Notas em Matemática Aplicada e-ISSN 2236-5915

Volume 48, 2012

Editado por

Célia A. Zorzo Barcelos
Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Uberlândia, MG, Brasil

Eliana X.L. de Andrade
Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

Maurílio Boaventura
Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

2012

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7), as figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
http://www.sbmac.org.br/notas.php

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

2012

MODELAGEM MATEMTÁTICA EM TURBULÊNCIA ATMOSFÉRICA

Haroldo Fraga de Campos Velho
haroldo@lac.inpe.br

Laboratório Associado de Computção e Matemática Aplicada
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2012

Coordenação Editorial: Elbert Einstein Nehrer Macau

Coordenação Editorial da Série: Eliana Xavier Linhares de Andrade

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2012 Haroldo Fraga de Campos Velho.
Direitos reservados, 2012 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

Catalogação elaborada pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

Campos Velho, Haroldo Fraga.
Modelagem Matemática em Turbulência Atmosférica.
- São Carlos, SP: SBMAC, 2012, 87 p., 20.5 cm
- (Notas em Matemática Aplicada; v. 48)

e-ISBN 978-85-8215-008-5

1. Turbulência Atmosférica. 2. Teoria de Taylor. 3. Aplicações.
I. Campos Velho, Haroldo Fraga. II. Título. III. Série.

CDD - 51

Esta é uma republicação em formato de e-book do livro original do mesmo título publicado em 2010 nesta mesma série pela SBMAC.

Agradecimentos

A pesquisa desenvolvida ao longo dos anos em turbulência contou com a participação de muitos pesquisadores, que tenho prazer em mencionar: Alexandre A. Costa (FUNCEME), Cesar A. Caretta (Depto. de Astronomia, Universide de Guanajuato), Domenico Anfossi (ISAC, CNR), Fernando M. Ramos (LAC, INPE), Gerson P. Almeida (Depto. de Física, UECE), Gervásio Annes Degrazia (Depto. de Física, UFSM), Jonas C. Carvalho (Depto. de Meteorologia, UFPel), Nelson Jesus Ferreira (Meteorologia, INPE), Prakki Satyamurti (emérito CPTEC-INPE, Universidade do Estado do Amazonas), Reinaldo R. Rosa (LAC, INPE), Roger Pielke Sr. (emérito do Depto. de Ciência Atmosférica, CSU), Saulo R. de Freitas (CPTEC, INPE), Silvia Trini Casteli (ISAC, CNR), Steven Cocke (COAPS, FSU), Umberto Rizza (ISAC, CNR). Da mesma forma, importantes colegas de pesquisa são (foram) os (ex-)estudantes de pós-graduação: André B. Nunes, Débora R. Roberti, Francisco A. dos Santos, Franco C. Degrazia, Joice P. S. Barbosa, Renata S. R. Ruiz.

A todos, meu agradecimento sincero.

Um agradecimento importante à Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC) e a Comissão de Programa do Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC) por apoiar o tema para apresentação como um Mini-Curso do CNMAC-2010.

Finalmente quero agradecer aos órgãos de suporte à pesquisa: CNPq, FAPESP, CAPES e FINEP.

Conteúdo

Prefácio **9**

1 Introdução **11**
1.1 G. I. Taylor e a Turbulência 13

2 O Teorema de Taylor **17**
2.1 Difusividade da teoria cinética dos gases 17
2.2 Demostração do teorema de Taylor 18
2.3 Forma espectral do teorema de Taylor 21
2.4 Parâmetros da turbulência 22
2.4.1 Difusividade turbulenta 23
2.4.2 Escala de decorrelação lagrangiana 24
2.4.3 Comprimento de mistura 25

3 A Camada Limite Atmosférica **27**
3.1 Teoria de similaridade 30
3.2 Camadas limite estável (CLE) e neutra (CLN) 31
3.3 Camada limite convectiva (CLC) 35
3.4 Parametrizações para todas as condições de estabilidade . . . 37
3.5 Camada residual (CR) 38
3.6 Crescimento da camada limite convectiva (GCL) 43
3.7 Camada limite com nuvens (CLCN) 45

4 Teoria de Taylor em Modelos de Meso-escala **51**
4.1 BRAMS: modelo atmosférico 51
4.2 Resultados da simulação numérica 52

5 Aspectos Teóricos **59**
5.1 Um modelo para intermitência 59
5.1.1 Difusividade turbulenta considerando intermitência . . 62

5.2 Turbulência em cosmologia 64

6 Conclusão **69**

Bibliografia **73**

Prefácio

Uma prática comum é tentar desenvolver uma representação para turbulência partindo de uma forma funcional pré-estabelecida e então se estimam parâmetros para ajustar a curva aos dados de observação. A abordagem é válida e muito empregada. Vamos também usar desta estratégia. Mas fundamentalmente vamos buscar uma teoria que possa ser aplicada em diferentes situações.

O curso vai apresentar a teoria formulada por Geoffrey Ingram Taylor em 1921. Vamos mostrar que a teoria pode ser adaptada para formular representação da turbulência nos mais variados processos atmosféricos, inclusive produzindo respostas para problemas que permaneciam abertos (como no caso do modelo para o crescimento da camada limite convectiva e da primeira parametrização que leva em conta a intermitência).

O nome de G. I. Taylor está associado a uma grande quantidade de efeitos, como instabilidades do escoamento de fluidos (fluxo de Taylor-Couette, Rayleigh-Taylor e Saffman-Taylor), teorema de Taylor-Proudman, movimentos de partículas e colunas de Taylor, dispersão de Taylor-Aris.

Sobre as questões históricas, uma boa referência é a biografia escrita por Batchelor [6]. A intenção do texto é descrever de forma detalhada uma metodologia relativamente simples para modelagem de turbulência. Além da descrição da teoria, vamos apresentar resultados da aplicação das parametrizações no modelo atmosférico BRAMS.

Por último, é um prazer agradecer a todos os que estiveram presentes nesta jornada de mais de 20 anos.

São José dos Campos, 10 de maio de 2010.

Haroldo F. de Campos Velho

Capítulo 1

Introdução

O conhecimento clássico, das antigas civilizações da Grécia e de Roma, era difícil a distinção entre uma metafísica[1] da natureza e da física propriamente dita. Na filosofia moderna, metafísica é um ramo que estuda a essência do mundo, cujo ramo central é a ontologia (é a parte da filosofia que trata do *ser enquanto ser*[2]).

A ciência moderna tem seu começo com os estudos de Galileo Galilei e Johannes Kepler (para citar dois dos nomes mais relevanes), onde a natureza é descrita com a ajuda da matemática.

A distinção clara de uma metafísica da natureza, da ciência da física é dada de forma definitiva com os trabalhos de Isaac Newton. Principalmente, devido ao seu livro mais importante: *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Os estudos de Newton vão estabelecer que a ciência da natureza precisa de uma quantificação. Este casamento definitivo de conceitos que tentam explicar os fenômenos da natureza com descrição matemática, é a descrição da física.

---

[1]Metafísica (do grego *meta* = depois de, ou além de; e *physis* = natureza ou físico) é uma palavra cunhada pelos discípulos de Aristóteles, quando tentavam organizar os escritos do mestre, separando os escritos sobre a natureza (*physis*), dos textos sobre ética e política (*metaphysis*).

[2]Esta *definição* pode ter pouco significado para os não especialistas. Outra maneira de expressar metafísica é como um processo da inteligibilidade de todas as coisas [49]. Entretanto, a questão é controversa dentro da filosofia, pois para alguns filófosos a metafísica é uma ilusão, esta concepção conquistou o círculo de Viena (que tinha como líder Moritz Schlick e contava com nomes famosos como Rudolf Carnap, Otto Neurath, Hans Hahn, sendo Ernst Mach uma de suas fontes iluminadoras, mas o ídolo do grupo era Ludwig Wittgenstein) e dos filósofos da *desconstrução* do movimento pós-modernista. Kurt Gödel frequentava as reuniões do círculo de Viena, mas não compartilhava do positivismo lógico do grupo [38]. Este texto vai ficar fora deste debate filosófico.

Alguns membros da comunidade da matemática alegam que a concepção da matemática como uma ciência da quantificação não está totalmente correta. A matemática seria a parte do conhecimento humano que deve-se deduzir conclusões lógicas a partir de um conjunto de axiomas [56]. Um dos exemplos em que a experiência cotidiana e a intuição não podem ser usados para nos guiar no desenvolvimento da matemática é o das geometrias não-euclidianas. A batalha entre os formalistas e os intuicionistas está longe de um acordo. Mas, o tema deste texto não vai entrar nesta controvérsia. A matemática aplicada está muito bem definida no seu papel de gerar soluções computacionais para os vários desafios científicos.

O Livro II do Principia de Newton, trata da dinâmica dos fluidos. Mas, a formulação matemática completa das equações de evolução, que determinam o efeito das forças sobre um fluido, foi estabelecida por Claude-Louis Navier (engenheiro, matemático e físico francês) e George Gabriel Stokes (físico e matemático irlandês, o mesmo do *teorema de Stokes* do cálculo vetorial).

Contudo, as equações diferenciais parciais de Navier-Stokes (N-S), que descrevem o movimento dos fluidos, não estão totalmente completas. Sob determinados tipos de escoamentos, ainda não é possível obter-se uma descrição precisa. É o caso do escoamento turbulento. De fato, a turbulência tem se mostrado um dos problemas que persiste em permanecer sem uma descrição completa. Todavia, é preciso desenvolver alguma representação para a turbulência nas equações da dinâmica dos fluidos.

A turbulência é um complicador final numa equação que, por si só, já apresenta grandes dificuldades, pois as equações de N-S são não lineares e só em poucos casos tem uma solução analítica. Soluções aproximadas são obtidas por processos numéricos e inauguram a importante área da *dinâmica dos fluidos computacional* [33, 54]. Esta é uma área em que a matemática aplicada deu e dá contribuições fundamentais.

O século XX trouxe avanços notáveis, tanto do ponto de vista da ciência básica, com novas teorias da mecânica (relatividade em 1905 e quântica - a partir de 1901); como do ponto de vista tecnológico (o transporte aeronáutico, a era espacial, a física nuclear para produção de energia e a bomba atômica). Todavia, uma mudança tecnológica crucial aconteceu na metade do século XX: o surgimento do computador digital. Uma das primeiras aplicações do computador digital (na época também era costume se chamar *cérebro eletrônico*) foi realizar previsão numérica do tempo. Com o computador nasce uma nova ciência: a ciência da computação. Todavia, o sonho de se prever as condições meteorológicas foi delineado bem antes. Quase ao mesmo tempo do aparecimento da teoria da relatividade restrita, Vilhelm Bjerknes, em 1904, mostra que a dinâmica dos fluidos geofísicos pode ser vista como um problema de valor inicial [43, 86]. Vários anos de-

pois, o meteorologista inglês Lewis F. Richardson (1922) tentou resolver as equações da dinâmica dos fluidos para prever o tempo, empregando formulações algébricas das equações diferenciais; que poderiam ser resolvidas, em princípio, empregando cálculos (ou calculadora) mecânicos. Infelizmente, o exemplo de previsão descrito por Richardson apresentou erros de uma ordem de magnitude na pressão atmosférica predita em relação a pressão observada. Uma versão simplificada do conjunto de equações usadas por Richardson foi a base para o primeiro modelo numérico da previsão de tempo [20].

A moderna previsão numérica do tempo é um dos ícones do avanço científico do século XX, sendo um campo altamente especializado e que está continuamente evoluindo. Centros operacionais de previsão utilizam modelos computacionais complexos, que requerem os computadores mais potentes para sua resolução. O Centro de Previsão Numérica do Tempo e Estudos Climáticos (CPTEC) do INPE é o órgão brasileiro responsável pela previsão numérica do tempo no Brasil (`www.cptec.inpe.br`).

Entre a gama de dificuldades para modelar os movimentos da atmosfera está a representação da turbulência, que é um fenômeno permanente nos movimentos atmosféricos [10, 78].

1.1 G. I. Taylor e a Turbulência

Geoffrey Ingram Taylor foi um físico e matemático inglês e um grande especialista em dinâmica dos fluidos e teoria de ondas. Ele também é descrito como um dos maiores físicos dos século XX.

Em 1921, Taylor publicou um trabalho entitulado *Difusão por Movimentos Contínuos* [80], que lançou as bases da teoria estatística da turbulência. De acordo com o biógrafo de Taylor, George Batchelor (seu ex-aluno de doutorado e ele mesmo um dos expoentes no estudo teórico da turbulência), o artigo de Taylor de 1921 estava a frente de seu tempo [6] e parece ter sido o primeiro a introduzir correlações de velocidade no estudo da turbulência.

O principal resultado do artigo seminal de Taylor relaciona a taxa de crescimento da distância quadrática do deslocamento de elementos de fluido (X) em uma dada direção com a integral do coeficiente de correlação da componente da velocidade naquela direção em dois instantes de tempo distintos. É fórmula hoje clássica:

$$\frac{d\langle X^2\rangle}{dt} = 2\langle u\rangle \int_0^t R(\xi)d\xi \ .$$

A velocidade u é assumida uma função aleatória do tempo t.

Duas propriedade importantes emergem em dois casos limites, quando $t \to 0$ e quando $t \to \infty$. Ambas previsões teóricas destes casos limites estão de acordo com as observações [6]. O segundo caso, grandes tempos de difusão ($t \to \infty$), o coeficiente de difusividade turbulento é constante e expresso por:

$$\langle u \rangle \int_0^\infty R(\xi) d\xi \ .$$

A integral pode ser interpretada como um *tempo de mistura*, análoga, mas mais precisa do que, o já conhecido *comprimeno de mistura* [9].

Nas expressões acima, apareceram conceitos que necessitam esclarecimentos, como coeficiente de difusividade turbulento e comprimento de mistura. No próximo capítulo, vamos tentar re-fazer a trajetória de como se pode deduzir a equação fundamental de Taylor: partindo da teoria cinética dos gases, passando pela teoria de Einstein da difusão para explicar o movimento browniano, até a forma como é usada para representar a turbulência nas equações da dinâmica da atmosfera.

Após a demonstração do teorema de Taylor, vamos aplicar esta teoria estatística da turbulência para todas as condições termodinâmicas (diz-se *condições de estabilidade*, no jargão da meteorologia), inclusive para as condições de transição, onde quase não há estudos registrados na literatura.

Por muito tempo a comunidade científica não deu muita atenção à potencialidade da formulação de Taylor. Os pesquisadores brasileiros se destacaram na aplicação desta teoria na modelagem da turbulência na atmosfera. O nome do prof. Gervásio A. Degrazia merece destaque neste esforço, que recolocou a teoria de Taylor como um método alternativo e competitivo para a parametrização da turbulência.

Aqui, vamos descrever a aplicação da teoria de Taylor como um modelo de turbulência para diferentes camadas limites atmosféricas: camada estável noturna, camada neutra, camada convectiva, camada residual (é o decaimento da camada convectiva, quando a fonte térmica de sustenção da turbulência deixa de atuar), o crescimento da camada limite convectiva. Vamos mostrar como adaptar a teoria de Taylor para uma descrição da turbulência de nuvens do tipo strato-cumulus.

Um ponto que tem ocupado os teóricos da turbulência é como se distribuem os vórtices turbulentos nas várias escalas e como estes vórtices preenchem o espaço. As primeiras idéias eram que os vórtices ocupavam todo o espaço em todas as escalas. Mais recentemente, os pesquisadores foram se convencendo que o escoamento turbulento (registrado com um campo de vorticidade intenso) poderia não ser preenchido completamente [35]. É o regime de intermitência, onde a intensidade da vorticidade varia de forma abrupta no espaço. É possível que a teoria de Taylor pode ser usa-

da para tornar-se a primeira abordagem que leva em conta a intermitência numa parametrização da turbulência [13, 11].

A turbulência estará invariavelmente presente quando houver escoamento de fluidos. Uma proposta ousada, entretanto, foi feita pelo astrofísico russo Yakov Zel'dovich em 1970 [88]: a evolução cosmológica poderia ser descrita por uma dinâmica turbulenta.

Como avaliar a idéia de Zel'dovich?

Uma idéia seria avaliar o espectro de energia para vários *redshifts* [53] (é uma maneira de como os astrofísicos avaliam a *idade* do universo). Esta foi a avalição realizada por Caretta et al. [19]. Contudo, ao invés de avaliar o espectro de energia cinética turbulenta de dados da astronomia observacional, a análise foi realizada com dados simulados pelo modelo Λ–CDM, através do cálculo do espectro energia potencial gravitacional, em função do inverso de um raio de percolação. A análise foi realizada para verificar a distribuição de energia potencial em função do conteúdo de matéria escura contido numa esfera de raio variável. A conclusão foi que o escalonamento de energia segue aproximadamente uma lei de potência -5/3, que está de acordo com um dos principais resultados da turbulência devido ao matemático russo Andrei N. Kolmogorov [35]. Se esta descrição se mostrar adequada, todo um novo programa de pesquisa em cosmologia pode ser estruturado. Vamos mostrar como se chegou a estes resultados e como seria organizada uma pesquisa usando a teoria de Taylor para parametrizar a turbulência cosmológica e explicar a formação de estruturas em grande escala do cosmos.

Exercícios

1. Porque Batchelor [6] afirmou que o tempo de mistura, $\int_0^t R(\xi)d\xi$, é mais preciso do que o conceito análogo de *comprimento de mistura*?

2. Descreva em termos genéricos *dinâmica dos fluidos computacional* (DFC) e cite 2 exemplos de aplicações.

3. O que é intermitência?

Capítulo 2

O Teorema de Taylor

2.1 Difusividade da teoria cinética dos gases

A teoria cinética dos gases tem hipóteses bastantes simples. Aqui, adotar-se-á uma hipótese que nem sempre é assumida:

1. o gás é composto por partículas diminutas (átomos ou moléculas);
2. na ausência de um campo de forças, as partículas movem-se em linha reta;
3. é um gás diluido: colisões pouco freqüentes entre as partículas (para um gás não diluído, um termo para representar a matriz de colisão precisa ser considerado: equação de Boltzmann);
4. a energia cinética total de duas moléculas é igual, antes e depois da colisão (colisão elástica).

Várias propriedades podem ser deduzidas da teoria cinética. Aqui, o interesse é deduzir propriedades de transporte: coeficiente de difusividade. A concentração do gás é dada pela razão entre a massa e o volume, o fluxo é a razão entre a taxa (quantidade de massa por segundo) e a área transversal, ou seja:

$$c \equiv \frac{\text{massa}}{\text{volume}} \approx \left[\mathrm{g\,cm^{-3}}\right] \tag{2.1.1}$$

$$F = \frac{\text{massa/tempo}}{\text{área}} = \frac{m}{At} = uc\left[\mathrm{g\,s^{-1}\,cm^{-2}}\right] \ . \tag{2.1.2}$$

O fluxo líquido de massa é dado por:

$$F = F_1 - F_2 = [u_1c_1 - u_2c_2] \approx u_m[c_1 - c_2] \tag{2.1.3}$$

onde será assumido que: $u_1 \approx u_2 = u_m$, sendo u_m uma velocidade média das moléculas.

Observando a Figura 2.1, o balanço diferencial de massa é dado por:

$$c(x+\epsilon) - c(x) = \epsilon \frac{\partial c}{\partial x} \tag{2.1.4}$$

para um ϵ suficientemente pequeno. Assumindo que $\epsilon \approx \ell_m$, onde ℓ_m é um comprimento característico (como o livre caminho médio no movimento browniano e na teoria cinética), o fluxo líquido pode finalmente ser expresso como:

$$F = F_1 - F_2 = -u_m[c(x+\ell_m) - c(x)] = -\underbrace{(u_m \ell_m)}_{K} \frac{\partial c}{\partial x} \ . \tag{2.1.5}$$

É pertinente notar que a difusividade K é o produto de uma *velocidade característica* por um *comprimento característico*: $K \approx u_m \ell_m$.

