

Volume 46, 2012

Editado por

Célia A. Zorzo Barcelos

Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Uberlândia, MG, Brasil

Eliana X.L. de Andrade

Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

Maurílio Boaventura

Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7)**, as figuras em eps e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
<http://www.sbmac.org.br/notas.php>



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

2012

**DESCRIÇÕES MICROSCÓPICA,
MACROSCÓPICA E CINÉTICA DO FLUXO
DE TRÁFEGO VEICULAR**

Liliana Madalena Gramani
l.gramani@gmail.com

Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2012

Coordenação Editorial: Elbert Einstein Nehrer Macau

Coordenação Editorial da Série: Eliana Xavier Linhares de Andrade

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2012 by Liliana Madalena Gramani.

Direitos reservados, 2012 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

Catálogo elaborado pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

Gramani, Liliana M.

Descrições microscópica, macroscópica e cinética do fluxo de tráfego veicular - São Carlos, SP: SBMAC, 2012, 89 p., 20.5 cm - (Notas em Matemática Aplicada; v. 46)

e-ISBN 978-85-8215-006-1

1. Fluxo de Tráfego. 2. Engenharia de Transportes.
3. Planejamento.

I. Gramani, Liliana M. II. Título. III. Série

CDD - 51

Esta é uma republicação em formato de e-book do livro original do mesmo título publicado em 2010 nesta mesma série pela SBMAC.

A meus amados filhos Gregory e Christopher pelo carinho e
compreensão em todos os momentos dedicados ao
desenvolvimento de minhas pesquisas.
A meus pais Elso (em memória) e Mari pelo amor, dedicação e
ensinamentos, sem os quais não seria possível prosseguir.

Dedico

Agradecimentos

Quero registrar aqui os meus agradecimentos à todos que de alguma maneira contribuirão para a elaboração deste minicurso, em particular:

Ao professor Dr. Nicola Bellomo pela orientação do meu pós-doutorado sobre "Tráfego" realizado na Politécnico de Torino - Itália.

A professora Dra. Ida Bonzani por todos os trabalhos que estamos realizando juntas.

Ao professor Dr. Gilberto Medeiros Kremer pelo grande incentivo e revisão deste minicurso.

Ao professor Dr. Volmir Eugênio Wilhelm pela amizade e apoio constantes.

Ao meu grupo de pesquisa, em especial aos professores Dr. Anselmo Chaves Neto e Dr. Eloy Kaviski e aos meus alunos, Adilandri Mércio Lobeiro, Adriana Luiza do Prado, Fábio André Negri Balbo, Marina Vargas R. P. G. Ferreira, Rudinei Luiz Bogo e André Luis Onorio, que estão sempre proporcionando contribuições para o desenvolvimento deste estudo.

À Universidade Federal do Paraná pelo apoio às minhas pesquisas.

À bolsa-Capes de estágio Pós-doutoral concedida durante o período do meu pós-doutorado.

Conteúdo

Prefácio	11
1 Introdução	13
1.1 Escalas e Estruturas Matemáticas	14
1.2 Planejamento do minicurso	16
2 Representação Microscópica	19
2.1 O Movimento de um único veículo	19
2.2 Equações da Mecânica Newtoniana - As leis de Newton	22
2.2.1 Interação microscópica - Tabela de jogos	24
2.3 Exercícios Propostos	26
3 Representação Macroscópica (RM)	29
3.1 Variáveis macroscópicas do fluxo de uma pista	29
3.2 Variáveis macroscópicas para o fluxo em várias pistas	31
3.3 Diagramas e Resultados Experimentais	32
3.3.1 Parte I: Diagramas Quantitativos	33
3.3.2 Parte II: Resultados experimentais para o tráfego em uma única pista	35
3.3.3 Parte III: Resultados experimentais com transição de fase	42
3.4 Exercícios Propostos	48
4 Os Modelos Hidrodinâmicos de Primeira Ordem - (RM)	49
4.1 Leis de Conservação do Tráfego	50
4.2 O fechamento da equação de conservação da massa	50
4.3 Análise crítica e novas perspectivas	57
4.4 Exercícios Propostos	59

5	Os Modelos Hidrodinâmicos de Segunda Ordem - (RM)	61
5.1	Análise crítica e perspectivas	65
5.1.1	Dos Modelos Matemáticos à Realidade Física	65
5.2	Exercícios Propostos	66
6	Representação Cinética ou Mesoscópica	67
6.1	Fundamentos da Teoria Cinética dos gases	68
6.1.1	Equação tipo-Boltzmann	71
6.2	Os Momentos da Função de Distribuição	76
6.3	Exercícios Propostos	78
	Bibliografia	79

Prefácio

Este minicurso tem por objetivo introduzir aos alunos conceitos sobre a teoria matemática do tráfego veicular nas escalas microscópica, macroscópica e cinética (ou mesoscópica), assunto de grande interesse de pesquisa atual no campo interdisciplinar entre a matemática e a engenharia de tráfego.

No capítulo 1 introduziremos as escalas utilizadas na representação da modelagem do tráfego. Um resumo geral dos demais capítulos é providenciado contendo os tópicos a serem determinados.

O objetivo do capítulo 2 é apresentar a descrição microscópica através das equações newtonianas para o movimento de um único veículo, em que as variáveis envolvidas podem ser consideradas como função do tempo, da posição ou da velocidade. A interação binária veicular é discutida e ilustrada. Este capítulo baseia-se no livro de Leutzbach [31] e no artigo [16].

A descrição macroscópica é apresentada nos capítulos 3, 4 e 5. Primeiramente, no capítulo 3 são introduzidas as variáveis macroscópicas em que dois casos são considerados: fluxo em uma pista e fluxo em várias pistas. A equação fundamental do fluxo de tráfego é obtida e os diagramas, fundamental e da velocidade, para vários modelos, são descritos. Os modelos hidrodinâmicos de primeira ordem são apresentados no capítulo 4 e uma análise crítica sobre os mesmos é introduzida, assim como a sugestão de um modelo dependente de apenas um parâmetro fenomenológico é apresentada. O capítulo 5 refere-se aos modelos hidrodinâmicos de segunda ordem. A validade destes modelos é discutida segundo o artigo de Daganzo. Os capítulos 3, 4 e 5 foram baseados no artigo [9].

O capítulo 6 se refere a descrição cinética e encerra este minicurso. O objetivo deste capítulo é obter a equação tipo-Boltzmann. As equações de balanço de massa e de momento, são obtidas através da equação tipo-Boltzmann com o uso dos campos básicos, e descrevem os modelos hidrodinâmicos de primeira e segunda ordem. Este capítulo foi baseado nas teses de doutorado de Gramani [18] e Laibida [29].

Em todos os capítulos deste minicurso foram propostos exercícios relacionados ao texto desenvolvido.

Curitiba, 22 de abril de 2010.

Liliana Madalena Gramani

Capítulo 1

Introdução

A otimização e o controle do fluxo de tráfego de veículos ao longo de uma estrada ou rodovias, sejam urbanas ou rurais, tem se apresentado como um campo de pesquisa muito interessante e que interage várias áreas, tais como a engenharia, a matemática e a física. Este estudo, matematicamente, é representado por um conjunto de modelos que descrevem a evolução, no tempo e no espaço, das condições do fluxo: a densidade de veículos assim como a sua velocidade. O foco destes modelos dá-se em diferentes aspectos, tais como: modelagem matemática e física, desenvolvimento de esquemas computacionais, problemas analíticos, etc. Em muitos casos, os modelos buscam descrever de uma maneira matemática a interação entre os veículos e a estrada, entretanto o complexo comportamento dos motoristas [12], observado experimentalmente, deve ser incluído em todos os modelos de tráfego que objetivam representar matematicamente o fluxo de tráfego real. Um grande número de fatores podem afetar o comportamento dos motoristas (idade, cultura, gênero, propósito da viagem, tipo da infra-estrutura, etc). Desta forma, as propriedades dos motoristas diferem de caso para caso, conseqüentemente suas características específicas não podem ser consideradas constantes no sistema. A análise destes modelos fornece meios para avaliar e prever o tráfego e determinar estratégias de controle em áreas urbanas.

Devido a vários interesses econômicos e sociais, a literatura existente é vasta e caracterizada por contribuições que abrangem vários aspectos, tais como, especificações do problema, análise qualitativa e simulações relacionadas as observações experimentais. Alguns livros e artigos providenciam uma útil revisão teórica "useful background". Uma leitura interessante pode ser obtida nos livros de Prigogine e Herman [37] para o caso dos modelos

cinéticos, e de Leutzback [31], para o caso dos modelos microscópicos e macroscópicos (ou hidrodinâmicos). Quanto aos artigos, como principais, podemos citar o de Klar, Kühne e Wegener [24], e de Bellomo, Delitala e Coscia [3]. Ainda, o livro de Kerner [22] representa uma referência valiosa quanto a experimentos e teorias.

O conteúdo deste capítulo está organizado em mais duas seções, as quais a seguir são brevemente introduzidas.

– Seção 1.1 introduz a observação e a representação das escalas que podem ser utilizadas para a modelagem do tráfego. Como será visto, diferentes estruturas matemáticas correspondem a diferentes escalas de representação. Subseqüentemente, esta seção motiva a validade dos modelos hidrodinâmicos contudo uma análise crítica é desenvolvida para os modelos de primeira e segunda ordem.

– Seção 1.2 providencia a apresentação de um resumo geral de todos os tópicos contidos neste minicurso, destacando as aplicações na engenharia assim como as ferramentas matemáticas e físicas utilizadas nas mesmas.

O objetivo principal deste minicurso consiste em providenciar uma análise crítica apropriada para se conduzir a novas perspectivas de pesquisa neste campo. Com esta finalidade serão introduzidos conceitos sobre a teoria matemática do tráfego veicular nas escalas microscópica, macroscópica e cinética (ou mesoscópica), assunto de grande interesse de pesquisa atual no campo interdisciplinar entre a matemática e a engenharia de tráfego.

Os fatores de motivação desta proposta são permitir aos interessados (i) conhecer as fundamentações teóricas para diferentes escalas de modelagem matemática para o fluxo de tráfego veicular, (ii) aprimorar o seu conhecimento relativo as teorias básicas do Cálculo Diferencial e Integral de uma e várias variáveis reais e das Equações Diferenciais e suas relações com as demais áreas do conhecimento envolvendo a matemática, a física e a engenharia, (iii) analisar situações reais comparadas aos modelos matemáticos já existentes.

1.1 Escalas e Estruturas Matemáticas

O fenômeno do fluxo de tráfego, como todos os sistemas reais no mundo, pode ser observado e representado por diferentes escalas. Este minicurso será dedicado a modelagem das equações microscópicas, macroscópicas hidrodinâmicas e cinéticas, que poderão ser utilizadas na interpretação de resultados experimentais.

Especificamente, a modelagem do fenômeno do fluxo de tráfego pode ser desenvolvida por três diferentes escalas de representação: a microscópica,

a macroscópica e a cinética (ou mesoscópica). Cada uma destas escalas apresenta uma estrutura matemática própria como detalhado abaixo:

- Escala Microscópica

"Modelagem Microscópica", quando todos os veículos são identificados individualmente. Neste caso a posição e a velocidade de cada veículo definem o estado do sistema como variáveis dependentes do tempo. Os modelos matemáticos referentes a esta escala, são representados pelas equações da mecânica newtoniana, ou seja equações diferenciais da dinâmica que descrevem sua evolução geralmente por sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDO). A solução do sistema de EDO providencia a descrição das condições de fluxo na estrada.

- Escala Macroscópica

"Modelagem Macroscópica", descarta a escala microscópica do tráfego em termos das velocidades individuais dos veículos ou as componentes individuais do sistema (tais como as ligações ou os cruzamentos), adotando uma visão macroscópica do tráfego em uma rede. Nesta escala o estado do sistema é descrito por quantidades médias localmente calculadas, nominalmente a densidade, o momento linear e a energia cinética dos veículos, consideradas como variáveis dependentes do tempo e do espaço. Os modelos matemáticos referentes a esta escala são baseados na teoria hidrodinâmica de fluidos e assumem um fluxo contínuo de veículos. As equações de conservação e modelos fenomenológicos são utilizadas, descrevendo a evolução das variáveis, densidade, momento linear e energia, por sistemas de equações diferenciais parciais. Os modelos são limitados geralmente às primeiras duas quantidades, a equação de evolução da densidade de veículos e velocidade como variáveis observáveis do fluxo de veículos, considerando a grande dificuldade em se modelar a energia por uma descrição macroscópica.

- Escala Cinética

"Modelagem Cinética", quando o estado do sistema é ainda identificado pela posição e pela velocidade dos veículos, entretanto esta identificação não refere-se a cada veículo, mas a uma distribuição apropriada de probabilidade sobre o estado microscópico considerado como uma variável aleatória. Os modelos matemáticos referentes a esta escala descrevem a evolução da função de distribuição por equações integro-diferenciais com a estrutura similar à equação de Boltzmann. Os modelos matemáticos aplicados na teoria cinética foram desenvolvidos, a partir dos livros pioneiros de Prigogine e Herman [37], para o

modelo de fluxo de tráfego veicular sobre estradas e redes de estradas. As idéias de Prigogine motivaram a pesquisa neste campo por vários autores, entre outros Paveri Fontana [34], Klar e Wegener [25], Nelson [33], Bellomo e Coscia [4], Darbha e Rajagopal [14]. A literatura existente é relatada em vários artigos revistos focando diferentes aspectos tais como: modelagem matemática e física, desenvolvimento de esquemas computacionais, problemas analíticos, etc. O livro de Kerner [22] fornece uma interpretação física detalhada dos fenômenos do tráfego que focalizam os vários eventos observados que devem ser corretamente descritos por modelos matemáticos.

Em geral todas as escalas estão tecnicamente relacionadas. Por exemplo, os modelos microscópicos contribuem para a descrição matemática das interações entre os veículos, os quais são utilizados na teoria cinética, enquanto que os modelos macroscópicos também estão relacionados com as equações dos modelos assintóticos aplicados as equações cinéticas. Além do mais, a modelagem de sistemas complexos, tais como o tráfego, tem a dificuldade adicional de que nenhuma representação de escala é efetivamente consistente com a física do sistema analisado. Este assunto é corretamente discutido no decorrer deste minicurso, onde é especificado que o presente estado da arte não permite estabelecer corretamente a validade de uma classe de modelos com respeito a um outro. Levando-se isto em conta, este minicurso refere-se a modelagem pelas equações microscópicas, microscópicas e cinéticas, considerando não apenas o comportamento mecânico dos veículos, mas também a interação motorista-máquina entre os motoristas e os veículos, a qual é muitas vezes desconsiderado na literatura, apesar da contribuição perspicaz do artigo de Daganzo [13], o qual fornece vários comentários que conduzem a criação de novos modelos.

1.2 Planejamento do minicurso

O conteúdo deste minicurso está desenvolvido através de mais alguns capítulos.

Em detalhes o minicurso apresenta:

Descrição Microscópica

- O capítulo 2 determina o estado do veículo pela sua posição e velocidade definidas como variáveis dependentes do tempo. Os modelos são caracterizados por estas variáveis as quais descrevem explicitamente o movimento de cada veículo através de uma equação diferencial ordinária (EDO). A cinemática do movimento de um único veículo em uma estrada, ou via, sem

se preocupar com a análise de suas causas é desenvolvida e alguns conceitos fundamentais são apresentados neste contexto de acordo com duas descrições: a função dependente do tempo e a função dependente da distância. Neste contexto, assume-se que o veículo é pontual. As Leis de Newton são enunciadas com o objetivo de se obter as equações diferenciais da dinâmica, que descrevem a evolução dos veículos através da solução de um sistema de EDO. As considerações da interação microscópica veicular são abordadas e como ilustração, uma tabela de jogos é apresentada.

Descrição Macroscópica

- O capítulo 3 relata experiências desenvolvidas para descrever o fluxo estável, ou seja, as condições uniformes de fluxo. Estas condições são representadas por vários diagramas, dentre eles três principais, o diagrama da velocidade como função da densidade, o do fluxo como função da densidade e ainda o diagrama do fluxo como função da velocidade.

À derivação dos modelos de primeira ordem correspondente a conservação de massa é apresentada no capítulo 4. Como se sabe, a hidrodinâmica macroscópica é descrita pela conservação adequada das equações correspondentes à massa, momento e energia. Usando a conservação da massa se faz necessário uma equação adicional que expresse a velocidade média como uma função da densidade local. Diferentes modelos correspondem a diferentes maneiras de obter essa expressão. Os modelos de primeira ordem têm como a maior vantagem a utilização de uma estrutura muito simples. Por outro lado, vários modelos conhecidos na literatura apresentam a necessidade de introduzir parâmetros empíricos como uma característica interna do modelo. Este aspecto é analisado criticamente neste capítulo, enquanto que algumas soluções são apresentadas.

Os modelos de segunda ordem correspondentes as equações de massa e da conservação do momento são apresentados no capítulo 5. Os modelos são obtidos em termos da modelagem da aceleração e na identificação de invariantes apropriados à força e a pressão.

Descrição Cinética

- O capítulo 6 desenvolve a representação cinética para o fluxo de veículos em uma estrada. Inicialmente, se apresenta uma revisão dos fundamentos da teoria cinética dos gases, onde se considera um gás monoatômico de N partículas que está contido em um recipiente de volume V . Assim obtém-se a equação de Boltzmann, uma equação íntegro-diferencial não linear que descreve a evolução da função de distribuição. Fazendo uma analogia entre o gás monoatômico constituído de N partículas e os veículos presentes na estrada, se determina a equação tipo-Boltzmann, também uma equação

íntegro-diferencial não linear que descreve a evolução da função de distribuição. As hipóteses consideradas para a obtenção destas duas equações são apresentadas. A partir da função de distribuição são definidos os campos básicos para o tráfego de veículos. Através da equação tipo-Boltzmann e com o uso das equações dos campos básicos, se obtém a equação da conservação da massa e do momento, as quais constituem os modelos de primeira e segunda ordem presentes na descrição macroscópica.

Capítulo 2

Representação Microscópica

Na modelagem microscópica o estado do veículo é determinado pela sua posição e velocidade definidas como variáveis dependentes do tempo, as quais descrevem o sistema. Os modelos são caracterizados por descreverem explicitamente o movimento de cada veículo por uma equação diferencial ordinária (EDO). A solução da EDO referente a um único veículo, geralmente é simples, dadas as condições de contorno, e descreve de forma precisa o movimento do mesmo. Entretanto, para se descrever as condições reais de fluxo na estrada, deve-se considerar todos os veículos presentes na mesma e quando o número de veículos considerados é muito grande, a solução do sistema de EDO exigirá um grande esforço computacional. Desta forma, embora esta escala teoricamente permita uma descrição mais precisa do movimento de cada veículo e conseqüentemente do fluxo real, torna-se inviável quando o número de veículos considerados for muito grande.

