

Editado por

Célia A. Zorzo Barcelos

Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Uberlândia, MG, Brasil

Eliana X.L. de Andrade

Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

Maurílio Boaventura

Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil



A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7)**, as figuras em eps e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
<http://www.sbmac.org.br/notas.php>



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

2012

**CONSTRUÇÕES CONCRETAS E
GEOMETRIA DINÂMICA: ABORDAGENS
INTERLIGADAS PARA O ESTUDO DE
CÔNICAS**

Angela Rocha dos Santos
angela@im.ufrj.br

Departamento de Métodos Matemáticos
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2012

Coordenação Editorial: Sandra Mara Cardoso Malta

Coordenação Editorial da Série: Eliana Xavier Linhares de Andrade

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2012 by Angela Rocha dos Santos.
Direitos reservados, 2012 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

Catálogo elaborado pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

Santos, Angela R.

Construções Concretas e Geometria Dinâmica: Abordagens Interligadas para o Estudo de Cônicas - São Carlos, SP: SBMAC, 2012, 82 p.; 20,5cm - (Notas em Matemática Aplicada; v. 44)

e-ISBN 978-85-8215-004-7

1. Construção das Cônicas 2. Propriedade das Cônicas
3. Geometria Dinâmica
I. Santos, Angela R. II. Título. III. Série

CDD - 51

Esta é uma republicação em formato de e-book do livro original do mesmo título publicado em 2009 nesta mesma série pela SBMAC.

A minha mãe, Margarida,
cuja presença se faz mais forte
a cada dia de ausência.

Agradecimentos

Gostaria de aqui registrar meus agradecimentos aos alunos e professores do Curso de Especialização para Professores da Educação Básica, do Instituto de Matemática da UFRJ, e aos participantes dos Encontros do Projeto Fundão que assistiram, em diversas ocasiões, a vários mini-cursos sobre cônicas. Estes mini-cursos pavimentaram o caminho para que este livro pudesse ser escrito. Todos, com suas dúvidas, observações e sugestões, muito contribuíram no enriquecimento do conteúdo e na abordagem apresentada.

Em especial, gostaria de agradecer à Professora Elizabeth Belfort da Silva Moren por suas sugestões e revisão do texto, aos Professores Waldecir Bianchini e Walcy Santos pelo incentivo e colaboração diários e incondicionais, à minha família pelo apoio e amor constantes e, muito especialmente, a Luciana dos Santos Salles, minha muito querida e preferida revisora e consultora de Língua Portuguesa, cujo trabalho sistemático, dedicado e competente tem sido essencial para a concretização e correção de meus trabalhos.

Conteúdo

Prefácio	11
1 Cônicas e Geometria Dinâmica	13
1.1 Introdução: por que cônicas?	13
1.2 Por que Geometria Dinâmica?	14
1.3 Objetivos e Metodologia	14
2 Parábolas	17
2.1 Introdução	17
2.2 Uma visão geométrica	17
2.2.1 Construindo a curva com régua e barbante	17
2.2.2 Explorando dobraduras: propriedade refletora	20
2.3 Equação da Parábola: Integrando Álgebra e Geometria	23
2.4 O mundo ao nosso redor	27
2.4.1 Antenas Parabólicas	27
2.4.2 Faróis de automóveis	28
2.5 Problemas Propostos	29
3 Elipses	31
3.1 Uma visão geométrica	31
3.1.1 Construindo a curva com lápis, barbante e tachinha	31
3.1.2 Construção por dobraduras	35
3.1.3 Propriedade Refletora da Elipse	37
3.1.4 Excentricidade: explorando o modelo computacional	38
3.2 A equação da Elipse: Integrando Álgebra e Geometria	38
3.3 O Mundo ao Nosso Redor	40
3.3.1 O segredo do salão oval	40
3.3.2 Ultrassom	40
3.4 Problemas propostos	41

4	Hipérboles	45
4.1	Uma visão geométrica	45
4.1.1	Construindo e definindo a curva	45
4.1.2	Assíntotas: uma dobra especial	47
4.2	A equação da hipérbole: integrando Álgebra e Geometria	50
4.3	O mundo ao nosso redor	54
4.3.1	Navegação de grande curso	54
4.3.2	Tremores de Terra	55
4.4	Problemas propostos	56
5	Seções Cônicas	57
5.1	Uma visão geométrica	57
5.2	Cônicas: Uma visão Analítica	59
5.3	Equações Quadráticas	62
5.3.1	Parábolas	64
5.3.2	Elipses	65
5.3.3	Circunferências: Um caso especial de elipse	66
5.3.4	Hipérboles	67
5.3.5	Casos Degenerados	68
5.3.6	O caso mais geral	69
5.4	Problemas propostos	70
6	Conclusões	73
	Bibliografia	75

Prefácio

Neste curso abordaremos a construção, definição e estudo geométrico analítico das cônicas. As construções, efetuadas num primeiro momento com material concreto, serão, posteriormente, repetidas em simulações computacionais.