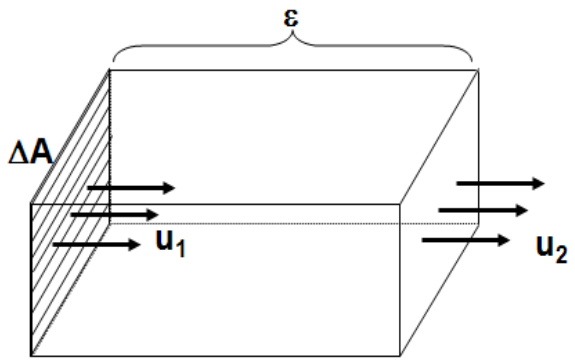


Figura 2.1: Fluxo de massa entre duas faces de superfície ΔA, com fluido atravessando a face A_1 com velocidade u_1 e a face separada por uma distância ϵ com velocidade u_2.

2.2 Demostração do teorema de Taylor

O artigo teórico de turbulência mais importante de G. I. Taylor foi escrito mais de uma década e meia depois do artigo de Albert Einstein sobre a explicação do movimento browniano. O jovem Einstein acreditava nas idéias novas que circulavam na época, como a hipótese de átomos e

moléculas, como advogava Ludwig Boltzmann, idéia que era combatida pelo maior físico da Austria, Ernest Mach.

A hipótese para explicar o movimento browniano era a seguinte: o pólem que se movia constante e aleatoriamente, como observado no microscópio pelo botânico Robert Brown, colidia constantemente com moléculas da água, que se deslocavam com uma velocidade aleatória, mas com uma velocidade média v_m (por exemplo), transmitindo quantidade de movimento aos grãos de pólem.

Não há descrição no artigo de Taylor de 2001 da motivação para a sua modelagem. Também não há registros na biografia escrita por Batchelor [6]. Contudo, é consistente supor que a modelagem de Taylor tenha seguido as mesmas idéias de Einstein para o movimento browniano, só que no escoamento turbulento temos vórtices, ao invés de grãos de pólem ou moléculas de água. A idéia plausível é a seguinte: os vórtices são parcelas de fluido com certa individualidade. No escoamento turbulento, temos vórtices de vários tamanhos (um modelo conceitual foi apresentado por Lewis Richardson, com o processo da cascata de energia, onde os vórtices maiores se partem para originar vórtices menores e assim por diante, até a escala da dissipação viscosa). Assim, vórtices pequenos podem colidir com vórtices maiores. A colisão muitas vezes não tem energia para quebrar o vórtice maior, mas tem energia suficiente para deslocar um pouco a trajetória do grande vórtice, que seguiria numa trajetória imposta pela direção da força de pressão (ou outras forças atuantes no sistema).

A analogia agora é clara: os grandes vórtices são como os grãos de pólem colidindo sistematicamente com os pequenos vórtices (que podem ser visualizados como tendo um comportamento similar as moléculas da água). Deste modo, os vórtices num escoamento turbulento terão uma trajetória aleatória, seguindo uma descrição do tipo movimento browniano.

É uma hipótese ousada e, como disse Batchelor, estava a frente do seu tempo.

Teorema 2.1. ***Teorema de Taylor:*** *Seja a velocidade de um escoamento turbulento $v(t)$ um processo estocástico homogêneo, com função de autocorrelação expressa por $\rho(t)$. A distância média entre dois elementos de fluido num escoamento turbulento é dada por:*

$$\langle x^2(t)\rangle = 2\langle v^2\rangle \int_0^t (t-\tau)\rho(\tau)\, d\tau \tag{2.2.6}$$

Prova: Primeiro, lembrando que a velocidade é a derivada do deslocamento

em relação ao tempo:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \Longrightarrow \quad x(t) = \int_0^t v(t')\, dt' \ .$$

A teoria cinética nos informa que difusividade é o produto de uma velocidade característica por um comprimento característico. Deste modo,

$$K \sim v(t)x(t) = x(t)\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}x^2(t)\right] = \int_0^t v(t)\, v(t')\, dt' \ .$$

Como o interesse é em quantidades médias, toma-se a média da expressão acima:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\langle x^2(t)\rangle\right] = \int_0^t \langle v(t)\, v(t')\rangle\, dt' \ . \tag{2.2.7}$$

A função de correlação $R(t)$ num processo estocástico homogêneo é independente do parâmetro t ($t = t' + \tau$). Neste caso, $R(t)$ é dada por:

$$R(\tau) = \langle v(t)\, v(t')\rangle = \langle v^2\rangle \rho(\tau)$$

onde $\rho(t)$ é a função de auto-correlação.

Integrando a Eq. (2.2.7), chega-se a equação do deslocamento entre duas parcelas de fluido:

$$\langle x^2(t)\rangle = 2\int_0^t \int_0^\tau \langle v(t)\, v(t')\rangle\, dt'\, d\tau = 2\langle v^2\rangle \int_0^t \int_0^\tau \rho(t') dt'\, d\tau \ . \tag{2.2.8}$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned}
\langle x^2(t)\rangle &= 2\langle v^2\rangle \int_0^t \int_0^\tau \rho(t')\, dt' = 2\langle v^2\rangle \left\{ \left[\tau \int_0^\tau \rho(t')\, dt'\right]_0^t - \int_0^t \tau\rho(\tau)\, d\tau \right\} \\
&= 2\langle v^2\rangle \left\{ \left[t \int_0^t \rho(\tau)\, d\tau\right] - 0 - \int_0^t \tau\rho(\tau)\, d\tau \right\} \ .
\end{aligned}$$

Finalmente, chega-se ao teorema de Taylor:

$$\langle x^2(t)\rangle = 2\langle v^2\rangle \int_0^t (t-\tau)\, \rho(\tau)\, d\tau \qquad \square \tag{2.2.9}$$

A equação (2.2.9) é uma relação lagrangiana, isto é, o sensor de medidas entre as parcelas de fluido viaja com a mesma velocidade do escoamento (ao invés de se tomar uma referência em algum ponto fixo do domínio, como se

faz numa descrição euleriana). Como uma última observação, é pertinente informar o corolário:

$$R(0) = \langle v^2 \rangle \implies \rho(0) = 1 \ . \tag{2.2.10}$$

Antes de finalizar a sessão, vamos realizar uma análise assintótica da difusividade. A forma mais primitiva, dada pela Eq. (2.2.8), será usada na análise. Vamos examinar o comportamento no início do processo ($t \to 0$) e para longos tempos de difusão ($t \to \infty$).

Para $t \to 0$, tem-se que $\rho(t) \to 1$, deste modo

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= 2\langle v_i^2(t) \rangle \rho(0) \int_0^t \int_0^\tau dt' \, d\tau \\ &= 2\langle v_i^2(t) \rangle \times 1 \times \int_0^t \tau \, d\tau \\ &= \langle v_i^2(t) \rangle t^2 \ . \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Para $t \to \infty$, tem-se que $\int_0^\infty \rho(t) dt \equiv T_{L_i}$ (escala de decorrelação lagrangiana), desta maneira

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= 2\langle v_i^2(t) \rangle \int_0^t \int_0^\tau \rho_{L_i}(t') \, dt' \, d\tau \\ &= 2\langle v_i^2(t) \rangle T_{L_i} \int_0^t d\tau \\ &= 2\langle v_i^2(t) \rangle T_{L_i} t \ . \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Fica claro que, para grandes tempos de difusão ($t \to \infty$), a distância entre parcelas de fluido num escoamento turbulento

$$\sigma_\alpha = \langle x \rangle \propto \sqrt{t} \ , \tag{2.2.13}$$

que está de acordo com a teoria de A. Einstein do movimento browniano.

2.3 Forma espectral do teorema de Taylor

A forma que é usada para representar a turbulência não usa a função de correlação, mas a transformada de Fourier da função de correlação (espectro da energia cinética turbulenta).

Definindo o par transformada/anti-transformada de Fourier da funcação de correlação:

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau \ , \tag{2.3.14}$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega)\, e^{-i\omega\tau}\, d\omega \ , \tag{2.3.15}$$

$$R(0) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega)\, d\omega \ . \tag{2.3.16}$$

Para um processo estocástico turbulento homogêneo, a função de correlação é uma função par:

$$\langle v(t)v(t+\tau)\rangle = \langle v(0)v(\tau)\rangle = \langle v(\tau)v(0)\rangle \implies R(\tau) = R(-\tau)$$

e a equação espectral torna-se

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\,[\cos(\omega\tau) + \mathrm{sen}(\omega\tau)]\ d\tau = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} R(\tau)\ \cos(\omega\tau)\, d\tau \ . \tag{2.3.17}$$

A última igualdade se estabelece porque a função seno também é uma função par e a integral sobre o domínio acima se anula.

Em meteorologia, a freqüência é dada em ciclos por segundo (Hz: s^{-1}), ao invés de rad.s^{-1}: $n = \omega/2\pi$. Desta forma, o espectro será dado por:

$$S(n) = 2\pi\Phi(2\pi n) \ . \tag{2.3.18}$$

Deste modo, as variâncias de velocidades ficam definidas por:

$$\langle v_i^2\rangle = \sigma_i^2 = R(0) = \int_0^{\infty} S_{L_i}(n)dn = \int_0^{\infty} n\, S_{L_i}(n)\, d(\log n) \ . \tag{2.3.19}$$

A última expressão é tipicamente usada para apresentar os dados experimentais. A notação S_{L_i} é para chamar a atenção que o espectro na expressão acima é medido na forma lagrangiana e o subscrito i identifica a direção ($i = u, v, w$).

2.4 Parâmetros da turbulência

O teorema de Taylor nos fornece uma maneira de calcular vários parâmetros da turbulência. Antes de deduzir estes parâmetros, vamos usar a forma

normalizada do espectro para redefinir a expressão do distanciamento de parcelas de fluido:

$$\begin{aligned}
\langle x^2(t)\rangle &= 2\sigma_i^2 \int_0^t (t-\tau)\,\rho(\tau)\,d\tau \\
&= 2\sigma_i^2 \int_0^t (t-\tau)\left[\int_0^\infty \left(\frac{S_{L_i}(n)}{\sigma_i^2}\right)\cos(2\pi n\tau)dn\right] d\tau \\
&= \sigma_i^2 t^2 \int_0^\infty F_{L_i}(n)\frac{\mathrm{sen}^2(n\pi t)}{(n\pi t)^2}\,dn\ . \qquad (2.4.20)
\end{aligned}$$

A quantidade $[\mathrm{sen}(n\pi t)/(n\pi t)]^2$ age como um filtro de passa-baixa [44].

Para o cálculo da difusividade, será usado a expressão deduzida na Eq. (2.2.7):

$$K_{\alpha\alpha} \equiv \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\langle x_i^2(t)\rangle\right] \quad \text{onde: } \left\{\begin{array}{l} \alpha = x, y, z \\ i = u, v, w \end{array}\right. . \qquad (2.4.21)$$

2.4.1 Difusividade turbulenta

A expressão da difusividade lagrangiana $K_{\alpha\alpha}$ é obtida derivando-se a Eq. (2.4.20) e substituindo na Eq. (2.4.21) [18, 31, 63]:

$$K_{\alpha\alpha} = \frac{\sigma_i^2}{2\pi}\int_0^\infty F_{L_i}(n)\frac{\mathrm{sen}(2\pi nt)}{n^2}\,dn\ . \qquad (2.4.22)$$

Antes de prosseguir, é pertinente fazer uma análise da equação para difusividade. Primeiramente, fica claro que a difusividade turbulenta é uma quantidade que depende tanto do espaço, quanto do tempo. Por outro lado, a expressão acima mostra que $K_{\alpha\alpha}$ também depende da variância de velocidade σ_i^2, que é um parâmetro próprio do escoamento. Deste modo, a difusividade turbulenta é uma propriedade que varia com o tempo e depende do tipo de escoamento, enquanto que a difusidade laminar é uma quantidade que não varia com o tempo e é uma propriedade do material (e não do escoamento).

Para obter a difusividade turbulenta euleriana, faz-se uso da hipótese de Gifford-Hay e Pasquill [63]:

$$\rho_{L_i}(\beta_i\tau) = \rho_i(\tau) \qquad (2.4.23)$$

onde ρ_i é a função de correlação euleriana e β_i é a relação entre as escalas de decorrelação lagrangiana e euleriana [10]:

$$\beta_i = \frac{T_{L_i}}{T_i} = \frac{\sigma_i}{U}\frac{\sqrt{\pi}}{4}\ . \qquad (2.4.24)$$

onde U é velocidade média do vento. Da Eq. (2.4.23), segue a relação entre os espectros (para uma ilustração da diferença entre os espectros, ver Fig. 2.2):

$$nF_{L_i}(n) = \beta_i \, nF_i(\beta_i n) \ . \tag{2.4.25}$$

Substituindo a expressão (2.4.25) na Eq. (2.4.22), chega-se a equação que é referência na parametrização de turbulência descrita neste texto [31]:

$$K_{\alpha\alpha} = \frac{\sigma_i^2 \beta_i^2}{2\pi} \int_0^\infty F_i(n) \frac{\mathrm{sen}(2\pi n t/\beta_i)}{n^2} \, dn \ . \tag{2.4.26}$$

O comportamento assintótico para a expressão acima, para longos tempos de difusão ($t \to \infty$), é expresso por:

$$K_{\alpha\alpha} = \frac{\sigma_i^2 \beta_i^2 F_i(0)}{4} \ . \tag{2.4.27}$$

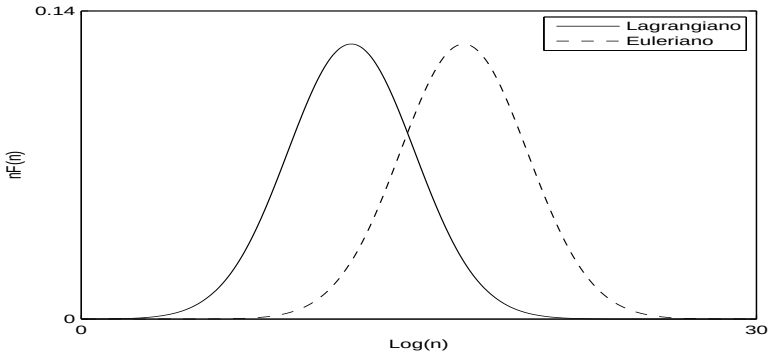


Figura 2.2: Densidade espectral hipotéticas ilustrando as direrenças entre dados lagrangeanos (L) e eulerianos (E).

2.4.2 Escala de decorrelação lagrangiana

Partindo da seguinte relação entre os parâmetros de turbulência [10]:

$$K_{\alpha\alpha} = \sigma_i^2 T_{L_i} = \sigma_i \ell_i \tag{2.4.28}$$

a escala de decorrelação lagrangiana pode ser calculada a partir da Eq. (2.4.27):

$$T_{L_i} = \frac{\beta_i^2 F_i(0)}{4} \ . \tag{2.4.29}$$

2.4.3 Comprimento de mistura

Como o último parâmetro a ser mostrado, partimos das expressões (2.4.27) e (2.4.28) para determinar o comprimento de mistura:

$$\ell_i = \frac{\sigma_i \beta_i^2 F_i(0)}{4} \ . \tag{2.4.30}$$

Este parâmetro pode ser usado em outros tipos de modelos de turbulência de mais alta ordem, como o modelo de Mellor-Yamada [55].

Exercícios

1. Justifique a última igualdade na Eq. (2.3.17).
2. Mostre todos os cálculos na dedução da Eq. (2.4.20).
3. Demonstre a relação assintótica (2.4.27) partindo da Eq. (2.4.26).

Capítulo 3

A Camada Limite Atmosférica

A atmosfera não é uma massa de ar homogênea ao redor do planeta Terra. Ela apresenta estratificação. A atmosfera terrestre está em permanente movimento, devido ao aquecimento diferencial originado pelo Sol. De modo geral, cerca de 80% da massa da atmosfera encontra-se contida abaixo de 10 Km de altitude e praticamente a totalidade da água atmosférica nas fases gasosa, líquida e sólida. A estrutura da atmosfera é apresentada na Figura 3.1. Da figura, pode-se notar a divisão em quatro camadas distintas: troposfera, estratosfera, mesosfera e termosfera - quando ocorre uma inversão do gradiente de temperatura onde se encontram a tropopausa, estratopausa e a mesopausa. Aqui, vamos nos ocupar da camada mais baixa da atmosfera, a troposfera. Nesta camada da atmosfera, é onde ocorrem a quase totalidade dos fenômenos meteorológicos. Na camada da troposfera mais próxima à superfície, se caracteriza como uma região onde ocorre uma intensa mistura vertical, devido ao fenômeno da turbulência, onde se nota correntes ascendentes e descendentes de ar.

A primeira camada na atmosfera é a camada limite planetária (CLP): uma camada fina em contato direto com o solo e os oceanos, onde os efeitos da viscosidade e da turbulência devem ser considerados. A evolução da CLP é controlada pela mistura turbulenta induzida pela diferença de temperatura entre a atmosfera e a fronteira física da crosta terrestre (produção térmica) e pelos ventos dos níveis mais baixos (produção mecânica). Na camada limite convectiva (CLC) a turbulência é gerada pelo fluxo de calor da Terra para a atmosfera e pelo cisalhamento (*shear*) do vento. A camada limite estável (CLE) apresenta um fluxo de calor inverso daquele na CLC entre a

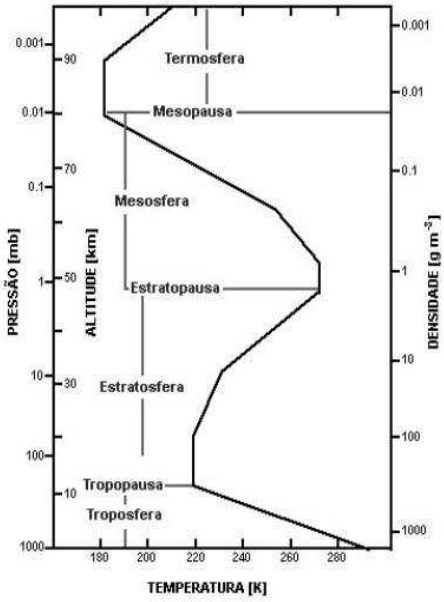


Figura 3.1: A estrutura térmica da atmosfera (Fonte: Adaptada de Wikipédia (2010)).

Terra e a atmosfera, e a turbulência se estabelece a partir de um balanço delicado entre o fluxo negativo de calor (enfraquecendo a turbulência) e do cisalhamento do vento (termo de produção da turbulência). A CLE surge no período noturno, podendo também ocorrer em dias nublados ou em outras situações especiais. Na camada limite neutra (CLN) a turbulência é predominantemente mecânica, isto é, fraco fluxo de calor e um campo de vento relativamente intenso.

Segundo Stull [78] a CLP é definida como sendo a região da troposfera que responde as forçantes de superfície com uma escala de tempo cerca de uma hora ou menos. Os efeitos superficiais agem através das trocas verticais de calor, quantidade de movimento, vapor d'água, emissões de poluentes e a modificações do escoamento do ar gerado pela influência do terreno. A espessura da camada limite é bastante variável no tempo e no espaço, com amplitudes de centenas de metros a poucos quilômetros. Uma das principais características da CLP é a variação de temperatura, ocorrida devido ao aquecimento e resfriamento da superfície. Essa variação mostra

que a CLP sofre uma interação diária entre mecanismos que determinam comportamentos distintos de sua estabilidade.

O ciclo diurno da CLP é apresentado na Figura 3.2. Ao nascer-do-sol o solo começa a se aquecer, com um fluxo positivo de calor proveniente do solo, o calor é transferido para camadas superiores, provocando uma mistura turbulenta das propriedades do ar. A presença de ventos faz existir assim duas fontes de produção da turbulência na CLP: térmica e mecânica. Durante a manhã, a mistura turbulenta diminui a estabilidade térmica observada no período noturno. Ao longo do dia, as estruturas convectivas intensificam-se provocando o crescimento da CLP. Devido a esta intensa mistura a CLC é também chamada de *Camada de Mistura* (CM). Os turbilhões que contém mais energia têm uma dimensão vertical da ordem de grandeza da própria altura da CLP, e podem atingir mais de 2 Km.