Neste capítulo descreveremos o movimento de um único veículo em uma estrada, ou via. Neste caso, por hipótese, o veículo será considerado como uma partícula, ou ponto material, ou pontual, isto é, o veículo como um todo se move de maneira igual além de desprezarmos a sua dimensão. Como ilustração, um exemplo de interação microscópica veicular é apresentado através de uma tabela de jogos.

2.1 O Movimento de um único veículo

A cinemática é a parte da física que estuda o movimento sem se preocupar com as suas causas. Alguns conceitos são fundamentais para este estudo, por exemplo, o de espaço, deslocamento escalar, etc. Então, apresentaremos a seguir quantidades dimensionais tais como a posição x , a velocidade

v e a aceleração a , presentes na cinemática do movimento de um único veículo como função do tempo t . Esta representação também poderá ser modificada, ou seja, as variáveis poderão vir representadas em função da posição.

Consideremos a estrada como um sistema formado por N veículos. Então, **identificando individualmente um veículo**, temos que o estado do sistema é definido através da posição, da velocidade e da aceleração de cada veículo, denominadas como variáveis dependentes, geralmente, do tempo. Assim, para $i = 1, \dots, N$, podemos introduzir as seguintes quantidades dimensionais:

- x_i é a *posição* do veículo i .

A variável x_i determina a posição do veículo i em algum local ao longo da estrada, ou via, considerada. Então considerando-se uma pista de comprimento ℓ , temos que $0 \leq x_i \leq \ell$. No instante de tempo t , a posição do veículo i é dada por $x_i(t)$ e após um intervalo de tempo Δt a nova posição será dada por $x_i(t + \Delta t)$. Estas posições serão iguais se o veículo considerado estiver em repouso.

- v_i é a *velocidade* do veículo i .

A velocidade de cada veículo poderá atingir o seu valor máximo nas condições de tráfego livre. Então v_i representa a velocidade de cada veículo i e esta relacionado com a variável posição x_i através da seguinte equação diferencial

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} \quad (2.1.1)$$

que representa a taxa temporal de variação da posição. Portanto, no instante de tempo t , a velocidade do veículo i é dada por $v_i(t)$ e após um intervalo de tempo Δt a nova velocidade será dada por $v_i(t + \Delta t)$. As velocidades serão iguais se o veículo considerado estiver com velocidade constante ou em repouso.

- a_i é a *aceleração* do veículo i .

A aceleração a_i representa a taxa temporal de variação da velocidade,

$$a_i = \frac{dv_i}{dt}, \quad \text{ou em termos da posição,} \quad a_i = \frac{d^2x_i}{dt^2}. \quad (2.1.2)$$

Desta forma, a aceleração é igual a zero para movimentos cuja velocidade é uma constante. Ainda, no instante de tempo t , a aceleração do veículo i é dada por $a_i(t)$ e após um intervalo de tempo Δt a nova aceleração será dada por $a_i(t + \Delta t)$. As acelerações, $a_i(t)$ e $a_i(t + \Delta t)$, serão iguais a zero se o veículo i estiver com velocidade constante.

Se as condições iniciais quanto a posição, a velocidade e o tempo para o veículo i forem denotadas por x_{0_i} , v_{0_i} e t_{0_i} , respectivamente, podemos obter as relações:

(i) para a posição x_i como função do tempo

$$x_i(t) = x_{0_i} + \int_{t_{0_i}}^t v_i(t) dt \quad (2.1.3)$$

integrando ambos os membros da Eq. (2.1.1) e

(ii) para a velocidade v_i e a posição x_i em termos da aceleração

$$v_i(t) = v_{0_i} + \int_{t_{0_i}}^t a_i(t) dt \quad (2.1.4)$$

e

$$x_i(t) = x_{0_i} + \int_{t_{0_i}}^t v_{0_i} dt + \int_{t_{0_i}}^t \int_{t_{0_i}}^t a_i(t) dt dt. \quad (2.1.5)$$

Portanto, as equações de movimento obtidas, (2.1.3), (2.1.4) e (2.1.5), são todas em função do tempo, entretanto também é possível considerar as quantidades dimensionais que descrevem o movimento em função da posição. Com este objetivo, poderemos inicialmente reescrever a Eq. (2.1.1) para a velocidade do veículo i como função da posição x_i , ou seja $v_i(x_i)$, como sendo

$$v_i(x_i) = \frac{1}{\frac{dt}{dx_i}}$$

que poderá ser reescrita como

$$dt = \frac{dx_i}{v_i(x_i)}$$

fornecendo

$$t(x_i) = t_{0_i} + \int_{x_{0_i}}^{x_i} \frac{dx_i}{v_i(x_i)}, \quad (2.1.6)$$

a qual representa o tempo como função da posição x_i do veículo i considerado.

Ainda, considerando a velocidade como função da posição, $v_i(x_i)$, na Eq. (2.1.2), podemos escrever a aceleração do veículo i como função da posição x_i como

$$a_i(x_i) = \frac{dv_i(x_i)}{dt} = \frac{d\left[\frac{1}{2}(v_i(x_i))^2\right]}{dx_i}, \quad (2.1.7)$$

resultando na seguinte expressão para $v_i(x_i)$

$$v_i(x_i) = \sqrt{v_{0_i}^2 + 2 \int_{x_{0_i}}^{x_i} a_i(x_i) dx_i}. \quad (2.1.8)$$

Portanto, as equações de movimento obtidas, (2.1.7) e (2.1.8), descrevem o movimento em função da posição.

Devemos salientar que a obtenção das equações que descrevem o movimento do veículo individual i em função do tempo ou da posição, consideraram a hipótese de que os **veículos são considerados pontuais**, ou seja, o veículo como um todo se move de maneira igual além da sua dimensão ser desprezada.

2.2 Equações da Mecânica Newtoniana - As leis de Newton

No estudo do tráfego real de veículos deveremos considerar o movimento dos veículos levando-se em consideração as interações microscópicas entre eles.

Portanto, o estudo da dinâmica nos fornece a relação entre o movimento de um corpo e a força que o produziu, sendo que as leis dinâmicas de movimento foram estabelecidas por Sir Issac Newton e são denominadas como "as leis de Newton". Estas leis são enunciadas a seguir, conforme o livro de Young e Freedman [41]:

Primeira Lei de Newton ou Lei da inércia: Quando a força resultante sobre um corpo é igual a zero ele se move com velocidade constante (que pode ser nula) e aceleração.

Segunda Lei de Newton ou Lei da Quantidade de Movimento: Quando uma força resultante externa atua sobre um corpo, ele acelera. A aceleração possui a mesma direção e o mesmo sentido da força resultante. O vetor força resultante é igual ao produto da massa do corpo pelo vetor aceleração do corpo.

Terceira Lei de Newton ou Lei da Ação e Reação: Quando um corpo A exerce uma força sobre um corpo B (uma "ação"), então o corpo B exerce uma força sobre o corpo A (uma "reação"). Essas duas forças têm o mesmo módulo e a mesma direção, mas possuem sentidos contrários. Essas duas forças atuam em corpos diferentes.

Considerando-se a segunda Lei de Newton, enunciada acima, a força resultante F aplicada sobre uma partícula de massa m produz uma aceleração

a. Então, para o caso do veículo i , podemos escrever que

$$F_i = m_i a_i, \quad \text{ou em termos da posição,} \quad F_i = m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}, \quad (2.2.9)$$

onde F_i é a força aplicada sobre o veículo i de massa m_i . Portanto, a equação diferencial da dinâmica (2.2.9) descreve a evolução do veículo i através da solução de uma equação diferencial ordinária (EDO), que poderá ser resolvida dadas as condições de contorno.

Entretanto, para a obtenção da solução da Eq. (2.2.9), para o caso de fluxo de tráfego de veículos, algumas hipóteses são consideradas:

1. Os veículos são considerados como partículas pontuais.
2. Os veículos se deslocam na mesma direção e no mesmo sentido.
3. A força F_i representa a força resultante aplicada sobre o veículo i que sofre a interação com outros veículos que estejam dentro da mesma zona de visibilidade ξ , conforme definido no artigo [16].
4. A regra de interação entre os veículos, ou seja a interação microscópica, deve ser definida.
5. As entradas e saídas de veículos da estrada são desconsideradas como simplificação do problema, ou seja, a densidade total do número de veículos na estrada é constante.

Portanto os modelos matemáticos referentes a esta escala, são representados pelas equações diferenciais da dinâmica, ou seja, pelas equações da mecânica newtoniana, que descrevem sua evolução geralmente por sistemas de equações diferenciais ordinárias, onde a descrição das condições de fluxo na estrada são providenciadas pela solução do sistema de N equações, ou seja, uma equação para cada veículo i , com $i = 1, \dots, N$. Quando o número de equações envolvidas é pequeno, ou seja, quando a estrada considerada apresenta poucos veículos, a solução é simplesmente determinada através dos métodos numéricos tradicionais de solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias. Entretanto, ao se considerar um número muito grande de veículos, a resolução do sistema poderá torna-se analiticamente e computacionalmente inviável. Então, embora esta escala represente de forma mais precisa o real tráfego de veículos por informar o movimento individual de cada um deles, pode não ser conveniente aplicá-la quando o número de equações que formam o sistema for elevado, ou seja, quando o número de veículos presentes na estrada for muito grande.

2.2.1 Interação microscópica - Tabela de jogos

Na literatura temos vários modelos para a definição da regra da interação microscópica. Na teoria cinética, no caso de um gás rarefeito, por exemplo, somente as interações entre os pares de partículas (colisões binárias) são levadas em consideração, pois a probabilidade de ocorrer colisões ternárias ou quaternárias é muito pequena em relação as colisões binárias.

Para o tráfego de veículos, de uma maneira semelhante à teoria cinética dos gases, poderemos assumir que somente as interações entre os pares de veículos serão levadas em consideração. Como ilustração de uma regra binária para a interação microscópica veicular iremos descrever a tabela de jogos utilizada no artigo [16].

Delitala e Tosin [16] determinaram em seu modelo que, a interação entre pares de veículos ocorrerá com uma maior ou menor frequência, dependendo da densidade ρ , dentro de uma região definida como a zona de visibilidade. A regra desta interação binária foi fixada por uma tabela de jogos em que o veículo candidato com velocidade v_h interage com o veículo campo com velocidade v_k . Após a interação, o veículo candidato poderá ajustar ou não a sua velocidade para v_i .

Então, especificamente, o modelo de Delitala e Tosin considera três situações para compor a tabela de jogos, que define a regra de interação, descritas abaixo:

1. A interação ocorre com um veículo mais rápido, ou seja, a velocidade do veículo campo é maior do que a velocidade do veículo candidato, $v_h < v_k$.
2. A interação ocorre com um veículo mais lento, ou seja, a velocidade do veículo candidato é maior do que a velocidade do veículo campo, $v_h > v_k$.
3. A interação ocorre em veículos com a mesma velocidade, ou seja, a velocidade do veículo candidato é igual a velocidade do veículo campo, $v_h = v_k$.

As interações descritas acima são afligidas pela densidade de veículos ρ e pelas condições da qualidade da estrada ou condições climáticas, etc, representados pelo parâmetro fenomenológico α .

Desta forma, o item (1) está representado pela Fig. (2.1) em que o veículo candidato poderá permanecer com a mesma velocidade ou acelerar, dependendo das condições de tráfego, ou seja da densidade, e ainda das condições da estrada. Portanto, se a densidade for baixa e a qualidade da estrada for alta, o veículo candidato acelera e após a interação $v_i > v_h$.

No entanto, se a condições de fluxo não forem boas, o veículo candidato manterá a mesma velocidade, ou seja, $v_i = v_h$.

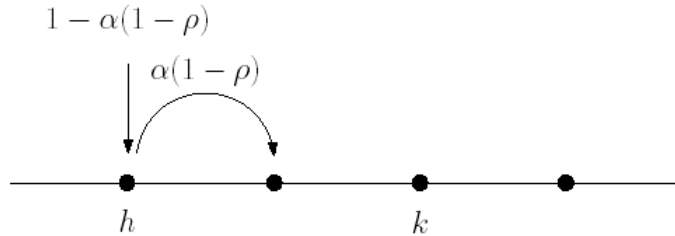


Figura 2.1: Velocidade do veículo candidato menor do que a velocidade do veículo campo, $v_h < v_k$, segundo a referência [16]

O item (2), representado pela Fig. (2.2) ilustra que o veículo candidato poderá permanecer com a mesma velocidade ou diminuir, dependendo das condições de tráfego, ou seja da densidade, e ainda das condições da estrada. Embora seja possível ocorrer a ultrapassagem, que depende da densidade, assume-se que o veículo candidato não poderá acelerar para ultrapassar. Então, se a densidade for baixa e a qualidade da estrada for alta, o veículo candidato permanecerá com a mesma velocidade, $v_i = v_h$, caso contrário irá diminuir a sua velocidade, ou seja, $v_i < v_h$.

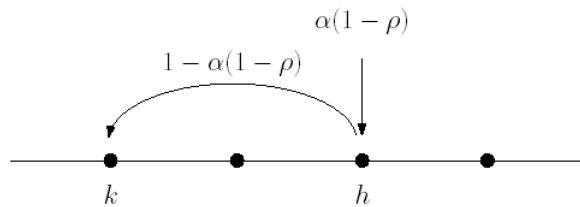


Figura 2.2: Velocidade do veículo candidato maior do que a velocidade do veículo campo, $v_h > v_k$, segundo a referência [16]

A Fig. (2.3) ilustra o caso (3). Neste caso três possibilidades são consideradas:

- O veículo candidato e o veículo campo estão em repouso $v_h = v_k = 0$. Assim, ou ambos aceleram $v_i > v_h$, ou ambos permanecem em repouso $v_i = v_h$ dependendo das condições de tráfego.
- O veículo candidato e o veículo campo estão com velocidade máxima $v_h = v_k = v_M$. Então, ou ambos mantem a velocidade $v_i = v_h$, ou ambos diminuem $v_i < v_h$ dependendo das condições de tráfego.
- O veículo candidato e o veículo campo não estão em repouso e não estão com velocidade máxima ($0 < v_h < v_M$, com $v_h = v_k$). Neste caso, ou ambos mantem a velocidade $v_i = v_h$, ou ambos diminuem $v_i < v_h$, ou ambos aceleram $v_i > v_h$, dependendo das condições de tráfego.

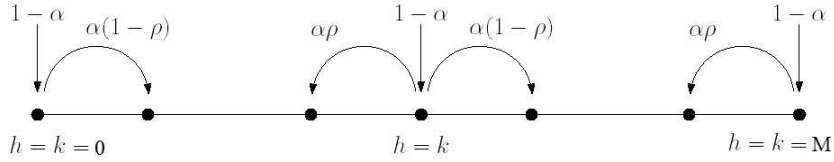


Figura 2.3: Velocidade do veículo candidato maior do que a velocidade do veículo campo, $v_h > v_k$, segundo a referência [16]

Outros exemplos de regras de interação veicular podem ser determinadas, com o objetivo de descrever de forma mais precisa o tráfego real de veículos. Para este objetivo ser alcançado é fundamental que a tabela de jogos considere o comportamento pessoal e individual do motorista, pois os veículos devem ser modelados como partículas ativas considerando que as suas propriedades mecânicas devem ser integradas, ou seja, o comportamento do motorista (agressivo, tímido, etc) deve ser considerado. A consideração das partículas ativas, com comportamento constante, está presente no artigo [18]. Ainda, regras para estrada com mais de uma pista podem ser determinadas [9].

2.3 Exercícios Propostos

1. *Exercício 1:* Deduza a Eq. (2.1.7) para a aceleração do veículo i .
2. *Exercício 2:* Deduza a Eq. (2.1.8) para a velocidade do veículo i

3. *Exercício 3*: Deduza as equações de movimento como função da velocidade.

Capítulo 3

Representação Macroscópica (RM)

A analogia entre o fluxo de tráfego e a dinâmica de fluidos é proposta neste capítulo através da representação macroscópica fluido-dinâmica, na qual o tráfego é modelado como um fluido compressível de veículos. Esta descrição sugere a definição apropriada das variáveis macroscópicas que expressão o comportamento médio do tráfego como função do tempo e da posição. A representação macroscópica do tráfego, por exemplo, para uma pista ou várias pistas de uma estrada, ou via, é discutida em detalhes neste capítulo. As relações matemáticas entre as variáveis macroscópicas do fluxo de tráfego também são apresentadas. Todavia, estas relações também são representadas na forma gráfica, resultando nos diagramas fundamental e da velocidade, nos quais investigações empíricas sobre os mesmos, no fluxo de tráfego livre e congestionado, são descritas.

3.1 Variáveis macroscópicas do fluxo de uma pista

Esta seção detalha a modelagem do fluxo de veículos ao longo de uma estrada, ou via, que possui uma única pista de comprimento ℓ . Esta simples situação associada com o fenômeno do tráfego é descrita por uma estrutura matemática baseada no estado estável do fluxo. Duas considerações são feitas:

- (i) a pista poderá comportar um número máximo de veículos;

(ii) os veículos possuem uma velocidade média máxima.

Baseando-se nas considerações acima, quantidades dimensionais são introduzidas a seguir:

- ρ_M é a *densidade máxima* de veículos.

A densidade é nula quando não temos veículos na pista e aumenta quando o número de veículos aumenta gradualmente. Mais e mais veículos podem ser adicionados a pista enquanto não se atinge a capacidade máxima da mesma; entretanto a densidade máxima, ρ_M , será alcançada quando a capacidade máxima for atingida e como consequência, os veículos não poderão mais se mover. Este estado é denominado por "bump-to-bump traffic" ou em relação a densidade por "jam-density".

- v_M é a *velocidade média máxima* dos veículos.

A velocidade média atinge seu máximo valor nas condições de fluxo livre. Portanto, v_M representa a velocidade média máxima a qual deve ser observada nos veículos sempre que a estrada estiver vazia.

