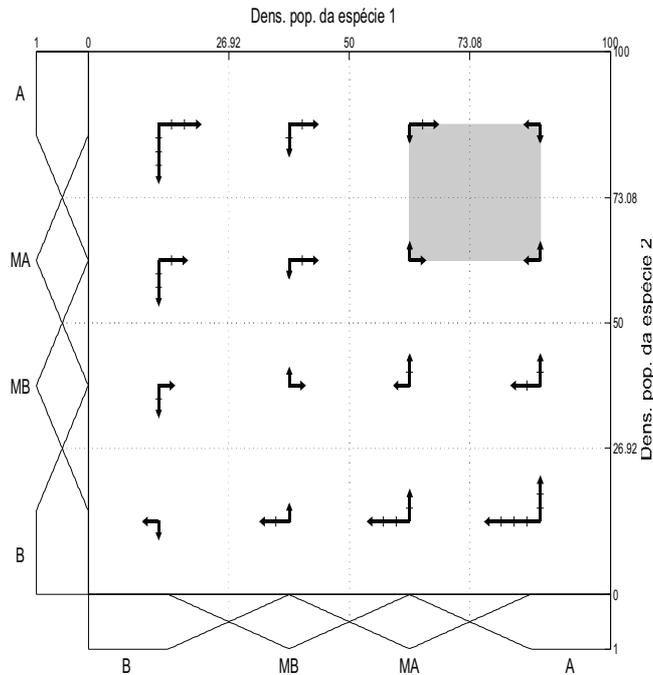


Figura 4.22: Base de regras para mutualismo obrigatório

O sistema p - fuzzy associado a base de regras de Figura 4.22 admite dois estados de equilíbrio não nulos  $(33.81, 33.81)$  e  $(81.15, 73.08)$ . O primeiro tem uma estabilidade do tipo ponto de sela, pois os autovalores de  $\mathbf{J}_{(33.81, 33.81)}$  são  $\lambda_1 = 1.0445$  e  $\lambda_2 = 0.9661$ . Os autovalores de  $\mathbf{J}_{(81.15, 73.08)}$  são  $\lambda_1 = 0.9413$  e  $\lambda_2 = 0.9806$  e, portanto, o segundo estado é assintoticamente estável.

Na Figura 4.23(a) temos a solução do sistema p - fuzzy com condição inicial  $(45, 20)$ . Como podemos ver, o crescimento de uma espécie não é suficiente para evitar a extinção de ambas. A solução do sistema p - fuzzy com

condição inicial  $(70, 5)$  converge para o estado de equilíbrio  $(81.15, 73.08)$ , conforme podemos ver na Figura 4.23(b). Embora a densidade populacional de uma espécie seja baixa, a alta densidade populacional da outra espécie contribui o necessário para que a interação seja benéfica para ambas as espécies.

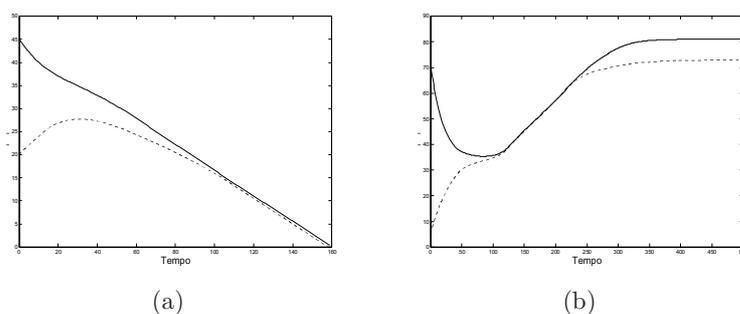


Figura 4.23: Solução do modelo p - fuzzy com base de regras conforme Figura 4.22.