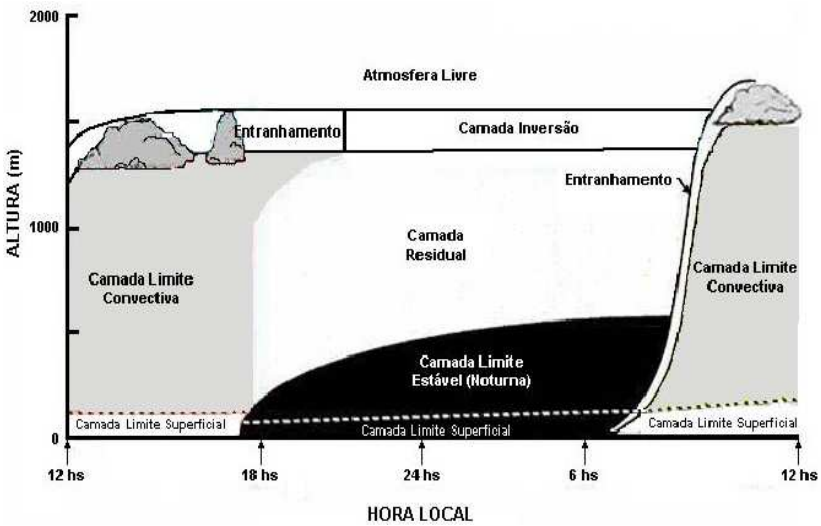


Figura 3.2: Ciclo diurno da CLP (Fonte: adaptada de Stull [78]).

Contudo, a modelagem completa da CLP é extremamente difícil. Pois além da turbulência estar permanentemente presente, a CLP passa por diversos processos físicos extremamente diferenciados; caracterizados por três condições limites:

1. *camada convectiva*: ocorrendo na presença do aquecimento solar, havendo então um fluxo de calor no sentido superfície-atmosfera;

2. *camada neutra*: caso em que a turbulência mecânica é o mecanismo dominante;

3. *camada estável*: no período noturno há uma inversão do fluxo de calor do que o ocorrido no caso convectivo, isto é, a corrente térmica passa a ser no sentido atmosfera-superfície.

Os fluxos turbulentos, produzidos pela combinação não linear das variáveis do escoamento, podem ser representados como um produto entre os gradientes das quantidade médias e por uma difusividade turbulenta, que, como visto, são determinadas pelo escoamento, e não pela natureza do fluido.

O objetivo neste capítulo é deduzir os modelos de turbulência para cada tipo de CLP a partir da teoria de G. I. Taylor.

A chave para desenvolver a parametrização com a teoria de Taylor se expressa no cálculo do espectro de energia cinética turbulenta. O modelo teórico do espectro é obtido tentando capturar a freqüência dos vótices mais energéticos (determinada por experimentos [78]) e com a lei de Kolmogorov no sub-domínio inercial [35].

3.1 Teoria de similaridade

A turbulência tem sido estudada tanto do ponto de vista experimental, como teórico. Uma formulação interessante é o desenvolvimento de uma *semi-empírica*, ou ainda *teoria de similaridade*. Em 1946, Obukhov desenvolveu uma escala de comprimento universal para a camada superficial da atmosfera, que foi a base para o desenvlvimento da teoria de similaridade de Monin e Obukhov (teoria de Monin-Obukhov) em 1954 [34]. O objetivo da teoria era uma descrição ou representação da turbulência com poucos parâmetros.

A teoria de similaridade de Monin-Obukhov é hoje uma das teorias clássicas para se descrever a turbulência, pois teve grande sucesso em descrever a camada superficial da PBL. A camada superficial ocupa cerca de 10% da altura total da camada limite, a partir da superfície.

A hipótese na teoria de Monin-Obukhov é que as quantidades relevantes para a descrição da estrutura da camada dependam de poucos parâmetros físicos dimensionais. Como conseqüência, a velocidade de fricção ou dinâmica ($u_* = \sqrt{\tau_s/\rho}$; τ_s é a tensão na superfície), o fluxo de calor ($q_* = \overline{w'\,\theta'}|_{z=0}$) e o parâmetro de convecção ($\beta_c = g/\bar{T} \simeq g/\bar{\theta}$), poderiam formar escalas de velocidade, comprimento e temperatura, como segue:

$$u_*; \qquad L = -\frac{u_*^3}{\kappa\beta_c q_*}; \qquad \theta_* = -\frac{q_*}{\kappa u_*} \tag{3.1.1}$$

onde $\kappa \simeq 0,4$ é a constante de von Kármán. Como $u_* > 0$, o sinal de q_* determina os sinais de L (comprimento de Monin-Obukhov) e θ_*. Analogamente ao método da parcela [47, 18], pode-se definir, através das escalas, o tipo de estratificação:

$$\begin{array}{ll} \text{instável:} & q_* > 0,\ L < 0,\ \theta_* < 0; \\ \text{estável:} & q_* < 0,\ L > 0,\ \theta_* > 0; \\ \text{neutra:} & q_* \to 0,\ |L| \to \infty, |\theta_*| \to 0\ . \end{array}$$

A parte fundamental da hipótese de Monin-Obukhov é a auto-similaridade dos perfis verticais de $\bar{u}$ e $\bar{\theta}$:

$$\frac{d(\bar{u}/u_*)}{d(z/L)} = h\left(\frac{z}{L}\right), \qquad \frac{d(\bar{\theta}/\theta_*)}{d(z/L)} = h_\theta\left(\frac{z}{L}\right);$$

que pode ser re-escrita numa forma mais conveniente

$$\frac{\kappa z}{u_*}\frac{d\bar{u}}{dz} = \xi\left(\frac{z}{L}\right), \qquad \frac{\kappa z}{\theta_*}\frac{d\bar{\theta}}{dz} = \xi_\theta\left(\frac{z}{L}\right); \tag{3.1.2}$$

onde ξ e ξ_θ são funções universais (determinadas por experimentos) da variável adimensional z/L.

A fórmula fundamental da teoria semi-empírica[1]

$$-\overline{u'w'} = K\,\frac{d\bar{u}}{dz}$$

pode ser combinada com (3.1.2) para se obter as difusividades

$$K = \frac{\kappa u_* z}{\xi(z/L)}, \qquad K_\theta = \frac{\kappa u_* z}{\xi_\theta(z/L)}\ . \tag{3.1.3}$$

Assim, a teoria da similaridade descreve uma quantidade característica adimensional no interior da CLP, seu perfil segue uma função universal. A forma dessa função, deve ser determinada a partir de dados de observação [34].

3.2 Camadas limite estável (CLE) e neutra (CLN)

Embora nas últimas décadas a compreensão da camada convectiva (instável) tem sido bem estabelecida, a camada limite estável (CLE) é bem menos conhecida, pois outros fenônemos interferem no processo, como ondas de gravidade. Entretanto, a modelagem da CLE noturna tem sofrido um avanço com

[1] A velocidade de frição é definida por: $u_*^2 \equiv \tau/\rho$.

as informações extraídas de alguns experimentos [22, 58, 76], revelando uma similaridade local dos fluxos turbulentos.

A teoria de similaridade é adaptada ao caso da CLE [31], onde a parametrização dependerá de outras quantidades no lugar das grandezas superficiais u_* e θ_*. Assume-se que as escalas apropriadas dependem dos valores locais da tensão $\tau(z)$, do fluxo de calor $\overline{w'\theta'}(z)$ e do comprimento de Monin-Obukhov local[2] Λ

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{U_*^2}{u_*^2} = (1 - z/h)^{\alpha_1} \tag{3.2.4}$$

$$\frac{\overline{w'\,\theta'}}{(\overline{w'\,\theta'})_0} = (1 - z/h)^{\alpha_2} \tag{3.2.5}$$

$$\frac{\Lambda}{L} = (1 - z/h)^{(3\,\alpha_1/2 - \alpha_2)} \tag{3.2.6}$$

onde $\tau_0 = u_*^2 = -\overline{u'\,w'}$ é a tensão superficial, h é a altura da camada limite turbulenta estável, z é a altura acima do solo, L é o comprimento de Monin-Obukhov e α_1, α_2 são constantes a serem determinadas por experimentos. Esta hipótese é aplicável em regimes estáveis sobre terreno homogêneo, onde a turbulência é contínua e não dominada por ondas de gravidade.

Um dos primeiros trabalhos da versão moderna do uso da teoria de Taylor como parametrização de turbulência foi o artigo de Degrazia e Moraes em 1992 [31].

Uma expressão geral para o espectro da velocidade turbulenta adimensional na camada limite superficial é dada por [61]

$$\frac{n\,S_i(n)}{u_*^2} = \frac{A\,f^{m_1}}{(1 + B\,f^{m_2})^{m_3}} \tag{3.2.7}$$

onde $f = n\,z/U$ é uma freqüência adimensional. De acordo com a teoria da similaridade Eq. (3.2.4), a expressão acima pode ser re-escrita como

$$\frac{n\,S_i(n)}{U_*^2} = \frac{A\,f^{m_1}}{(1 + B\,f^{m_2})^{m_3}} \tag{3.2.8}$$

sendo U_* a velocidade de fricção local.

O modelo espetral deve ser compatível com a lei de Kolmogorov no subdomínio inercial[3]. Baseado em argumentos de similaridade e da hipótese de turbulência congelada de Taylor[4], a lei de Kolmogorov no sub-domínio

[2] $\Lambda \equiv -\frac{\tau^{3/2}}{\kappa\,(g/T)\overline{w'\theta'}}$

[3] Lei de Kolmogorov: $E(k) = c\,k^{-5/3}\,\epsilon^{2/3}$, onde c é uma constante.

[4] Se k é o número de onda, n a freqüência e U a velocidade média, então: $k = (2\pi n)/U$.

inercial pode ser expressa por [30]

$$\frac{2\pi n}{U}\left(\frac{1}{u_*^2}\right)E\left(\frac{2\pi n}{U}\right) = c_i\left(\frac{\epsilon\kappa z}{u_*^3}\right)^{2/3}\left(\frac{2\pi n z}{U}\right)^{-2/3}\kappa^{-2/3}\ . \qquad (3.2.9)$$

Definindo $S_i(n) \equiv (2\pi/U)E(2\pi n/U)$ ou $nS_i(n) \equiv kE(k)$, e baseado em argumentos de similaridade

$$\begin{aligned} \frac{n\,S_i(n)}{U_*^2} &= c_i\,f^{-2/3}\,\Phi_\epsilon^{2/3} \qquad (3.2.10)\\ c_i &= \alpha_i\,a_1\,(2\,\pi\,\kappa)^{-2/3} \end{aligned}$$

onde $a_1 = 0.5 \pm 0.05$ [75], $\alpha_u = 1$ e $\alpha_v = \alpha_w = 4/3$ [61] (ver também [75], página 134)); e, $c_u = 0.3$ e $c_v = c_w = 0.4$. A função Φ_ϵ é a dissipação adimensional. Desta forma, para manter a consistência do modelo com a lei de Kolmogorov, duas exigências devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} m_1 - m_2\,m_3 &= -\frac{2}{3}\ ;\\ c_i &= \frac{A}{B^{m_3}}\,\Phi_\epsilon^{-2/3}\ . \end{aligned}$$

Outro critério a ser observado é que a posição do máximo espectral coincida com o máximo do modelo, isto é:

$$\frac{d}{df}\left[A\,f^{m_1}\,(1+B\,f^{m_2})^{-m_3}\right]\Big|_{f=(f_m)_i} = 0 \implies B = \frac{1.5\,m_1}{(f_m)_i^{m_2}} \qquad (3.2.11)$$

Dados experimentais mostram que para camada limite estável $m_2 = 5/3$ e $m_1 = m_3 = 1$, desta forma

$$\begin{aligned} B &= 1.5\,(f_m)_i^{-5/3}\ ,\\ A &= 1.5\,c_i\,(f_m)_i^{-5/3}\,\Phi_\epsilon^{2/3}\ ; \end{aligned}$$

permitindo obter a seguinte forma funcional para o espectro

$$\frac{n\,S_i(n)}{U_*^2} = \frac{1.5\,c_i\,f\,\Phi_\epsilon^{2/3}}{(f_m)_i^{5/3}\left[1+1.5\,(f/(f_m)_i)^{5/3}\right]}$$

o que implica na seguinte expressão para a variância:

$$\sigma_i^2 = \int_0^\infty S_i(n)\,dn = \frac{2.32\,c_i\,\Phi_\epsilon^{2/3}\,U_*^2}{(f_m)_i^{2/3}}\ . \qquad (3.2.12)$$

Substituindo a expressão da taxa de dissipação Φ_ϵ [76]:

$$\Phi_\epsilon = c_\epsilon \left(1 \ + \ 3.7 \ \frac{z}{\Lambda}\right) \tag{3.2.13}$$

com $c_\epsilon = 1.25$, finalmente obtem-se uma expressão para o espectro na forma adimensionalizada:

$$F_i(n) \equiv \frac{S_i(n)}{\sigma_i^2} = \frac{0.64\, f/(f_m)_i}{1 + 1.5\ [f/(f_m)_i]^{5/3}} \ . \tag{3.2.14}$$

Obtido o espectro, o passo seguinte é obter as expressões para a difusividade turbulenta, Eqs. (2.4.26) ou (2.4.27). Aqui vamos deduzir a expressão assintótica (2.4.27) na direção vertical. Além do valor da variância, é necessário obter-se o valor do espectro na origem:

$$S_i(0) = \frac{0,64\, z}{U\,(f_m)_i} \ ; \tag{3.2.15}$$

onde a freqüência do pico espectral e o máximo do espectro de camada neutra estão relacionadas pela seguinte função de estabilidade [75]:

$$q \ = \ (f_m)_i \ (f_m)_{n,i}^{-1} \ = \ 1 \ + \ 3,7 \left(\frac{z}{h}\right) \left(\frac{h}{\Lambda}\right) \ . \tag{3.2.16}$$

O máximo espectral de uma camada (neutra, inclusive) é determinado experimentalmente [75]:

$$\begin{aligned} (f_m)_{n,u} &= 0,058 \\ (f_m)_{n,v} &= 0,22 \\ (f_m)_{n,w} &= 0,33 \ . \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

A expressão para o máximo espectral torna-se:

$$(f_m)_i = (f_m)_{n,i} \left\{ 1 + 3.7 \left(\frac{z}{h}\right) \left[\frac{h/L}{(1 - z/h)^{3\,\alpha_1/2 - \alpha_2}} \right] \right\} \ . \tag{3.2.18}$$

Finalmente, para se obter a expressão assintótica para a difusividade turbulenta vertical K_{zz} (as expressões para outras direções são análogas), substitui-se as expressão de σ_w^2, β_w e a Eq. (3.2.15) na Eq. (2.4.27) [31, 16]

$$\frac{K_{zz}}{u_*\, h} = \frac{3\sqrt{\pi}}{16} \frac{(1 - z/h)^{\alpha_1/2}\,(z/h)}{1 \ + \ 3,7\,(z/h)\,(h/\Lambda)} \ . \tag{3.2.19}$$

Os valores para os expoentes α_1 e α_2 nas Eqs. (3.2.4) e (3.2.5) são determinadas experimentalmente [58]. Os valores de $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = 3$, extraídos de medidas em Minnesota, quando processos evolutivos não-estacionários estavam presentes. As medidas em Minnesota foram realizadas durante o período de transição de uma camada limite convectiva para uma estável. Estes valores podem ser usados para representar uma camada neutra (CLN). Para camada estável mais bem estabelecida, usam-se os os seguintes parâmetros: $\alpha_1 = 3/2$ e $\alpha_2 = 1$, resultado de medidas realizadas em Cabauw, quando a CLE atingiu condições mais estacionárias. As medidas em Cabauw foram realizadas aproximadamente três horas após o pôr do sol, evitando-se assim o período de transição.

3.3 Camada limite convectiva (CLC)

Para a CLC, a escala de velocidade é definida em termos da ação mais importante: o fluxo de calor entre a superfície e a atmosfera:

$$w_* = \left[\frac{g}{\theta_0} \overline{(w'\theta')}_0 \, h \right]^{1/3} \tag{3.3.20}$$

onde h é a altura da CLC e o primeiro termo do lado direito é o termo de *flutuação*, como referido na literatura inglesa, ou *empuxo*, como se diz em português, é expresso por $\beta_c = g/\theta_0$ (onde θ_0 é a temperatura potencial[5]). Lembrando a expressão do comprimento de Monin-Obukhov (3.1.1)

$$L^{-1/3} = \frac{1}{-u_*} \left[\frac{g}{\theta_0} \overline{(w'\theta')}_0 \, h \right]^{1/3} = \frac{w_*}{u_*} \left(\frac{-\kappa}{h} \right)^{1/3} . \tag{3.3.21}$$

Substituindo a Eq. (3.3.21) na Eq. (3.2.7) resulta num modelo de espectro com a escala de velocidade convectiva:

$$\frac{n \, S_i(n)}{w_*^2} = \frac{A \, f^{m_1}}{(1 + B \, f^{m_2})^{m_3}} \left(-\frac{\kappa L}{h} \right)^{2/3} . \tag{3.3.22}$$

A lei de Kolmogorov de -5/3 para o domínio inercial $E(k) = c\epsilon^{2/3} k^{-5/3}$ é re-escrita em termos da freqüência n ($k = 2\pi n/U$), mas agora formulada em termos de parâmetros de similaridade convectivos a Eq. (3.2.10) torna-se:

$$\frac{n \, S_i(n)}{w_*^2} = c_i \kappa^{2/3} f^{-2/3} \Psi^{2/3} \left(\frac{z}{h} \right)^{2/3} \tag{3.3.23}$$

[5]Temperatura potencial: $\theta \equiv T(p_0/p)^{R/c_p}$, onde T é a temperatura em Kelvin, p é a pressão e p_0 é uma pressão de referência (em geral: 1000 milibares), R é a constante dos gases e c_p é calor específico a pressão constante.

sendo $\Psi = \epsilon h / w_*^3$ uma função de dissipação adimensional [17, 15].

Como no caso neutro/estável, as constantes A e B da Eq. (3.3.22) são determinadas fazendo-se com que o espectro teórico se ajuste ao espectro de Kolmogorov (3.3.23) e fazendo-se o máximo do espectro coincidir com o máximo experimental, Eq. (3.2.11). Para o caso da CLC, os expoentes para Eq. (3.3.22) são: $m_1 = m_2 = 1$ e $m_3 = 5/3$. Deste modo, o espectro para a CLC é expresso por:

$$\frac{n\, S_i(n)}{w_*^2} = \frac{0,98\, c_i\, \frac{f}{q} \left(\frac{\Psi}{q}\right)^{2/3} (z/h)^{2/3}}{(f_m)_i^{5/3} \left[1 + \frac{1,5}{(f_m)_i} \frac{f}{q}\right]^{5/3}}$$

o que implica na seguinte expressão para a variância:

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \frac{0,98 c_i}{(f_m)_i^{2/3}} \left(\frac{\Psi}{q}\right)^{2/3} \left(\frac{z}{h}\right)^{2/3} \frac{z w_*^2}{qU} \int_0^\infty \left[1 + \frac{1,5}{(f_m)_i} \frac{nz}{qU}\right]^{-5/3} dn \\ &= \frac{0,98 c_i}{(f_m)_i^{2/3}} \left(\frac{\Psi}{q}\right)^{2/3} \left(\frac{z}{h}\right)^{2/3} w_*^2 \,. \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Finalmente [30]:

$$F_i(n) \equiv \frac{S_i(n)}{\sigma_i^2} = \frac{1}{(f_m)_i} \frac{f}{q} \left[1 + \frac{1.5}{(f_m)_i} \frac{f}{q}\right]^{-5/3} \,. \tag{3.3.25}$$

Seguindo o procedimento da seção anterior, é necessário calcular o espectro na origem:

$$S_i(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{16} \frac{\sigma_i\, z}{q\, (f_m)_i} \,. \tag{3.3.26}$$

onde a função de estabilidade para o caso convectivo é dada por [21]:

$$q = (f_m)_i\, (f_m)_{n,i}^{-1} = \frac{z/(\lambda_m)_i}{(f_m)_{n,i}} \tag{3.3.27}$$

$$(\lambda_m)_i = \begin{cases} 1.5\, h \;; \quad i = u, v \\ 1.8\, h\, \{1 - \exp[-4\,(z/h)] - 0.0003 \exp[8\,(z/h)]\} \;; \; i = w \end{cases}$$

sendo $(\lambda_m)_i$ o valor do comprimento de onda para o pico espectral e o valor do máximo para o caso neutro $(f_m)_{n,i}$ é dado pela Eq. (3.2.17).