Contudo, um ponto importante é que um veículo isolado poderá atingir uma velocidade maior do que a velocidade máxima v_M , ou seja, a velocidade limite v_ℓ . Experiências mostram que esta velocidade limite é afetada por diversos fatores. Por exemplo, a qualidade da estrada, dos veículos, dos motoristas, etc. Em particular, a velocidade limite v_ℓ poderá ser definida como:

$$v_\ell = (1 + \mu)v_M, \quad \mu > 0. \quad (3.1.1)$$

Com certeza, a velocidade média máxima v_M e o parâmetro fenomenológico μ devem depender das características da estrada, seja de uma simples pista de uma via, ou de uma auto-estrada, tal como do tipo de veículos presentes na mesma, isto é, se são veículos lentos, rápidos, ou caminhões, etc. Desta forma é conveniente para a modelagem introduzir quantidades adimensionais, normalizadas dentro do intervalo de $[0, 1]$ como se segue:

- t é o *tempo* relacionado com o tempo característico T_c , onde t_r é o tempo real, ou seja, $t = t_r/T_c$. É natural assumir que T_c é o menor tempo de viagem, isto é, o tempo necessário para percorrer a estrada com a velocidade média máxima, sendo representado pela relação: $T_c = \ell/v_M$.
- x é a *posição* relacionada com o comprimento da estrada ℓ , onde x_r é a distância real, ou seja, $x = x_r/\ell$.
- ρ é a *densidade* relacionada com a densidade máxima de veículos, ρ_M , onde ρ_r é a densidade real de veículos, ou seja, $\rho = \rho_r/\rho_M$.

- v é a *velocidade* relacionada com a velocidade média máxima v_M , onde v_r é a velocidade real de um único veículo, ou seja, $v = v_r/v_M$.

- q é o *fluxo* relacionado com o fluxo máximo admissível q_M , onde q_r é o fluxo real de uma única pista, ou seja, $q = q_r/q_M$.

A densidade, a velocidade e o fluxo representam as variáveis fundamentais do fluxo de tráfego. A relação matemática entre essas variáveis é dada por:

$$q = \rho v . \quad (3.1.2)$$

Esta é a equação fundamental do fluxo de tráfego. Quando o fluxo é plotado como uma função da densidade de veículos, o gráfico gerado é denominado de **diagrama fundamental** do fluxo de tráfego. Em particular, quando a velocidade é plotada como função da densidade de veículos, nós temos o **diagrama da velocidade**. Estes diagramas, fluxo-densidade e velocidade-densidade são desenvolvidos na seção 3.3.

3.2 Variáveis macroscópicas para o fluxo em várias pistas

A representação macroscópica pode ser estendida do caso de fluxo em pista única para o caso de várias pistas. Vamos considerar uma auto-estrada com p pistas de comprimento ℓ , onde todos os veículos trafegam na mesma direção. Em cada j -pista ($j = 1, \dots, p$) as seguintes quantidades de referência podem ser introduzidas:

- $\rho_j(t, x)$ é a *densidade de veículos na j -pista*.

A dinâmica do fluxo de tráfego leva em consideração para este caso a mudança de pista dos veículos. O efeito disto se reflete na densidade da pista, que não permanece constante. Geralmente, cada j -pista é representada pela sua respectiva densidade ρ_j . Sendo que, se a densidade ρ_j é igual a zero, atribuímos que não existe veículos nesta pista; e que se o número de veículos aumentar gradualmente na j -pista, a densidade ρ_j também aumentará. Entretanto, se mais e mais veículos forem adicionados a cada j -pista, se alcançará a situação crítica, ou seja, a situação de que os veículos não poderão mais se mover. Então, em cada pista, a densidade local ρ_j varia de $[0, 1/p]$ correspondendo ao "bumper-to-bumper" da densidade de veículos.

Então a densidade ρ_j por cada j -pista e a densidade total ρ da auto-estrada estão relacionadas através da relação matemática

$$\rho(t, x) = \sum_{j=1}^p \rho_j(t, x) \quad \text{com} \quad \rho \in [0, 1], \quad \rho_j \in [0, \frac{1}{p}]. \quad (3.2.3)$$

- $v_j(t, x)$ é a *velocidade média dos veículos na j -pista*.
- $q_j(t, x)$ é o *fluxo de veículos na j -pista*.

Para cada pista, a relação fundamental entre o fluxo, a densidade e a velocidade é

$$q_j(t, x) = \rho_j(t, x) v_j(t, x). \quad (3.2.4)$$

O fluxo q_j não é constante. Somando-se o fluxo de todas as pistas, calcula-se o fluxo total

$$q(t, x) = \sum_{j=1}^p q_j(t, x). \quad (3.2.5)$$

Em particular, o conhecimento do tráfego baseia-se no fluxo total.

3.3 Diagramas e Resultados Experimentais

Nesta seção, é apresentado um estudo empírico das características mais importantes do tráfego. De fato, experiências relatam a velocidade ou o fluxo como funções da densidade local e os dados empíricos nos fornecem informações sobre as medidas destas quantidades. Por um outro lado, algumas dificuldades técnicas podem ser imediatamente evidenciadas:

- (a) Os dados empíricos dispõem quantidades macroscópicas, no entanto a dinâmica do tráfego é regulamentada pela escala microscópica.
- (b) As medidas das quantidades macroscópicas apresentam flutuações não apenas devido a erros nas medidas, mas também devido a aceleração e desaceleração dos veículos;
- (c) Geralmente, os resultados experimentais se referem as condições estáveis do fluxo, enquanto que o fluxo raramente atinge as condições uniformes de tráfego.
- (d) Os dados empíricos são muito sensíveis a qualidade e a regulamentação da estrada assim como a variação das condições ambientais e as características dos motoristas. Todavia, é impossível identificar apenas uma representação determinística para o fluxo.

De fato, observando as dificuldades citadas anteriormente, deve-se avançar no estudo da física do tráfego de forma que se providencie uma aproximação analítica dos dados experimentais com a teoria.

Com este objetivo, a representação matemática e gráfica entre as características do fluxo de tráfego será apresentada na Parte I. Na Parte II, três tipos de relações matemáticas entre a velocidade e a densidade são estabelecidas e a validação com dados empíricos é ilustrada. Na Parte III, informações interessantes sobre dados de tráfego em auto-estradas do livro do Kerner [22] são apresentados, assim como a teoria das três fases do tráfego.

3.3.1 Parte I: Diagramas Quantitativos

Duas relações matemáticas entre as quantidades macroscópicas fundamentais do tráfego de veículos são descritas: fluxo-densidade e velocidade-densidade.

I.1 Relação matemática fluxo-densidade

Com a finalidade de descrever a relação matemática fluxo-densidade, algumas características são listadas abaixo:

1. Quando a densidade de veículos é igual a zero, não existe veículos na estrada considerada e o fluxo também será nulo, ou seja, $q = \rho v = 0$ pois $\rho = 0$;
2. Quando a densidade de veículos é igual a "jam-density", os veículos encontram-se parados e o fluxo é nulo, ou seja, $q = \rho v = 0$ pois $v = 0$;
3. Quando o número de veículos aumenta gradualmente, o fluxo também aumenta, alcançando uma situação limite quando a densidade de veículos é igual a densidade crítica e o fluxo é máximo, isto é, $q = q_M$ para $\rho = \rho_{crit}$. A partir deste ponto limite (ρ_{crit}, q_M) com $\rho_{crit} < 1$, quando a densidade aumenta, o fluxo decresce.

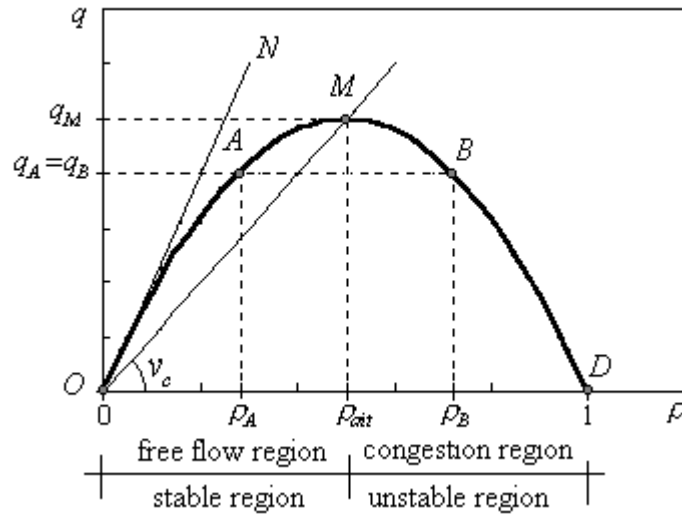


Figura 3.1: Curva parabólica Fluxo-densidade representada por [9]

Uma simples representação é fornecida na Fig. (3.1), onde o ponto O refere-se ao caso onde ambos, a densidade e o fluxo são nulos; O ponto D refere-se a densidade máxima e o fluxo correspondente é nulo; O ponto M refere-se ao fluxo máximo correspondendo a densidade crítica, também denominado de fluxo crítico. Os pontos A e B ilustram o fato de que densidades diferentes podem corresponder a fluxos iguais. A inclinação da reta tangente ON no ponto O nos fornece a velocidade a qual o veículo poderá viajar quando não existir fluxo. Da mesma maneira, a inclinação da reta OM nos fornece a velocidade v_c no ponto limite.

A região com densidades menores do que a densidade crítica é denominada de *região estável*, ou ainda, *região de fluxo livre*. A região na qual a densidade é maior do que a densidade crítica corresponde a *região instável* também denominada de *região de fluxo congestionado*. A curva fluxo-densidade é chamada de *diagrama fundamental* do fluxo de tráfego.

I.2 Relação matemática Velocidade-densidade

Uma outra representação gráfica importante é o *diagrama da velocidade* o qual providência a dependência entre a velocidade e a densidade. Em detalhes, a velocidade máxima esta relacionada com o caso de fluxo livre,

e quando a densidade é máxima, a velocidade torna-se zero. Então, se a densidade é nula os veículos trafegam com a velocidade desejada, ou a *velocidade de fluxo livre* e quando a densidade é igual a densidade crítica, o valor da velocidade está entre zero e a velocidade de fluxo livre.

A relação matemática, velocidade-densidade mais simples é a função linear e é ilustrada na Fig. (3.2). No entanto, também é possível termos relações não-lineares, por exemplo, relações exponenciais e logarítmicas.

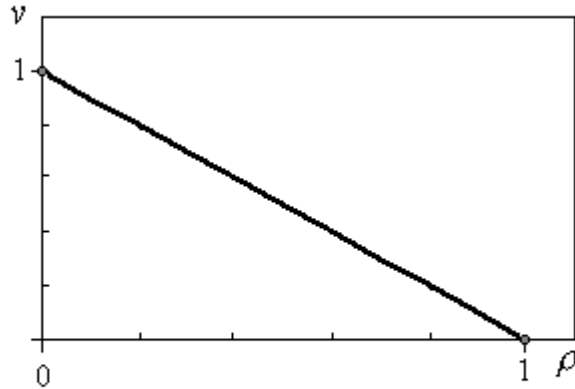


Figura 3.2: Variação linear Velocidade-densidade

3.3.2 Parte II: Resultados experimentais para o tráfego em uma única pista

Muitas pesquisas têm sido desenvolvidas com o objetivo de encontrar uma relação matemática entre a velocidade e a densidade que descreva, através de modelos matemáticos, da forma mais eficiente possível, o fluxo de tráfego real. O primeiro modelo foi proposto por Greenshields em 1935. Nesta subseção, três tipos de modelos são descritos: o modelo linear de Greenshields, o modelo logarítmico de Greenberg e o modelo exponencial de Bonzani et al.

II.1 Relações Matemáticas Lineares

- Modelo de Greenshields

A relação matemática mais simples entre a velocidade e a densidade de veículos é proposto por Greenshields [20]. Greenshields assumiu uma relação linear, como ilustrado na Fig. (3.2). A velocidade v é expressa como uma função da densidade de ρ como:

$$v(\rho) = 1 - \rho. \quad (3.3.6)$$

Usando a equação fundamental do fluxo de tráfego (3.1.2), a relação entre o fluxo e a densidade é estabelecida como:

$$q(\rho) = \rho - \rho^2. \quad (3.3.7)$$

Esta relação descreve uma curva parabólica e está ilustrada na Fig. (3.1). Utilizando ambas as equações (3.3.6) e (3.3.7) é possível encontrar a relação matemática entre a velocidade e o fluxo dada por:

$$v^2 - v + q = 0. \quad (3.3.8)$$

A relação acima também descreve uma curva parabólica. Diferenciando a Eq. (3.3.7) em relação a densidade ρ e igualando a zero, é possível calcular a densidade crítica correspondente ao fluxo máximo igual a:

$$\rho_{crit} = \frac{1}{2} \quad \text{com} \quad q(\rho_{crit}) = q_M = \frac{1}{4}.$$

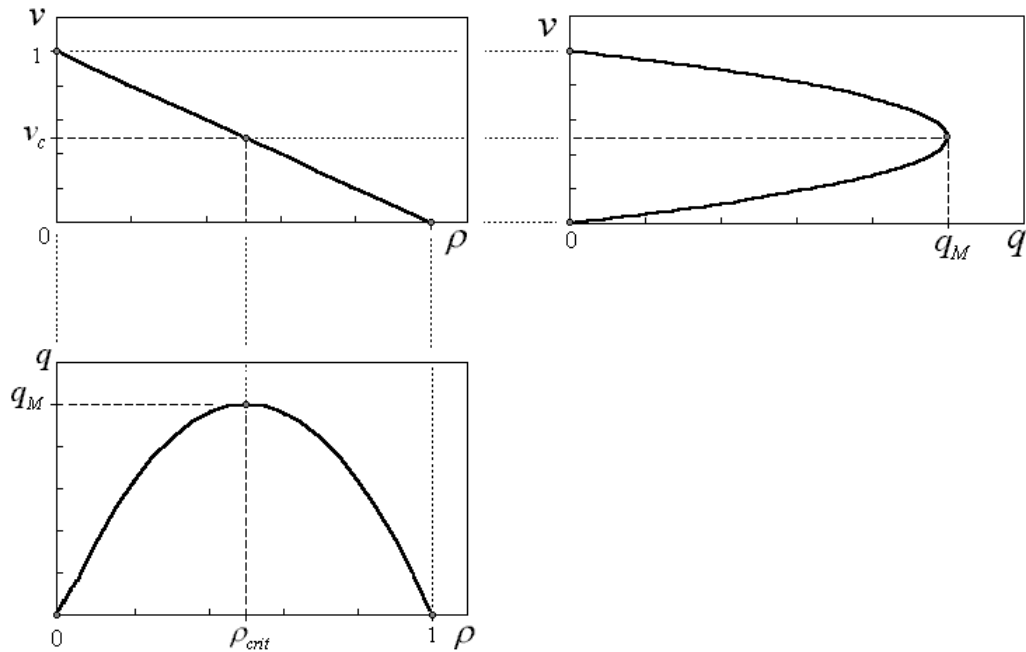


Figura 3.3: Modelo de Greenshields

A Figura (3.3) representa graficamente este modelo. O modelo de Greenshields é bastante poderoso, pois para um fluxo de tráfego ininterrupto prevê e explica as tendências que se observam nos fluxos reais, desta forma, o modelo de Greenshields dominou a teoria do fluxo de tráfego por mais de 50 anos. No entanto, alguns problemas podem ser observados: para usar esse modelo de tráfego é necessário obter valores para a velocidade máxima (velocidade de fluxo livre) e a densidade máxima (jam-density); porém, é difícil determinar estas medidas com precisão, diretamente a partir da análise do fluxo na estrada. Assim, valores aproximados para estas quantidades são considerados e o modelo é calibrado. Devemos salientar que embora o modelo Greenshields não seja perfeito, descreve de forma bem precisa e relativamente simples o fluxo de tráfego.

II.2 Relações Matemáticas Não-lineares

- O modelo de Greenberg

Em 1959, a relação matemática logarítmica entre a velocidade e densidade de veículos foi assumida por Greenberg [19]. Esta relação é escrita da seguinte forma:

$$v(\rho) = \lambda \ln \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad (3.3.9)$$

onde λ é um parâmetro determinado através das condições iniciais para a velocidade. A equação fundamental do fluxo (3.1.2) fornece a relação entre a velocidade e o fluxo da seguinte forma:

$$q(\rho) = \lambda \rho \ln \left(\frac{1}{\rho} \right). \quad (3.3.10)$$

A relação analítica acima, entre v , ρ e q é ilustrada na Fig. (3.4). A relação matemática fluxo-densidade também é parabólica, entretanto os pontos de máximo dos modelos de Greenberg e Greenshields ocorrem em valores diferentes da densidade.

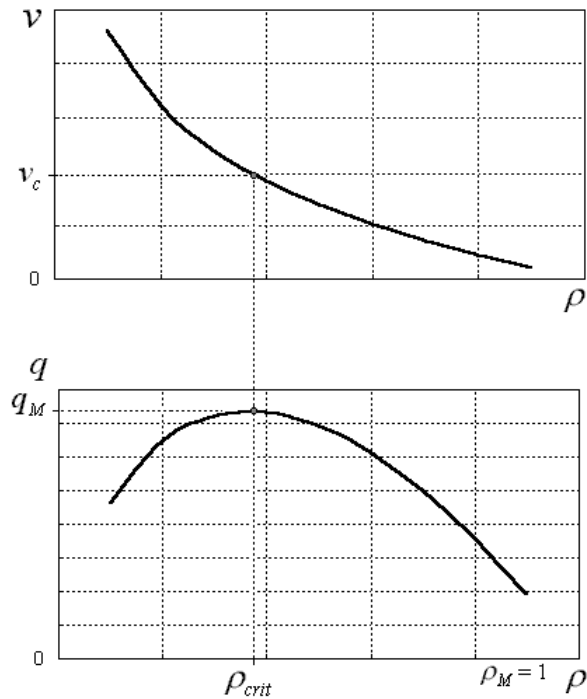


Figura 3.4: Diagrama da Velocidade e Diagrama Fundamental para a relação logarítmica

As Figuras (3.5) e (3.6) mostram dados para o Túnel Lincoln, o qual passa sob o Rio Hudson conectando os estados de Nova Jersey e Nova York nos Estados Unidos. A velocidade como uma função da densidade e o fluxo correspondente são dados pelas equações (3.3.9) e (3.3.10), respectivamente. Os pontos mostram que os dados empíricos apresentam um alto grau de correlação com as curvas definidas por estas equações matemáticas.

O modelo de Greenberg ganhou popularidade na comunidade científica, pelo fato de poder ser derivado analiticamente, embora transgrida a condição de contorno quando a densidade de veículos é zero, no sentido da velocidade tornar-se infinitamente grande.