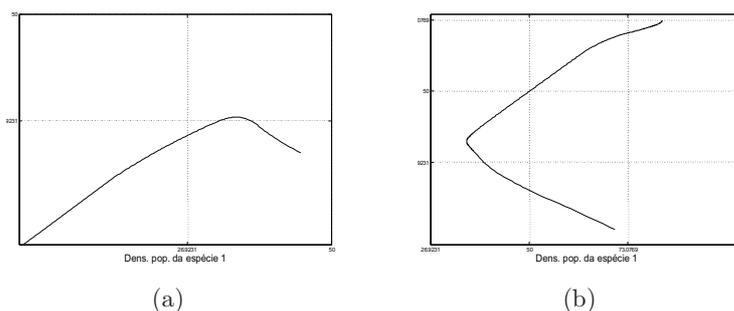


Figura 4.24: Solução, no plano de fase, do modelo p - fuzzy com base de regras conforme Figura 4.22.

Pelo campo vetorial da Figura 4.25 percebe-se a existência de uma separatriz delimitando as densidades populacionais que levam à extinção ou a coexistência em  $(81.15, 73.08)$ . Para condições iniciais sobre a separatriz, as espécies coexistem em  $(33.81, 33.81)$ .

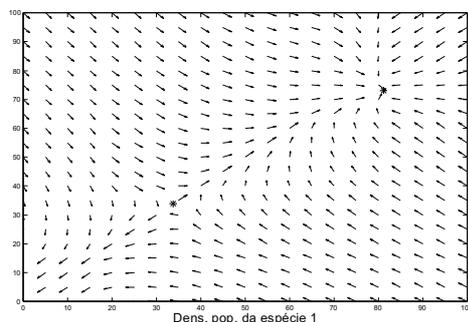


Figura 4.25: Campo vetorial do sistema p - fuzzy pela base de regras da Figura 4.22.

## 4.7 Modelo p - fuzzy para interações densidade - dependente

Consideremos uma interação entre espécies que se comporta como mutualismo à baixas densidades populacionais porém, a interação se torna competitiva quando a densidades populacionais são altas. O modelo determinístico que comporta essa situação quando a interação é facultativa que apresentamos no primeiro capítulo (modelo de Josefina-Barradas) supõe que os parâmetros que determinam a natureza da interação,  $\beta_{12}$  e  $\beta_{21}$ , nas equações de Volterra sejam dependentes das densidades populacionais. No entanto, a generalização pode ser dada pelo modelo de Kolmogorov. Neste caso as funções de crescimento relativo devem satisfazer:

$$\frac{\partial f}{\partial y} > 0 \text{ se } y \text{ é pequeno e } \frac{\partial f}{\partial y} < 0 \text{ se } y \text{ é grande}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} > 0 \text{ se } x \text{ é pequeno e } \frac{\partial g}{\partial x} < 0 \text{ se } x \text{ é grande.}$$

Pela subjetividade envolvida nos termos *pequeno* e *grande*, a modelagem por sistemas p - fuzzy pode ser preferível ao invés da modelagem determinística. Na base de regras que propomos abaixo para interações envolvendo densidades populacionais, estamos supondo que a interação é facultativa para ambas as espécies e que o benefício da interação é maior para a espécie 2 quando a densidade populacional é baixa. A base regras a seguir está representada na Figura 4.26.

1. Se  $x$  é B e  $y$  é B então  $\Delta_x$  é  $MB_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_p$ ;

2. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MA_p$  e  $\Delta_y$  é  $B_p$ ;
3. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $B_p$  e  $\Delta_y$  é  $B_n$ ;
4. Se  $x$  é  $B$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ ;
5. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $B_p$  e  $\Delta_y$  é  $A_p$ ;
6. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MA_p$  e  $\Delta_y$  é  $MA_p$ ;
7. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $MA_p$ ;
8. Se  $x$  é  $MB$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $MB_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_p$ ;
9. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $B_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_p$ ;
10. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $MA_p$  e  $\Delta_y$  é  $B_n$ ;
11. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MA_n$  e  $\Delta_y$  é  $MA_n$ ;
12. Se  $x$  é  $MA$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $MA_n$  e  $\Delta_y$  é  $A_n$ ;
13. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $B$  então  $\Delta_x$  é  $MB_n$  e  $\Delta_y$  é  $B_n$ ;
14. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $MB$  então  $\Delta_x$  é  $B_p$  e  $\Delta_y$  é  $MB_n$ ;
15. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $MA$  então  $\Delta_x$  é  $MA_n$  e  $\Delta_y$  é  $A_n$ ;
16. Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $A$  então  $\Delta_x$  é  $A_n$  e  $\Delta_y$  é  $A_n$ ;

O sistema p - fuzzy associado a esta base de regras admite três estados de equilíbrio não nulos que são:  $(x_1^*, y_1^*) = (19.62, 66.76)$ ,  $(x_2^*, y_2^*) = (48.07, 48.07)$  e  $(x_3^*, y_3^*) = (66.76, 19.62)$ .