A abordagem computacional dinâmica, complementando as construções com material concreto, facilita o entendimento das construções e da geometria envolvida ao mesmo tempo em que permite explorar, rápida e significativamente, uma vasta gama de casos, estimulando o surgimento de conjecturas e reforçando a necessidade de se obter provas matemáticas rigorosas para que essas conjecturas possam ser admitidas como verdadeiras.

Esta interligação de abordagens, partindo do concreto e chegando a provas matemáticas, desperta o prazer e evidencia o verdadeiro significado de “fazer matemática”, pois torna real, concreto e mais simples para alunos e professores o caminho explorar-conjecturar-demonstrar, base da construção do conhecimento científico.

Complementando a visão geométrica e analítica apresentada, para cada uma das cônicas estudadas neste texto, apresentamos algumas das suas principais aplicações e, ao término de cada capítulo, propomos alguns exercícios e problemas variados, além disso, procuramos introduzir uma visão unificada para o estudo de cônicas por meio do Teorema das Cônicas e de um pequeno estudo das equações quadráticas. Uma pequena bibliografia sobre o assunto foi anexada ao final do texto.

Rio de Janeiro, 19 de abril de 2009.

Angela Rocha dos Santos

Capítulo 1

Cônicas e Geometria Dinâmica

1.1 Introdução: por que cônicas?

O interesse pelo estudo das cônicas remonta a épocas muito antigas. De fato, estas curvas estão entre as mais sistemática e exaustivamente estudadas desde a antiguidade. Não é de estranhar que esse interesse seja tão antigo. Suas propriedades, muitas já conhecidas pelos gregos, desempenham um papel importante em vários domínios da Física, como Astronomia, Ótica e Acústica, da Engenharia e Arquitetura e atualmente exercem um papel de primordial importância no desenvolvimento da tecnologia moderna (ver por exemplo, [12], [6], [7] e [9]).

Apesar de toda a sua importância histórica e de seu relevante papel no desenvolvimento tecnológico moderno, o estudo das cônicas no ensino médio, nos últimos anos, tem sido completamente abandonado ou relegado a um segundo plano, reduzindo-se a simples manipulação e/ou memorização de fórmulas. Esta abordagem leva a não valorização do tema pelos alunos, sentimento compartilhado, quem sabe, pelos próprios professores, que podem não estar preparados a reconhecer nem a sua beleza nem a sua importância e utilidade.

Partimos do ponto de vista de que a principal dificuldade para que se comece a pensar em reverter esta situação reside, principalmente, nas deficiências na formação básica do professor de matemática, aliada à falta de bibliografia de apoio adequada ao seu nível. Uma das conseqüências claras deste fato, pode ser constatada pelo fraco desempenho de nossos estudantes nas questões propostas nos últimos vestibulares das universidades públicas

versando sobre esse tema. De acordo com dados obtidos pela análise das provas de matemática dos vestibulares dos últimos dez anos para a UFRJ, qualquer questão que exija do candidato mais do que uma simples aplicação de fórmulas básicas é deixada em branco por mais de 95 por cento dos candidatos.

Além disso, em pesquisas sistemáticas feitas entre os professores participantes de cursos de capacitação docente, oferecidos no IM-UFRJ nos últimos anos, o reconhecimento da necessidade de aprofundamento matemático neste assunto tem sido constante. Minicursos oferecidos sobre o tema tiveram grande procura e diversos pedidos de continuidade.

1.2 Por que Geometria Dinâmica?

A verdadeira aprendizagem em matemática, em especial em Geometria, deve passar necessariamente pelas etapas de exploração concreta, experimentação, resolução de problemas, elaboração de conjecturas, justificativas informais e provas. Segundo [3], estas etapas não são facilmente assimiladas pelos alunos, embora pareçam muito naturais do ponto de vista de quem já as superou.