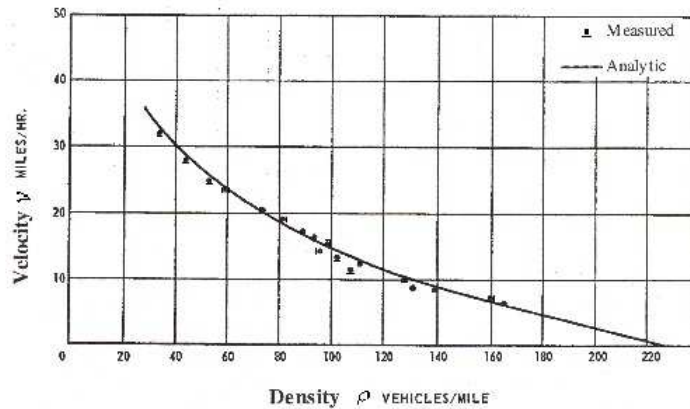


Figura 3.5: Os dados de velocidade em função da densidade de veículos para o Túnel Lincoln considerando o modelo de Greenberg representado por [19]

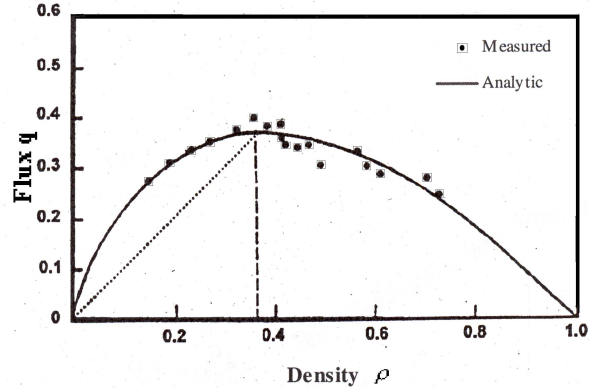


Figura 3.6: Os dados do fluxo em função da densidade de veículos para o Túnel Lincoln considerando o modelo de Greenberg representado por [19]

- Modelo de Bonzani et al.

Experiências recentes de Kerner [22] têm mostrado que:

(a) a velocidade dos veículos para valores baixos da densidade local se mantém constante e igual à velocidade relativa máxima, enquanto o valor da densidade crítica não é atingida, ou seja, $\rho < \rho_{crit}$;

(b) a velocidade dos veículos decai com o aumento da densidade local para $\rho \geq \rho_{crit}$ atingindo o seu valor mínimo quando a densidade é máxima.

É importante ressaltar, que a modelagem das condições de fluxo estável através de uma fórmula analítica deveria tentar relacionar apenas um único parâmetro para cada fenômeno específico. Então, o mesmo evento poderá ser descrito por diferentes pares de parâmetros.

Entretanto, em 2003, Bonzani e Mussone [8] propuseram um modelo fenômeno-lógico que descreve a relação velocidade-densidade nas condições de fluxo uniforme estável caracterizada por um único parâmetro livre. Este modelo tem como base as medições experimentais na auto-estrada Venezia-Mestre (Itália) em condições de fluxo estacionário uniforme, o qual pode ser visualizado na Fig. (3.7).

Várias medidas indicam o seguinte intervalo para a densidade crítica:

$$\rho_{crit} \in [0; 0,15].$$

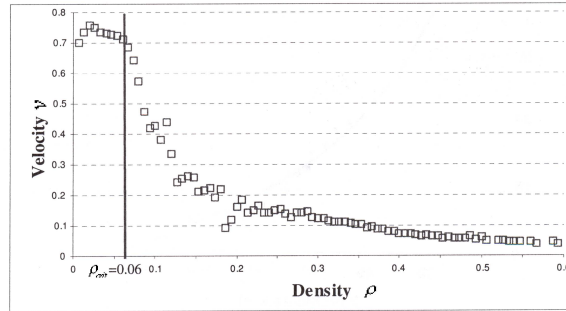


Figura 3.7: Medidas experimentais da velocidade média como função da densidade representada por [8]

Como foi mencionado anteriormente, Bonzani et al. assumiram um modelo analítico no qual a velocidade para $\rho \leq \rho_{crit}$ permanece praticamente constante e decai para $v = 0$ para $\rho = 1$ nas condições de fluxo uniforme estável. Assim, a relação exponencial considerada é:

$$v(\rho) = \exp \left[-\alpha \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right) \right], \quad (3.3.11)$$

onde o parâmetro positivo α representa as condições específicas da estrada. Comparações com os resultados experimentais sugerem a seguinte escala deste parâmetro:

$$\alpha \in [1; 2, 5].$$

A Fig. (3.8) ilustra que este modelo fenomenológico oferece uma aproximação razoável para $\rho \leq 0,5$, quando comparado com resultados experimentais.

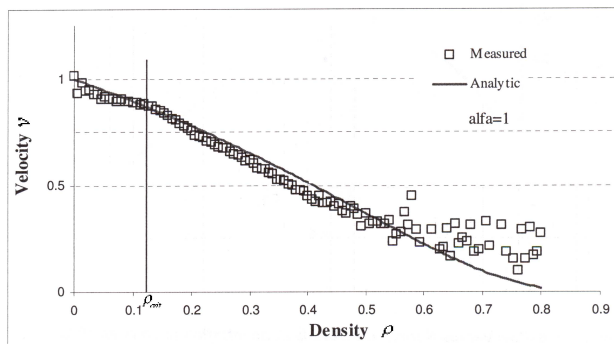


Figura 3.8: Representação do modelo fenomenológico e resultados experimentais de acordo com [8]

Este é um modelo bastante simples, caracterizado por um único parâmetro que representa as condições ambientais, porém, capaz de captar os fenômenos descritos por Kerner em (a) e (b).

3.3.3 Parte III: Resultados experimentais com transição de fase

O fluxo, a densidade e a velocidade média representam as quantidades características mais importantes do tráfego de veículos. Os dados empíricos destas variáveis podem ser coletados automaticamente através de dispositivos tecnológicos adequados. Detectores e câmeras de vídeo, fornecem dados bem precisos dessas quantidades macroscópicas. Em particular, os resultados das medições destas variáveis de tráfego em auto-estradas da Alemanha são discutidos. Estes procedimentos de medição são classificados com base no tráfego livre e congestionado. Além disso, os dados empíricos levam a uma nova teoria de tráfego, a de três fases. Por esta razão, importantes conceitos do tráfego e seus dados empíricos são discutidos nesta subseção.

III.1 Fluxo de tráfego livre e congestionado

As teorias clássicas do tráfego são baseadas no diagrama fundamental e consideram apenas o fluxo de duas fases: fluxo livre e fluxo congestionado.

- Fluxo livre

Esta é a fase mais investigada empiricamente. Em condições de fluxo livre, os dados empíricos da densidade de fluxo descrevem uma curva com inclinação positiva indicando o ponto de limite empírico $(\rho_{crit}^{free,emp}, q_M^{free,emp})$ (máximo).

Em particular, analisando uma grande quantidade de dados nas auto-estradas, conclui-se que cada pista apresenta pontos limites empíricos diferentes. Esta evidência é ilustrada na Fig. (3.9), representando os dados empíricos da auto-estrada A5-Norte, com três pistas na Alemanha. A partir desta análise, seguem três observações:

- (a) A pista da esquerda tem o maior ponto de limite empírico.
- (b) A velocidade média é diferente para diferentes pistas.
- (c) O percentual de veículos que ocupam a pista da esquerda torna-se maior do que o percentual de veículos que ocupam a pista da direita, quando o fluxo aumenta.

As observações acima podem ser explicadas conforme segue abaixo:

- Não existe diferença percentual entre veículos e caminhões ao longo da pista da esquerda, da central ou a da direita, isto é, em especial, os caminhões geralmente não ocupam a pista da esquerda. O regulamento para rodovias alemãs determina um limite de velocidade para os caminhões ou veículos de comprimento longo, que é consideravelmente menor do que para os outros veículos. Assim, a pista da direita tem uma porcentagem maior de veículos de comprimento longo que se movem mais lentamente.
- A assimetria da dinâmica do tráfego entre diferentes pistas resulta em diferentes velocidades médias nas pistas.
- O comportamento do motorista, provavelmente está associado com o item (c).

Assim, a análise qualitativa dos dados empíricos poderá explicar algumas características intrínsecas do tráfego, pois por exemplo, as regras de trânsito, o tipo de veículos, as características do motorista etc. são diferentes de país para país.

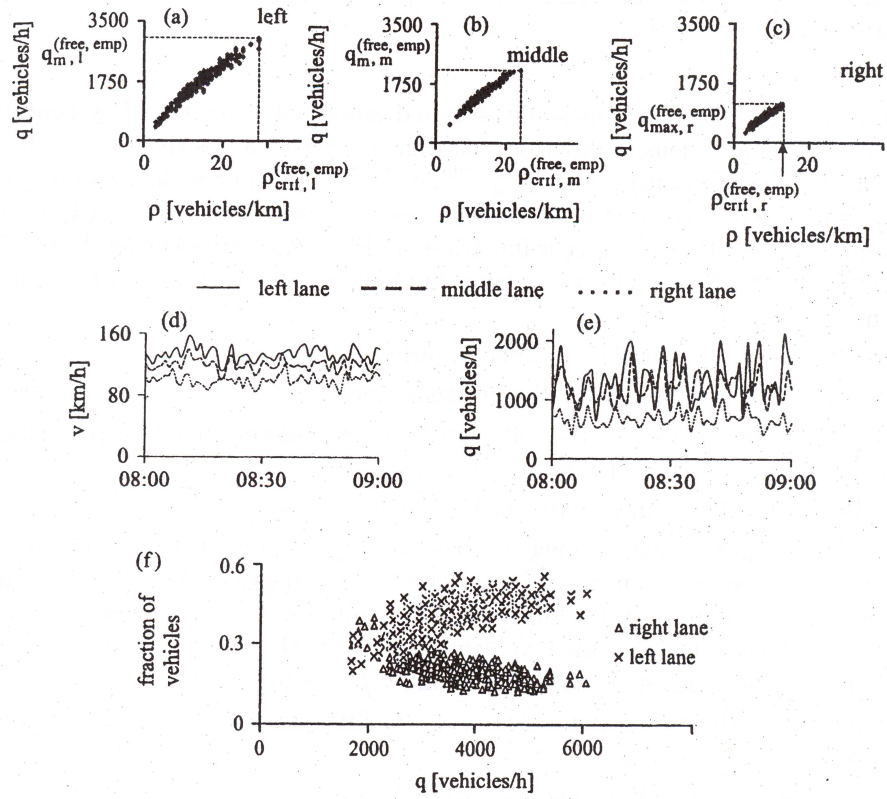


Figura 3.9: A5-Norte, 1992 representado por [22].

- Fluxo congestionado

De acordo com a teoria clássica, o diagrama fundamental consiste de duas curvas distintas, uma com inclinação positiva iniciando na origem (quando a densidade é zero, o fluxo também é zero) para o fluxo livre, e outra com uma inclinação negativa a partir da densidade crítica (quando a densidade é máxima, o fluxo é zero) para o fluxo congestionado. No entanto, em condições de congestionamento, dados empíricos mostram que é impossível identificar uma curva de representação entre o fluxo e a densidade de veículos.

A Figura (3.10) mostra este fenômeno de transição do fluxo livre para o fluxo congestionado, ou seja, a representação teórica (gráfico a esquerda) e

empírica (gráfico a direita) do diagrama fundamental.

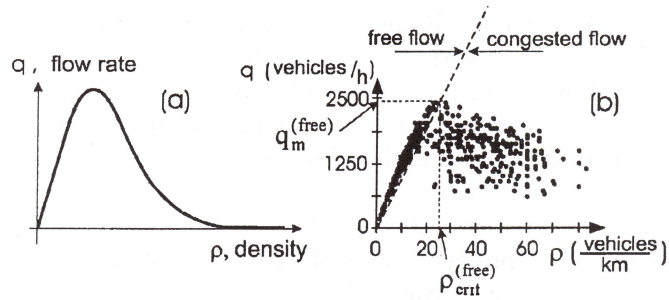


Figura 3.10: Diagrama fundamental teórico (a) e empírico (b) representado por [22]

O fluxo congestionado pode ocorrer espontaneamente por vários motivos, entretanto observações empíricas do tráfego real sugerem que o fluxo congestionado pode ser definido como um estado de tráfego no qual a velocidade é inferior a velocidade mínima possível no fluxo livre, a qual esta relacionada com o ponto de limite empírico (ponto crítico). Na Fig. (3.11) o ponto M refere-se a este ponto de limite empírico e a inclinação da linha tracejada FC representa a velocidade mínima possível. Pode-se notar que os pontos à esquerda da linha tracejada FC e à direita, representam o fluxo livre e o congestionado, respectivamente. Em (b) a velocidade no fluxo congestionado está representado e seu valor é sempre inferior ao valor de velocidade mínima possível.

Esta análise qualitativa também é observada em dados experimentais de outros países.

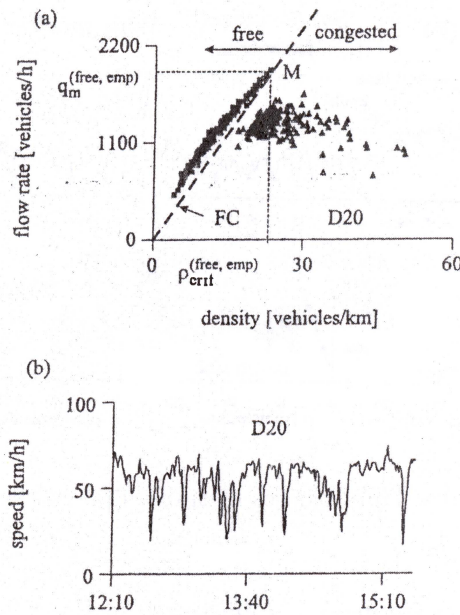


Figura 3.11: A5-Norte, 2001 representado por [22]

III.2 O tráfego macroscópico três fases

Boris Kerner [22] sugeriu uma hipótese: no fluxo congestionado há duas fases. No sentido desta nova teoria, quando a densidade se torna demasiada elevada, o estado do tráfego é dito ser metaestável. A hipótese de metaestabilidade, identificando duas fases de tráfego em fluxo congestionado, ou seja, "wide moving jam" e "synchronized flow", é a diferença básica da teoria de Kerner em relação as teorias clássicas sobre fluxo de tráfego. Desta forma, o diagrama fundamental é usado assumindo que quando a densidade ultrapassa o valor crítico, o tráfego torna-se instável e estes tipos de movimentos podem ocorrer espontaneamente.

Os dados empíricos quanto as velocidades e o diagrama fundamental da auto-estrada A5-Norte, com três pistas na Alemanha são ilustrados na Fig. (3.12). Nesta figura as três fases da representação do fluxo-densidade são ilustradas. O "free flow" representa o fluxo livre no qual a "curva F" representa o estado de fluxo livre cujo fluxo máximo é denotado por

$q_M^{(free)}$. Na fase de "synchronized flow" a velocidade média não é mantida a jusante da onda. A "wide moving jam" é um movimento tipo "jam" (geléia) que mantém a velocidade média antes de chegar ao "jam". A "linha J" representa a propagação da frente estacionária a jusante de um "wide moving jam" e a sua inclinação é a velocidade característica. O fluxo q_{out} ocorre quando o fluxo livre é formado jusante do "jam". O fluxo máximo de $q_M^{(free)}$ no fluxo livre pode ser consideravelmente maior do que o fluxo q_{out} no "wide moving jam". No fluxo $q_{out}^{(syn)}$ as mudanças ocorrem a jusante do "synchronized flow". É possível assumir que o "synchronized flow" descreve aproximadamente a região limitada S , onde $q_M^{(syn)}$ denota o fluxo máximo nesta fase.

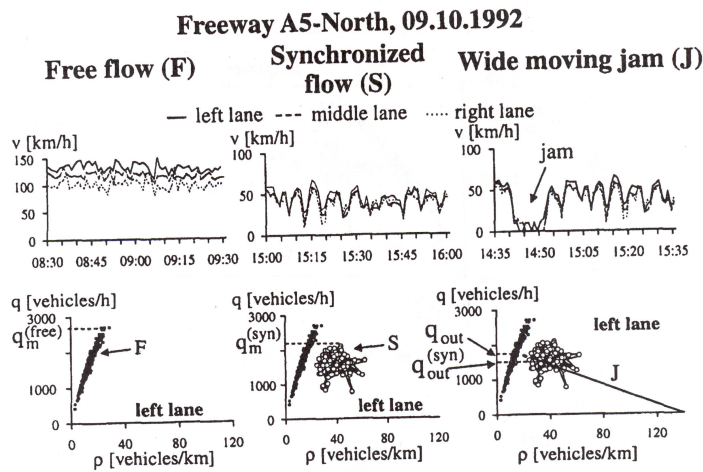


Figura 3.12: A5-North, 2001 - O diagrama fundamental nas três fases do fluxo de tráfego representado por [22]

Esta nova teoria tem sido criticada por duas razões principais:

- Os dados empíricos estão completamente baseados em medições das auto-estradas A5-Sul e A5-Norte na Alemanha, considerado como um país padrão quanto a auto-estradas. No entanto, as auto-estradas em outros países poderão ter características diferentes.
- Os dados de tráfego foram obtidos a partir de medições em pontos fixos da auto-estrada utilizando detectores para cada pista, mas suas conclusões

são estendidas a todo o comprimento da estrada. Ou seja, não está claro como estes dados empíricos foram interpolados.

3.4 Exercícios Propostos

1. *Exercício 1:* Obtenha a Fig. (3.2) para o caso em que $0 \leq \rho \leq \rho_M$.
2. *Exercício 2:* Obtenha a Eq. (3.3.8) que representa $q(v)$ para o modelo de Greenshields.
3. *Exercício 3:* Construa em um único gráfico de diagrama de velocidade as relações $v(\rho)$ descritas neste capítulo e compare as curvas quanto a existência.
4. *Exercício 4:* Substitua na Eq. (3.3.11) vários valores para o parâmetro positivo α dentro do intervalo $\alpha \in [1; 2,5]$. Construa em um único gráfico de diagrama de velocidade as curvas obtidas e compare-as. O que se pode concluir da influência do parâmetro α ?