Os autovalores de  $\mathbf{J}_{(x_1^*, y_1^*)}$  são  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.98 \pm 0.03i$ . Logo, o estado de equilíbrio  $(x_1^*, y_1^*)$  é assintoticamente estável. Para o segundo estado, os autovalores de  $\mathbf{J}_{(x_2^*, y_2^*)}$  são  $\lambda_1 = 1.01$  e  $\lambda_2 = 0.95$  e portanto, temos uma instabilidade onde  $(x_2^*, y_2^*)$  é um ponto de sela. Como os autovalores de  $\mathbf{J}_{(x_3^*, y_3^*)}$  são  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.98 \pm 0.064i$ , o estado de equilíbrio  $(x_3^*, y_3^*)$  é assintoticamente estável. A capacidade suporte de cada espécie isolada é  $k_1 = k_2 = 50.0148$ .

A convergência da solução do sistema p - fuzzy para um dos estados de equilíbrio depende somente da condição inicial como podemos ver pelo campo variacional na Figura 4.29 . Nos estados de equilíbrio  $(x_1^*, y_1^*)$  e  $(x_3^*, y_3^*)$  a coexistência das espécies ocorre em interação do tipo presa-predador. No primeiro ponto, a espécie 1 é a presa ( $k_1 < x_1^*$ ), enquanto que no segundo a espécie 1 é o predador ( $k_1 > x_3^*$ ).

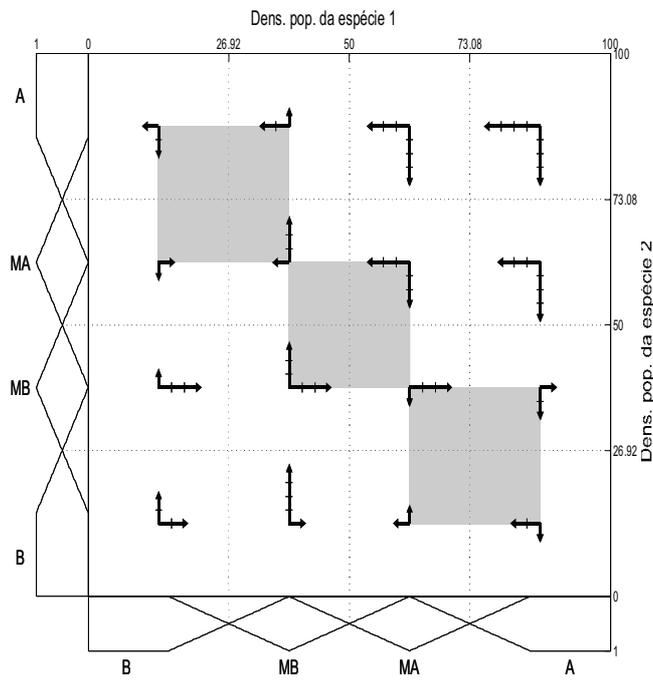


Figura 4.26: Base de regras para interações densidade-dependente.

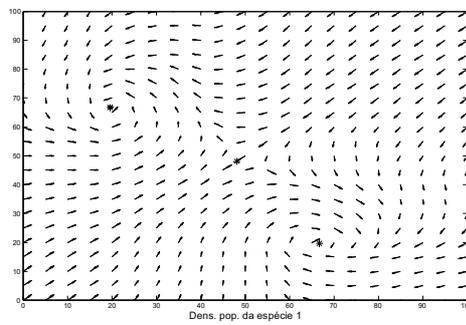


Figura 4.27: Campo variacional do sistema p - fuzzy com base de regras conforme Figura 4.26