A abordagem concreta-computacional, empregada neste trabalho, antes de direcionar o estudo diretamente para a álgebra das cônicas, apresenta técnicas de construção que as gera. As simulações destas construções no ambiente computacional ensinam o aluno a usar os objetos traçados na tela como ajuda no estabelecimento de conjecturas e justificativas e esta é uma parte considerável do trabalho de ensinar geometria, para a qual a Geometria Dinâmica (G.D.) pode contribuir efetivamente. As representações neste ambiente podem ajudar a concretizar o simbólico fornecendo aos alunos a base experimental necessária às abstrações inerentes à prova matemática (ver [11]). Já existe bibliografia ampla para apoiar este trabalho (ver, por exemplo, [10]).

A seguir, discutiremos os objetivos e metodologia usados neste minicurso, e nos próximos capítulos abordaremos exemplos de construções e questões a serem exploradas no estudo de parábolas, elipses e hipérbolas.

1.3 Objetivos e Metodologia

Este texto, destinado a professores do ensino médio e superior e alunos de Licenciatura, tem como objetivo sanar, parte das dificuldades citadas acima, fornecendo ao professor um material que, ao mesmo tempo, supra

as deficiências na sua formação e sirva de ponto de apoio nas suas aulas. Dessa maneira, visamos:

- Aprofundar conhecimentos específicos de matemática.
- Integrar os conteúdos abordados com tópicos da Matemática do ensino médio.
- Conscientizar os professores participantes sobre as diversas possibilidades do uso de programas computacionais de geometria dinâmica como recurso educacional em sua disciplina.
- Integrar aspectos geométricos e analíticos, desvendando a beleza e despertando o gosto pela matemática.

Os pré-requisitos necessários são somente conceitos básicos de geometria plana, tais como mediatriz, congruência de triângulos e lugar geométrico e de coordenadas e distância no plano.

Além de uma visão histórica e de várias aplicações das cônicas no nosso dia a dia, abordaremos o estudo de parábolas, elipses e hipérbolas, num primeiro momento, por meio de construções concretas, dentre essas, as feitas a partir de dobraduras. Para essas construções será necessário o emprego de papel vegetal, tesoura, compasso, régua e barbante.

Num segundo momento, as mesmas construções serão obtidas por meio de simulações computacionais usando-se para isso os recursos disponíveis em programas de G.D (ver por exemplo, [14] e [4]). A partir dessas construções serão obtidas as definições das curvas como lugar geométrico, suas equações analíticas e, a partir das conjecturas surgidas após explorações dinâmicas feitas com o auxílio do computador, serão demonstradas as principais propriedades das cônicas, incluindo-se aí as suas propriedades refletoras. Faremos, também um estudo de excentricidade e obteremos a circunferência como um caso particular de elipse.

Por fim, as cônicas serão apresentadas como seções do cone e a excentricidade será usada para obter uma caracterização geral para estas curvas.

A capacidade dos programas de G.D. de produzir figuras que se movem mantendo inalteradas suas propriedades geométricas permite aos alunos modelar computacionalmente suas construções concretas e alterá-las para explorar diversos casos e possibilidades buscando padrões que aumentem seus conhecimentos sobre cônicas, alicercem conjecturas e indiquem possíveis caminhos para demonstrações.

Nos Capítulos 2, 3 e 4 descreveremos algumas construções possíveis e colocaremos algumas questões a serem exploradas e respondidas.

Para aprofundar os conceitos aqui apresentados e estimular o leitor a buscar outras fontes, procuramos introduzir no Capítulo 5, uma visão unificada para o estudo de cônicas por meio do Teorema das Cônicas e de um pequeno estudo das equações quadráticas. Estes resultados são acrescidos de comentários e exemplos ficando as demonstrações a cargo do leitor que desejar se aprofundar no tema. Para isso, indicamos a consulta a [6], [7], [12], [13] e [16], por exemplo.

Capítulo 2

Parábolas

2.1 Introdução

Nesse e nos próximos dois capítulos, serão exploradas algumas construções para as cônicas usando material concreto e, a seguir, usando-se um programa de GD, serão feitas simulações computacionais dessas mesmas construções objetivando explorar algumas de suas propriedades sob o ponto de vista geométrico.

A seguir, integrando álgebra e geometria, serão obtidas as respectivas equações cartesianas. Para isso, será escolhido um conveniente sistema de coordenadas e, por meio da definição da curva como um lugar geométrico e da fórmula de distância entre dois pontos do plano, será deduzida a equação procurada.

Algumas aplicações são propostas nas seções intituladas “O Mundo ao Nosso Redor” e exercícios e problemas são propostos ao final de cada capítulo. Para outras aplicações e problemas veja, por exemplo [2] e [17].