Aqui vamos deduzir a expressão assintótica na direção vertical. Substituindo as expressões (3.3.26), (3.3.27) e (2.4.24) na Eq. (2.4.27), obtém-se

$$\frac{K_{zz}}{w_*\, h} = 0.15\, \Psi^{1/3} \left[1 - \exp\left(-4\, \frac{z}{h}\right) - 0.0003 \exp\left(8\, \frac{z}{h}\right)\right] \,. \tag{3.3.28}$$

3.4 Parametrizações para todas as condições de estabilidade

Baseado nos desenvolvimento mostrados nas seções anteriores, Degrazia e co-autores em 2000 [27] apresentaram um novo conjunto de parametrizações da turbulência para todas as condições de estabilidade (convectiva, estável e neutra) da CLP. Usando a teoria de Taylor e as propriedades espectrais observadas dos turbilhões que contém energia, os autores apresentam as expressões para coeficiente turbulento (K_i), para as escalas de comprimento e de tempo Lagrangianas (ℓ_i e T_i, onde $i = u, v, w$).

Supondo que as duas fontes de produção da turbulência, como mecanismos de cisalhamento e convecção na geração da turbulência, possam ser considerados mecanismos bem distantes no domínio dos dois espectros de energia (estável/neutro e convectivo), ou seja, possuem uma independência estatística entre as freqüências representativas de cada mecanismo. Neste caso, há uma interação desprezível entre as duas partes e ambas podem ser modeladas separadamente. Nestas condições a hipótese de superposição linear entre os mecanismos é plenamente justificável. Desta forma, o espectro de velocidades turbulentas pode ser expresso por

$$\begin{aligned} n\,S_i\,(n) &= \frac{1.06 c_i f\,(\Psi_\epsilon)^{2/3}\,(z/h)^{2/3}\,w_*^2}{\left[(f_m^*)_i^c\right]^{5/3}\left\{1+1.5\frac{f}{\left[(f_m^*)_i^c\right]^{5/3}}\right\}} \\ &+ \frac{1.5 c_i f\,(\Phi_\epsilon)^{2/3}\,u_*^2}{\left[(f_m^*)_i^{n+es}\right]^{5/3}\left\{1+1.5\frac{f^{5/3}}{\left[(f_m^*)_i^{n+es}\right]^{5/3}}\right\}} \end{aligned} \tag{3.4.29}$$

onde $S_i\,(n) = F_i\,(n)\,\sigma_i^2$ é o espectro de velocidade Euleriano; w_*^2 é a escala de velocidade convectiva; u_*^2 é a velocidade de fricção local; Ψ_ϵ e Φ_ϵ são as funções de dissipação adimensionalizadas; h é a altura da CLP; $f = nz/U$ é a freqüência máxima reduzida; U é a velocidade média do vento; $(f_m^*)_i^c$ é a freqüência máxima reduzida para o espectro convectivo; $(f_m^*)_i^{n+es}$ é a freqüência máxima reduzida para um espectro neutro ou estável; $c_i = \alpha_i \alpha_u (2\pi\kappa)^{-2/3}$ com $\alpha_u = 0.5 \pm 0.05$ e $\alpha_i = 1, 4/3, 4/3$ para u, v e w, respectivamente; finalmente, κ é a constante de von Karman.

O primeiro termo da Eq. (3.4.29) é o espectro de velocidade turbulenta gerado pelo fluxo de calor da superfície para a atmosfera: condição convectiva (CLC) [27] e o segundo termo representa o espectro gerado pelo cisalhamento do vento, podendo ser aplicado para as condições estável (CLE) [31] e neutra (CLN) [31], detalhadas anteriormente.

Com a expressão para o espectro, pode-se obter uma formulação para a difusividade turbulenta:

$$K_{\alpha\alpha} = 0,14\sqrt{c_i}\, z \left\{ \frac{w_*(\langle -L/h\rangle h/L)^{1/2}[\Psi_\epsilon(z/h)]^{1/2}}{[(f_m)_i^c]^{4/3}} + \frac{\Phi_\epsilon^{1/3} u_*}{[(f_m)_i^{n+es}]^{4/3}} \right\} \tag{3.4.30}$$

onde $\langle -L/h\rangle$ é o valor médio da condição de estabilidade para a CLC. Todos os demais parâmetros para a turbulência (ver seção 2.4) podem ser também determinados [27].

3.5 Camada residual (CR)

Segundo Stull [78], a CR inicia sua formação aproximadamente meia hora antes do pôr-do-sol, quando cessa o fluxo de calor do solo para a atmosfera. Não havendo um mecanismo de produção de energia para manter a CLC, os vórtices turbulentos entram num processo de decaimento. A camada resultante é denominada camada residual (CR), pois as suas variáveis de estado e concentração iniciais são as mesmas da CLC prévia. A CR não tem contato direto com a superfície terrestre, visto que sua base é deslocada pelo avanço da camada estável que se forma a medida que a noite avança. Assim, a CR não é afetada pelo transporte turbulento e propriedades relacionadas com a superfície.

Na verdade, há poucos estudos sobre a camada residual, alguns autores fizeram um estudo numérico com a técnica de simulação com grandes vórtices (LES) [57, 74].

Degrazia e co-autores [26] desenvolveram um coeficiente de difusividade turbulenta para o decaimento da CLC, utilizando a teoria estatística de [80] e a formulação de Heisenberg [77] para representar a interação não linear entre as escalas. O ponto de partida é a equação de evolução da energia cinética turbulenta.

Porém, há pelo menos duas formulações possíveis para a CR, que parametrizam o acoplamento não linear entre as escalas das turbulência: seguindo a abordagem de Heisenberg [26] e a outra usando a abordagem de Pao [42]. Neste texto, vamos apresentar a dedução seguindo a teoria de Heisenberg. O leitor interessado na abordagem de Pao, pode consultar as referências [42, 5].

Uma equação para o espectro de energia cinética turbulenta (ECT) pode ser deduzida a partir da equação de Navier-Stokes. Para um escoamento turbulento homogêneo, a equação de evolução para o espectro de energia pode ser obtida a partir da transformada de Fourier da energia cinética

turbulenta (ECT) [48]

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = M(k,t) + W(k,t) + \frac{g}{T_0}\, H(k,t) - 2\nu k^2\, E(k,t) \tag{3.5.31}$$

onde k é o número de onda, t é o tempo e (g/T_0) é o empuxo. O termo $M(k,t)$ é a produção de energia por efeito mecânico, $W(k,t)$ representa a interação não linear entre os vórtices de diferentes escalas, $H(k,t)$ identifica os efeitos térmicos e o último termo é a dissipação de energia pela viscosidade molecular.

Para um escoamento turbulento homogêneo e isotrópico, desprezando os termos de energia mecânica e térmica, a expressão para o espectro de energia torna-se

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = W(k,t) - 2\nu k^2 E(k,t)\ . \tag{3.5.32}$$

A hipótese de Heisenberg [77] é usada na parametrização do termo $W(k,t)$:

$$W(k,t) = -2\nu_T k^2 E(k,t) \tag{3.5.33}$$

onde ν_T é denominado coeficiente de viscosidade cinético turbulento. Escrevendo o espectro em termos de freqüência, ao invés do número de onda, a Eq. (3.5.32) torna-se:

$$\frac{\partial S(n,t)}{\partial t} = T(n,t) - \frac{8\pi^2 n^2 \nu}{U^2} S(n,t) \tag{3.5.34}$$

onde, como antes, $n = kU\pi/2$ (U é a velocidade média do vento), $T(n,t) = W(n,t)2\pi/U$ representa a transferência de energia entre as diferentes freqüências e $S(n,t) = E(n,t)2\pi/U$. A representação de Heisenberg pode ser expressa por

$$T(n,t) = -\frac{8\pi^2 n^2}{U^2} \nu_T S(n,t) \tag{3.5.35}$$

onde ν_T é um coeficiente que pode ser calculado diretamente a partir da teoria estatística de Taylor para grandes tempos de viagem [26]

$$\nu_T = \frac{\beta}{6}\frac{\sigma^2}{n_I} \tag{3.5.36}$$

onde n_I é a freqüência associada ao máximo do espectro no subintervalo inercial, dado em Hertz (Hz). A Eq. (3.5.34) pode ser resolvida integrando a equação do espectro

$$S(n,t) = S_0(n) \exp\left(-8\pi^2 \nu_T \frac{n^2}{U^2} t\right)\ . \tag{3.5.37}$$

Com a expressão da evolução do espectro, torna-se possível calcular o coeficiente de difusividade no decaimento empregando-se a teoria de Taylor. Baseado no modelo apresentado por Hanna em 1981 [45], é possível deduzir uma expressão para o decaimento da difusividade turbulenta

$$K_{\alpha\alpha}(z,t) = \frac{\beta}{6}\frac{\sigma_e^2(z,t)}{n_e} \tag{3.5.38}$$

onde n_e é a freqüência do pico espectral no subintervalo dos turbilhões mais energéticos e a variância σ^2 é dada por:

$$\frac{1}{2}\sigma_e^2(z,t) = \int_{n_e}^{\infty} S_0(n)\exp\left(-8\pi^2\nu_T\frac{n^2}{U^2}t\right)\,dn\ . \tag{3.5.39}$$

O coeficiente vertical de difusividade turbulenta K_{zz} em 1-D é calculado a partir do coeficiente de viscosidade cinético ν_T. Como ponto de partida, é assumido que a estrutura da CR nos primeiros estágios do decaimento era a mesma da CLC existente. Desta forma, o espectro de energia vertical inicial da CR possui a mesma forma que o da CLC. Uma expressão para este espectro em condições instáveis foi deduzido na seção 3.2:

$$S_{w,0}(n) = \frac{0.38(h/U)\,(a_w q_w)^{5/3}\,\Psi_\epsilon^{2/3} w_*^2}{\left[1+1.5a_w q_w(h/U)\right]^{5/3}} \tag{3.5.40}$$

onde $\Psi_\epsilon = \epsilon h/w_*^3$ é a função razão de dissipação molecular adimensional, w_* é a escala de velocidade convectiva, h é a altura da CLC. O pico espectral foi aproximado por $(\lambda_m)_w = a_w h q_w$ [30]. Como conseqüência temos $n_e = U/(a_w h q_w)$; onde $a_w = 1,8$ e o parâmetro de estabilidade $q_w = 1 - \exp(-4z/h) - 0,0003\exp(8z/h)$. O coeficiente de viscosidade cinemático pode ser calculado pela Equação (3.5.36) considerando a componente vertical do espectro de energia no subintervalo inercial, derivado por Kaimal et al. [21, 50]

$$S_w\,(n) = 0.36\left(\frac{\kappa U\Psi_\epsilon}{h}\right)^{2/3} w_*^2 n^{-5/3}\ . \tag{3.5.41}$$

Para a componente vertical da Equação (3.5.36) podemos escrever [45]

$$\nu_T = \frac{\beta_w}{6}\frac{\sigma_w^2}{n_I}\ . \tag{3.5.42}$$

Tomando $\beta_w = 0,55\,U/\sigma_w$, onde σ_w é obtida integrando a Eq. (3.5.40) no intervalo $[n_I,\ \infty]$, a expressão para a difusividade turbulenta no subdomínio inercial torna-se

$$\nu_T = 0,067 w_*\left(\frac{U}{n_I}\right)^{4/3}\left(\frac{\kappa\Psi_\epsilon}{h}\right)^{1/3} \tag{3.5.43}$$

Para estimar o valor de n_I usa-se os valores encontrados por Kaimal et al. [50]: $\lambda_w = 0,1h$, para o início do subintervalo inercial da CLC. Assim, é assumido que $n_I \approx 10\,U/h$ [26]. Fazendo as devidas substituições na Equação (3.5.43) obtém-se

$$\nu_T = 1.98 \times 10^{-3}\, h\, w_* \ . \tag{3.5.44}$$

Considerando os valores típicos da CLC: ($w_* = 2,0$ m/s e $h = 1500$ m) resulta em $\nu_T \approx 6,0$ m^2/s para a componente vertical.

A partir da componente vertical da Eq. (3.5.38), considerando o espectro representado pela Eq. (3.5.40), obtemos a seguinte expressão para a variância da componente vertical da velocidade turbulenta

$$\sigma_w^2 = 0,76 q_w^{5/3} w_*^2 \int_{(1,8q_w)^{-1}}^{\infty} \frac{\exp\left(-0,16(w_* t/h) f_h^2\right)}{(1+2,7 q_w f_h)^{5/3}}\, df_h \tag{3.5.45}$$

onde $f_h = nh/U$.

Analogamente as considerações feitas para deduzir a componente vertical do coeficiente de viscosidade ν_T, dado pela Eq. (3.5.42), pode-se repetir os argumentos para se obter uma equação para a componente vertical do coeficiente de difusão K_{zz}:

$$K_{zz} = \frac{\beta_w}{6} \frac{\sigma_w^2}{n_e} \tag{3.5.46}$$

onde σ_w^2 é a variância vertical turbulenta dada pela Eq. (3.5.45). Das Eqs. (3.5.45) e (3.5.46), e considerando $n_e = U/(1,8 q_w h)$, obtém-se a seguinte expressão para a componente vertical da difusividade turbulenta da CR.

$$K_{zz} = 0,15 q_w^{11/6} w_* h \left[\int_{(1,8q_w)^{-1}}^{\infty} \frac{\exp\left(-0,16(w_* t/h) f_h^2\right)}{(1+2,7 q_w f_h)} df_h \right]^{1/2} \ . \tag{3.5.47}$$

Para avaliar o modelo de decaimento proposto, os resultados analíticos foram confrontados com resultados obtidos com simulação de grandes vórtices (LES: *Large Eddy Simulation*) [26]. A figura 3.3 mostra a comparação da simulação com a parametrização.

Fica claro a partir da Figura 3.3 que a parametrização representa um decaimento, mas não reproduz adequadamente o decaimento simulado com LES. A falha mais grave no processo de modelagem matemática foi desconsiderar a contribuição do termo de fonte de energia térmica $H(k,t)$ na Eq. (3.5.31). Para obter uma melhor parametrização do decaimento, Goulart et al. [42] desenvolveram um modelo teórico com 2 itens distintos

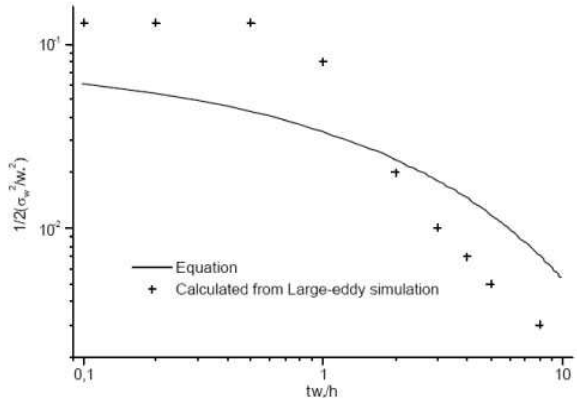


Figura 3.3: Evolução da ECT para a CR no nível $0,1\,h$. Linha sólida representa a Eq. (3.5.45) e as cruzes são resultados obtidos com LES [26].

do que foi apresentado aqui: (i) uma parametrização para o termo $H(k,t)$, e (ii) usar a parametrização de Pao [62] para o termo $W(k,t)$:

$$W(k,t) = W_a(k,t) + W_b(k,t). \tag{3.5.48}$$

O primeiro termo da equação acima é variação da correlação de velocidade, que é independente da existência da fonte de energia. Nesta hipótese, a expressão sugerida é [62]

$$W_a(k,t) = -\frac{\partial}{\partial k}\left(\alpha^{-1}\epsilon^{1/3}k^{5/4}E(k,t)\right) \tag{3.5.49}$$

onde α é a constante de Kolmogorov ($\alpha \approx 1.5$).

O segundo termo representa a energia convectiva da fonte térmica (grandes vórtices) e como conseqüência $W_b(k,t)$ é zero no subintervalo inercial (pequenos vórtices). Utilizando a análise dimensional na expressão que satisfaz tal condição pode ser descrita por

$$W_b(k,t) = -\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{c_2}{w_* z_i}\epsilon^{2/3}k^{1/3}E(k,t)\right) \tag{3.5.50}$$

onde c_2 é a constante adimensional determinada a partir das condições iniciais.

Uma expressão para o termo de produção térmica $H(k,t)$ foi apresentada por Goulart et al. [42]

$$\frac{g}{T_0}\,H(k,t) = \frac{g}{T_0}H_0(k)T(t), \tag{3.5.51}$$

onde $T(t)$ é uma função adimensional [74] que descreve a dimimuição do fluxo de calor da superfície $H_0(k)$ antes do início do decaimento da CLC.

A nova parametrização para o decaimento [42] permitiu uma boa concordância com os resultados de LES (não mostrados aqui).

3.6 Crescimento da camada limite convectiva (GCL)

As camadas limites de transição, como a camada residual e o crescimento da camada limite convectiva (GCL: *Growth of Convective boundary Layer*) há muito menos estudos na literatura. Se há pouco estudo para camada residual, a literatura é muito mais escassa para o crescimento da CLC. O primeiro estudo que tentou descrever analiticamente a evolução da energia cinética turbulenta de uma camada limite noturna para uma CLC foi apresentada por Campos Velho em 2003 [12]. Uma descrição mais completa de estudos do crescimento da camada limite convectiva (GCL) são apresentados nas referências [60, 59].

Tal como foi realizado na seção anterior, o objetivo aqui também é desenvolver uma expressão analítica para o espectro do crescimento da CLC. O resultado é obtido com a integração da equação de evolução da ECT (3.5.31).

A hipótese de Heisenberg para representar a interação entre vórtices de diferentes escalas (3.5.34) é empregada aqui. A *viscosidade turbulenta* de Heisenberg pode ser expressa como

$$\nu_I(k) = \alpha \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k')}{k'^3}}\, dk' \ . \tag{3.6.52}$$

O parâmetro α é determinado experimentalmente. Entretanto, Degrazia et al. [26] deduziram uma expressão para ν_I a partir da teoria de turbulência estatística de Taylor [80]

$$\nu_I = 0.038 \left(\frac{\Psi}{z_i}\right)^{1/3} \left(\frac{U}{n_I}\right)^{4/3} w_* \tag{3.6.53}$$

onde Ψ é a função dissipação adimensional: $\Psi = \epsilon z_i / w_*^3$, e $\epsilon = 0.7\langle e\rangle^{3/2}/\Delta s$ é a razão da dissipação [42], onde $\langle e\rangle$ é a energia cinética média na escala de sub-grade, $\Delta s = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^{1/3}$ é uma média do espaçamento espacial, onde $\Delta x, \Delta y$ é a discretização espacial horizontal e Δz a vertical.

Stanisic [77] destaca que existem algumas objeções à teoria de Heisenberg. A principal objeção deve-se a suposição que os pequenos turbilhões são estatísticamente independentes dos grandes turbilhões. De fato, em

algumas regiões do espectro a hipótese de Heisenberg não é verificada, principalmente na região espectral onde a dissipação viscosa se torna apreciável (nesta região a teoria do Heisenberg prediz $E(k) \approx k^{-7}$, que está em desacordo com resultados experimentais). Entretanto, a Eq. (3.6.53) foi deduzida consideranado que $n_e << n_i << n_d$, onde n_e, n_d são freqüências representativas de vórtices que contêm energia e da dissipação, respectivamente [26]. A freqüência n_i pertence a região espectral crítica para a teoria de Heisenberg.