Para a solução mostrada na Figura 4.28a, a condição inicial é  $(x_o, y_o) = (10, 10)$ . Observemos que a densidade populacional de ambas as espécies são crescentes no início porém, a espécie 2 (linha segmentada) atinge primeiramente o valor crítico em que a interação passa a ser prejudicial à espécie 1 (linha contínua). A inibição do crescimento provocada pela a densidade populacional da espécie 2, faz com que a densidade populacional da espécie 1 permaneça baixa, contribuindo assim para o crescimento populacional da espécie 2. Caso semelhante ocorre na solução da Figura 4.28b onde  $(x_o, y_o) = (90, 89)$ . Porém, neste situação, a espécie 1 é a beneficiada.

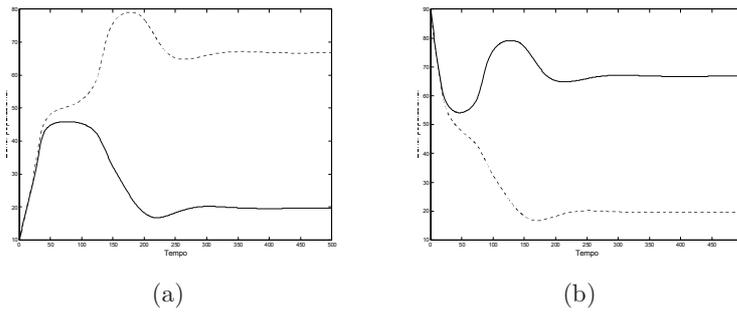


Figura 4.28: Solução do modelo  $p$  - fuzzy com base de regras conforme Figura 4.26.

O Plano de fase para ambas as soluções pode ser visto na Figura

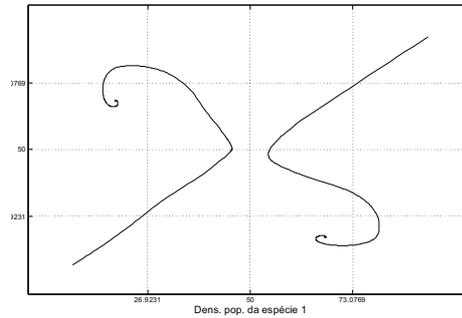


Figura 4.29: Plano de fase do sistema  $p$  - fuzzy com base de regras conforme Figura 4.26.

### 4.7.1 Ajuste de parâmetros

Assim com fizemos no caso unidimensional, os dados obtidos pelas bases de regras podem ser usados para ajustar parâmetros de modelos determinísticos de interação de interação entre espécies.

As equações de Volterra, dadas por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1 x \frac{k_1 - x - \beta_{12}y}{k_1} \\ \frac{dy}{dt} = r_2 y \frac{k_2 - y - \beta_{21}x}{k_2}, \end{cases} \quad (4.7.6)$$

são usadas na modelagem de interações facultativas para ambas as espécies. Os parâmetros destas equações podem ser estimados pelas bases de regras que propusemos neste nas seções anteriores para interações do tipo competição e mutualismo facultativas.

Os parâmetros de crescimento intrínscio  $r_1$  e  $r_2$  e as capacidades suporte  $k_1$  e  $k_2$  podem ser obtidas por procedimentos semelhantes aos usados para os modelos unidimensionais. Por exemplo, considerando que a espécie está ausente da interação, então ajustamos os valores  $r_1$  e  $k_1$  com os dados obtidos por  $\Delta_x(x, 0)$ .

As isóclinas das equações de Volterra são dadas pelas equações

$$k_1 - x - \beta_{12}y = 0 \quad \text{e} \quad k_2 - y - \beta_{21}x = 0.$$

Pelo algoritmo apresentado na seção anterior, podemos determinar o estado de equilíbrio  $(x^*, y^*)$  que pertence à ambas as isóclinas de modo que os parâmetros  $\beta_{12}$  e  $\beta_{21}$  são determinados por

$$\beta_{12} = \frac{k_1 - x^*}{y^*} \quad \text{e} \quad \beta_{21} = \frac{k_2 - y^*}{x^*}.$$