2.2 Uma visão geométrica

2.2.1 Construindo a curva com régua e barbante

A Figura 2.1 ilustra o Método usado por Kepler para construir uma curva usando um barbante preso a uma régua especial (em forma de T dobrado) que desliza sobre uma mesa. O barbante tem o mesmo comprimento da régua e é preso nos pontos B e F . A curva é obtida firmando-se o lápis no barbante e, mantendo-o esticado, deslizando a régua sobre a guia da mesa.

A partir dessa construção, é possível obter a definição da curva traçada como um lugar geométrico, como é feito a seguir.

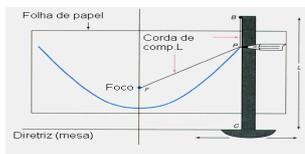


Figura 2.1: Construção com régua e barbante

Como o barbante tem o mesmo comprimento da régua, a curva traçada, que chamaremos de parábola, pode ser definida como se segue.

Definição 2.1. *Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano tais que a distância a um ponto fixo (F no desenho), dito foco, é igual a distância a uma reta fixa (a mesa, na construção acima), dita diretriz.*

Usando um programa de G.D., podemos simular esta construção no computador. Para que esta construção possa ser feita, é essencial a determinação exata do ponto, sobre a régua, onde a caneta, mantendo o barbante esticado, traça a curva. A partir da construção concreta, os alunos podem concluir, facilmente, que trata-se da construção de triângulos isósceles e, portanto, o ponto P é determinado pela interseção da mediatriz do segmento \overline{CF} com a reta vertical que representa a régua, como mostra a Figura 2.2.

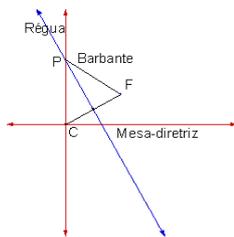


Figura 2.2: Simulação Computacional

Para obter a construção acima no computador usando um programa de GD, basta seguir os seguintes passos:

- (i) Comece construindo uma reta (esconda os pontos que a definem) e um ponto fora desta reta. Na simulação, esta reta estará representando a mesa e o ponto fora da reta, o foco da parábola.

- (ii) Construa um ponto sobre a reta.
- (iii) Construa, por este ponto, uma perpendicular a reta traçada em (i). Esta reta estará representando a régua que se desloca sobre a mesa.
- (iv) Para determinar o ponto onde a caneta, mantendo o barbante esticado, traça a curva à medida que a régua se desloca sobre a mesa, construa o segmento que une o ponto móvel, sobre a reta, ao foco.
- (v) Determine a mediatriz do segmento construído em (iv).
- (vi) Construa o ponto de interseção da mediatriz construída em (v) com a reta, que representa a régua. Este é o ponto que pertence à parábola.
- (vii) Para obter a parábola, construa o lugar geométrico dos pontos obtidos em (vi), quando a reta que representa a régua, se desloca sobre a mesa.

Esta construção aliada à congruência de triângulos pode ser usada, também, para deduzir propriedades de simetria da parábola. É fácil, conjecturar e demonstrar que uma parábola com foco F e diretriz r é simétrica em relação à reta s que, passando por F , é perpendicular a r . Para isso, basta observar que, se P' é a imagem espelhada de P , em relação à reta s , então $FP' = P'Q'$, onde por AB estamos denotando a medida do segmento \overline{AB} . Daí, podemos concluir que P' pertence à parábola dada. (Figura 2.3).

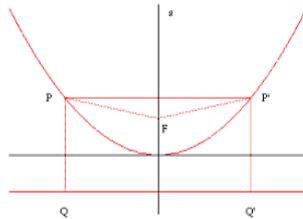


Figura 2.3: Simetria na Parábola

O vértice da parábola é então definido como o ponto V onde a parábola corta a reta s , dita seu eixo de simetria ou, simplesmente, eixo da parábola. Outra questão a ser explorada é a determinação do vértice como o ponto médio entre F e F' , onde F' é a projeção ortogonal do foco sobre a sua diretriz.

2.2.2 Explorando dobraduras: propriedade refletora

Outra construção interessante e que evidencia e torna natural a obtenção da propriedade refletora da parábola, é efetuada por meio de dobraduras em papel vegetal. Esta construção pode ser executada seguindo-se os passos a seguir:

- (i) Desenhe uma reta, horizontalmente numa folha de papel e marque, fora dessa reta, um ponto F .
- (ii) Selecione um ponto D sobre a reta, e dobre o papel de forma a fazer coincidir os pontos D e F . Trace sobre o papel a reta que coincide com a dobra. A Figura 2.4 ilustra a construção de uma dobra.
- (iii) Repita essa operação para diferentes escolhas do ponto D . Quando este procedimento tiver sido realizado um número suficiente de vezes, é possível observar que as dobras parecem tangenciar uma curva, conforme é ilustrado na Figura 2.5.