Capítulo 4

Os Modelos Hidrodinâmicos de Primeira Ordem - (RM)

A teoria macroscópica do tráfego pode ser associada a teoria hidrodinâmica. Geralmente, três leis de conservação da dinâmica dos fluidos podem ser consideradas: a lei de conservação de massa, do momento e de invariantes na colisão. Levando-se em consideração os modelos do fluxo de tráfego, as equações de conservação são fechadas por modelos fenomenológicos relacionados com o comportamento do sistema mecânico considerado como um contínuo. Os modelos de primeira ordem são obtidos considerando-se apenas a equação de conservação de massa fechada por uma relação fenomenológica entre a velocidade média e a densidade local. Uma alternativa para fechar a equação de conservação da massa é a utilização da equação de conservação do momento, gerando os modelos de segunda ordem. No entanto, esta alternativa ressalta na dificuldade técnica, ou seja, no fechamento da equação de conservação de momento por modelos fenomenológicos que descrevem uma determinada aceleração aplicada aos veículos. Uma outra opção para o fechamento dos modelos de primeira ordem é estabelecer uma outra equação dinâmica para a variação da velocidade produzindo assim, um modelo de terceira ordem. No entanto, os modelos macroscópicos mais comuns são os modelos de primeira ou de segunda ordem. Especificamente, os modelos de primeira ordem são motivados pela simplicidade, apesar de apresentarem resultados um pouco menos precisos em relação a descrição da realidade física, quando comparados aos resultados dos modelos de segunda ordem.

Em particular, este capítulo trata de uma revisão e análise crítica de alguns modelos macroscópicos de tráfego de primeira ordem, cuja equação de conservação da massa é fechada através de um modelo fenomenológico

que relaciona a velocidade média com a densidade local por uma equação analítica adequada ou uma equação funcional.

Na última parte deste capítulo, algumas perspectivas de investigação são propostas para os modelos fenomenológicos.

4.1 Leis de Conservação do Tráfego

Fisicamente, se o fluxo de tráfego é observado de uma distância muito longa, o comportamento individual de cada veículo é ignorado e o fluxo poderá ser associado com o fluxo de um fluido. Mais especificamente, a estrutura matemática da teoria hidrodinâmica de fluidos pode ser explorada para desenvolver a teoria macroscópica do tráfego. As equações fundamentais da dinâmica dos fluidos são as equações de Navier-Stokes, ou seja, as equações de conservação da massa, do momento e da energia, as quais descrevem como as variáveis dependentes, densidade, velocidade, pressão e temperatura de um fluido em movimento, são estendidas e generalizadas quando se considera os efeitos da viscosidade do fluido.

No entanto, existem grandes diferenças entre o tráfego de veículos e o fluxo de fluidos. Em particular, pode existir a conservação da massa e do momento, entretanto não da energia. A conservação da massa representa a conservação do número de veículos na estrada quando as entradas ou saídas da mesma não estão presentes. Basicamente, as equações de conservação da massa e do momento linear, referentes às variáveis macroscópicas, a densidade local $\rho = \rho(t, x) \in [0, 1]$, e a velocidade $v = v(t, x) \in [0, 1]$, respectivamente são dadas por

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t v + v \partial_x v = Q[\rho, v], \end{cases} \quad (4.1.1)$$

onde Q define a aceleração referida aos veículos presentes no volume elementar. A palavra aceleração é usada, quando tratando-se de modelos de fluxo de tráfego, para evitar o uso do termo "força" em sistema onde a massa não pode ser devidamente definida.

4.2 O fechamento da equação de conservação da massa

A análise desenvolvida a seguir considera dados experimentais da uniformização das condições de fluxo. O problema do fechamento da equação de conservação da massa consiste em analisar e interpretar fenomenologicamente o

comportamento do sistema. Como consequência, vários modelos matemáticos estão disponíveis na literatura.

Como se sabe, as comparações com os dados experimentais mostram que a estrutura matemática para o fechamento desta equação, referindo-se, aos modelos de primeira ordem, pode ser desenvolvido através dos seguintes procedimentos.

(i) Fechamento por propriedades da densidade local, a *equação analítica*:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ v = v[\rho], \end{cases} \quad (4.2.2)$$

ou

(ii) Fechamento pela evolução da equação da velocidade, a *equação funcional*:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = f(v[\rho]). \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Os procedimentos acima serão usados com o objetivo de fornecer vários modelos, que serão descritos e analisados criticamente como se segue.

- 1. *A Equação Analítica*

(i.a) Fechamento pelo diagrama da velocidade

Considerando o Capítulo 6, há uma grande quantidade de dados disponíveis que relacionam a dependência funcional da velocidade média com a densidade através do *diagrama da velocidade* o qual informa, considerando o caso de fluxo uniforme constante, que a velocidade média decai com o aumento da densidade. No que se segue a velocidade do sistema (4.2.2) é considerada como

$$v[\rho] = v_e(\rho), \quad (4.2.4)$$

onde v_e é a velocidade de equilíbrio derivada do fluxo de tráfego homogêneo.

Esta é uma relação fenomenológica não obtida a partir da teoria hidrodinâmica. Se a velocidade v_e , que representa a velocidade do fluxo contínuo uniforme, depende da densidade local, poderá ser representada por aproximações analíticas.

Pelas equações (4.2.2) e (4.2.4) a equação de conservação da massa é representada por:

$$\partial_t \rho + (v_e + \rho v_e'(\rho)) \partial_x \rho = 0, \quad (4.2.5)$$

a qual representa o modelo básico LWR [30].

M. J. Lighthill e G. B. Whitham foram os primeiros a desenvolver um modelo de fluxo de tráfego macroscópico em 1955. Um ano mais tarde, P. Richards [38], independentemente do estudo de Lighthill e Whitham, desenvolveu um modelo muito parecido. Devido ao desenvolvimento independente e praticamente simultâneo deste modelo, este tem sido conhecido na literatura como o *modelo de LWR*, escrito com as iniciais dos nomes de seus autores. A idéia básica deste modelo é de assumir a relação (4.2.4) usando o método de ondas cinemáticas para descrever o fluxo de tráfego na hipótese de estado estacionário. Ocasionalmente, a Eq. (4.2.5) corresponde à equação de onda hiperbólica com o campo da velocidade de propagação:

$$c(\rho) = v_e + \rho \frac{dv_e}{d\rho}. \quad (4.2.6)$$

A velocidade de propagação finita $c(\rho)$ representa a inclinação da curva parabólica do fluxo-densidade de modo que as ondas movam-se para frente ou para trás, dependendo do valor da densidade ser inferior à densidade crítica ($\rho < \rho_{crit}$), ou ser superior a densidade crítica ($\rho > \rho_{crit}$). Quando a densidade é igual à densidade crítica ($\rho = \rho_{crit}$) as ondas são estacionárias. A ilustração deste fenômeno está presente na Fig. (4.1) onde o ponto A representa o estado com a velocidade v_A , densidade ρ_A e fluxo q_A , o ponto B o estado com velocidade v_B , densidade ρ_B e fluxo q_B e $v_{sw(AB)}$ a velocidade da onda de choque

$$v_{sw(AB)}(\rho) = \frac{q_B(\rho_B) - q_A(\rho_A)}{\rho_B - \rho_A}. \quad (4.2.7)$$

representando a inclinação da linha AB .

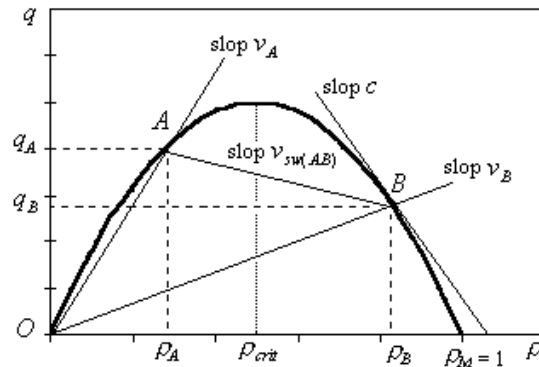


Figura 4.1: Curva parabólica do fluxo-densidade no fluxo de tráfego

Este modelo hiperbólico clássico é o modelo mais popular na literatura, embora mostre fenômenos irrealistas quanto a onda de choque, que não são observados experimentalmente. Esta incoerência é devido ao fato de que as condições que correspondem as condições de fluxo uniforme são instantaneamente impostas em condições instáveis. Na verdade nenhum motorista é eficaz no sentido de ser capaz de adaptar o seu veículo instantaneamente às condições de fluxo constante.

(i.b) Fechamento com a densidade fictícia

Um conceito interessante de densidade fictícia local foi proposto em uma nova classe de modelos por De Angelis [1], em 1999. Esta classe de modelos consideram o fato de que o motorista não mede exatamente a densidade local, mas simplesmente a sente. Especificamente, a velocidade de equilíbrio v_e é alcançada depois de uma adaptação adequada do motorista, dependendo da densidade local fictícia ρ^* .

A densidade fictícia depende da densidade real e do gradiente da densidade da seguinte forma:

$$v[\rho] = v_e(\rho^*), \quad \rho^* = \rho + f(\rho, \partial_x \rho). \quad (4.2.8)$$

A expressão formal da equação de conservação da massa nos fornece a seguinte expressão para o modelo de evolução:

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho v_e(\rho^*)) = 0. \quad (4.2.9)$$

Em particular, De Angelis propôs a seguinte expressão para a densidade fictícia

$$\rho^* = \rho + \varepsilon(1 - \rho)\partial_x \rho, \quad f(\rho, \partial_x \rho) = \varepsilon(1 - \rho)\partial_x \rho, \quad \varepsilon > 0, \quad (4.2.10)$$

onde ε é um parâmetro constante identificado por experimentos fenomenológicos, correspondendo a capacidade do motorista de reagir não apenas a densidade local, mas também aos seus gradientes. Considerando a velocidade de equilíbrio da seguinte forma

$$v_e(\rho^*) = \left(1 - \rho^{*(1+\alpha)}\right)^{1+\beta}, \quad (4.2.11)$$

onde α e β são constantes positivas que poderão ser relacionadas com a qualidade da estrada e das condições ambientais, respectivamente. Com estas considerações, a seguinte equação de evolução é obtida:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho = & \left\{ (1 + \alpha)(1 + \beta)\rho\rho^{*\alpha} \left[1 - \rho^{*(1+\alpha)}\right]^\beta - \left[1 - \rho^{*(1+\alpha)}\right]^{1+\beta} \right\} \partial_x \rho \\ & + \varepsilon(1 + \alpha)(1 + \beta)\rho(1 - \rho)\rho^{*\alpha} \left[1 - \rho^{*(1+\alpha)}\right]^\beta \partial_{xx} \rho \\ & - \varepsilon(1 + \alpha)(1 + \beta)\rho\rho^{*\alpha} \left[1 - \rho^{*(1+\alpha)}\right]^\beta (\partial_x \rho)^2. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Em particular, se α e β são iguais a zero ou diferentes de zero, então diferentes modelos e soluções são gerados, dependendo das condições de contorno consideradas.

O modelo fenomenológico proposto acima por De Angelis é tecnicamente modificado por Bonzani [7] em 2000. Especificamente, a densidade fictícia gera modelos de difusão não-linear, que fornecem respostas parciais as críticas levantadas por Daganzo [13]. Ainda Aw e Rascle [2] reconsideraram algumas alterações nos modelos macroscópicos tendo como objetivo alegar a consistência destes modelos.

Apreciar a nova classe de modelos não significa considerar os veículos como partículas, mas sim como um sistema motorista-máquina, no qual o comportamento pessoal e individual do motorista deve ser considerado. O motorista sente estímulos essencialmente frontais, ou seja, na realidade, o motorista sente a densidade fictícia que é determinada pelo fluxo que ele vê a sua frente.

(i.c) Fechamento com o tempo de retardamento

Os modelos examinados em (i.b) são baseados na suposição de que o motorista adapta instantaneamente a velocidade do seu veículo procurando atingir uma velocidade de equilíbrio. Por outro lado, é correto supor que um determinado período de tempo finito é necessário para ocorrer a reação do motorista. Por exemplo, a modelagem pode ser baseada na idéia de que a velocidade v depende da densidade local que considera a adaptação retardada do motorista para as condições de tráfego reais. Este tipo de modelagem foi proposta por V. Coscia [11] em 2004, na qual a velocidade com que o veículo viaja é rapidamente ajustada conforme a variação da densidade local

$$v[\rho] = v(\rho(t - \tau, x)), \quad (4.2.13)$$

onde τ é um parâmetro menor do que um que introduz a adaptação retardada do motorista diante das condições do tráfego real. Considerando a equação fundamental

$$q[\rho] = q(\rho(t - \tau, x)) = \rho v(\rho(t - \tau, x)), \quad (4.2.14)$$

em caso de um tempo de retardamento pequeno, a equação da conservação da massa se transforma em

$$\partial_t \rho + q'(\rho) \partial_x \rho = \tau \partial_x \left(\rho v'(\rho) \partial_t \rho \right), \quad (4.2.15)$$

onde

$$q'(\rho) = v(\rho) + \rho v'(\rho). \quad (4.2.16)$$

Em particular, a densidade ρ , para o caso de fluxo de tráfego quase uniforme, pode ser considerada como: $\rho(t, x) = U + w(t, x)$. Substituindo a expressão anterior para $\rho(t, x)$ em (4.2.16) e desconsiderando os termos de segunda ordem em w obtemos,

$$\partial_t w + q'(U) \partial_x w = \tau U v'(U) \partial_{xt} w, \quad (4.2.17)$$

que apresenta soluções sob a forma de $w(t, x) = W e^{ikx + \omega t}$, com as constantes W e k determinadas pelas condições de contorno e a taxa de crescimento do parâmetro ω depende do comprimento de onda da perturbação, ou seja:

$$\omega = \frac{-ikq'(U)}{1 - ikUv'(U)\tau}. \quad (4.2.18)$$

Por outro lado, para valores pequenos do parâmetro de retardamento τ , é possível considerar a função $\omega(\tau)$ como:

$$\omega = -ikq'(U) + k^2Uq'(U)v'(U)\tau, \quad \text{para } \tau \ll 1. \quad (4.2.19)$$

Finalmente, o valor absoluto do comprimento de onda da perturbação é obtido como:

$$|w(t, x)| = |W \exp \{ ik(x - q'(U)t) \} e^{k^2Uq'(U)v'(U)\tau t}| \leq |W| e^{k^2Uq'(U)v'(U)\tau t}, \quad (4.2.20)$$

com as quantidades k^2 e U sempre positivas. No entanto, considerando o sinal do produto $q'(U)v'(U)$, o termo $v'(U)$ é sempre menor do que zero e supondo a relação exponencial para o diagrama da velocidade (3.3.11), a quantidade $q'(U) = v(U) + Uv'(U)$ é negativa quando $U > U_{crit}$, onde U_{crit} é o valor da densidade para a qual o fluxo atinge o seu máximo. Então, no caso de tráfego pesado, o termo exponencial na Eq. (4.2.20) cresce para grandes t . Como conseqüência, os fluxos uniformes são exponencialmente instáveis, ou seja, pequenas perturbações na densidades com o aumento no tempo, conduzirão provavelmente à instabilidades observadas no fluxo congestionado, como as filas e os fenômenos "stop-and-go"

• 2. *Equação Funcional*

(ii.a) Fechamento pelo diagrama de velocidade

Os modelos desenvolvidos na subseção anterior são baseados na suposição de que o motorista sente (localmente e instantaneamente) a densidade e adapta (localmente e instantaneamente) a velocidade do veículo à velocidade de equilíbrio v_e . Por outro lado, o motorista só poderá "tentar" alcançar a velocidade de equilíbrio. Portanto, baseado neste fato e referindo-se ao sistema (4.2.3), Bellomo e Bertotti [6] propuseram a seguinte expressão para a equação de evolução para a velocidade:

$$f(v[\rho]) = \beta (v_e(\rho) - v), \quad (4.2.21)$$

onde β refere-se a velocidade de adaptação. O parâmetro β pode ser identificado analisando a transição do equilíbrio para o fluxo instável. Na verdade, a identificação de β não é uma tarefa simples devido as condições de fluxo instável, no entanto o fechamento da equação de conservação da massa, por meio da equação (4.2.21) simplifica a equação de conservação de momento.

Ainda assim, como já foi mencionado, outros modelos específicos podem ser obtidos através do fechamento por diferentes expressões da velocidade de equilíbrio v_e , ou ainda por várias outras expressões propostas no Capítulo 6.

(ii.b) Fechamento pelo tempo anterior

Um problema interessante para a equação de evolução para a velocidade consiste em supor que a velocidade com que os veículos trafegam é adequada à densidade de tempo anterior. Referindo às equações (4.2.13) e (4.2.21), o seguinte modelo

$$f(v[\rho]) = \beta (v[\rho] - v) , \quad (4.2.22)$$

considera a adaptação do motorista quanto a densidade do tempo anterior sob as condições de tráfego real.

4.3 Análise crítica e novas perspectivas

Os modelos macroscópicos do fluxo de tráfego de primeira ordem têm sido discutidos neste capítulo, cuja equação de conservação da massa tem sido fechada usando modelos fenomenológicos que consideram a velocidade de equilíbrio observada experimentalmente. O retardamento do motorista para alcançar as condições de equilíbrio estável também é considerado e analiticamente representado. Um ponto chave para os modelos de primeira ordem é apresentarem uma grande vantagem através de sua simplicidade de implementação. Algumas das principais condições necessárias para um "bom modelo" de primeira ordem é (i) a possibilidade de descrever, pelo menos qualitativamente, todas as características conhecidas do fluxo de tráfego contendo apenas alguns parâmetros, intuitivos e fáceis de serem medidos, (ii) ser teoricamente consistente e, (iii) por último, mas não menos importante, permitir uma rápida simulação numérica.

Referindo-se à utilização da velocidade de equilíbrio em modelos fenomenológicos, representando analiticamente os dados experimentais observados, é importante salientar alguns problemas:

- (a) Cada estrada está associada aos parâmetros de qualidade. Isto significa que diferentes condições de fluxo, por exemplo, diferentes regulamentações, diferentes condições ambientais, etc, correspondem a valores diferentes para estes parâmetros que influenciam os dados experimentais.
- (b) Não existe uma expressão geral para representar a velocidade de equilíbrio. A análise de vários dados experimentais identificaram que é impossível determinar uma representação universal determinística para a velocidade de equilíbrio.
- (c) O modelo de primeira ordem "correto" não deve conter a velocidade de equilíbrio, mas sim descrevê-la como um resultado.
- (d) Não existe um modelo de primeira ordem que conduz a velocidade de

equilíbrio, em vez disso, apresenta-a como uma hipótese. Esta é uma limitação intrínseca a estes modelos de primeira ordem.

Considerando os itens acima, o seguinte modelo é sugerido:

$$\begin{cases} \rho < \rho_{crit} : & v = 1, \\ \rho = \rho_{crit} : & v = 1 - \beta, \\ \rho > \rho_{crit} : & v = 1 - \rho, \end{cases} \quad \rho_{crit} = \beta, \quad \beta > 0. \quad (4.3.23)$$

Resumindo a análise deste modelo (4.3.23) temos:

- (a) O modelo contém apenas um parâmetro, onde β é um parâmetro relacionado com as características específicas da estrada e das condições ambientais.
- (b) O modelo não é baseado no conceito da velocidade de equilíbrio.