**Exemplo 4.6.** Consideremos a base de regras da Figura 4.12 para espécies em competição. O estado de equilíbrio para o sistema p - fuzzy associado a esta base de regras é  $(50, 50)$  e,  $k_1 = k_2 = 79.53$ . Portanto,  $\beta_{12} = \beta_{21} = 0.5906$ . Os parâmetros  $r_1$  e  $r_2$  podem ser determinados por minimização das funções

$$F_1(r) = \sum_{i=1}^n |f_1(x_i, r) - \Delta_x(x_i, 0)|^2 \quad \text{e} \quad F_2(r) = \sum_{i=1}^n |f_2(y_i, r) - \Delta_y(0, y_i)|^2$$

que para  $x = y = (0, 1, 2, \dots, 80)$  são  $r_1 = 0.0685$  e  $r_2 = 0.0856$ .

As soluções do modelo de Volterra e p - fuzzy pela base de regras da Figura 4.12 estão nas Figuras 4.30(a-b).

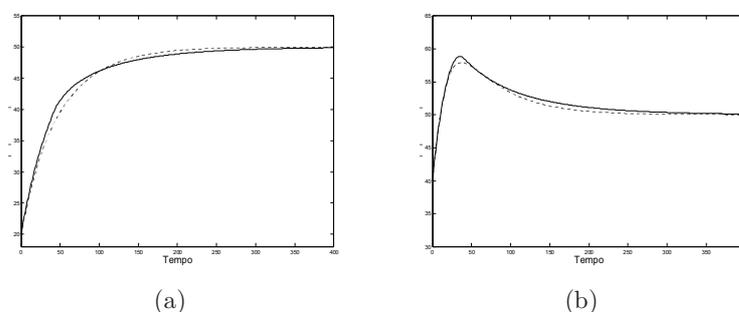


Figura 4.30: Soluções dos modelos de Volterra (segmentada) e p - fuzzy (contínua): condição inicial (14.8, 34.8);  $r_1 = 0.0685$  e  $r_2 = 0.0856$ ;  $k_1 = k_2 = 79.53$ ;  $\beta_{12} = \beta_{21} = 0.5906$ . (a) - dinâmica populacional da espécie 1. (b) - dinâmica populacional da espécie 2

Como podemos ver, as soluções do modelo p - fuzzy apresentam o mesmo comportamento das soluções das equações diferenciais determinística.

De modo análogo, podemos fazer ajustes para os demais modelos via sistemas p - fuzzy apresentados aqui.

## 4.8 Exercícios

**Exercício 1** - Estabeleça uma base de regras para dinâmica populacional com crescimento inibido de uma espécie que leve em consideração o efeito Allee demográfico. Isto é, para baixas densidades a população vai à extinção. Por outro lado, alta densidade populacional também contribui de maneira negativa para a reprodução da espécie. Faça uma análise qualitativa para a sequência gerada pelo sistema p - fuzzy por meio dessa base de regras.

**Exercício 2** - Considere uma interação do tipo presa - predador onde as presas estão sujeitas ao efeito Allee. Estabeleça uma base de regras e faça a análise qualitativa desta base de regras.

**Exercício 3** - Suponha que o mutualismo seja obrigatório apenas para uma espécie. Como deve ser uma base de regras que represente esta interação?

**Exercício 4** - Estabeleça uma base de regras para uma interação presa -

predador que é facultativa para o predador.

**Exercício 5** - Seja  $T_p = \{baixa, média\ baixa, média\ alta, alta, altíssima\}$  e  $T_{\Delta_p} = \{altíssima\ negativa, alta\ negativa, média\ alta\ negativa, média\ baixa\ negativa, baixa\ negativa, baixa\ positiva, média\ baixa\ positiva, média\ alta\ positiva, alta\ positiva, altíssima\ positiva\}$  os conjuntos dos termos linguísticos de entrada e saída, respectivamente. Apresente uma base de regras para cada uma das interações aqui apresentadas e faça uma análise qualitativa da solução por um sistema p - fuzzy.

**Exercício 6** - Considere uma interação envolvendo três espécies, uma presa e dois predadores. Estabeleça uma base de regras que descreva esta interação. Qual a principal dificuldade na formação das regras? Como fazer uma análise qualitativa da solução do modelo p - fuzzy para esta interação?