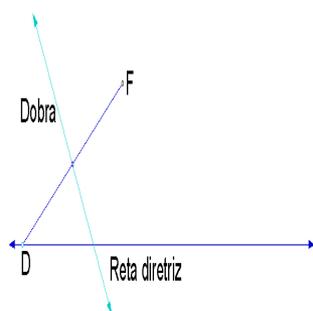


Figura 2.4: Obtendo uma dobra

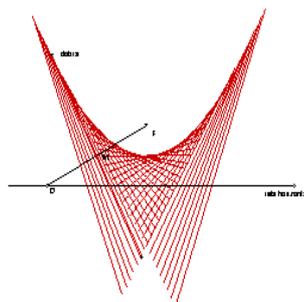


Figura 2.5: Simulação computacional

A curva obtida parece uma parábola. A questão que se coloca é provar que esta curva é realmente uma parábola. A simulação computacional desta construção permite que as tangentes sejam geradas rapidamente qualquer que seja a localização do ponto F , facilitando conjecturas e conclusões (Figura 2.5).

Na simulação computacional, após a obtenção de uma reta, de um ponto sobre esta reta e de outro ponto fora da reta, o primeiro desafio que aparece é o de como traçar a dobra. A conclusão desejada é a de que a dobra é a mediatriz do segmento de reta que liga os pontos D e F .

Experimentando diversas localizações para o ponto F , a conjectura que surge naturalmente é que a curva é uma parábola com foco no ponto F e diretriz coincidente com a borda do papel. Para obter a curva e provar as conjecturas formuladas, surge o segundo desafio: determinar o ponto P , de interseção da tangente com a curva.

A partir da construção por dobraduras, é fácil concluir que o ponto P está sobre uma dobra, resultante da superposição de um ponto D da reta horizontal, sobre o ponto F . Repare que o processo de dobrar define, por sobreposição, dois triângulos retângulos congruentes de tal maneira que a cada ponto da dobra corresponde um único ponto da reta horizontal. Esta correspondência é determinada pela projeção ortogonal dos pontos da dobra sobre a reta horizontal. Dessa maneira, o ponto D é o pé da perpendicular à reta horizontal passando por P . Como ilustra a Figura 2.6, por construção, os triângulos $\triangle DPN$ e $\triangle PNF$ são retângulos e congruentes.

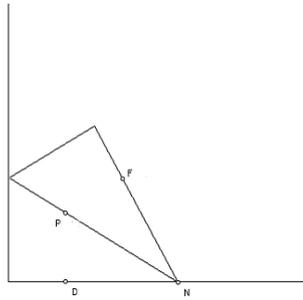


Figura 2.6: Triângulos congruentes

Dessa maneira, o ponto P é determinado pela interseção da dobra (tangente) com a perpendicular à reta diretriz que passa por D . A partir dessa conclusão, é possível construir este ponto na simulação computacional e, para ilustrar esta conjectura, fazer este ponto deixar rastro, à medida que o ponto D se desloca sobre a reta.

A prova de que a curva é realmente uma parábola segue, imediatamente, da congruência dos triângulos $\triangle PDM$ e $\triangle PMF$. Esse experimento com dobraduras ilustra uma outra propriedade importante das parábolas que passamos a estudar.

A reta formada por cada uma das dobras é tangente à parábola. Como a reta \overleftrightarrow{RQ} foi obtida superpondo-se o ponto D sobre o ponto F , os ângulos \widehat{FPQ} e \widehat{DPQ} são congruentes. Os ângulos \widehat{DPQ} e \widehat{EPQ} são opostos pelo vértice e, portanto, congruentes. Dessa maneira, concluímos que os ângulos

$E\hat{P}R$ e $F\hat{P}Q$ têm a mesma medida (Figura 2.7).

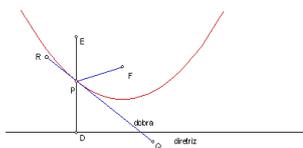


Figura 2.7: Propriedade refletora da parábola

Lembrando que, de acordo com a Lei da Reflexão, raios de luz e outros fenômenos ondulatórios ao encontrar um obstáculo são refletidos de forma a manter o ângulo de incidência igual ao de reflexão, se imaginarmos a parábola como um espelho, qualquer raio de luz que viaje ao longo da reta EP , ao bater no espelho, será refletido na direção de PF como mostra a Figura 2.7. De um modo geral, os raios de luz paralelos ao eixo de simetria da parábola são por ela refletidos de tal maneira que o raio refletido passa pelo seu foco. Reciprocamente, raios de luz que partem do foco de uma parábola são por ela refletidos paralelamente ao seu eixo de simetria (Figura 2.8).