Pode-se observar que este modelo tem a grande vantagem de ser relativamente simples, porém descreve qualitativamente o tráfego, contendo apenas um único parâmetro. O simples diagrama da velocidade é ilustrado na Fig. (4.2). Ainda assim, usando a equação fundamental (3.1.2) é possível encontrar o fluxo dado por

$$\begin{cases} \rho < \rho_{crit} : & q = \rho, \\ \rho = \rho_{crit} : & q = \beta(1 - \beta), \\ \rho > \rho_{crit} : & q = \rho(1 - \rho), \end{cases} \quad \rho_{crit} = \beta, \quad \beta > 0, \quad (4.3.24)$$

ilustrado pela Fig. (4.3).

- (c) O modelo descreve uma transição de fase correspondente a densidade $\rho = \rho_{crit}$, que separa o fluxo livre do fluxo congestionado.

Finalmente, a simplicidade deste modelo permite sua aplicação imediata em estradas com condições variáveis, apesar de não representar as duas fases do fluxo congestionado sugerido por Kerner [22].

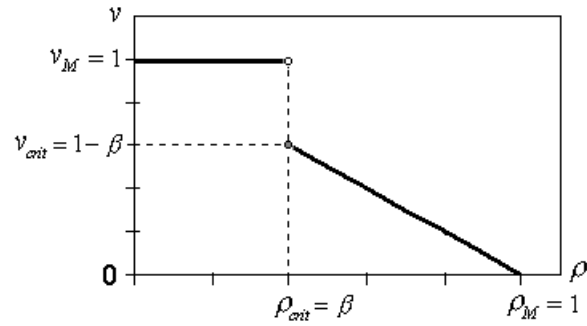


Figura 4.2: Variação velocidade-densidade

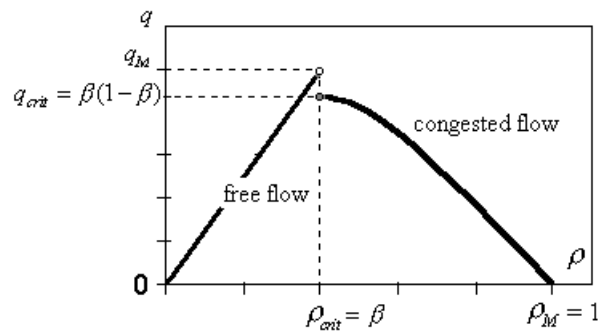


Figura 4.3: Variação fluxo-densidade

4.4 Exercícios Propostos

1. *Exercício 1:* Considere para a velocidade $v[\rho]$ a Eq. (4.2.4). Substituindo-a no sistema (4.2.2), deduza a expressão para a densidade ρ .

2. *Exercício 2*: Deduza a Eq. (4.2.12) que representa a equação de evolução para o modelo de velocidade dada por (4.2.11).

Capítulo 5

Os Modelos Hidrodinâmicos de Segunda Ordem - (RM)

Este capítulo fornece uma descrição dos modelos de segunda ordem, que são compostos por duas equações de conservação com base na analogia com a dinâmica de fluidos unidimensional. A primeira equação expressa a conservação de massa, ao passo que a segunda equação reproduz o equilíbrio do momento:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t v + v \partial_x v = Q[\rho, v], \end{cases} \quad (5.0.1)$$

onde $\rho(t, x) \in [0, 1]$ é a densidade local, $v(t, x) \in [0, 1]$ é a velocidade, e Q define a aceleração dos veículos referidos no volume elementar. Uma alternativa para o quadro acima é analisada mais adiante neste capítulo.

Também é importante ressaltar que as equações acima são expressas em termos das variáveis adimensionais definidas na seção 3.1, correspondente as variáveis reais t_r, x_r, ρ_r, v_r . Geralmente, a literatura relata modelos escritos em termos de variáveis dimensionais, entretanto a utilização de quantidades adimensionais permite comparar os resultados dos modelos com algumas características comuns da dinâmica do tráfego.

Naturalmente, a solução de problemas matemáticos pode gerar valores de ρ e v , que não acontecem na realidade, ou seja, abaixo de zero ou acima de 1 e neste caso, a validade do modelo precisa ser colocado em discussão. De um modo geral, o sistema (5.0.1) precisa superar a dificuldade técnica de modelagem da aceleração Q que fecha a equação do momento por modelos fenomenológicos os quais descrevem a aceleração aplicada aos veículos dentro do volume elementar considerado.

Geralmente, se expressa a aceleração como função da velocidade de equilíbrio com o objetivo de se simplificar o modelo. No entanto, é muito importante que não se imponha um modelo fenomenológico para $v_e[\rho]$ quando se faz a identificação da expressão do termo de aceleração Q . De fato, existem poucas contribuições na literatura do desenvolvimento de modelos cuja velocidade de equilíbrio $v_e[\rho]$ é obtida como a solução de um estado de equilíbrio.

Payne [35] parece ser o primeiro matemático a usar o sistema (5.0.1) sugerindo uma "ordem superior" para as relações da estrutura de choques de uma forma muito similar a teoria presente no livro de Whitham [40].

Payne [35] apresenta um modelo no qual a equação da aceleração inclui um termo de relaxamento da velocidade v para um determinado período de tempo τ próximo a velocidade de equilíbrio para o seu equilíbrio $v_e(\rho)$. Este modelo é representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t v + v \partial_x v = -\frac{c_1}{\rho \tau} |v'_e(\rho)| \partial_x \rho + \frac{c_2}{\tau} (v_e(\rho) - v), \end{cases} \quad (5.0.2)$$

onde o termo de transporte $v \partial_x v$, descreve a variação da velocidade em determinados locais da estrada devido a transferência cinemática dos veículos. O termo $-(c_1/\rho \tau) |v'_e(\rho)| \partial_x \rho$, denominado de termo de *antecipação*, considera a ação dos motoristas para com a condição de trânsito a sua frente, ou seja, descreve a resposta do motorista, (frenagem ou aumento de velocidade) para a situação frontal. O termo $(v_e(\rho) - v)/\tau$, o qual é denominado de termo de *relaxação* descreve a tendência de aproximação da velocidade v com a velocidade de equilíbrio $v_e(\rho)$ para determinadas densidades e τ é o tempo característico. As constantes c_1 e c_2 também estão presentes na definição das variáveis adimensionais.

Várias sugestões de expressões são sugeridas para a velocidade de equilíbrio e vários métodos numéricos são propostos para resolvê-la. No entanto, uma das desvantagens mais importantes no uso da equação adicional para a velocidade encontra-se na estabilidade da aproximação linear da solução estacionária uniforme de pequenas perturbações para todos os valores da densidade. Uma análise detalhada de dados empíricos, mostra, no entanto, que para altos valores de densidade o movimento laminar do fluxo de tráfego torna-se instável, e pequenas perturbações levam ao movimento da onda "stop-and-go".

Uma modificação técnica no termo de antecipação, dentre outras, tem

sido proposta por Phillips [36]

$$\partial_t v + v \partial_x v = -\frac{b_1}{\rho} \partial_x p_e + \frac{b_2}{\tau} (v_e(\rho) - v), \quad \text{with} \quad \partial_x p_e = p'_e(\rho) \partial_x \rho \quad (5.0.3)$$

onde p_e pode ser visto como a pressão do tráfego $p_e(\rho) = \rho \theta_e(\rho)$ em termos da variação da velocidade de fluxo θ e b_1, b_2 são constantes apropriadas. Em particular assume-se que θ depende da densidade de fluxo, embora como uma primeira aproximação pode ser usada como uma constante, ou seja, $\theta_e(\rho) = \theta_0$.

No entanto, de acordo com Hauer et al. [21], o modelo acima mostra resultados irrealistas para fortes mudanças de densidade, ou seja, das ondas de choque. Para superar essa dificuldade, o termo de viscosidade, o qual é semelhante ao termo que descreve a viscosidade nas equações da hidrodinâmica clássica é introduzido por Kühne [28] na Eq. (5.0.3) como segue

$$\partial_t v + v \partial_x v = -\frac{b_1}{\rho} \partial_x p_e + \frac{b_2}{\tau} (v_e(\rho) - v) + \mu \partial_{xx}^2 v. \quad (5.0.4)$$

A análise da estabilidade da solução estacionária uniforme da Eq. (5.0.4) mostra que, para valores de densidade superiores a um determinado valor crítico, a solução torna-se instável a pequenas perturbações no domínio da estabilidade.

Em seguida, Kerner e Konhäuser [23] usam $\mu(\rho) = \mu_0/\rho$ (com μ_0 para o coeficiente da viscosidade) com o objetivo de melhorar a compatibilidade com a hidrodinâmica clássica de Navier Stokes. A análise da estabilidade da solução estacionária uniforme do modelo presente, de Kerner e Konhäuser, mostra que para valores limites da densidade, valores muito baixos ou muito altos, o modelo é estável e para os demais é instável. Ainda assim, computacionalmente, este modelo permite estudar o processo de formação e desenvolvimento de clusters.

Entretanto, todos os modelos acima mencionados mostram algumas contradições quanto a sua capacidade de descrever o comportamento qualitativo do fluxo de tráfego. Por exemplo, determinados valores dos parâmetros podem prever densidades maiores do que a densidade máxima admissível correspondente à densidade *bumper-to-bumper*. Além disso, a forte não-uniformidade espacial nas condições iniciais pode ocasionar valores negativos para as velocidades. Finalmente, a principal desvantagem destes modelos é que eles não são capazes de explicar as diferenças essenciais entre tráfego e fluidos, ou seja:

(1) Uma partícula do fluido responde a estímulos frontais, laterais e de trás, entretanto os motoristas somente reagem ao que acontece na frente deles.

- (2) A densidade e a velocidade devem permanecer não-negativas e limitadas.
- (3) A largura de um choque de tráfego abrange apenas alguns veículos.
- (4) Ao contrário das moléculas, os veículos devem ser modelados como partículas ativas considerando que as suas propriedades mecânicas devem ser integradas, ou seja, o comportamento do motorista (agressivo, tímido, etc) deve ser considerado.

Os pontos abordados acima quanto aos modelos de segunda ordem são analisados no artigo de Daganzo [13], no qual é salientado que os modelos disponíveis na literatura não levam em conta a heterogeneidade natural entre as moléculas e os veículos. Então, como uma resposta as críticas de Daganzo, Aw e Rascle [2] corrigiram o modelo de Payne. Na realidade, depois do artigo de Daganzo [13], que essencialmente conclui a rejeição dos modelos de segunda ordem, A. Aw e M. Rascle [2] propoaram uma simples modificação nos modelos de segunda ordem para resolver imediatamente todas as incoerências óbvias citadas por Daganzo. Este modelo satisfaz o princípio de que o veículo é uma partícula anisotrópica que responde a estímulos frontais. Não levando em conta a difusão e a relaxação, o modelo aproximado é representado por:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0, \\ \partial_t (v + p(\rho)) + v \partial_x (v + p(\rho)) = 0, \end{cases} \quad (5.0.5)$$

onde ρ é a densidade, v é a velocidade e p a pseudo-pressão como função do aumento da densidade inspirada na dinâmica de gases. Por exemplo, $p(\rho) = \rho^\gamma$, para $\gamma > 0$.

Este sistema (5.0.5) pode ser escrito de formas diferentes, conservativas e não-conservativas dependendo da representação dos problemas físicos. No entanto, este modelo não é bem posicionado para a região perto do vácuo, ou seja, este modelo deveria ter a propriedade de que uma pequena perturbação nos dados iniciais deveria produzir apenas uma pequena perturbação na solução, e isto não ocorre quando a densidade é próxima de zero. Este fato se destina a reproduzir as instabilidades que podem aparecer nas situações reais de tráfego quando a densidade é muito baixa. Isto representa uma dificuldade do ponto de vista matemático.

Novas abordagens foram geradas de forma a contornar este problema. Por exemplo, Goatin [17] desenvolve um modelo que faz a análise qualitativa além das simulações mostrarem as transições de fase previstas por Kerner e Colombo em [10] propõe um modelo que considera uma densidade máxima na estrada, tal que abaixo desta densidade nenhum veículo pode

parar, enquanto que quando a densidade máxima for atingida tem-se a característica da fila. Temos também outros modelos, por exemplo de Delitala e Rascle [14], baseado no modelo de Aw e Rascle [2], que descreve a formação dos engarrafamentos ou clusters considerando adimensionalmente a seguinte expressão para a pseudo-pressão

$$p(\rho) = \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right)^\gamma, \quad \text{com } \gamma > 0, \quad (5.0.6)$$

diferente do modelo original [2], que quando $p(\rho)$ tendia ao infinito a densidade ρ tendia para a densidade máxima representando uma idealização da realidade. Esta modificação em $p(\rho)$ apenas afeta as situações de congestionamento, a modelagem das situações de não-congestionamento permanece inalterada, ou seja, quando ρ é baixa, $p(\rho) \approx \rho^\gamma$ é descrito como no modelo de Aw e Rascle.

Outros modelos geram várias perspectivas incluindo o caso da análise em auto-estradas, que pode ser visto como uma extensão dos modelos para pista única.

5.1 Análise crítica e perspectivas

O conteúdo das seções precedentes deste capítulo, apresenta uma grande variedade de modelos derivados na escala macroscópica para representar os fenômenos do fluxo de tráfego. A modelagem dos fenômenos de tráfego ainda não atingiram um nível satisfatório quanto a descrição real, sendo assim, encerraremos este capítulo com uma análise crítica e apresentação de novas perspectivas de pesquisas.

5.1.1 Dos Modelos Matemáticos à Realidade Física

Tradicionalmente, espera-se que os modelos matemáticos reproduzam experimentos em um nível qualitativo. Na realidade, esperamos que um bom modelo reproduza dados empíricos para uma variedade de experiências relacionadas a situações físicas diferentes.

Além disso, considerando que o fenômeno do tráfego refere-se a comportamentos coletivos, geralmente baseados nas interações microscópicas, é importante que um modelo tenha a capacidade de reproduzir comportamentos coletivos emergentes da dinâmica individual de um veículo.

De uma forma geral, os objetivos descritos acima podem ser enfatizados tanto por modelos tipo macroscópicos quanto cinéticos. Infelizmente, a maior parte dos modelos incluem parâmetros cujos valores são calculados

por dados experimentais. Em outras palavras, o modelo deve satisfazer as condições experimentais e recentemente alguns modelos propostos apresentam a capacidade de descrever as condições de fluxo constante, simplesmente através de uma modelagem detalhada da dinâmica a nível microscópico.

Em detalhes, podemos citar o modelo macroscópico de segunda ordem de Degond e Delitala [15], onde o fechamento da equação do momento leva em conta o modelo da pseudo-pressão que introduz o comportamento do motorista além de considerar uma distância de segurança. Considerações parecidas aparecem no trabalho de Delitala e Tosin [16], na escala cinética, que introduziram uma modelagem da dinâmica a nível individual com base na interação entre os veículos, dependendo da densidade e da qualidade da estrada. Com êxito, estes dois modelos têm a capacidade de descrever as transições de fase analisados em seção anterior. Este resultado espetacular tem motivado outros estudos de forma a identificar os parâmetros dos modelos, além de descrever uma variedade de comportamentos emergentes, tais como a fila e formações de vácuo, ou interações entre grupos de veículos mais rápidos com veículos mais lentos.

Modelos em diferentes escalas devem fornecer resultados análogos. Por outro lado, a diferença substancial entre os modelos é que, os modelos macroscópicos são menos complexos do que os cinéticos e fornecem uma resposta imediata quanto a descrição microscópica das quantidades envolvidas. Entretanto na teoria cinética é mais simples se considerar o comportamento do motorista como uma partícula ativa. Sendo assim, o estudo do tráfego ainda oferece muitas perspectivas de pesquisa quanto a utilização das escalas e a validação dos modelos através de dados experimentais.

5.2 Exercícios Propostos

1. *Exercício 1*: Deduza a Eq. (5.0.3) proposta por Phillips [36].
2. *Exercício 2*: Deduza a Eq. (5.0.4) introduzida por Kühne [28].
3. *Exercício 3*: Trace o gráfico da pseudo-pressão $p(\rho)$ dado pela expressão (5.0.6) para diversos valores de γ . Quais as conclusões quanto a influência deste parâmetro?

Capítulo 6

Representação Cinética ou Mesoscópica

Na teoria cinética dos gases o estado do sistema é identificado pela posição e velocidade das partículas que constituem o gás. Quanto ao tráfego de veículos, na representação cinética, o estado do sistema é identificado pela posição e pela velocidade dos veículos, entretanto esta identificação não refere-se ao veículo de uma forma individual, mas sim a uma distribuição apropriada de probabilidade sobre o estado microscópico considerado como uma variável aleatória. Os modelos matemáticos referentes a esta escala descrevem a evolução da função de distribuição por equações íntegro-diferenciais com a estrutura similar à equação de Boltzmann, denominada equação tipo-Boltzmann. Em geral todas as escalas, microscópica, macroscópica e cinética, estão tecnicamente relacionadas, (i) os modelos microscópicos contribuem para a descrição matemática das interações entre os veículos utilizados na teoria cinética; (ii) os modelos macroscópicos também estão relacionados com as equações dos modelos assintóticos aplicados as equações cinéticas.

Neste capítulo, iniciaremos com uma breve noção dos fundamentos da teoria cinética dos gases, tais como "espaço de fase", "função de distribuição", etc. De uma maneira semelhante utilizaremos estes fundamentos no tráfego de veículos. A equação tipo-Boltzmann será deduzida para o caso de uma interação binária de veículos pontuais no espaço de fase, com velocidades diferentes, presentes em uma estrada, com base em algumas hipóteses. Ainda, a partir da função de distribuição definiremos os campos básicos para o tráfego de veículos, ou seja, a densidade e a velocidade média. Para finalizar teremos as equações macroscópicas, ou seja, o balanço de massa e

de momento, presentes nos capítulos da descrição macroscópica nos modelos de primeira e segunda ordem, a partir da equação tipo-Boltzmann.

6.1 Fundamentos da Teoria Cinética dos gases

Inicialmente, consideremos um gás monoatômico de N partículas que está contido em um recipiente de volume V . Podemos especificar uma partícula através de um ponto no espaço de seis dimensões determinado por três coordenadas de posição $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e três coordenadas de velocidade $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Neste espaço considerado o sistema de N partículas será descrito por N pontos com coordenadas (x_α, v_α) com $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Este espaço hexadimensional será denominado de **espaço de fase** μ .