O ponto chave do modelo analítico sugerido [12] é a representação da dependência temporal do termo de produção térmica $H(k,t)$, modelado como uma função de Heaviside

$$H(k,t) = H_0(k)\varphi(t) = \begin{cases} H_0(k) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} . \tag{3.6.54}$$

Substituindo as Eqs. (3.5.34) e (3.6.54) na Eq. (3.5.31) e integrando em relação ao tempo, temos

$$E(k,t) = E_0(k)e^{-k^2(\nu_I+\nu)t} + \frac{H(k)}{2k^2(\nu_I+\nu)}\left[1 - e^{-k^2(\nu_I+\nu)t}\right] . \tag{3.6.55}$$

Para se ter uma solução completa para a formulação da evolução do espectro, duas questões precisam ser endereçadas: quais são as expressões para os espectros $E_0(k)$ e $H(k)$? $E_0(k)$ é o espectro da camada limite antes de se iniciar o processo convectivo, e $H(k)$ é o espectro de uma CLC plenamente desenvolvida.

As seções 3.2, 3.3 e 3.4 descrevem modelos espectrais 1-D para todas as direções (x, y, z) para camadas estável, neutra e convectiva. Entretanto, o espectro na Eq. (3.6.55) é 3-D. O espectro 3D pode ser obtido de um espectro 1D usando uma formulação proposta por Kristensen et al. [52] (a dedução dos principais resultados do artigo [52] é desenvolvida em detalhes na tese de doutorado de Charles R. P. Szinvelski [79]).

Não há dados experimentais para examinar a validade do modelo teórico (3.6.55). A idéia então é seguir na mesma direção como comentado na seção anterior: usar dados de simulação (LES) para avaliar o resultado teórico. Este foi o objetivo da tese de doutorado de André B. Nunes [60]. Haviam desafios a serem vencidos, pois ninguém tinha realizado tal simulação com LES. Foi preciso avaliar se os resultados de LES seriam razoáveis. Um dos resultados relevantes obtidos por Nunes foi propor e analisar um experimento numérico para avaliar (3.6.55).

A Figura 3.4 confronta resultados de LES e do modelo teórico (3.6.55). Nunes et al. [59] usaram dois modelos para representar as variâncias turbulentas: a parametrização de Kristensen et al. [52] (M1) e a parametrização de Degrazia et al. [30] (M2).

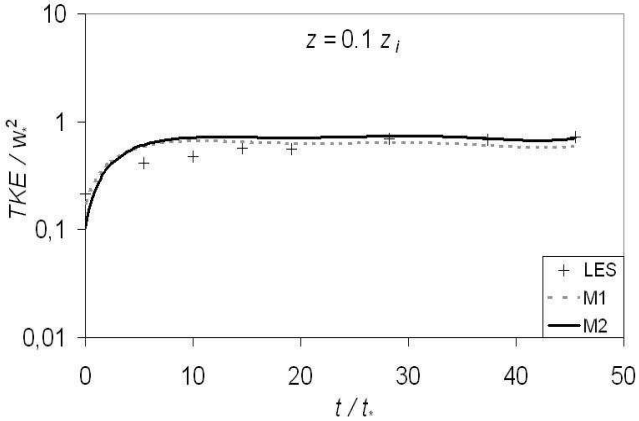


Figura 3.4: Evolução da ECT para GBL no nível $0,1\,h$. Linha sólida e pontilhada representam a Eq. (3.5.45) e as cruzes são resultados obtidos com LES [59].

Os modelos e variâncias baseados em [52] e em [30] (respectivamente: M1 e M2) tem resultados similares em quase todos os níveis da GCL e reproduzem bem os resultados de LES, exceto próximo ao topo da GCL, onde o modelo baseado na teoria de Taylor [59] tem um desempenho muito melhor.

3.7 Camada limite com nuvens (CLCN)

Turbulência está presente na atmosfera não somente próxima ao solo. Na formação de nuvens, o processo de troca turbulenta é também observado. De fato, nuvens são zonas de condensação que se formam devido a correntes de convecção na direção verical. Portanto, é razoável supor que neste processo de deslocamento de fluido se desenvolva um escoamento turbulento e é necessário desenvolver uma parametrização para este cenário.

Vários experimentos são realizados para a compreensão do papel das nuvens e de sua estrutura. Um destes experimentos é o ACE-2: 2nd *Aerosol Characterization Experiment* [67], investigando diversos aspectos: transporte turbulento, resfriamento radiativo, entranhamento, subsidência em grande escala.

Baseado na teoria de Taylor, Almeida et al. [1] propuseram uma parametrização para a turbulência numa camada limite coberta com nuvens do tipo

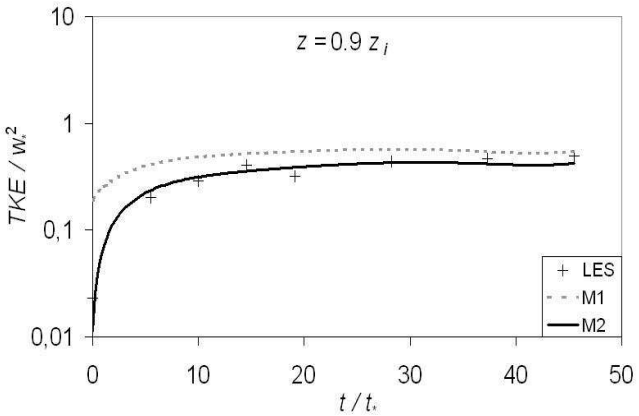


Figura 3.5: Evolução da ECT para GBL no nível $0,9\,h$. Linha sólida e pontilhada representam a Eq. (3.5.45) e as cruzes são resultados obtidos com LES [59].

stratocumulus (CLCN: Camada Limite Coberta de Nuvens) (no artigo de Almeida et al. [1], usa-se o acrônimo, STBL: *stratocumulus-topped boundary-layer*). É conhecido que este tipo de nuvem tem uma grande influência no balanço radiativo global. Devido as suas características, stratocumulus vem merecendo uma grande atenção para a sua correta representação em modelos meteorológicos, em especial em modelos de circulação geral (MCG) de previsão numérica do tempo e clima.

Numa CLC, Degrazia et al. [30] mostraram que a componente vertical da difusidade turbulenta pode ser descrita como:

$$K_{\alpha\alpha} = \frac{\sqrt{\pi}}{16}\sigma_i\lambda_i \ . \tag{3.7.56}$$

Para a componente vertical, tem-se $K_{zz} = 0,11\sigma_i\lambda_i$, que está em boa concordância com o resultado obtido por Hanna [46]: $K_{zz} = 0,09\sigma_i\lambda_i$. Contudo, é preciso uma expressão para o comprimento de onda λ_w. Almeida [2] usou dados do experimento ACE-2 para ajustar a seguinte curva [2]:

$$\lambda_w = \begin{cases} 3,7z & z < 0,1h \\ 1,461 - \exp[-3,15(z/h)] - 0,003\exp[7,07(z/h)] & 0,1h \leq z \leq 0,6h \\ 4,7h\exp[-2,7(z/h)] & z > 0,6h \end{cases} \ . \tag{3.7.57}$$

Há um ajuste adicional, que tem o objetivo de reduzir o excesso de

difusão no topo da CLCN e evitar a dissipação da camada de nuvem na modelagem. Deste modo, é assumido que λ_w decai exponencialmente próximo ao topo da CLCN (acima de $0.95h$), de acordo com [1]

$$\lambda_{w,topo} = \lambda_w \exp\left[-37\left(\frac{z}{h}\right) - 0,95\right] \ . \tag{3.7.58}$$

A Figura 3.6 mostra os dados do experimento ACE-2 e a curva ajustada para o parâmetro λ_w.

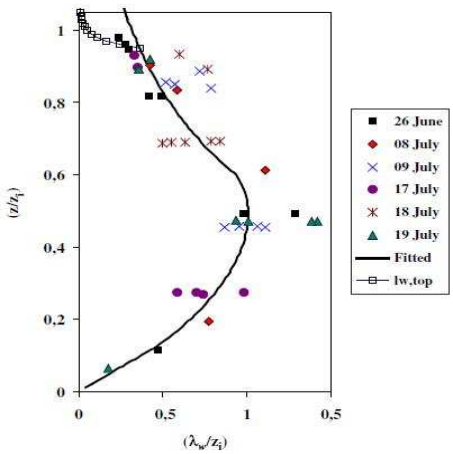


Figura 3.6: Perfil vertical de λ_w: dados de ACE-2 são pontos discretos, o ajuste proposto é a linha contínua e $\lambda_{w,topo}$ é a linha com quadrados.

Para completar a parametrização, é necessário uma expressão para σ_w. É assumido que σ_w é proporcional a energia cinética turbulenta e, que assume expressões distintas, próxima e longe da superfície:

$$\sigma_w = \begin{cases} c_1\sqrt{e} & z > 0,3h \\ \left[c^* + 1,8(z/h)^{2/3}(1 - 0,8(z/h)^2\right]\sqrt{e} & z \leq 0,3h \end{cases} \tag{3.7.59}$$

onde: $c_1 = c^* = 2/3$ [1]. Médias horárias do perfil da componente vertical da variância σ_w^2 (3.7.59) são mostrados na Figura 3.7, comparando o resultado da parametrização da variância contra dados do experimento ACE-2 [1].

A parametrização de turbulência em nuvens foi testada usando um modelo simples de coluna [37]. O experimento ACE-2 ocorreu de 15 de junho a 31 de julho de 1997 sobre o oceano Atlântico norte [67]. Almeida et al. [1] simularam dois casos: 26 de junho de 1997 e 08 de julho de 1997.

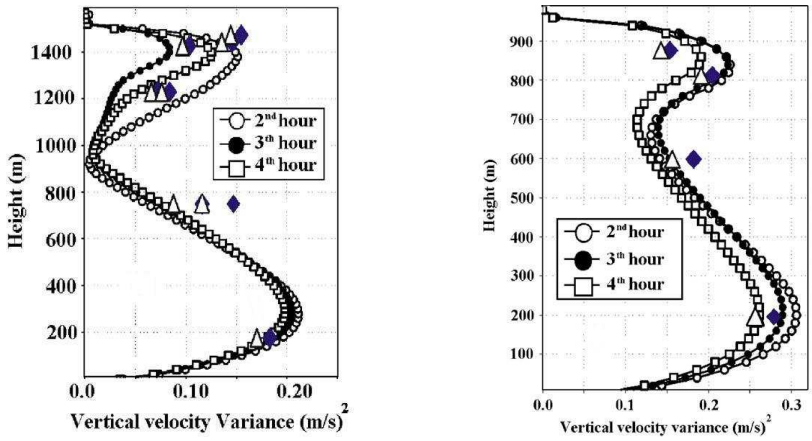


Figura 3.7: Variâncias médias horárias: (a) caso 26-junho-1997; (b) caso 08-julho-1997 [1].

O primeiro caso é bem mais difícil de ser simulado, pois foi uma situação em que a estrutura do stratocumulus oscilava continuamente, possivelmente caracterizando uma transição de stratocumulus para cumulus [1].

As figuras 3.8 e 3.9 representam os resultados da simulação com a parametrizações (3.7.57) e (3.7.59) para a difusividade turbulenta (3.7.56) aplicada ao modelo de coluna [37].

Exercícios

1. Demonstre a relação (3.2.6).
2. Mostre todos os cálculos da integração mostrada na Eq. (3.2.12).
3. Que tipo de camada limite se deve esperar sobre o oceano: estável, neutra, convectiva, ou todas sempre ocorrem?

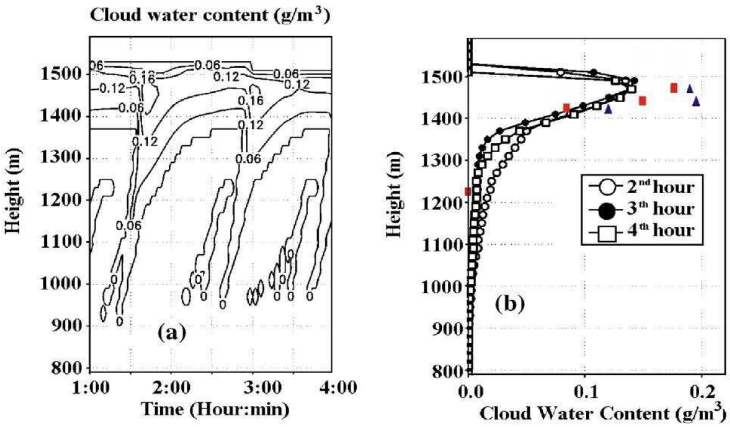


Figura 3.8: Caso 26-junho-1997: (a) evolução temporal da distribuição vertical do conteúdo de água da nuvem ($\mathrm{g\,cm^{-3}}$); (b) médias horárias do conteúdo de água da nuvem. Triangulos e quadrados indicam médias de observações de aviões [1].

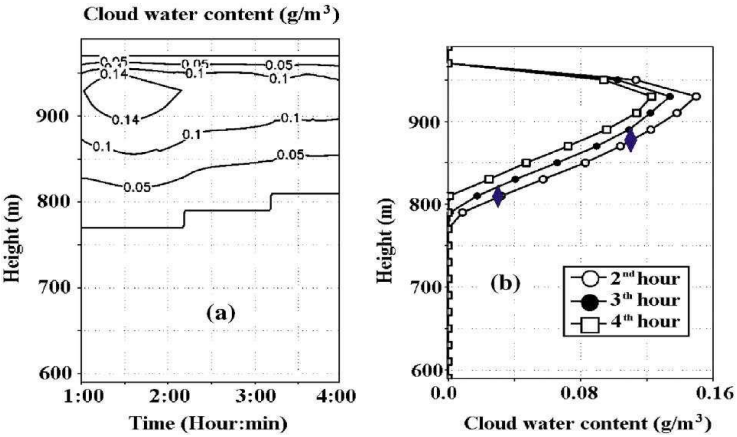


Figura 3.9: Caso 08-julho-1997: (a) evolução temporal da distribuição vertical do conteúdo de água da nuvem ($\mathrm{g\,cm^{-3}}$); (b) médias horárias do conteúdo de água da nuvem. Triangulos e quadrados indicam médias de observações de aviões [1].

Capítulo 4

Teoria de Taylor em Modelos de Meso-escala

4.1 BRAMS: modelo atmosférico

BRAMS é o acrônimo para *Brazilian Regional Atmospheric Modeling System*. Este é um modelo meteorológico originalmente pensado para simular fenômenos de meso-escala e foi desenvolvido no Depto. de Ciência Atmosférica da Colorado State University (CSU), onde recebeu o nome de RAMS. O modelo é capaz de simular uma grande variedade de escoamentos atmosféricos, podendo ser utilizado para modelar situações em escala sinótica até fluxos turbulentos na CLP em microescala [23, 64].

Os resultados apresentados aqui foram obtidos com o uso da versão 3.2[1], derivada do RAMS versão 5.04 plus. Entre as contribuiçẽs no BRAMS versão 3.2 podem ser enumeradas as seguintes:

1. Parametrização de cumulus rasos e profundos (esquema fluxo massa com vários fechamentos);

2. Reprodutibilidade binária (resultados numéricos independentes do número de processadores utilizados);

3. Novos dados de 1 Km de vegetação a partor do IGBP 2.0 e IBGE/INPE e série de dados do LEAF-3 com parâmetros observados da biomassa da América do Sul;

[1] Versão do código computacional BRAMS podem ser obtidas diretamente no sítio do CPTEC/INPE na internet: `http://www.cptec.inpe.br/brams`.

4. Processo de iniciação de umidade do solo a partir de estimativa pelo modelo hidrológico;
5. Ciclo de assimilação operacional e procedimento de previsão;
6. Parametrização de superfície SIB2;
7. Portabilidade elevada e qualidade de software;
8. Melhoramento no desempenho seqüencial e paralelo.

O código numérico do modelo foi desenvolvido a partir do acoplamento de dois modelos atmosféricos no início da década de 70: um modelo de microescala e processos microfísicos desenvolvido pelo prof. William, e um modelo mesoescala com influência da superfiície desenvolvido pelo prof. Roger A. Pielke Sr. O modelo atmosférico parte do conjunto completo de equações primitivas que governam o movimento da atmosfera, complementado por parametrizações de diversos processos físicos. O modelo RAMS foi desenvolvido dentro do formalismo de diferenças finitas escrito, quase exclusivamente, em linguagem FORTRAN 90, com algumas rotinas de I/O em linguagem C.

Uma descrição das equações para o modelo BRAMS são apresentadas por Barbosa [5].

A codificação das rotinas descritas nas Seções 3.2, 3.3 iniciaram em 1998 [15]. Porém, a modelagem descrita na Seção 3.4 é que embasou a codificação final para incorporar a parametrização baseada na teoria de Taylor ao modelo BRAMS. A implementação de novas rotinas de turbulência para o BRAMS e teste desta nova parametrização foram realizadas durante a tese de mestrado de Joice P. S. Barbosa [5].

Os resultados do novo modelo de turbulência para o BRAMS foram comparados contra dados experimentais e dois modelos de turbulência já residentes no BRAMS: modelo de Smagorinsky [73] e o modelo de Mellor e Yamada citeM-Y:82. Tanto o modelo de turbulência baseado na teoria de Taylor, como o modelo de Smagorinsky, são modelos de fechamento de 1a. ordem. O modelo de turbulência de Mellor-Yamada é uma parametrização de ordem 2,5 (há equações de evoluções para os fluxos turbulentos, ordem 2, além de uma equação de evolução para a energia cinética turbulenta e, implica em aumentar a ordem de 0,5).

4.2 Resultados da simulação numérica

Os dados observacionais usados aqui foram obtidos durante o experimento LBA. Este é um experimento internacional para o estudo da flo-

resta amazônica e sua interação com a atmosfera. Este esforço cooperado de pesquisa iniciou-se em 1992, com um estudo da CLP para a região da Amazônia, sendo selecionadas áreas do estado de Rondônia para a pesquisa. Nessa época, a campanha experimental foi denominada *Rondonia Boundary Layer Experiment* (RBLE), no município de Ji-paraná (RO), em áreas de floresta e pastagem, em 3 períodos distintos: o RBLE1 (11 de Setembro a 3 de Outubro de 1992), observações em área de floresta somente, o RBLE2 (3 a 25 de Julho de 1993) com medidas em área de floresta e pastagem e o RBLE3 (13 a 25 de Agosto de 1994) com medidas simultâneas em ambas áreas de floresta e pastagem, sempre durante a época seca da região.

Em 1999, surgiu o projeto *Experimento de Grande Escala de Interação Biosfera-Atmosfera na Amazônia* (em inglês: *Large Scale Biosphere-Atmosphere Experiment in Amazonia*, LBA), com o objetivo principal de obter dados para um entendimento mais sistêmico da interação da atmosfera-floresta, para melhor compreensão dos processos climatológicos, ecológicos, hidrológicos e da biogeoquímica da Amazônia, dos impactos dos diferentes usos da terra nesses processos e das interações da Amazônia com o sistema biogeofísico do planeta.

Figura 4.1: Mapa do sítio experimental da primeira campanha (WETAMC) do Projeto LBA.

A primeira campanha atmosférica de mesoescala desse projeto, ocorreu durante a estação chuvosa (WETAMC: *Wet season Atmospheric Mesoscale Campaign*) realizada em Janeiro e Fevereiro de 1999 no Estado de Rondônia. A Figura 4.1 mostra a área delimitada pela campanha, o sítio experimental,

onde foram coletados dados experimentais de radiossondas de quatro sítios: Rebio Jaru, Fazenda Rancho Grande, ABRACOS e Rolim de Moura. Estes dados foram inseridos no modelo BRAMS como condição inicial, porém dos quatros sítios citados, dois foram escolhidos para validar as novas parametrizações implementadas no BRAMS.

Os dados experimentais usados para comparar o resultados das simulações foram coletados da reserva do Jarú (RBio-Jaru) e na fazenda Nossa Senhora Aparecida (ABRACOS). Uma decriação destes sítios é feita a seguir.