**Exercício 7** - Determine as regras para a variação relativa de uma dinâmica populacional com crescimento inibido com efeito Allee.



# Bibliografia

- [1] L. C. Barros. *Sobre sistemas dinâmicos fuzzy – teoria e aplicações*. Tese de doutorado, IMECC - UNICAMP, 1997.
- [2] V. M. P. Dos Santos. Sistema presa-predador generalizado. Tese de mestrado, IMECC - UNICAMP, Campinas - SP, abril 1989.
- [3] L. Edelstein-Keshet. *Mathematical models in biology*. Random House, 1988.
- [4] M. S. Cecconello. *Sistemas dinâmicos em espaços métricos fuzzy - Aplicações em Biomatemática*. Tese de doutorado, IMECC - UNICAMP, 2010.
- [5] A. Friedlander. *Elementos de programação não-linear*. IMECC - UNICAMP.
- [6] M.-J. Hernandez. Dynamics of transitions between populatiois interactions: a nolinear interaction  $\alpha$ -function defined. *Proc. R. Soc. Lond.*, B(265):1433–1440, 1998.
- [7] M.-J. Hernandez and I. Barradas. Variation in the outcome of populations interactions: bifurcations and catastrophes. *J. Math. Biol.*, (46):571–594, 2003.
- [8] O. Kaleva. Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 24(3):301–317, 1987.
- [9] W. G. Kelley and A. C. Peterson. *Difference equations: an introduction with applications*. Harcourt Brace Jovanovich, London, 1991.
- [10] G. J. Klir. *Fuzzy sets: an overview of fundamentals, applications and personal views*. Beijing Normal University Press, Beijing, 1995.

- [11] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. USA, 1989.
- [12] E. L. Lima. *Análise no espaço  $\mathbb{R}^n$* . Brasília, 1970.
- [13] E. L. Lima. *Análise real*. Coleção Matemática Universitária, 6 edition, 2002.
- [14] J. S. Martínez and S. A. Santos. *Métodos computacionais de otimização*. IMECC - UNICAMP, 1995.
- [15] J. D. Mendes da Silva. *Análise de estabilidade de sistemas dinâmicos p-fuzzy com aplicações em biomatemática*. Tese de doutorado, IMECC - UNICAMP, Campinas, 2005.
- [16] M. T. Mizukoshi. *Estabilidade de sistemas dinâmicos fuzzy*. Tese de doutorado, IMECC - UNICAMP, 2004.
- [17] J. D. Murray. *Mathematical Biology*, volume 19. Springer, 2 edition, 1989.
- [18] M. Oberguggenberger and S. Pittschmann. Differential equations with fuzzy parameters. *Math. Mod. Systems*, 5:181–202, 1999.
- [19] E. C. Pielou. *Mathematical ecology*. Kingston, July 1969.
- [20] E. Renshaw. *Modelling biological populations in space and time*. 1991.
- [21] C. Robinson. *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics and chaos*. 2 edition, 1998.
- [22] S. Seikkala. On the fuzzy initial value problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 24(3):319–330, 1987.
- [23] T. Prout and F. McChesney. Competition among immatures effects their adults fertility: population dynamics. *American Naturalist*, 126:521–558, 1985.
- [24] Yu. M. Svirezhev and D. O. Logofet. *Stability of biological communities*. Mir, 1983.
- [25] L. N. Trefethen and D. Bau III. *Numerical linear algebra*. SIAM, Philadelphia, 1997.
- [26] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *INFORMATION AND CONTROL*, (8):338–353, 1965.

- [27] Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr, W. C. *Equações Diferenciais com Aplicações*. HARBRA, São Paulo, 1988.
- [28] Cecconello, M. S., Brandão, A. J. V., e Bassanezi, R. C. Sobre o ponto de inflexão em modelos de crescimento inibido com condição inicial fuzzy. *Biomatemática*, 18:81–98, 2008.