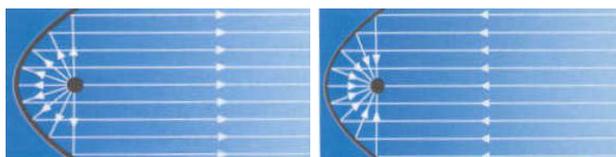


Figura 2.8: Propriedade refletora da parábola

A palavra foco vem do grego e significa fogo ou ponto de fogo. Esta propriedade já era conhecida pelos gregos na antiguidade e, segundo a lenda, foi usada por Arquimedes para queimar os navios da frota romana durante o cerco de Siracusa. Ele construiu uma superfície espelhada cujas seções retas tinham a forma de parábolas (parabolóide) e usou este espelho para captar os raios de sol e concentrá-los em um único ponto, o foco da parábola, localizado sobre os navios da frota romana e dessa maneira conseguiu incendiá-los (Figuras 2.9 e 2.10).

Atualmente, esta propriedade é usada na construção de antenas parabólicas, faróis de automóveis, incineradores, microfones, telescópios, dentre outros artefatos. As Figuras 2.11 e 2.12 ilustram o funcionamento de um telescópio.

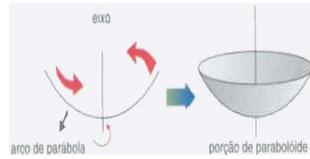


Figura 2.9: Construção de uma superfície parabólica



Figura 2.10: Destruição da esquadra romana

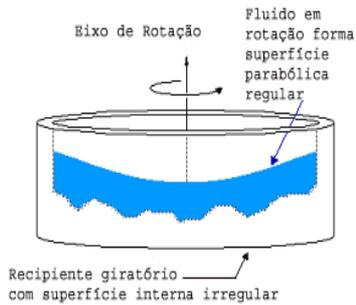


Figura 2.11: Construção de um espelho parabólico

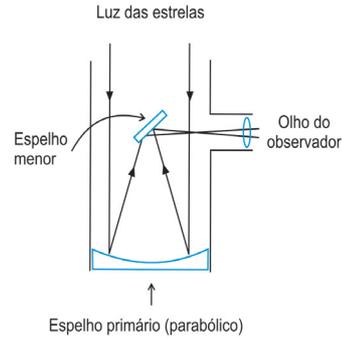


Figura 2.12: Esquema de um telescópio

Parábolas aparecem, freqüentemente na natureza. Quando uma bola é lançada numa direção não vertical, a curva descrita pela bola é um arco de parábola. O mesmo acontece com a água caindo em um precipício ou com as fagulhas de um foguete. Uma viga de madeira se deforma segundo uma parábola, quando forçada por cargas pesadas.

2.3 Equação da Parábola: Integrando Álgebra e Geometria

Usando-se um conveniente sistema de coordenadas e a fórmula de distância entre dois pontos, a equação cartesiana da parábola pode ser determinada sem maiores dificuldades. Para isso, façamos o eixo y passar pelo ponto F e escolhamos a origem como o ponto médio entre F e o pé da perpendicular à reta horizontal, passando por F (Figura 2.13).

Dessa maneira, o ponto F tem coordenadas $(0, p)$ e a reta horizontal tem

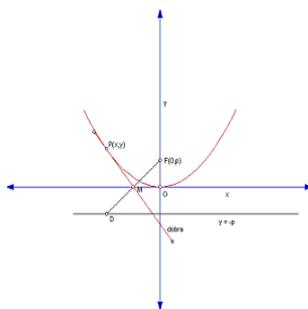


Figura 2.13: Estabelecendo um sistema de coordenadas

equação $y = -p$, para algum número positivo p .

Considere um ponto P de coordenadas (x, y) sobre a curva. Dessa maneira, o ponto D , pé da perpendicular à reta horizontal passando por P , tem coordenadas $(x, -p)$. Assim, pela definição de parábola, os segmentos \overline{PF} e \overline{PD} são congruentes, isto é, têm a mesma medida.