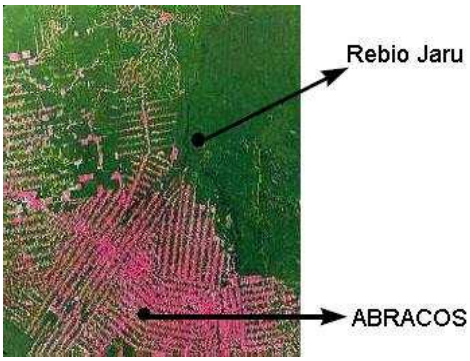


Figura 4.2: Imagem de Satélite com a localização dos sítios Rebio Jaru e ABRACOS.

Reserva Biológica do Jarú (RBio-Jaru): A reserva possui 268.150 ha de floresta tropical localizada entre 10° 05' S e 10° 19' S e 61° 35' W e 61° 57' W, com altitude variando de 100 a 150 m acima do nível do mar. A área pertence ao Instituto Brasileiro do Meio Ambiente (IBAMA), situa-se em região de floresta, com árvores atingindo em média 33 metros de altura.

Fazenda Nossa Senhora Aparecida (ABRACOS 2): Localizada em 10° 45' S e 62° 22' W, 293 m acima do nível do mar, no município de Ouro Preto D'Oeste, a 50 Km de Ji-Paraná e com cobertura vegetal do tipo gramínea (Brachiaria brizantha). A área foi desmatada em 1977, sendo largamente desmatada num raio de 50 Km. Possui elevações próximas de até 150 m e cerca de 12% de solo descoberto em relação a área total de pastagem.

A Figura 4.2 mostra uma imagem de satélite indicando os sítios da Reserva Biológica do Jarú (ReBio-Jaru) e da Fazenda Nossa Senhora Aparecida (ABRACOS).

O primeiro resultado é mostrado na Figura 4.3, para simulação do calor sensível e do calor latente para os três modelos de turbulência: Smagorinsky,

Mellor-Yamada e Taylor. O calor sensível para o primeiro dia de simulação (10 e 11/Fev) é completamente subestimado pelo modelo de Smagorinsky. Os resultados com o modelo baseado na teoria de Taylor e Mellor-Yamada tem um comportamento muito similar.

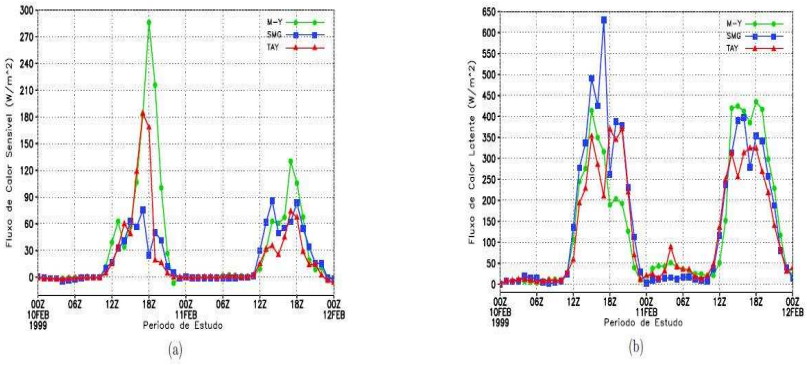


Figura 4.3: Curvas de Fluxos de (a) Calor Sensíel, (b) Calor Latente (LE) sobre o sítio de ABRACOS simuladas pelo BRAMS.

Há uma grande quantidade de resultados comparando as simulações com dados coletados nos experimentos. Aqui serão mostrados somente resultados de simulação dos dias 10/Fev e 11/Fev para o sítio ReBio-Jarú e uma simulação para 10/Fev para sítio ABRACOS. As simulações com diferentes modelos de turbulência são comparados com medida de temperatura obtidas com radiossondas.

A Figura 4.4 motra os resultados para sítio ReBio-Jarú. A resposta dos modelos são relativamente similares às 15Z, mas a simulação com o modelo de Smagorinsky já apresenta uma tendência de uma menor altura para a camada limite. Este comportamente persiste quando a simulação evolui. Às 18Z, o modelo de Smagorinsky está próximo do perfil de dados de observação, entretando é evidente que a altura da camada limite está subestimada em relação os modelos de Taylor (triangulos) e Mellor-Yamada (círculos). Em outra etapa da simulação (21Z), o modelo baseado em Taylor parece representar uma média entre os resultados de Smagorinsky e Mellor-Yamada. Finalmente, as 00Z do dia 11/Fev, os resultados obtidos com Mellor-Yamada e Taylor são praticamente iguais até 1100 m.

A simulação sobre o sítio de ABRACOS para o dia 10/Fev é mostrada na Figura 4.5. Tal como ocorreu para o sítio ReBio-Jarú, os modelos de turbulência inicialmente apresentam a mesma resposta às 12Z. Já às 15Z, o modelo de Smagorinsky começa a manifestar a tendência observada de

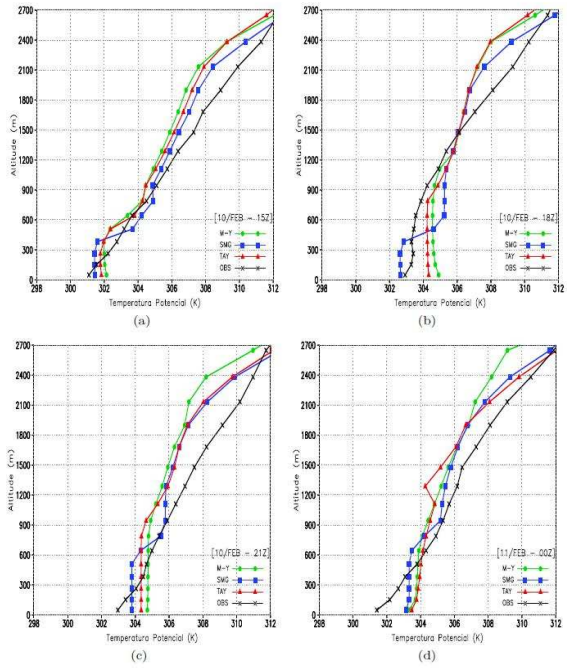


Figura 4.4: Comparação entre os perfis atmosféricos da temperatura potencial simulados pelo BRAMS com diferentes modelos de turbulência e perfis obtidos por radiossondagem em Rebio Jarú para o dia 10/Fev às (a) 15Z, (b) 18Z, (c) 21Z, e para o dia 11/Fev às (d) 00Z.

subestimar a espessura da camada limite, enquanto que os modelos de Taylor e Mellor-Yamada praticamente fornecem o mesmo resultado. Às 18Z há um resultado interessante: os modelos de Taylor e de Mellor-Yamada aquecem rapidamente, enquanto que o modelo de Smagorinsky apresenta uma inércia maior, o que leva a ter resultados mais próximo as observações. Porém, às 21Z o modelo de Taylor responde rapidamente a um certo resfriamento, produzindo resultados similares aos apresentados por Smagorinsky, enquanto que o modelo de Mellor-Yamada não consegue responder eficientemente ao resfriamento observado.

Exercícios

1. Os meteorologistas observam diferentes escalas espaciais e temporais. Escalas espacais podem ser classificadas como: escala sinótica, meso-escala e escala micro-meteorológica. Cite exemplos de fenômenos atmosféricos para as diferentes escalas espaciais citadas.

2. Previsões meteorológicas são estipuladas para distintos períodos: previsão de curtíssimo prazo, previsão de curto e médio prazo, previsão climática. Cite aplicações para cada tipo de previsão.

3. Se o modelo de Taylor fornece resultados similares aos do modelo de Mellor-Yamada, porque utilizar o modelo de Taylor nas simulações?

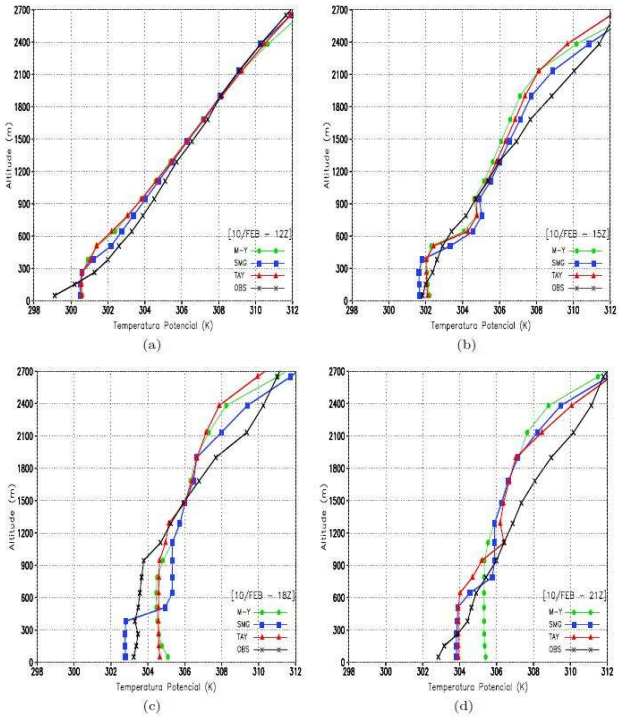


Figura 4.5: Comparação entre os perfis atmosféricos da temperatura potencial simulados pelo BRAMS com diferentes modelos de turbulência e perfis obtidos por radiossondagem em ABRACOS para o dia 10/Fev às (a) 12Z, (b) 15Z, (c) 18Z e (d) 21Z.

Capítulo 5

Aspectos Teóricos

5.1 Um modelo para intermitência

O conceito de intermitência foi proposto para explicar algumas discrepâncias experimentais e dificuldades teóricas da teoria de turbulência de Kolmogorov [35]. Parisi e Frisch [36] usaram uma abordagem multifractal para modelar a intermitência, onde a hipótese de auto-similaridade de Kolmogorov é alterada pela hipótese de que *"... o fluxo turbulento é assumido possuir uma faixa de exponentes de escala* $b \in (b_{\min},\ b_{\max})$*"*[1].

A nossa abordagem até aqui tem sido apresentar um modelo de espectro em que o máximo esteja de acordo com as observações e que no domínio inercial tenha uma concordância com os resultados teóricos da turbulência, como a lei de -5/3 de Kolmogorov. Após, o espectro ajustado é aplicado nas relações de Taylor para obter os parâmetros da turbulência (ver Capítulos 2 e 3).

Aqui vamos repetir o procedimento, mas para o domínio inercial do espectro, vamos adotar uma forma generealizada do modelo de Kolmorogov (K41) [35]. O valor do exponente que difere de -5/3 representa a intermitência, o que implica numa nova formulação para a difusividade turbulenta.

Como sugerido na Seção 3.1, o fluxo turbulento, ou tensores de Reynolds, poderia ser representado pelo produto entre uma diffusividade turbulenta e o gradiente da quantidade principal. Esta estratégia é conhecida como fechamento de *primeira ordem*, ou teoria-K.

Na teoria de Kolmogorov, as propriedades dos fluxos turbulentos são

[1] *"...turbulent flow is assumed to possess a range of scaling exponents* $b \in (b_{\min},\ b_{\max})$*"* [35].

estudados a partir da estatística do gradiente de velocidade:

$$v_r(x) = v(x+r) - v(x) \ ,$$

para várias escalas r. Da formulação multifractal, a função de estrutura $S_p(r)$ para o domínio inercial ($\eta \ll r \ll L$) pode ser expressa como [35]

$$\frac{S_p(r)}{v_0^p} \equiv \frac{\langle v_r^p \rangle}{v_0^p} \sim \int_I d\mu(b) \left(\frac{r}{L}\right)^{pb+3-D_F(b)} \ , \tag{5.1.1}$$

onde L e η são as escalas integrais e de Kolmogorov, $\langle \cdot \rangle$ é o valor médio, e $D_F(b)$ é a dimensão fractal. No domínio inercial, o menor expoente irá dominar a expressão (5.1.1), e $\zeta_p = \inf \{pb + 3 - D_F(b)\}$ é o exponente para o escalonamento da função de estructura, com $b \in (b_{\min},\ b_{\max})$. A dimensão fractal na Eq. (5.1.1) pode ser calculada por dados de simulação ou dados experimentais (ver [35], página 145). Entretanto, algumas abordagens analíticas tem sido propostas para determinar $D_F(b)$ [4, 7, 68, 69]. Todos os modelos analíticos citados estão baseadas na termo-estatística não extensiva de Tsallis [83].

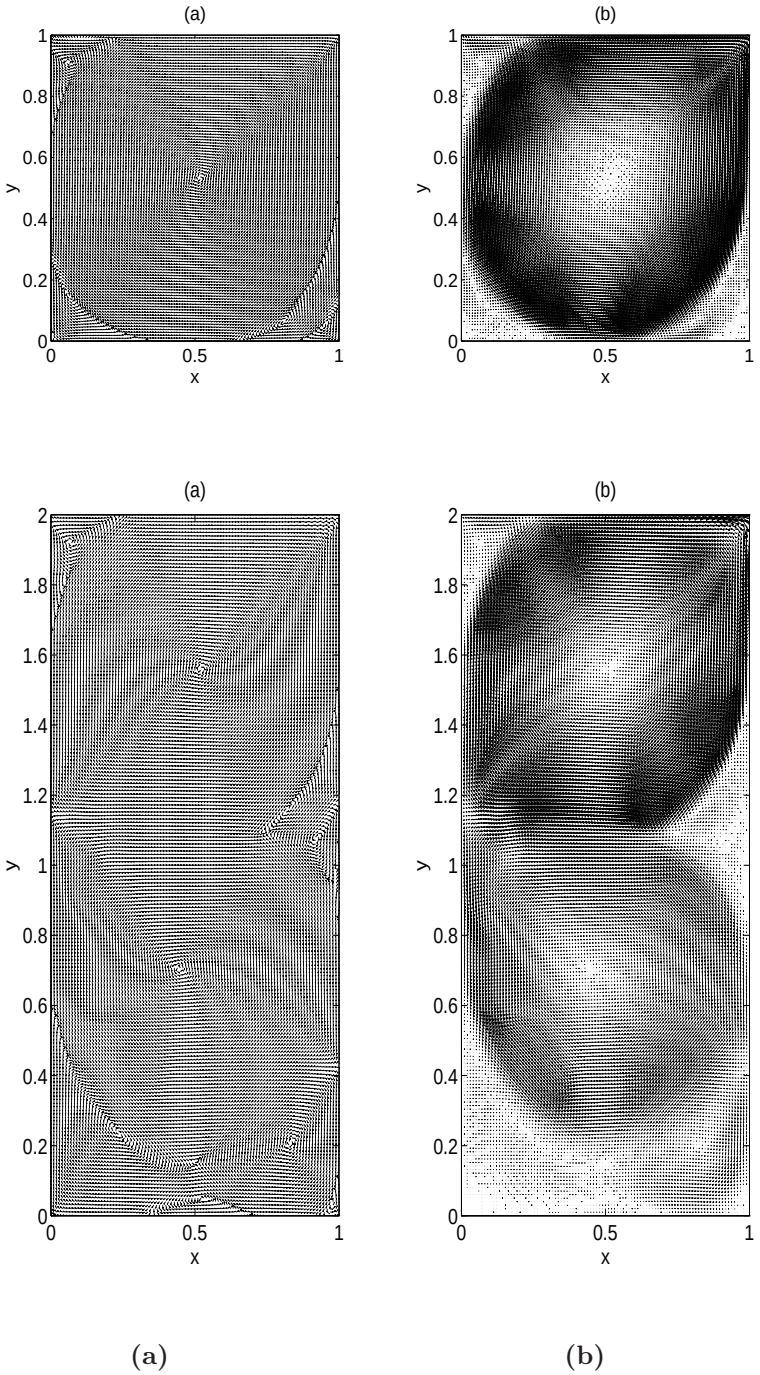
A transformada de Fourier da função de estrutura de segunda ordem (5.1.1) é dada por

$$E(k) = c_2\, \varepsilon^{2/3}\, k^{-5/3}\ (k/k_\eta)^{2/3-\zeta_2} \tag{5.1.2}$$

onde k_η é o número de onda de um comprimento característico do sistema físico. Duas observações sobre a Eq. (5.1.2) devem ser destacadas. Primeiro, o exponente $\nu \equiv \zeta_2 - 2/3$ define o exponente de intermitência [4]. Segundo, a menor comprimento geométrico dentro do sistema físico é representado através do número de onda k_η.

A Eq. (5.1.2) pode ser considerada como uma *lei de Kolmogorov generalizada* para o domínio inercial do espectro. Nesta equação, a restrição geométrica no sistema é explícita somente se o exponente de intermitência $\nu \neq 0$. Por exemplo, esta restrição poderia ser o tamanho de uma grade produzindo turbulência [4]. Uma idéia de como isto funciona é mostrada na Figura 5.1, obtida de uma simulação em dinâmica dos fluidos numa cavidade 2D [65, 66] para duas diferentes razões de aspecto $A =$ altura/comprimento (h/ℓ). Claramente, um vórtice com diâmetro ℓ parece em $A = 1$, mas 2 grandes vórtices são formados para $A = 2$; mostrando a influência da geometria sobre o escoamento.

Se a menor escala geométrica $\ell \to \infty$ não haverá formação de vórtices e, consequentemente, a turbulência não se estabelecerá.



(a) **(b)**

Figura 5.1: Vórtices simulados para o escoamento da cavidade 2D com diferentes razões de aspectos ($A = h/\ell$): (a) $A = 1$; (b) $A = 2$. Campos normalizados de velocidade são mostrados para cada razão de aspecto.

5.1.1 Difusividade turbulenta considerando intermitência

Da teoria de difusão estatística de Taylor [80], uma expressão assintótica para grandes tempos de difusão foi desenvolvida: Eq. (2.4.27).

Como já reassaltado, o espectro tem um papel central na teoria de Taylor, pois todos os parâmetros da turbulência que temos deduzido dependem dele. Uma fórmula para o espectro pode ser calculada considerando-se um modelo geral, como sugerido por Sorbjan [75] (ver também [30, 31]):

$$\frac{n\, S_i^E(n)}{u_*^2} = \frac{A\, f^{m_3}}{\left(1 + B\, f^{m_1}\right)^{m_2}} \quad . \tag{5.1.3}$$

As constantes A, B são determinadas de forma que o máximo do espectro coincida com o pico experimental e ajustando o modelo com o espectro generalizado de Kolmogorov de energia cinética (5.1.2). Desta forma, uma expressão generalizada para o espectro de energia é obtida. Entretanto, diferentes exponentes podem ser empreagados para ajustar o modelo espectral (5.1.3) com dados experimentais. Aqui vamos fixar os seguintes: para camada convectiva (CLC): $m_1 = m_3 = 1$ and $m_2 = 1 + \zeta_2$; e para camada estável (CLE): $m_1 = 1 + \zeta_2$ e $m_2 = m_3 = 1$.

Consequentemente, expressões generalizadas para o espectro de energia normalizado para CLC e CLE são dadas respectivamente por:

$$F_i(n) = \frac{1}{(f_m)_i} \left(\frac{z}{U}\right) \left[1 + \frac{f}{\zeta_2\, (f_m)_i}\right]^{-(1+\zeta_2)} \tag{5.1.4}$$

$$F_i(n) = c_\zeta\, \zeta_2^{-1/(1+\zeta_2)} \left(\frac{z}{\rho_i U}\right) (f_m)_{n,i}^{-1} \left[1 + \frac{1}{\zeta_2\, (f_m)_{n,i}^{1+\zeta_2}} \left(\frac{f}{\rho_i}\right)^{1+\zeta_2}\right]^{-1} \tag{5.1.5}$$

onde $c_\zeta = [\mathrm{sen}\,(\pi/(1+\zeta_2))]/[\pi/(1+\zeta_2)]$; $n = k\,U/2\pi$ é a relação entre o comprimento de onda k e a freqüência n, U é a velocidade do vento principal; $f = nz/U$ é uma freqüência adimensional, z é a altura acima da superfície; e $\rho_i = (f_m)_i\, (f_m)_{n,i}^{-1} = [z/(\lambda_m)_i]\, (f_m)_{n,i}^{-1}$ é uma função de estabilidade, sendo $(f_m)_i$ o valor máximo do espectro, $(f_m)_{n,i}$ a freqüência máxima para a estratificação neutra e $(\lambda_m)_i$ é o valor do comprimento de onda para o pico espectral.