# Índice

- Índice de crescimento relativo, 12
- Base de regra, 61
  - para competição, 89
  - para crescimento inibido, 78
  - para densidade - dependente, 103
  - para mutualismo, 98
  - para presa - predador, 92
- Capacidade suporte, 13, 23
- Ciclo limite, 20
- Competição, 17
- Crescimento inibido, 13
- Crítério de Dulac, 20
- Densidade - dependente, 30
- Efeito Allee, 41, 58, 108
- Equação logística, 16
- Equações de Volterra, 27
- Estado de equilíbrio, 13, 18, 36
  - assintoticamente estável, 13, 19, 36, 37
  - estável, 19
  - instável, 13, 19, 37
- Extensão de Zadeh, 45
- Fluxo fuzzy, 49
- Função de Lyapunov, 19
- Função de pertinência, 44
- Interação entre espécies, 17
- Modelo
  - de Holling - Tanner, 24
  - de Kolmogorov, 33
  - de Lotka - Volterra, 20
  - de Malthus, 14
  - de Malthus discreto, 36
  - de Montroll, 16
  - de Nicholson - Bailey, 38
  - de Verhulst, 15
  - logístico discreto, 37
- Modelos discretos, 35
- Mutualismo, 17, 18
- Número fuzzy, 44
  - triangular, 45
- Parasita - hospedeiro, 18
- Planta - herbívoro, 18
- Poincaré - Bendixson, 20
- Ponto de equilíbrio, 19
  - fuzzy, 50
- Presa - predador, 17, 18
- Problemas de valor inicial fuzzy, 46
- Região de equilíbrio, 64
- Resposta funcional, 24
- Sistema p - fuzzy, 60
  - bidimensional, 65
  - unidimensional, 64
- Solução fuzzy, 49
- Subconjunto fuzzy, 44
- Variáveis linguísticas, 60

## NOTAS EM MATEMÁTICA APLICADA

Arquivos em pdf disponíveis em <http://www.sbmac.org.br/notas.php>

1. Restauração de Imagens com Aplicações em Biologia e Engenharia  
Geraldo Cidade, Antônio Silva Neto e Nilson Costa Roberty
2. Fundamentos, Potencialidades e Aplicações de Algoritmos Evolutivos  
Leandro dos Santos Coelho
3. Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Águas Subterrâneas  
Edson Wendlander
4. Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais  
Maria Cristina de Castro Cunha e Maria Amélia Novais Schleicher
5. Modelagem em Biomatemática  
Joyce da Silva Bevilacqua, Marat Rafikov e Cláudia de Lello  
Courtouke Guedes
6. Métodos de Otimização Randômica: algoritmos genéticos e “simulated annealing”  
Sezimária F. Pereira Saramago
7. “Matemática Aplicada à Fisiologia e Epidemiologia”  
H.M. Yang, R. Sampaio e A. Sri Ranga
8. Uma Introdução à Computação Quântica  
Renato Portugal, Carlile Campos Lavor, Luiz Mariano Carvalho  
e Nelson Maculan
9. Aplicações de Análise Fatorial de Correspondências para Análise de Dados  
Homero Chaib Filho

10. Modelos Matemáticos baseados em autômatos celulares para Geoprocessamento  
Marilton Sanchotene de Aguiar, Fábila Amorim da Costa,  
Graçaliz Pereira Dimuro e Antônio Carlos da Rocha Costa
11. Computabilidade: os limites da Computação  
Regivan H. N. Santiago e Benjamín R. C. Bedregal
12. Modelagem Multiescala em Materiais e Estruturas  
Fernando Rochinha e Alexandre Madureira
13. Modelagem em Biomatemática (Coraci Malta ed.)
  - 1 - “Modelagem matemática do comportamento elétrico de neurônios e algumas aplicações”  
Reynaldo D. Pinto
  - 2 - “Redes complexas e aplicações nas Ciências”  
José Carlos M. Mombach
  - 3 - “Possíveis níveis de complexidade na modelagem de sistemas biológicos”  
Henrique L. Lenzi, Waldemiro de Souza Romanha e Marcelo Pelajo- Machado
14. A lógica na construção dos argumentos  
Angela Cruz e José Eduardo de Almeida Moura
15. Modelagem Matemática e Simulação Numérica em Dinâmica dos Fluidos  
Valdemir G. Ferreira, Hélio A. Navarro, Magda K. Kaibara
16. Introdução ao Tratamento da Informação nos Ensinos Fundamental e Médio  
Marcília Andrade Campos, Paulo Figueiredo Lima
17. Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações  
Rosana Sueli da Motta Jafelice, Laércio Carvalho de Barros,  
Rodney Carlos Bassanezi
18. Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira  
Socorro Rangel