Usando a fórmula da distância entre dois pontos e lembrando que as coordenadas dos pontos P , F e D são, respectivamente, (x, y) , $(0, p)$ e $(x, -p)$, esta última afirmação resulta na equação:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(y + p)^2}$$

Simplificando esta equação, obtemos $y = \frac{x^2}{4p}$.

Assim, se o foco de uma parábola é colocado sobre o eixo y e se a diretriz r é paralela ao eixo x e localizada a p unidades abaixo dele, a parábola resultante se representa como na figura e sua equação é dada por $y = \frac{x^2}{4p}$.

De um modo geral, toda equação da forma

$$y = a(x - h)^2 + k$$

ou

$$x = a(y - h)^2 + k$$

descreve uma parábola.

Agora é com você:

- (a) Deduza a equação da parábola, no caso particular em que o foco é o ponto $(0, 1)$ e a diretriz, a reta $y = -1$ e trace o seu gráfico.

(b) Mostre que a parábola de foco em $(h, k + p)$ e tendo como diretriz a reta $y = k - p$ tem como equação $y = \frac{(x - h)^2}{4p} + k$.

(c) Qual é o foco e a diretriz da parábola de equação $x = a(y - h)^2 + k$?

Parábolas podem ter concavidades para cima, para a direita, para baixo e para a esquerda. As figuras 2.14, 2.15, 2.16 e 2.17 ilustram essas situações. Em cada caso, o vértice está na origem do sistema de coordenadas e a distância do vértice até o foco é p . As equações correspondentes podem ser determinadas, como fizemos nos exemplos anteriores, pela propriedade geométrica que define a parábola.

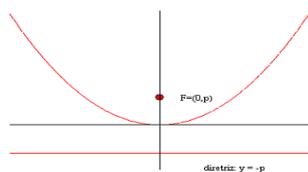


Figura 2.14: Parábola de equação $x^2 = 4py$

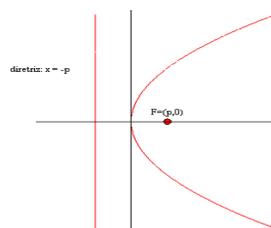


Figura 2.15: Parábola de equação $y^2 = 4px$

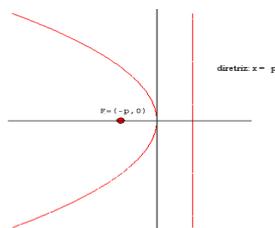


Figura 2.16: Parábola de equação $y^2 = -4px$

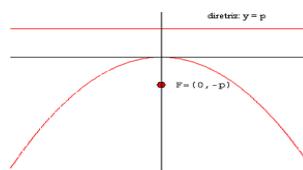


Figura 2.17: Parábola de equação $x^2 = -4py$

As equações para as parábolas acima, foram deduzidas levando-se em conta que o vértice de cada uma delas, coincidia com a origem do sistema de coordenadas e o eixo de simetria, com um dos eixos coordenados. Essa posição, muito particular, em relação aos eixos coordenados permitiu obter a equação da parábola na forma $Ax + By^2 = 0$ (foco sobre o eixo x) ou na forma $Ax^2 + By = 0$ (foco sobre o eixo y). Os sinais de A e B determinam

se a parábola está voltada para a direita ou para esquerda (primeiro caso), para cima ou para baixo (segundo caso).

Por outro lado, se uma parábola tem um eixo de simetria que é horizontal ou vertical, então uma translação dos eixos coordenados fará com que o seu vértice coincida com a origem de um “novo” sistema de coordenadas.

Por exemplo, se a parábola com concavidade para a direita, mostrada na Figura 2.18, tem seu vértice no ponto (h, k) com relação ao “antigo” sistema de coordenadas xy então sua equação em relação ao “novo” sistema de coordenadas XY , onde $X = x - h$ e $Y = y - k$, será $Y^2 = 4pX$.

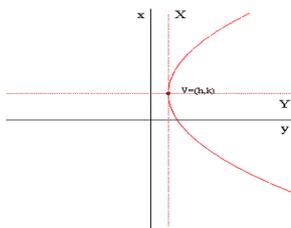


Figura 2.18: Estabelecendo um sistema de coordenadas

Como $X = x - h$ e $Y = y - k$ a equação dessa parábola em relação ao “antigo” sistema de coordenadas xy é $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.

Exemplo 2.1. Localizando o foco e a diretriz de uma parábola conhecida sua equação.