Das Eqs. (2.4.21), (5.1.4) e (5.1.5) são deduzidas formulações para difu-

sividades turbulentas

$$K_{\alpha\alpha} = \frac{\sqrt{\pi}}{16}\,\frac{\sigma_i\, z}{(f_m)_i} \qquad \text{para CLC ;} \tag{5.1.6}$$

$$K_{\alpha\alpha} = \frac{\sqrt{\pi}}{25}\,\frac{\sigma_i\, z}{(f_m)_i} \qquad \text{para CLE .} \tag{5.1.7}$$

Consequentemente, usando expressões para $(f_m)_i$ [30, 31, 74] fórmulas podem ser deduzidas para difusividades turbulentas que levam em conta o efeito da intermitência. Por exemplo, a componente vertical da difusividades turbulenta para a CLC é expressa como:

$$\frac{K_{zz}}{w_*\, h} = \beta^* \left(\frac{h}{\eta}\right)^{\zeta_2/2-1/3} \Psi^{1/3} \left[1 - e^{-4(z/h)} - 3\times 10^{-4}\, e^{8(z/h)}\right]^{1+\zeta_2/2} \tag{5.1.8}$$

onde $\beta^* = \sqrt{\pi\, c^*}/16\,\left(1.8^{1+\zeta_2/2}\right)$, $\Psi = \epsilon\, z_i/w_*^3$ é a função de dissipação molecular adimensional, com w_* uma velocidade característica (*velocity scaling*) [30], e h a altura da CLP. Para a CLE, a difusividade turbulenta vertical é escrita como

$$\frac{K_{zz}}{u_*\, h} = \frac{0.32\,(1 - z/h)^{\alpha_1/2}\,(z/h)}{1 + 3.7\,(z/\Lambda)} \left(\frac{z}{\eta\,\rho_w}\right)^{-1/3+\zeta_2/2} \tag{5.1.9}$$

sendo u_* a velocidade de fricção, α_1 é uma constante experimental e Λ é o comprimento de Monin-Obukhov local (ver Seção 3.2, Eqs. (3.2.4) e (3.2.6)).

O parâmetro η representa um comprimento característico do sistema físico, associado ao comprimento de onda k_η na Eq. (5.1.2).

A Tabela 5.1 mostra alguns valores para ζ_2 considerando diferentes abordagens teóricas e valores de experimentos. Uma média entre estes valores está indicando $\nu = \langle\zeta_2\rangle - 2/3 \sim 1/30$ como o exponente de intermitência.

Para CLC, a parametrização da turbulência de primeira ordem pode ser melhorada com a inclusão de um termo de contra-gradiente. Nesta formulação o fluxo turbulento vertical é aproximado por

$$\overline{w'\,\chi'} = -K_{zz}\left[\frac{\partial\chi}{\partial z} - \gamma_\chi\right] \tag{5.1.10}$$

sendo γ_χ o termo de contra-gradiente. Como destacado em artigos anteriores [13]:

$$\gamma_\chi = b\,\frac{w_*^2\,\chi_*}{\sigma_w^2\, h} \qquad \text{com :}\ \ \chi_* = \frac{1}{h\, w_*}\int_0^h \overline{w'\,\chi'}\, dz\ . \tag{5.1.11}$$

Tabela 5.1: Diferentes valores para ζ_2 de várias abordagens: ver [4, 7, 69] para estimativas teóricas e [3, 8] para resultados experimentais; e expoentes de intermitência proposto.

Scaling	Ref. [69]	Ref. [4]	Ref. [7]	Exp-1	Exp-2
ζ_2	0.72	0.69	0.68	0.71	0.70
ζ_2 - 2/3	$\sim 1/20$	$\sim 1/43$	$\sim 1/75$	$\sim 1/23$	$\sim 1/30$

Uma questão permanece: qual é o comprimento característico η para a CLP? Se $\eta = 1$ as expressões para K_{zz} são aquelas apresentadas nas referências [11, 13], se $\eta = h$ a difusividade turbulenta é bem próxima a expressão deduzida em [30]. Entretanto, pode ser sugerido que $\eta = (\lambda_m)_w$, o comprimento de onda associado aos turbilhões mais energéticos, como sendo a menor escala de comprimento geométrico para a CLP. Consequentemente, a expressão para K_{zz} neste caso é *idêntica* a aquela apresentada por Degrazia et al. [30] para a CLC! Para CLE, um termo extra $(f_m)_{n,m}^{1/\zeta_2}$ ($\sim 0.33^{1/60} \sim 0.98$) aparece na expressão da difusividade turbulenta, representando um fator de correção menor do que 2% das expressões da literatura [31].

5.2 Turbulência em cosmologia

O modelo padrão em cosmologia é um processo evolucionário, de um estado primordial após o *Big-Bang*. Modelos teóricos foram concebidos para explicar a formações de estruturas de grande escala (em inglês: *Large Scale Structures*, LSS), principalmente baseando-se sobre a expansão espaço-tempo, bem como sobre o crescimento das instabilidades gravitacionais. Em geral, quando aplicadas ao conteúdo de matéria escura, os modelos são capazes de reproduzir a estrutura observada com simulação de N-corpos. Para o regime não linear da evolução do Universo, no qual são encontradas primeiro nas menores escalas (contrastes de alta densidade) e sucessivamente nas maiores escalas, modelos puramente gravitacionais semi-analíticos mostram similaridades com os modelos da turbulência de fluidos [72], que podem indicar uma maneira de compreender tais propriedades. Se tal abordagem é correta, alguma assinatura da turbulência deve ser verificada de dados observacionais e/ou simulados. Por exemplo, para um processo turbulento bem desenvolvido, a distribuição de energia entre os comprimentos de onda (avaliada pelo espectro) na região do domínio inercial deve seguir uma lei de potência aproximadamente de -5/3 (ver Eq. (5.1.2), considerando $\zeta_2 = 2/3$).

Analisando dados do Consórcio Virgo, com número de partículas $N = 2563$ (cada *partícula* tem massa de $6,86 \times 10^{10}\ M_\odot$, a massa bariônica da Via Lactea), dentro de um cubo de aresta $L = 239.5\ h^{-1}$ Mpc, com taxa de expansão $h = 0,7$ ($h = H_0/100\ \mathrm{Km\,s^{-1}}$); as LSS são consideradas após uma análise de grupamento, empregando um processo de percolação [19]. A simulação de N-corpos é realizada com o modelo Λ-CDM (Λ expressa o valor da constante cosmológica e CDM é o acrônimo para *Cold Dark Matter*). As estruturas cosmológicas não são compostas de matéria bariônica somente, mas também por matéria escura [2]. A análise de grupamento na verdade visa identificar *halos de matéria escura*: esta é uma região hipotética associada a uma galáxia, que se extende para além da fronteira visível da galáxia e compõe a maioria de sua massa.

É difícil construir espectro de energia cinética de estruturas cosmológicas. Alternativamente, pode-se construir espectros de energia potencial gravitacional sob a ação da matéria escura. O cálculo é realizado considerando-se cada halo em cascas concêntricas, onde a energia gravitacional é computada pela interação entre uma casca e todas as demais [19]:

$$U_j = \frac{1}{2} G m_j \sum_i \frac{m_i}{r_{ij}} \tag{5.2.12}$$

onde r_{ij} é a distância entre os halos i e j. Deste modo, estima-se a energia média de cada casca (para todos os halos) e constroi-se o espectro de energia potencial gravitacional com seus valores cumulativos. Os resultados são apresentados na Figura 5.2 para vários *redshifts* [3]. Erros estatísticos ($1/\sqrt{N}$) são mostrados somente para o primeiro e o último *redshifts*. É uma prática em cosmologia adotar-se o *redshift* como medida temporal de eras cosmológicas. O *redshift* foi interpretado pelo astrônomo americano Edwin P. Hubble como uma evidência de que as galáxias se afastam uma das outras, o que implica numa expansão do Universo. A velocidade de expansão é dada pela lei de Hubble:

$$v = H_0\, D\ , \tag{5.2.13}$$

onde v é a velocidade das galáxias, D é a distância à galáxia e H_0 é a constante de Hubble. Edwin P. Hubble correlacionou *redshift* com a distância das galáxias, mostrando uma proporcionalidade entre estas quantidades.

[2] Matéria escura: este é um conceito que surgiu na astronomia e cosmologia, um tipo de matéria que é inferida existir a partir de efeitos gravitacionais sobre a matéria visível e sobre a radiação de fundo, mas não é detectável por radiação electromagnética emitida ou espalhada, mais detalhes consultar: `http://en.wikipedia.org/wiki/Dark_matter`.

[3] *Redshift*, ou o *desvio para o vermelho*, é um fenômeno associado ao efeito Doppler, em que fontes de ondas em movimento produzem variações entre a freqüência observada e freqüência emitida: $z \equiv (\lambda_{\rm obs} - \lambda_{\rm emit})/\lambda_{\rm emit} = \Delta\lambda/\lambda_{\rm emit}$.

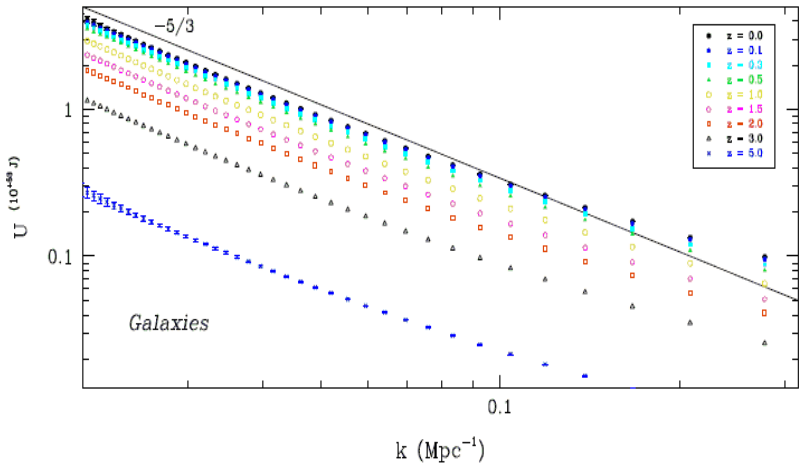


Figura 5.2: Espectro de energia gravitacional para halos de magnitudes de galáxias, para as amostras de *redshifts*. Uma reta de inclinação -5/3 é mostrada como uma linha sólida.

Desta forma, é possível associar o *redshift* com as eras do cosmos. Para *redshift* igual a zero, não há movimento entre as galáxias, isto significa, seguindo a interpretação de Hubble, que estamos na era atual, a medida que o *redshift* aumenta, vamos caminhando de volta ao estado primordial.

A Figura 5.2 mostra que, para todos os *redshifts*, os halos de magnitudes de galáxias exibem uma distribuição de energia de acordo com o expoente -5/3 de Kolmogorov, dentro do domínio de comprimento de onda no intervalo de 0,02 a 0,07 (15 a 50 h^{-1} Mpc).

Exercícios

1. Porque o menor expoente domina a expressão (5.1.1)?

2. Demonstre todos os passos intermediários para a dedução dos espectros para a CLC e CLE com intermitência.

3. Demonstre todos os passos para deduzir as difusividades turbulentas.
4. Um espectro com lei de potência -5/3 define a existência de uma dinâmica turbulenta?

Capítulo 6

Conclusão

Tentando entender o processo de cognição do ser humano (nossa capacidade de aprendizado), esta ação deixou de ser uma reflexão para se tornar uma verdadeira batalha das idéias. Alguns pensadores argumentavam que o conhecimento é obtido a partir das observações. Esta é a escola do *empirismo*. Há uma visão concorrente, argumentando que o conhecimento só é realmente apreendido quando adquirido a partir da razão. Esta é a escola do *racionalismo*[1].

Acredito que no mundo das ciências exatas, mesmo na matemática, há uma concordância de que precisamos tanto de experimentos (nossa dose de empirismo) como de modelos teóricos (nosso viés racionalista) para desenvolver a ciência.

Este texto é um exemplo: construir modelos de turbulências tanto a partir de uma base empírica, quanto de conceitos meramente teóricos. Mas este texto também é um exemplo de uma 3a. via de se obter conhecimento. É o conhecimento advindo da simulação computacional. Esta é uma nova realidade que teve início no século XX e que a matemática aplicada é uma das disciplinas que mais se nutre desta via de se obter conhecimento. Estudamos casos aqui, como o crescimento da CLC, em que dados observacionais simplesmente não estão disponíveis e a teoria só pode ser *verificada* contra resultados de simulação computacional.

O objetivo foi apresentar a teoria de Taylor e mostrar uma metodologia de modelagem, principalmente focada ao estudo da camada limite planetária (CLP). Vimos que a teoria de Taylor pode ser aplicada competitivamente

[1] O problema epistemológico vai até mais adiante, quando estabelecemos a dúvida se existe mesmo uma realidade objetiva independente do observador (neste caso fazemos só *descobertas*), ou se vemos o mundo somente sob a lente dos nossos conceitos (neste caso, de certa forma *inventamos* a realidade).

para modelos meteorológicos, gerando resultados próximos (ou até melhores) do que parametrizações de mais alta ordem, como Mellor-Yamada. É de certa forma supreendente que uma parametrização de 1a. ordem possa gerar resultados tão bons.

Um comentário, entretanto é importante: modelos de fechamento da turbulência de 2a. ordem (ou mais alta) tem sido empregados porque são teoricamente capazes de representar escoamentos do tipo *contra-gradiente*. É possível adaptar modelos de turbulência de 1a. ordem para gerar fluxos de contra-gradiente. Este tipo de escoamento só verificado em camadas convectivas e podem ser modelados da seguinte forma [25]

$$\overline{v_i' \, \chi'} = -K_{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \alpha_i} - \gamma_\chi \right) \ .$$

Em aplicações atmosféricas, a componente vertical tem uma contribuição significativa. A expressão apresentada por Cuijpers e Holtslag [24] para o termo de contra-gradiente é dada por

$$\gamma_\chi = b \, \frac{w_*^2 \, \chi_*}{\sigma_w^2 \, h} \tag{6.0.1}$$

sendo h a altura da CLP, σ_w^2 é a variância da velocidade vertical, w_* é a escala convectiva de velocidade, b é uma constante e χ_* é uma escala de uma quantidade média [71]

$$\chi_* = \overline{\chi} = \frac{1}{h} \int_0^h \chi(z) \, dz \ . \tag{6.0.2}$$

Infelizmente, ficou de fora uma grande parte da pesquisa e de aplicações.

Não foram comentados aqui as aplicações com parametrizações para modelos de dispersão de poluentes na atmosfera (eulerianos e lagrangianos), que utilizam, por exemplo, a parametrização de Taylor para a escala de decorrelação lagrangiana [29] e do emprego em parametrizações de ordem 2 ou superior. Além das aplicações na parametrização de termos dos modelos diretos, há aplicações na área de problemas inversos, que ocupa um lugar central na modelagem atual [14, 70], como a busca de métodos para a descrição dos ciclos bio-geoquímicos dos gases minoritários da atmosfera, em particular o ciclo do CO_2 [32, 51].

As camadas limites de transição são hoje o maior desafio de modelagem da CLP. Não foi mostrado aqui, mas quando se tem modelos de espectros, é sempre possível deduzir expressões para difusividades turbulentas para camadas de transição (CR e GCL) [40]. Além disso, muitos das parametrizações apresentadas, ainda não estão codificadas e prontas para inserção em códigos numéricos.

No caso de nuvens, foi mostrada uma metodologia promissora, mas há muito a ser feito (nuvens cumulus-nimbus e cirrus, são só dois exemplos).

Finalmente, a teoria de Taylor foi uma ferramenta útil para endereçar questões teóricas, como a parametrização da intermitência [13, 11] e também poderá ser útil em aplicações como evolução cosmológica.

Bibliografia

[1] G. P. Almeida, A. A. Costa, H. F. Campos Velho, J. C. P. Oliveira, Modeling stratocumulus-topped boundary-layer structure with statistical diffusion theory, *Atmospheric Research*, **80** (2006), 105-132.

[2] G. P. Almeida, "Parametrização do Coeficiente de Transporte Turbulento e Estudo da Influência da Precipitação sobre a Camada Limite com Stratocumulus", Doutorado em Física, UFC, 2001.

[3] F. Anselmet, Y. Gagne, E.J. Hopfinger, R.A. Antonia, High-order velocity struture functions in turbulent shear flow, *Journal of Fluid Mechanics* **140** (1984), 63-89.

[4] T. Arimitsu, N. Arimitsu, Analysis of fully developed turbulence in terms of Tsallis statistics, *Physical Review E*, **61** (2000), 3237-3240.

[5] J. P. S. Barbosa, "Novas Parametrizações de Turbulência Atmosférica para o Modelo BRAMS", Tese de Mestrado, Computação Aplicada, INPE, 2007.

[6] G. Batchelor, "The Life and Legacy of G. I. Taylor", Cambridge University Press, 1996.

[7] C. Beck, Application of generalized thermostatistics to fully developed turbulence, *Physica A*, **277** (2000), 115-123.

[8] R. Benzi, S. Ciliberto, C. Baudet, C.R. Chavarria, On the scaling of three dimensional homogeneous and isotropic turbulence, *Phisica D*, **80** (1995), 385-398.

[9] R. B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot, "Fenomenos de transporte", Editorial Reverte, 1964.

[10] A. K. Blackadar: "Turbulence and Diffusion in the Atmosphere", Springer-Verlag, 1997.

[11] H. F. Campos Velho, R. R. Rosa, F. M. Ramos, R. A. Pielke, G. A. Degrazia, Representing Intermittency in Turbulent Fluxes: An Application to the Stable Atmospheric Boundary Layer. *Physica A*, **354** (2005), 88-94.

[12] H. F. Campos Velho, A preliminary model for growing of the convective boundary layer. *Ciência e Natura*, (2003), 99-102 (número especial: Proceedings of the III Brazilian Workshop on Micrometeorology).

[13] H. F. Campos Velho, R. R. Rosa, F. M. Ramos, R. A. Pielke, G. A. Degrazia, C. Rodrigues Neto, A. Zanandrea, Multifractal Model for Eddy Diffusivity and Counter-Gradient Term in Atmospheric Turbulence. *Physica A*, **295** (2001), 219-223.

[14] H. F. Campos Velho, M. R. Moraes, F. M. Ramos, G. A. Degrazia, D. Anfossi, An Automatic Methodology for Estimating Eddy Diffusivity from Experimental Data. *Il Nuovo Cimento*, **23 C** (2000), 65-84.

[15] H. F. Campos Velho, A. Holtslag, G. A. Degrazia, R. A. Pielke Sr., "New Parameterizations in RAMS for Vertical Turbulent Fluxes", Technical Report, Atmospheric Science Dept., Colorado State University, USA, 1998.

[16] H. F. Campos Velho, M. R. Moraes, G. A. Degrazia, "Um Modelo de Dispersão de Poluentes na Camada Limite Estável", Relatório Técnico, INPE. São José dos Campos (SP), Brasil.

[17] H. F. Campos Velho, G. A. Degrazia, J. C. Carvalho, A new formulation for the dissipation function under strong convective regime, *Congresso Brasileiro de Meteorologia*, **vol. 3**, Campos do Jordão (SP).

[18] H. F. Campos Velho, "Matriz Não-Modal em Integração e Inicialização num Modelo Barotrópico e um Estudo Numérico da Dispersão Vertical Turbulenta", Tese de Doutorado, PROMEC, UFRGS, Porto Alegre (RS), 1992.

[19] C. A. Caretta, R. R. Rosa, H. F. Campos Velho, F. M. Ramos, M. Makler, Evidence of turbulence-like universality in the formation of galaxy-sized dark matter haloes, *Astronomy and Astrophysics*, **487** (2008), 445-451.

[20] J.G. Charney, R. Fjörtoft, J. von Neumann, Numerical integration of the barotropic vorticity equation, *Tellus*, **2** (1950), 237-254.