19. Observar e Pensar, antes de Modelar  
Flavio Shigeo Yamamoto, Sérgio Alves, Edson P. Marques Filho,  
Amauri P. de Oliveira
20. Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações  
Eliana Xavier Linhares de Andrade, Cleonice Fátima Bracciali
21. Uma Introdução à Teoria de Códigos  
Carlile Campos Lavor, Marcelo Muniz Silva Alves, Rogério  
Monteiro de Siqueira, Sueli Irene Rodrigues Costa
22. Análise e Processamento de Sinais  
Rubens Sampaio, Edson Cataldo, Alexandre de Souza Brandão
23. Introdução aos Métodos Discretos de Análise Numérica de EDO e  
EDP  
David Soares Pinto Júnior
24. Representações Computacionais de Grafos  
Lílian Markenzon, Oswaldo Vernet
25. Ondas Oceânicas de Superfície  
Leandro Farina
26. Técnicas de Modelagem de Processos Epidêmicos e Evolucionários  
Domingos Alves, Henrique Fabrício Gagliardi
27. Introdução à teoria espectral de grafos com aplicações  
Nair Maria Maia de Abreu, Renata Raposo Del-Vecchio, Cybele  
Tavares Maia Vinagre e Dragan Stevanović
28. Modelagem e convexidade  
Eduardo Cursi e Rubens Sampaio
29. Modelagem matemática em finanças quantitativas em tempo discreto  
Max Oliveira de Souza e Jorge Zubelli
30. Programação não linear em dois níveis: aplicação em Engenharia  
Mecânica  
Ana Friedlander e Eduardo Fancello

31. Funções simétricas e aplicações em Combinatória  
José Plínio de Oliveira Santos e Robson da Silva
32. Semigrupos aplicados a sistemas dissipativos em EDP  
Carlos Raposo da Cunha
33. Introdução à Simulação Estocástica para Atuária e Finanças Usando R  
Hélio Côrtes Vieira, Alejandro C. Frery e Luciano Vereda
34. Modelos de Sustentabilidade nas Paisagens Amazônicas Alagáveis  
Maurício Vieira Kritz, Jaqueline Maria da Silva e Cláudia Mazza
35. Uma Introdução à Dinâmica Estocástica de Populações  
Leonardo Paulo Maia
36. Geometria de Algoritmos Numéricos  
Gregorio Malajovich
37. Equações Diferenciais, Teorema do Resíduo e as Transformadas Integrais  
Edmundo Capelas de Oliveira e Jayme Vaz Júnior
38. Métodos Matemáticos e Computacionais em Música  
Paulo Cezar Carvalho, Luiz Velho, Marcelo Cicconet e Sergio Krakowski
39. Métodos para Problemas Inversos de Grande Porte  
Fermín S. Viloche Bazán e Leonardo Silveira Borges
40. TerraME : Suporte a Modelagem Ambiental Multi-Escalas Integrada a Bancos de Dados Geográficos  
Tiago Garcia de Senna Carneiro e Gilberto Camara
41. Técnicas de Inteligência Computacional Inspiradas na Natureza - Aplicações em Problemas Inversos em Transferência Radiativa  
Antônio J. Silva Neto e José Carlos Becceneri
42. Avanços em Métodos de Krylov para Solução de Sistemas Lineares de Grande Porte  
Luiz Mariano Carvalho e Serge Gratton

43. Uma Abordagem para Modelagem de Dados com o Uso de Sistemas Neuro-Fuzzy: Aplicações Geoespaciais  
Luiz Carlos Benini e Messias Meneguette Jr
44. Construções Concretas e Geometria Dinâmica: Abordagens Interligadas para o Estudo de Cônicas  
Angela Rocha dos Santos