O estado do gás no espaço de fase μ é caracterizado por uma **função de distribuição** $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, tal que

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) dx_1 dx_2 dx_3 dv_1 dv_2 dv_3 \quad (6.1.1)$$

nos fornece o número de partículas que, no tempo t , encontram-se no elemento de volume entre \mathbf{x} e $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ e com velocidades \mathbf{v} e $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$.

Denotaremos o elemento de volume no espaço de fase no instante de tempo t por

$$d\mu(t) = d\mathbf{x}d\mathbf{v}. \quad (6.1.2)$$

O número de partículas que estão neste elemento de volume no instante de tempo t é

$$N(t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mu(t). \quad (6.1.3)$$

No instante de tempo $t + \Delta t$ o elemento no espaço de fase será denotado por $d\mu(t + \Delta t)$ e o número de partículas neste elemento é dado por

$$N(t + \Delta t) = f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}, t + \Delta t) d\mu(t + \Delta t). \quad (6.1.4)$$

As colisões alteram a densidade do número de partículas que estão no elemento de volume $d\mathbf{x}d\mathbf{v}$, fazendo com que certas partículas deixem este elemento de volume, enquanto que outras, provenientes de outros elementos de volume, entrem no mesmo. Apenas se não houvesse colisões entre as partículas, $N(t)$ seria igual a $N(t + \Delta t)$. Então poderemos calcular a quantidade $\frac{\Delta N}{\Delta t}$, a qual representa a variação do número de partículas em relação ao tempo, que envolverá derivada temporal, espacial e das velocidades da função de distribuição $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$.

Então consideremos que as partículas do gás estão sujeitas a uma força externa $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ específica. A relação entre $d\mu(t + \Delta t)$ e $d\mu(t)$ é dada pelo Jacobiano de transformação

$$d\mu(t + \Delta t) = |J|d\mu(t),$$

onde

$$J = \frac{\partial(x_1(t + \Delta t) + x_2(t + \Delta t), \dots, v_3(t + \Delta t))}{\partial(x_1(t), x_2(t), \dots, v_3(t))}.$$

Tendo que

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + v_i\Delta t \quad v_i(t + \Delta t) = v_i(t) + F_i\Delta t \quad i = 1, 2, 3$$

considerando até os termos lineares em Δt , poderemos escrever o Jacobiano como sendo

$$J \approx 1 + \frac{\partial F_i}{\partial v_i}\Delta t + O[(\Delta t)^2]. \quad (6.1.5)$$

Então concluímos que

$$d\mu(t + \Delta t) = \left(1 + \frac{\partial F_i}{\partial v_i}\Delta t\right) d\mu(t).$$

Por outro lado expandindo a série de Taylor $f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}, t + \Delta t)$ em torno do ponto $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ e considerando somente termos lineares em Δt temos

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}, t + \Delta t) \\ & \approx f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial v_i}\Delta v_i + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t, \end{aligned}$$

onde

$$\Delta x_i = v_i\Delta t, \quad \Delta v_i = F_i\Delta t.$$

De forma que é possível calcular o valor de ΔN dado por:

$$\Delta N \approx \left[f \frac{\partial F_i}{\partial v_i}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial x_i}v_i\Delta t + \frac{\partial f}{\partial v_i}F_i\Delta t + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t \right] d\mu(t), \quad (6.1.6)$$

e dividindo a expressão acima por Δt vem

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i}v_i + \frac{\partial f F_i}{\partial v_i} \right] d\mu(t).$$

Para determinar $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ são consideradas quatro hipótese:

1. Para um gás rarefeito somente as interações entre os pares de partículas (colisões binárias) são levadas em consideração, pois a probabilidade de ocorrer colisões ternárias ou quaternárias é muito pequena em relação as colisões binárias.
2. As forças externas durante a colisão podem ser desprezadas, isto é, o efeito das forças externas sobre as partículas durante a colisão é pequeno em comparação com as forças que agem entre as partículas.
3. Não existe correlação entre a posição e a velocidade das partículas. Esta suposição é conhecida como a suposição do caos molecular.
4. A variação da função de distribuição não é grande durante o intervalo de tempo de duração de uma colisão mas somente durante o tempo entre as colisões.

Consideremos duas partículas do gás cujas velocidades assintóticas pré-colisionais são denotadas por \mathbf{v} e \mathbf{v}_1 e as velocidades pós-colisionais por \mathbf{v}' e \mathbf{v}'_1 .

Assim o volume do cilindro, chamado cilindro de colisão, no intervalo de tempo Δt será dado pelo produto da área da base $b db d\epsilon$ pela altura $g\Delta t$, onde o movimento relativo é caracterizado pelo parâmetro de impacto b e pelo ângulo azimutal ϵ . Podemos então dizer que, no intervalo de tempo Δt , todas as partículas com velocidades entre \mathbf{v}_1 e $\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_1$ que se encontram no cilindro de colisão, irão colidir com as partículas com velocidades entre \mathbf{v} e $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ localizadas no elemento de volume $d\mathbf{x}$ em torno do ponto O. O número de partículas com velocidade entre \mathbf{v}_1 e $\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_1$ no cilindro de colisão é dado por

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) d\mathbf{v}_1 g \Delta t b db d\epsilon.$$

Estas partículas irão colidir com todas as partículas com velocidades entre \mathbf{v} e $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ e que se encontram no elemento de volume $d\mathbf{x}$ em torno de O, isto é,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}.$$

Logo vamos querer a variação com o tempo para uma orientação ϵ e para um determinado valor de b , onde para isto teremos que integrar sobre todos os valores do parâmetro de impacto b com variação de 0 a $+\infty$, sobre o ângulo azimutal ϵ variando de 0 a 2π e sobre todas as componentes da velocidade \mathbf{v}_1 de $-\infty$ a $+\infty$ teremos

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^- = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) g b db d\epsilon d\mathbf{v}_1 d\mu(t). \quad (6.1.7)$$

Na equação anterior representamos somente por um símbolo de integração todas as cinco integrais descritas anteriormente, onde $\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^-$ denota a saída das partículas, que estavam com velocidade \mathbf{v} do elemento de volume $d\mu(t)$.

Porém há colisões que criam pontos com velocidade \mathbf{v} no elemento de volume $d\mathbf{x}d\mathbf{v}$. Logo a densidade do número total de colisões por intervalo de tempo Δt , que cria pontos no espaço de fase μ com velocidade \mathbf{v} no elemento de volume $d\mathbf{x}d\mathbf{v}$, é expressa como

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^+ = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) g b db d\epsilon d\mathbf{v}_1 d\mu(t). \quad (6.1.8)$$

Com base nos resultados (6.1.7) e (6.1.8) temos que ΔN é representada pela diferença entre as partículas ganhas e perdidas no elemento de volume $d\mu(t)$, o que resulta

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f F_i}{\partial v_i} = \int (f'_1 f' - f_1 f) g b db d\epsilon d\mathbf{v}_1, \quad (6.1.9)$$

que é denominada de equação de Boltzmann. Na Eq. (6.1.9) foram introduzidas abreviações para f'_1, f', f_1 e f representadas por $f'_1 \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t)$, $f' \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t)$, $f_1 \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t)$, $f \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, respectivamente.

Esta Eq. (6.1.9), é uma equação íntegro-diferencial não linear para a função de distribuição f . Observemos que a mesma foi deduzida para o caso de gases monoatômicos e em muitos casos \mathbf{F} não depende de \mathbf{v} , como por exemplo o caso da força de atração gravitacional e neste caso (6.1.9) se reduz a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = \int (f'_1 f' - f_1 f) g b db d\epsilon d\mathbf{v}_1, \quad (6.1.10)$$

6.1.1 Equação tipo-Boltzmann

É possível fazer uma analogia entre o gás monoatômico constituído de N partículas, considerado anteriormente, com os veículos presentes na estrada, ou seja, as partículas seriam os veículos, entretanto em um espaço bidimensional e não tridimensional, como considerado acima. Desta forma, este espaço bidimensional, no caso dos veículos, será denominado de **espaço de fase** denotado por μ .

Então, objetivamente o estado de um veículo em uma estrada é especificado instantaneamente através de sua posição x e sua velocidade v por meio de um ponto em um espaço bidimensional chamado de espaço de fase μ para um sistema constituído por N veículos com coordenadas (x, v) .

O estado do automóvel no espaço de fase μ é caracterizado por uma **função de distribuição** tal que

$$f(x, v, t) dx dv$$

nos dá o número de veículos que, no tempo t , encontram-se no elemento de área entre x e $x + dx$ e com velocidades entre v e $v + dv$.

Denotando a área no espaço de fase no instante t por

$$d\mu(t) = dx dv, \quad (6.1.11)$$

o número de veículos que estão neste elemento de área no instante de tempo t é representado de forma similar à Eq. (6.1.3), ou seja

$$N(t) = f(x, v, t) d\mu(t). \quad (6.1.12)$$

No instante de tempo $t + \Delta t$ o elemento no espaço de fase será denotado por $d\mu(t + \Delta t)$ e o número de veículos neste elemento é dado por

$$N(t + \Delta t) = f(x + \Delta x, v + \Delta v, t + \Delta t) d\mu(t + \Delta t) \quad (6.1.13)$$

Se não houvesse interações entre os veículos, $N(t)$ seria igual a $N(t + \Delta t)$, porém as interações entre os veículos ocasionam uma variação em suas velocidades e conseqüentemente uma mudança no número de veículos que encontram-se no elemento de área do espaço.

Como existem interações, a diferença entre o número de veículos passa a ser representado por

$$\begin{aligned} \Delta N &= N(t + \Delta t) - N(t) \\ &= f(x + \Delta x, v + \Delta v, t + \Delta t) d\mu(t + \Delta t) - f(x, v, t) d\mu(t). \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

Consideremos que os veículos estão sujeitos a uma força externa $F(x, v, t)$ específica que denota a aceleração do veículo, então durante o intervalo de tempo Δt um veículo avança uma distância $\Delta x = v\Delta t$ sofrendo uma variação na velocidade de $\Delta v = F\Delta t$ e no instante de tempo $t + \Delta t$ tem-se a posição $x + \Delta x$ e a velocidade $v + \Delta v$, que podem ser reescritas como:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v\Delta t, \quad v(t + \Delta t) = v(t) + F\Delta t. \quad (6.1.15)$$

Assim a relação entre $d\mu(t + \Delta t)$ e $d\mu(t)$ é dada através do Jacobiano de transformação $|J|$

$$d\mu(t + \Delta t) = |J|d\mu(t), \quad (6.1.16)$$

onde considerando até os termos lineares em Δt obtemos

$$J \approx 1 + \frac{\partial F}{\partial v} \Delta t. \quad (6.1.17)$$

Então concluímos que

$$d\mu(t + \Delta t) = \left(1 + \frac{\partial F}{\partial v} \Delta t\right) d\mu(t). \quad (6.1.18)$$

Por outro lado expandindo a série de Taylor $f(x + \Delta x, v + \Delta v, t + \Delta t)$ em torno do ponto (x, v, t) e considerando somente termos lineares em Δt temos

$$\begin{aligned} & f(x + \Delta x, v + \Delta v, t + \Delta t) \\ & \approx f(x, v, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t, \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

onde

$$\Delta x = v \Delta t \quad \Delta v = F \Delta t.$$

Assim, ΔN resulta como sendo

$$\begin{aligned} \Delta N = N(t + \Delta t) - N(t) & \approx \left[f(x, v, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v \right. \\ & \left. + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \right] \left(1 + \frac{\partial F}{\partial v} \Delta t\right) d\mu(t) - f(x, v, t) d\mu(t), \end{aligned} \quad (6.1.20)$$

e estamos aptos a calcular o valor de ΔN dado por

$$\Delta N \approx \left[f \frac{\partial F}{\partial v} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x} v \Delta t + \frac{\partial f}{\partial v} F \Delta t + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \right] d\mu(t), \quad (6.1.21)$$

e dividindo a expressão acima por Δt vem

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} v + \frac{\partial f}{\partial v} F \right] d\mu(t), \quad (6.1.22)$$

isto é, temos a variação do número de veículos em relação ao tempo que envolve derivada temporal, espacial e das velocidades da função de distribuição $f(x, v, t)$.

A Eq. (6.1.22), ou seja, o termo $\frac{\Delta N}{\Delta t d\mu(t)}$ representa o termo de interação entre os veículos.

A quantidade $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ só será nula para o caso em que não existirem interações entre os veículos. Quando consideramos a interação entre dois veículos de velocidades diferentes, poderá ou não ocorrer a ultrapassagem. Então as

interações só existem quando não há possibilidade de ultrapassagem, que deverá depender das condições de fluxo e de parâmetros fenomenológicos, tais como a qualidade da estrada, condições climáticas, etc.

Portanto iremos determinar ΔN com base em quatro hipóteses semelhantes as consideradas anteriormente:

1. Somente as interações entre os pares de veículos serão levadas em consideração, ou seja, interações binárias.
2. As forças externas durante a interação podem ser desprezadas, isto é, o efeito das forças externas sobre os veículos durante a interação é pequeno em comparação com as forças que agem entre os veículos.
3. Não existe correlação entre a posição e a velocidade dos veículos. Esta suposição na teoria cinética dos gases é conhecida como a suposição do caos molecular.
4. A variação da função de distribuição não é grande durante o intervalo de tempo de duração de uma interação mas somente durante o tempo entre as interações.

e mais três hipóteses descritas abaixo:

1. Os veículos serão considerados como partículas pontuais, embora os veículos sofram somente estímulos frontais.
2. Se a interação ocorrer entre um veículo mais lento com um mais rápido, algumas situações podem ser descritas abaixo:
 - (i) a velocidade do veículo mais lento não será afetada pela interação com o veículo mais rápido mesmo que ocorra a ultrapassagem do veículo mais rápido;
 - (ii) o processo de desaceleração do veículo mais rápido é instantâneo;
3. $1 - \mathbf{p}$ representa a probabilidade de ultrapassagem com $0 \leq \mathbf{p} \leq 1$. A princípio, a probabilidade de ultrapassagem pode ser considerada como função da densidade da estrada, ou seja, quanto maior for a densidade de veículos na estrada menor será a probabilidade de ocorrer a ultrapassagem. Entretanto devemos lembrar que poderemos considerar outras influências sob esta probabilidade de ultrapassagem, tais como a qualidade da estrada, situações climáticas, etc.

Consideremos dois veículos cujas velocidades assintóticas pré-interação são denotadas por v e v_1 e as velocidades pós-interação por v' e v'_1 . Poderemos considerar que a interação ocorre dentro de uma área, chamada de área

de interação. Supondo que os veículos são pontuais, duas situações podem ocorrer: a densidade do número total de interações por intervalo de tempo Δt poderá criar pontos no espaço de fase μ com velocidade v no elemento de área $dx dv$, denotada por $\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^+$, ou poderemos ter a saída dos veículos que estavam com velocidade v do elemento de área $d\mu(t)$, denotado por $\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^-$.

Para determinar ΔN que é representada pela diferença entre as partículas ganhas e perdidas no elemento de área $d\mu(t)$, iremos considerar o caso em que um veículo em especial interage com os demais veículos presentes na estrada. Então consideremos um veículo na estrada na posição x com velocidade v interagindo com um veículo de velocidade v_1 que se encontra atrás do veículo com velocidade v . Poderemos ter duas possibilidades: (i) se $v - v_1 > 0$ o veículo da frente estará mais rápido e o veículo de trás poderá permanecer com a mesma velocidade, diminuir ou acelerar, dependendo das condições de fluxo; (ii) se $v_1 - v > 0$ e v_1 está contido no intervalo $[v_1, v_1 + dv_1]$, o veículo da frente estará mais lento e o veículo de trás poderá ultrapassar ou reduzir a sua velocidade, dependendo das condições de fluxo. Não consideraremos o caso em que o veículo mais rápido (de trás) poderá permanecer com a sua velocidade, pois neste caso haveria uma colisão entre os veículos, o que não é considerado na nossa análise. Ao se considerar o fato da não ultrapassagem, temos que a probabilidade de interação entre dois veículos deve ser multiplicada pela probabilidade de não ultrapassagem, de forma que o fluxo de veículos visto por um observador no referencial do veículo mais lento, de posição x e velocidade v , é dado por $(1 - \mathbf{p})(v_1 - v)f(x, v_1, t)f(x, v, t)$.

Baseando-se neste termo, o fluxo de veículos com velocidade v é obtido integrando este último sobre todas as velocidades $v_1 > v$, ou seja

$$\int_0^{v_1} (1 - \mathbf{p})f(x, v_1, t)f(x, v, t)(v_1 - v)dv, \quad (6.1.23)$$

e

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^- = f(x, v_1, t) \int_0^{v_1} (1 - \mathbf{p})f(x, v, t)(v_1 - v)dv, \quad (6.1.24)$$

denota a saída dos veículos do elemento de área de $d\mu(t)$.

Para obtermos a expressão para a densidade total de interações por intervalo de tempo Δt que cria pontos no espaço de fase μ , consideraremos a mesma situação anterior, porém o veículo da frente com velocidade v_1 , tal que $v > v_1$ e com v fora do intervalo $[v_1, v_1 + dv_1]$,

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^+ = f(x, v_1, t) \int_{v_1}^{\infty} (1 - \mathbf{p})f(x, v, t)(v - v_1)dv. \quad (6.1.25)$$

Com base nos resultados (6.1.24), (6.1.25) e (6.1.22) temos que ΔN é representada pela diferença entre as partículas ganhas e perdidas no elemento de área $d\mu(t)$, o que resulta

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f F}{\partial v} = f(x, v_1, t) \int_0^\infty (1 - \mathbf{p}) f(x, v, t) (v - v_1) dv. \quad (6.1.26)$$

Esta equação, conhecida como equação tipo-Boltzmann, governa a evolução espaço-temporal da função de distribuição de velocidades. Esta Eq. (6.1.26), é uma equação íntegro-diferencial não linear para a função de distribuição f . Observemos que a mesma foi deduzida para o caso dos veículos serem considerados como partículas pontuais, se deslocando na mesma direção e no mesmo sentido de uma estrada de uma única pista, na qual as entradas e saídas de veículos da mesma são desconsideradas, ou seja, a densidade total do número de veículos na estrada é constante.

6.2 Os Momentos da Função de Distribuição

Na teoria cinética as quantidades que caracterizam o estado macroscópico de um gás são definidas a partir da função de distribuição $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Vamos considerar como campos básicos os campos definidos pelos momentos da função de distribuição.