[21] S. J. Caughey, S. G. Palmer, Some aspects of turbulence structure throught the depth of the convective boundary layer, *Journal of Royal Meteorological Society*, **105** (1979), 811-827.

[22] S. J. Caughey, J. C. Wyngaard, J. C. Kaimal, Turbulence in the Evolving Stable BoundaryLayer, *Journal of Atmospheric Sciencies*, **36** 1979, 1041-1052.

[23] W. R. Cotton, R. A. Pielke Sr., R. L. Walko, G. E. Liston, C. J. Tremback, H. Jiang, R. L. McAnelly, J. Y. Harrington, M. E. Nicholls, G. G. Carrio, J. P. McFadden, RAMS 2001: Current status and future direction, *Meteorology and Atmospheric Physics*, **82** (2003), 5-29.

[24] J. W. M. Cuijpers, A. A. M. Holtslag, Impact of skewness and nonlocal effects on scalar and boundancy fluxes in convective boundary layers. *Jounal of Atmospheric Science*, **55** (1998), 151-162.

[25] J. Deardorff, The counter-gradient heat flux in the lower atmosphere and in the laboratory. *Journal of Atmospheric Science*, **23** (1966), 503-506.

[26] G. A. Degrazia, A. Goulart, D. Anfossi, H. F. de Campos Velho, P. A. Lukaszcyk, A model based on Heisenberg's theory for the eddy diffusivity in decaying turbulence applied to the residual layer. *Il Nuovo Cimento*, **26C** (2003), 39-51.

[27] G. A Degrazia, D. Anfossi, J. C. Carvalho, C. Mangia, T. Tirabassi, H. F. Campos Velho, Turbulence parameterization for PBL dispersion models in all stability conditions. *Atmospheric Environment*, **34** (2000), 3575-3583.

[28] G. A. Degrazia, J. P. Lukaszczyk, D. Anfossi, H. F. Campos Velho, Universality of the Lagrangian velocity structure function constant: the Landau objection. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, **71** (1999), 351-359.

[29] G. A. Degrazia, D. Anfossi, H. F. Campos Velho, E. Ferrero, A Lagrangian decorrelation time scale for nonhomogeneous turbulence. *Boundary-Layer Meteorology*, **86** (1998), 525-534.

[30] G. A. Degrazia, H. F. Campos Velho, J. C. Carvalho, Nonlocal exchange coefficients for the convective boundary layer derived from spectral properties. *Beiträge zur Physic der Atmosphäre* (Contributions to Atmospheric Physics), **70** (1997), 57-64.

[31] G. A. Degrazia, O. L. L. Moraes, A Model for Eddy Diffusivity in a Stable Boundary Layer, *Boundary Layer Meteorology*, **58** (1992), 205-214.

[32] I. G. Enting, "Inverse Problems in Atmospheric Constituent Transport". Cambridge: University Press, 2002.

[33] A. O. Fortuna, "Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações", EDUSP, 2000.

[34] T. Foken, 50 Years of the Monin-Obukhov Similarity Theory, *Boundary-Layer Meteorology*, **119** (2006), 431-447.

[35] U. Frisch, "Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov", Cambridge University Press, 1996.

[36] G. Parisi, U. Frisch, On the singularity structure of fully developed turbulence, *in* Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics (Eds. M. Ghil, R. Benzi, G. Parisi). Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi" (1983), 84-87, North-Holland, 1985.

[37] J.-C. Golaz, "Development of a single-column model for simulating precipitating stratocumulus clouds". M.Sc. thesis. Atmospheric Science, Paper No. 638, Colorado State University, Dep. of Atmospheric Science, Fort Collins, CO 80523, 1997.

[38] R. N. Goldstein, "Incompletude: A Prova e o Paradoxo De Kurt Gödel", Companhia das Letras, 2008.

[39] A. G. Goulart, H. F. Campos Velho, G. A. Degrazia, D. Anfossi, O. C. Acevedo, O. L. L. Moraes, D. M. Moreira, J. C. Carvalho, A Model for Describing the Evolution of the Energy Density Spectrum in the Convective Boundary Layer Growth. *Air Pollution Modeling and its Application* XVII (Carlos Borrego, Ann-Lise Norman, Org.). Springer Verlag (2007), 692-694.

[40] A. G. O. Goulart, G. A. Degrazia, C. R. J. Campos, C. P. Silveira, Coeficientes de difusão turbulentos para a camada residual, *Revista Brasileira de Meteorologia*, **19** (2004), 123-128.

[41] A. G. Goulart, H. F. Campos Velho, G. A. Degrazia, D. Anfossi, O. C. Acevedo, O. L. L. Moraes, D. M. Moreira, J. C. Carvalho, A model for

describing the evolution of the energy density spectrum in the convective boundary layer growth. *27th NATO/CCMS International Technical Meeting on Air Polution Modeling and its Applications*. Kluwer Academic Plenum Publishers (2004), 146-147.

[42] A. Goulart, G. Degrazia, U. Rizza, D. Anfossi, A theoretical model for the study of convective turbulence decay and comparison with large-eddy simulation data. *Boundary Layer Meteorology*, **107** (2003), 143-155.

[43] G. J. Haltiner, R. T. Williams, "Numerical Prediction and Dynamic Meteorology", 2nd edition, John Wiley & Sons, 1980.

[44] R. W. Hamming, "Digital Filters", Prentice-Hall, 1989.

[45] S. R. Hanna, Lagrangian and Eulerian time-scale in the daytime boundary layer. *Journal of Applied Meteororology*, **20** (1981), 242-249.

[46] S. R. Hanna, A method of estimating vertical eddy transport in the planetary boundary layer using characteristics of the vertical velocity spectrum. *Journal of Atmospheric Science*, **25** (1968), 1026-1033.

[47] S. L. Hess, "Introduction to Theoretical Meteorology", Krieger Pub Co., 1979.

[48] J. O. Hinze, "Turbulence", McGraw-Hill, 1975.

[49] G. Imaguire, C. L. S. Almeida, M. A. Oliveira, "Metafísica Contemporânea", Editora Vozes, 2007.

[50] J. C. Kaimal, J. C. Wyngaard, D. A. Haugen, O. R. Coté, Y. Izumi, Turbulence structure in the convective boundary layer. *Journal of Atmospheric Science*, **33** (1976), 2152-2169.

[51] P. S. Kasibhatla (Ed.), "Inverse Methods in Global Biogeochemical Cycles", American Geophysical Union, 2000.

[52] L. Kristensen, D. Lenschow, P. Kirkegaard, M. Courtney, The spectral velocity tensor for homogeneous boundary-layer turbulence. *Boundary-Layer Meteorology*, **47** (1989), 149-193.

[53] M. Madsen, "The dynamic Cosmos - Exploring the physical evolution of the Universe", Chapman & Hall, 1996.

[54] C. R. Maliska, "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional". Editora Livros Técnicos e Científicos Editora, 2a. Edição, 2004.

[55] G. L. Mellor, T. Yamada, Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. *Reviews of Geophysical Physics and Space Physics*, **20** (1982), 851-875.

[56] E. Nagel, J. R. Newman, "A Prova de Gödel", Pespectiva, 2001.

[57] F. T. M. Nieuwstadt, R. A. Brost, The decay of convective turbulence. *Journal of Atmospheric Sciences*, **43** (1986), 532-546.

[58] F. T. M. Nieuwstadt, The Turbulent Structure of the Stable Nocturnal Boundary Layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **41** 1984, 2202-2216.

[59] A. B. Nunes, H. F. de Campos Velho, P. Satyamurty, G. Degrazia, A. Goulart, U. Rizza, Morning boundary-layer turbulent kinetic energy by theoretical models, *Boundary-Layer Meteorology*, **134** (2010), 23-39.

[60] A. B. Nunes, "Crescimento da Camada Limite Convectiva: Estudo Analítico e Numérico", Tese de Doutorado, Meteorologia, INPE, 2008.

[61] H. R. Olesen, S. E. Larsen, J. Højstrup, Modelling velocity spectra in the lower part of the planetary boundary layer, *Boundary-Layer Meteorology*, **29** (1984), 285-312.

[62] Y. H. Pao, Structure of turbulent velocity and scalar fields at large wavenumbers. *The Physics of Fluids*, **8** (1965), 1063-1075.

[63] F. Pasquill, "Atmospheric Diffusion", 2nd edition, John Wiley & Sons, 1974.

[64] R. A. Pielke Sr., W. R. Cotton, R. L. Walko, C. J. Tremback, W. A. Lyons, L. D. Grasso, M. E. Nicholls, M. D. Moran, D. A. Wesley, T. J. Lee, J. H. Copeland, A comprehensive meteorological modeling system - RAMS. *Meteorology and Atmospheric Physics*, **49** (1992), 69-91.

[65] R.B. Platte, E.O. Bravo, J.C.R. Claeyssen, H.F. Campos Velho, Comportamento de algoritmos velocidade-pressão para escoamentos incompressíveis, *Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais para a Engenharia* (CILAMCE-97) (1997), 1005-1012.

[66] R.B. Platte, H.F. Campos Velho, J.C.R. Claeyssen, E.O. Bravo, Algorithms for pressure correction in the driven cavity problem, *Fourth World Congress on Computational Mechanics*, 29 June - 2 July (1998), Buenos Aires, Argentina, Proceedings in CD-ROM.

[67] F. Raes, T. Bates, F. McGovern, M. van Liedekerke, The second aerosol characterization experiment (ACE2): general context, and main results. *Tellus*, **52B** (2000), 111-125.

[68] F.M. Ramos, C. Rodrigues Neto, R.R. Rosa, Intermittency and Nonextensivity in Turbulence and Financial Markets, cond-mat/9907348 (1999).

[69] F. M. Ramos, C. Rodrigues Neto, R. R. Rosa, L. D. Abreu Sa, M. J. A. Bolzan, Generalized thermostatistical description of intermittency and nonextensivity in turbulence and financial markets, *Nonlinear Analysis - Theory*, **23** (2001), 3521-3530.

[70] D. R. Roberti, D. Anfossi, H. F. Campos Velho, G. A. Degrazia, Estimation of Pollutant Source Emission Rate from Experimental Data, *Il Nuovo Cimento*, **30 C** (2007), 177-186.

[71] D. R. Roberti, H. F. Campos Velho, G. A. Degrazia, Identifing Counter-gradient Term in Atmospheric Convective Boundary Layer, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **12** (2004), 329-339.

[72] S.F. Shandarin, Ya.B. Zeldovich, The large-scale structure of the universe: Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium, *Reviews of Modern Physics*, **61** (1989), 185-220.

[73] J. Smagorinsky, General circulation experiments with the primitive equations: I. the basic experiment. *Monthly Weather Review*, **91** (1963), 99-164.

[74] Z. Sorbjan, Decay of convective revisited. *Boundary-Layer Meteorology*, **82** (1997), 501-515.

[75] Z. Sorbjan, "Structure of the Atmospheric Boundary Layer", Prentice Hall, 1989.

[76] Z. Sorbjan, On Similarity in the Atmospheric Boundary Layer, *Boundary-Layer Meteorology*, **34** (1986), 377-397.

[77] M. M. Stanisic, "The mathematical theory of turbulence". Springer Verlag Berlin, 1988.

[78] R. B. Stull: "An Introduction to Boundary Layer Meteorology", Kluwer Academic Publishers, 1988.

[79] C. R. P. Szinvelski, "Uma Solução para a Equação da Energia Cinética Turbulenta Empregando o Método das Características", Tese de Doutorado, Depto. de Física, UFSM, 2009.

[80] G.I. Taylor, Diffusion by Continuous Movements, *Proceedings of London Mathematical Society*, **20** (1921), 196-211.

[81] H. Tennekes, J. L. Lumley, "A First Course in Turbulence". MIT Press, Cambridge, USA, 1972.

[82] C. Tsallis, Nonextensive statistics: theoretical, experimental and computational evidences and connections, *Brazilian Journal of Physics*, **29** (1999), 1-35.

[83] C. Tsallis, Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, Journal of Statistical Physics, **52** (1988), 479-487.

[84] The Virgo Consortium. 2010: `http://www.virgo.dur.ac.uk`. Acesso: 31-abril-2010.

[85] R. L. Walko, C. J. Tremback, R. F. A. Hertenstein, "RAMS - The Regional Atmospheric Modeling System: User's guides". Fort Collins, 1995. CO 80522.

[86] W.M. Washington, C.L. Parkinson: "An Introduction to Three-dimensional Climate Modeling", University Science Book, 1986.

[87] J. C. Weil, Stochastic modeling of dispersion in the convective boundary layer. In: van Dop, H. (Ed.), *Air Pollution Modelling and its Applications VII*. Plenum Press, 1989.

[88] Ya. B. Zel'dovich, Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbation, *Astronomy and Astrophysics*, **5** (1970), 84-89.

Índice

Λ-CDM, 65

Albert Einstein, 18

Claude-Louis Navier, 12
CLP: camada limite planetária, 27
constante de Kolmogorov, 42
constante de von Kármán, 31

ECT: energia cinética turbulenta, 38
Efeito Doppler, 65
empuxo, 35
Equações de Naviers-Stokes, 12
estratopausa, 27
estratosfera, 27

Galileo Galilei, 11
Geoffrey Ingram Taylor, 13
George Gabriel Stokes, 12

hipótese de Taylor, 32

Isaac Newton, 11

Johannes Kepler, 11

Lewis F. Richardson, 13

Massa bariônica, 65
Matéria escura, 64
MCG: modelos de circulação geral, 46
mesopausa, 27
mesosfera, 27
metafísica, 11
Monin-Obukhov, comprimento, 31
movimento browniano, 18

Principia: Livro II, 12

Redshift, 65

STBL: stratocumulus-topped boundary-layer, 46

temperatura potencial, 35
termosfera, 27
tropopausa, 27
troposfera, 27

velocidade de friccão, 30

Notas em Matemática Aplicada

Arquivos em pdf disponíveis em http://www.sbmac.org.br/notas.php

1. Restauração de Imagens com Aplicações em Biologia e Engenharia
   Geraldo Cidade, Antônio Silva Neto e Nilson Costa Roberty
2. Fundamentos, Potencialidades e Aplicações de Algoritmos Evolutivos
   Leandro dos Santos Coelho
3. Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Águas Subterrâneas
   Edson Wendlander
4. Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais
   Maria Cristina de Castro Cunha e Maria Amélia Novais Schleicher
5. Modelagem em Biomatemática
   Joyce da Silva Bevilacqua, Marat Rafikov e Cláudia de Lello Courtouke Guedes
6. Métodos de Otimização Randômica: algoritmos genéticos e "simulated annealing"
   Sezimária F. Pereira Saramago
7. "Matemática Aplicada à Fisiologia e Epidemiologia"
   H.M. Yang, R. Sampaio e A. Sri Ranga
8. Uma Introdução à Computação Quântica
   Renato Portugal, Carlile Campos Lavor, Luiz Mariano Carvalho e Nelson Maculan
9. Aplicações de Análise Fatorial de Correspondências para Análise de Dados
   Homero Chaib Filho

10. Modelos Matemáticos baseados em autômatos celulares para Geoprocessamento

    Marilton Sanchotene de Aguiar, Fábia Amorim da Costa,

    Graçaliz Pereira Dimuro e Antônio Carlos da Rocha Costa

11. Computabilidade: os limites da Computação

    Regivan H. N. Santiago e Benjamín R. C. Bedregal

12. Modelagem Multiescala em Materiais e Estruturas

    Fernando Rochinha e Alexandre Madureira

13. Modelagem em Biomatemática (Coraci Malta ed.)

    1 - "Modelagem matemática do comportamento elétrico de neurônios e algumas aplicações"

    Reynaldo D. Pinto

    2 - "Redes complexas e aplicações nas Ciências"

    José Carlos M. Mombach

    3 - "Possíveis níveis de complexidade na modelagem de sistemas biológicos"

    Henrique L. Lenzi, Waldemiro de Souza Romanha e Marcelo Pelajo- Machado

14. A lógica na construção dos argumentos

    Angela Cruz e José Eduardo de Almeida Moura

15. Modelagem Matemática e Simulação Numérica em Dinâmica dos Fluidos

    Valdemir G. Ferreira, Hélio A. Navarro, Magda K. Kaibara

16. Introdução ao Tratamento da Informação nos Ensinos Fundamental e Médio

    Marcilia Andrade Campos, Paulo Figueiredo Lima

17. Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações

    Rosana Sueli da Motta Jafelice, Laércio Carvalho de Barros,

    Rodney Carlos Bassanezi

18. Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira

    Socorro Rangel

19. Observar e Pensar, antes de Modelar
    Flavio Shigeo Yamamoto, Sérgio Alves, Edson P. Marques Filho, Amauri P. de Oliveira
20. Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações
    Eliana Xavier Linhares de Andrade, Cleonice Fátima Bracciali
21. Uma Introdução à Teoria de Códigos
    Carlile Campos Lavor, Marcelo Muniz Silva Alves, Rogério Monteiro de Siqueira, Sueli Irene Rodrigues Costa
22. Análise e Processamento de Sinais
    Rubens Sampaio, Edson Cataldo, Alexandre de Souza Brandão
23. Introdução aos Métodos Discretos de Análise Numérica de EDO e EDP
    David Soares Pinto Júnior
24. Representações Computacionais de Grafos
    Lílian Markenzon, Oswaldo Vernet
25. Ondas Oceânicas de Superfície
    Leandro Farina
26. Técnicas de Modelagem de Processos Epidêmicos e Evolucionários
    Domingos Alves, Henrique Fabrício Gagliardi
27. Introdução à teoria espectral de grafos com aplicações
    Nair Maria Maia de Abreu, Renata Raposo Del-Vecchio, Cybele Tavares Maia Vinagre e Dragan Stevanović
28. Modelagem e convexidade
    Eduardo Cursi e Rubens Sampaio
29. Modelagem matemática em finanças quantitativas em tempo discreto
    Max Oliveira de Souza e Jorge Zubelli
30. Programação não linear em dois níveis: aplicação em Engenharia Mecânica
    Ana Friedlander e Eduardo Fancello

31. Funções simétricas e aplicações em Combinatória

    José Plinio de Oliveira Santos e Robson da Silva

32. Semigrupos aplicados a sistemas dissipativos em EDP

    Carlos Raposo da Cunha

33. Introdução à Simulação Estocástica para Atuária e Finanças Usando R

    Hélio Côrtes Vieira, Alejandro C. Frery e Luciano Vereda

34. Modelos de Sustentabilidade nas Paisagens Amazônicas Alagáveis

    Maurício Vieira Kritz, Jaqueline Maria da Silva e Cláudia Mazza

35. Uma Introdução à Dinâmica Estocástica de Populações

    Leonardo Paulo Maia

36. Geometria de Algoritmos Numéricos

    Gregorio Malajovich

37. Equações Diferenciais, Teorema do Resíduo e as Transformadas Integrais

    Edmundo Capelas de Oliveira e Jayme Vaz Júnior

38. Métodos Matemáticos e Computacionais em Música

    Paulo Cezar Carvalho,Luiz Velho, Marcelo Cicconet e Sergio Krakowski

39. Métodos para Problemas Inversos de Grande Porte

    Fermín S. Viloche Bazán e Leonardo Silveira Borges

40. TerraME : Suporte a Modelagem Ambiental Multi-Escalas Integrada a Bancos de Dados Geográficos

    Tiago Garcia de Senna Carneiro e Gilberto Camara

41. Técnicas de Inteligência Computacional Inspiradas na Natureza - Aplicações em Problemas Inversos em Transferência Radiativa

    Antônio J. Silva Neto e José Carlos Becceneri

42. Avanços em Métodos de Krylov para Solução de Sistemas Lineares de Grande Porte

    Luiz Mariano Carvalho e Serge Gratton

43. Uma Abordagem para Modelagem de Dados com o Uso de Sistemas Neuro-Fuzzy: Aplicações Geoespaciais

    Luiz Carlos Benini e Messias Meneguette Jr

44. Construções Concretas e Geometria Dinâmica: Abordagens Interligadas para o Estudo de Cônicas

    Angela Rocha dos Santos