A primeira propriedade de uma partícula é a massa cuja integral do produto da massa da partícula pela função de distribuição integrada sobre todas as velocidades nos fornece a massa por unidade de volume, isto é, a densidade

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int m f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (6.2.27)$$

A cada partícula de massa m associamos uma velocidade onde a integral do produto da massa pela velocidade da partícula e pela função de distribuição integrada sobre todas as velocidades nos fornece a densidade do momento linear,

$$\rho u_i(\mathbf{x}, t) = \int m v_i f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (6.2.28)$$

sendo v_i a velocidade de uma partícula e u_i a velocidade do gás. Ainda podemos ter a densidade de energia total representada por

$$\rho \epsilon(\mathbf{x}, t) = \int \frac{1}{2} m v^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (6.2.29)$$

pois $\frac{1}{2} m v^2$ é a energia cinética de uma partícula. ϵ representa a energia interna específica. Portanto com base nas quantidades microscópicas m ,

mv_i e $\frac{1}{2}mv^2$ definiu-se a densidade de massa ρ , a densidade de momento linear ρu_i e a densidade de energia $\rho \epsilon$ através das equações (6.2.27), (6.2.28) e (6.2.29), respectivamente. Com o uso destas equações é possível obter as equações de balanço de massa, momento linear e energia a partir da equação de Transporte [26].

No caso de veículos, o estado macroscópico será definido a partir da função de distribuição $f(x, v, t)$ onde as quantidades macroscópicas definidas pelos momentos da função de distribuição são:

(i) a densidade de veículos

$$\rho(x, t) = \int_0^{\infty} f(x, v, t) dv, \quad (6.2.30)$$

(ii) o fluxo de veículos

$$q(x, t) = \int_0^{\infty} v f(x, v, t) dv, \quad (6.2.31)$$

(iii) a energia

$$E(x, t) = \int_0^{\infty} v^2 f(x, v, t) dv. \quad (6.2.32)$$

Através das relações acima, (6.2.30) e (6.2.31), é possível calcular a expressão para a velocidade média dos veículos, representada por:

$$u(x, t) = \frac{q(x, t)}{\rho(x, t)} = \frac{\int_0^{\infty} v f(x, v, t) dv}{\int_0^{\infty} f(x, v, t) dv}. \quad (6.2.33)$$

Portanto, integrando a equação tipo-Boltzmann (6.1.26) sobre todos os valores da velocidade dos veículos, podemos obter a equação da continuidade, que através do uso das equações (6.2.30) e (6.2.31) é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (6.2.34)$$

ou com o uso da Eq. (6.2.34)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0. \quad (6.2.35)$$

Da mesma forma a equação do momento poderá ser obtida após a integração da equação tipo-Boltzmann (6.1.26) multiplicada por v e integrada sobre todos os valores das velocidades dos veículos.

Portanto através da equação tipo-Boltzmann é possível obter as equações de conservação que descrevem os modelos de primeira e segunda ordem desenvolvidos nos capítulos referentes a descrição macroscópica do tráfego de veículos.

6.3 Exercícios Propostos

1. *Exercício 1:* Obtenha a expressão para o Jacobiano dado por (6.1.5).
2. *Exercício 2:* Considere a expansão em série de Taylor de $f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}, t + \Delta t)$ e encontre o valor de ΔN dado por (6.1.6)
3. *Exercício 3:* Deduza a Eq. (6.1.8) para $(\frac{\Delta N}{\Delta t})^+$.
4. *Exercício 4:* Obtenha a expressão para o Jacobiano dado por (6.1.17).
5. *Exercício 5:* Deduza a Eq. (6.2.35) que representa a equação da conservação do número de veículos na estrada.

Bibliografia

- [1] E. De Angelis, Nonlinear hydrodynamic models of traffic flow modelling and mathematical problems, *Mathematical and Computer Modelling*, **29**, 83–95, (1999).
- [2] A. Aw, M. Rascle, Resurrection of second order models of traffic flow, *SIAM J. Appl. Math.*, **60**, 916–938, (2000).
- [3] N. Bellomo, M. Delitala e V. Coscia, On the mathematical theory of vehicular traffic flow I - Fluid dynamic and kinetic modeling, *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, **12**, 1801–1844, (2002).
- [4] N. Bellomo e V. Coscia, First order models and closure of the mass conservation equation in the mathematical theory of vehicular traffic flow, *Comptes Rendus Mecanique*, **333**, 843–851, (2005).
- [5] F. Berthelin, P. Degond, M. Delitala, M. Rascle, A model for the formation and evolution of traffic jams, *Arch. Ration Mech. Anal.*, **187**, 185–220, (2008).
- [6] M.L. Bertotti, N. Bellomo, Boundary value steady solutions of a class of hydrodynamic models for vehicular traffic flow models, *Math. Comput. Modelling*, **38**, 367–383, (2003).
- [7] I. Bonzani, Hydrodynamic models of traffic flow: drivers' behaviour and nonlinear diffusion, *Mathematical and Computer Modelling*, **31**, 1–8, (2000).
- [8] I. Bonzani, L. Mussone e P. N. Zucca, From experiments to hydrodynamic traffic flow models: II-Sensitivity Analysis, *Mathematical and Computer Modeling*, **42**, 1145–1150, (2005).
- [9] I. Bonzani e L. M. G. Cumin, Critical analysis and perspectives on the hydrodynamic approach for the mathematical theory of vehicular traffic, *Mathematical and Computer Modelling*, **50**, 526–541, (2009).

- [10] R.M. Colombo, A 2 x 2 hyperbolic traffic flow model, *Math. Comput. Modelling*, **35**, 683-688, (2002).
- [11] V. Coscia, On a closure of mass conservation equation and stability analysis in the mathematical theory of vehicular traffic flow, *C. R. Mecanique*, **332**, 585–590, (2004).
- [12] L. M. G. Cumin, On the modelling of granular traffic flow by the kinetic theory for active particles trend to equilibrium and macroscopic behaviour, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **44**, 263–268, (2009).
- [13] C. Daganzo, Requiem for second order fluid approximations of traffic flow, *Transpn. Res. B*, **29B**, 277-286,(1995).
- [14] S. Darbha e K. R. Rajagopal, A limit collection of dynamical systems. An application to model the flow of traffic, *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, **12**, 1381–1399, (2002).
- [15] P. Degond, M. Delitala, Modelling and simulation of vehicular traffic jam formation, *Kinetic and Related Models*, 1 (2), 279–293, (2008).
- [16] M. Delitala, A. Tosin, Mathematical modelling of vehicular traffic flow: a discrete kinetic theory approach, *Mat. Meth. Appl. Sci.*, **17**, 901–932, (2007).
- [17] P. Goatin, The Aw-Rascle vehicular traffic model with phase transitions, *Mathl. Comp. Modelling*, **44**, 287–303, (2006).
- [18] L.M. Gramani Cumin, Tese de doutorado: "Fenômenos de Transporte em um Gás Rarefeito em Rotação com Evaporação e Condensação nas Superfícies", Universidade Federal do Paraná, Brasil, (2000).
- [19] H. Greenberg, An analysis of traffic flow, *Operations Research*, **7(I)**, 255–275, (1959).
- [20] B. D. Greenshields, A study of traffic capacity, *Proceedings of the Highway Research Board*, **14**, 468, (1935).
- [21] E. Hauer, V. F. Hurdle, *FREFLO*: Discussion of the freeway traffic model, *Transp. Res. Rec.*, **722**, 75, (1979).
- [22] B. S. Kerner, "The Physics of Traffic", Springer, New York, Berlin, (2004).

- [23] B. S. Kerner e P. Konhäuser, Structure and parameters of clusters in traffic flow, *Phys. Rev. E*, **50** 54–83 (1994).
- [24] A. Klar, R.D. Kühne e R. Wegener, Mathematical models for vehicular traffic, *Surveys Math. Ind.*, **6** 215–232, (1996).
- [25] A. Klar e R. Wegener, Enskog-like kinetic models for vehicular traffic, *J. Statist. Phys.*, **87**, 91–114, (1997).
- [26] G.M. Kremer, "Uma Introdução à Equação de Boltzmann", (Editora da Universidade de São Paulo - Edusp, (2004).
- [27] B.S. Kerner, P. Konhäuser, Cluster effect in initially homogeneous traffic flow, *Phys. Review E*, **48**, 2335–2338, (1993).
- [28] R.D. Kühne, Macroscopic freeway model for dense traffic, *In N. Vollmuller, editor, 9th Int. Symp. on Transportation and Traffic Theory*, 21–42, (1984).
- [29] A. Laibida Junior, Tese de doutorado: "Teoria Cinética Veicular à la Enskog", Universidade Federal do Paraná, Brasil, (2009).
- [30] M. J. Lighthill, G. B. Whitham, On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, **229**, 317–345, (1955).
- [31] W. Leutzbach, "Introduction to the Theory of Traffic Flow", Springer, New York, (1988).
- [32] A.R. Méndez, Tese de Doutorado: "Estudio Cinético-Macroscópico de Flujo Vehicular", Universidad Autonoma Metropolitana, México, (2008).
- [33] P. Nelson, A kinetic model of vehicular traffic and its associated bimodal equilibrium solution, *Transp. Theory Statist. Phys.*, **24**, 383–409, (1995).
- [34] S. Paveri Fontana, On Boltzmann like treatments for traffic flow, *Transp. Research*, **9**, 225–235, (1975).
- [35] H.J. Payne, *FREFLO*: A macroscopic simulation model of freeway traffic, *Transp. Res. Rec.*, **722**, 68–67, (1979).
- [36] W.F. Phillips, A kinetic model for traffic flow with continuum implications, *Transp. Plan. Technol.*, **5**, 131–138, (1979).

- [37] I. Prigogine e R. Herman, "Kinetic Theory of Vehicular Traffic", American Elsevier, caps. 1, 2 and 3,(1971).
- [38] P. Richards, Shock waves on the highway method, *Operations Research*, **4** (1), 42-51, (1956).
- [39] R.M. Velasco, Marques. Navier-Stoke-like Equations for Traffic Flow Model. *Physical Review E.*, **72**, 5, p.046102-1-046102-9, (2005).
- [40] G.B. Whitham, "Linear and Nonlinear Waves", A Wiley-Interscience Publication - JOHN WILEY & SONS, New York . London . Sydney . Toronto, (1974).
- [41] H.D. Young e R.A. Freedman, "Física I Mecânica", Pearson Addison-Wesley, (2006).

Índice

- Bonzani, 35, 40, 41, 54
- cinemática, 16, 19, 20, 52, 62
- comprimento da estrada, 30, 48
- condições iniciais, 21, 38, 63
- densidade crítica, 33–36, 40, 44, 52
- densidade máxima, 30, 34, 37, 63–65
- descrição cinética, 11, 17
- descrição macroscópica, 11, 15, 17, 18, 68, 77
- descrição microscópica, 11, 16, 66
- diagrama da velocidade, 17, 31, 34, 51, 56, 58
- diagrama fundamental, 31, 34, 42, 44–47
- dinâmica, 15, 17, 22, 23, 29, 31, 32, 43, 49, 50, 61, 64–66
- empírico, 17, 32, 33, 39, 42–48, 62, 65
- equação de Boltzmann, 15, 17, 67, 71
- equação de Transporte, 77
- equação tipo-Boltzmann, 11, 17, 18, 67, 68, 76, 77
- espaço de fase, 67, 68, 71, 72, 75
- fenomenológico, 11, 15, 24, 30, 40, 41, 49, 50, 54, 57, 61, 62, 74
- fluxo máximo, 31, 34, 36, 46, 47
- função de distribuição, 15, 17, 18, 67, 68, 70–74, 76, 77
- Greenberg, 35, 37–39
- Greenshields, 35–38, 48
- hidrodinâmica, 14, 15, 17, 49–51, 63
- Leis de Newton, 17, 22
- mesoscópica, 11, 14, 15
- momentos da função, 76, 77
- Mussone, 40
- onda de choque, 52, 53
- parâmetro de retardamento, 55
- ponto crítico, 45
- pseudo-pressão, 64–66
- tabela de jogos, 17, 19, 24, 26
- veículos pontuais, 22, 23, 67, 74–76
- velocidade de adaptação, 56
- velocidade de equilíbrio, 51, 53–58, 62
- velocidade de propagação finita, 52
- velocidade limite, 30
- velocidade média máxima, 30, 31

NOTAS EM MATEMÁTICA APLICADA

Arquivos em pdf disponíveis em <http://www.sbmac.org.br/notas.php>

1. Restauração de Imagens com Aplicações em Biologia e Engenharia
Geraldo Cidade, Antônio Silva Neto e Nilson Costa Roberly
2. Fundamentos, Potencialidades e Aplicações de Algoritmos Evolutivos
Leandro dos Santos Coelho
3. Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Águas Subterrâneas
Edson Wendlander
4. Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais
Maria Cristina de Castro Cunha e Maria Amélia Novais Schleicher
5. Modelagem em Biomatemática
Joyce da Silva Bevilacqua, Marat Rafikov e Cláudia de Lello
Courtouke Guedes
6. Métodos de Otimização Randômica: algoritmos genéticos e “simulated annealing”
Sezimária F. Pereira Saramago
7. “Matemática Aplicada à Fisiologia e Epidemiologia”
H.M. Yang, R. Sampaio e A. Sri Ranga
8. Uma Introdução à Computação Quântica
Renato Portugal, Carlile Campos Lavor, Luiz Mariano Carvalho
e Nelson Maculan
9. Aplicações de Análise Fatorial de Correspondências para Análise de Dados
Homero Chaib Filho

10. Modelos Matemáticos baseados em autômatos celulares para Geoprocessamento
Marilton Sanchotene de Aguiar, Fábria Amorim da Costa,
Graçaliz Pereira Dimuro e Antônio Carlos da Rocha Costa
11. Computabilidade: os limites da Computação
Regivan H. N. Santiago e Benjamín R. C. Bedregal
12. Modelagem Multiescala em Materiais e Estruturas
Fernando Rochinha e Alexandre Madureira
13. Modelagem em Biomatemática (Coraci Malta ed.)
 - 1 - “Modelagem matemática do comportamento elétrico de neurônios e algumas aplicações”
Reynaldo D. Pinto
 - 2 - “Redes complexas e aplicações nas Ciências”
José Carlos M. Mombach
 - 3 - “Possíveis níveis de complexidade na modelagem de sistemas biológicos”
Henrique L. Lenzi, Waldemiro de Souza Romanha e Marcelo Pelajo- Machado
14. A lógica na construção dos argumentos
Angela Cruz e José Eduardo de Almeida Moura
15. Modelagem Matemática e Simulação Numérica em Dinâmica dos Fluidos
Valdemir G. Ferreira, Hélio A. Navarro, Magda K. Kaibara
16. Introdução ao Tratamento da Informação nos Ensinos Fundamental e Médio
Marcilia Andrade Campos, Paulo Figueiredo Lima
17. Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações
Rosana Sueli da Motta Jafelice, Laércio Carvalho de Barros,
Rodney Carlos Bassanezi
18. Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira
Socorro Rangel

19. Observar e Pensar, antes de Modelar
Flavio Shigeo Yamamoto, Sérgio Alves, Edson P. Marques Filho,
Amauri P. de Oliveira
20. Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações
Eliana Xavier Linhares de Andrade, Cleonice Fátima Bracciali
21. Uma Introdução à Teoria de Códigos
Carlile Campos Lavor, Marcelo Muniz Silva Alves, Rogério
Monteiro de Siqueira, Sueli Irene Rodrigues Costa
22. Análise e Processamento de Sinais
Rubens Sampaio, Edson Cataldo, Alexandre de Souza Brandão
23. Introdução aos Métodos Discretos de Análise Numérica de EDO e
EDP
David Soares Pinto Júnior
24. Representações Computacionais de Grafos
Lílian Markenzon, Oswaldo Vernet
25. Ondas Oceânicas de Superfície
Leandro Farina
26. Técnicas de Modelagem de Processos Epidêmicos e Evolucionários
Domingos Alves, Henrique Fabrício Gagliardi
27. Introdução à teoria espectral de grafos com aplicações
Nair Maria Maia de Abreu, Renata Raposo Del-Vecchio, Cybele
Tavares Maia Vinagre e Dragan Stevanovi ć
28. Modelagem e convexidade
Eduardo Cursi e Rubens Sampaio
29. Modelagem matemática em finanças quantitativas em tempo discreto
Max Oliveira de Souza e Jorge Zubelli
30. Programação não linear em dois níveis: aplicação em Engenharia
Mecânica
Ana Friedlander e Eduardo Fancello

31. Funções simétricas e aplicações em Combinatória
José Plínio de Oliveira Santos e Robson da Silva
32. Semigrupos aplicados a sistemas dissipativos em EDP
Carlos Raposo da Cunha
33. Introdução à Simulação Estocástica para Atuária e Finanças Usando R
Hélio Côrtes Vieira, Alejandro C. Frery e Luciano Vereda
34. Modelos de Sustentabilidade nas Paisagens Amazônicas Alagáveis
Maurício Vieira Kritz, Jaqueline Maria da Silva e Cláudia Mazza
35. Uma Introdução à Dinâmica Estocástica de Populações
Leonardo Paulo Maia
36. Geometria de Algoritmos Numéricos
Gregorio Malajovich
37. Equações Diferenciais, Teorema do Resíduo e as Transformadas Integrais
Edmundo Capelas de Oliveira e Jayme Vaz Júnior
38. Métodos Matemáticos e Computacionais em Música
Paulo Cezar Carvalho, Luiz Velho, Marcelo Cicconet e Sergio Krakowski
39. Métodos para Problemas Inversos de Grande Porte
Fermín S. Viloche Bazán e Leonardo Silveira Borges
40. TerraME : Suporte a Modelagem Ambiental Multi-Escalas Integrada a Bancos de Dados Geográficos
Tiago Garcia de Senna Carneiro e Gilberto Camara
41. Técnicas de Inteligência Computacional Inspiradas na Natureza - Aplicações em Problemas Inversos em Transferência Radiativa
Antônio J. Silva Neto e José Carlos Becceneri
42. Avanços em Métodos de Krylov para Solução de Sistemas Lineares de Grande Porte
Luiz Mariano Carvalho e Serge Gratton

43. Uma Abordagem para Modelagem de Dados com o Uso de Sistemas Neuro-Fuzzy: Aplicações Geoespaciais
Luiz Carlos Benini e Messias Meneguette Jr
44. Construções Concretas e Geometria Dinâmica: Abordagens Interligadas para o Estudo de Cônicas
Angela Rocha dos Santos