Solução: A Figura 2.19 mostra a parábola de equação $x = 0,1(y - 1)^2 - 2$. Seu vértice é o ponto $(-2, 1)$. Como o termo quadrático aparece na variável y , que tem coeficiente positivo, o gráfico desta parábola se abre para a direita. Para localizar o seu foco e diretriz, vamos primeiro calcular o valor de p . Como $p = \frac{1}{4a}$, neste exemplo temos que $p = 2,5$. O foco da parábola é o ponto localizado a 2,5 unidades à direita do seu vértice, isto é, é o ponto de coordenadas $(0,5, 1)$. A diretriz é a reta vertical a 2,5 unidades à esquerda do seu vértice, isto é, a reta de equação $x = -4,5$

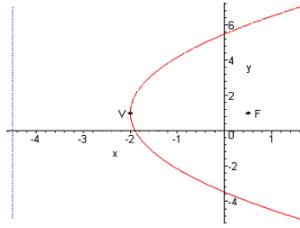


Figura 2.19: Localizando vértice e diretriz de uma parábola

2.4 O mundo ao nosso redor

2.4.1 Antenas Parabólicas

Até há bem pouco tempo, a recepção dos sinais de televisão era um grande problema em regiões afastadas dos grandes centros. Por isso, nos anos 80, muitas pessoas decidiram adquirir uma antena parabólica. Estas antenas, cujas seções transversais são parábolas, melhoram a recepção de televisão, pois, como já vimos, recebem os sinais transmitidos por satélites e os concentra por meio de um receptor localizado no seu foco.

Por causa do alto custo de aquisição de uma antena deste tipo, um misto de fazendeiro-matemático-engenheiro resolveu construir sua própria antena. Ele descobriu que o poder de concentração de uma antena deste tipo é proporcional ao quadrado do diâmetro de sua borda, por isso ele resolveu usar todo o seu jardim dos fundos para construir uma antena com um diâmetro de 6 metros.

Para minimizar a quantidade de material necessário à construção, decidiu também fazer a antena o mais rasa (plana) possível. No entanto, havia um problema, nesse caso: quanto mais plana a antena mais longe do vértice o receptor deveria ser colocado.

Agora é com você:

- (a) Para antenas com o mesmo diâmetro, explique porque o receptor para uma antena rasa deve estar mais afastado do vértice do que o receptor para uma antena com uma profundidade maior.
- (b) O nosso engenheiro-matemático amador gostaria que o receptor estivesse somente a 1,80 metros do vértice da sua antena. Quão profunda esta antena deveria ser? (Considerando-se um corte transversal

da antena, a profundidade h é a medida, tomada verticalmente, do vértice até a reta que contém os pontos da sua borda. Veja a Figura.)

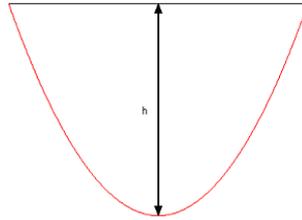


Figura 2.20: Seção transversal da antena

2.4.2 Faróis de automóveis

Imagine que você é um engenheiro empregado numa Montadora de Automóveis envolvido num projeto para um novo modelo de carro esporte. A sua tarefa é projetar os faróis. Você forneceu à unidade envolvida na fabricação do protótipo as especificações mostradas nas Figuras a seguir.

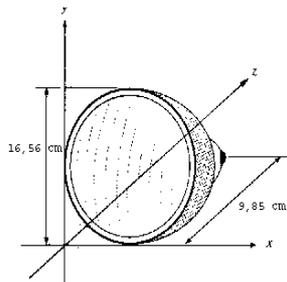


Figura 2.21: Esquema do farol

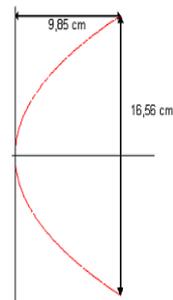


Figura 2.22: Seção transversal

Agora é com você

- Explique por que o farol funcionará mais eficientemente se a seção reta da superfície refletora tiver a forma de uma parábola.
- Ache a equação da seção reta do farol mostrado na Figura 2.21.

- (c) Nas discriminações acima, está faltando a localização da lâmpada. Forneça a sua equipe esta localização.

(Na realidade, faróis de automóveis são projetados contendo dois bulbos luminosos localizados, respectivamente, um pouco acima e um pouco abaixo do foco da parábola que determina sua secção transversal. Desse modo, quando comutamos o botão de farol alto para o de luz baixa, desligamos um dos bulbos e acendemos o outro e vice-versa, de forma a que o feixe de raios de luz ao atingir a superfície parabólica se reflita formando ângulos positivos (para cima, na figura) ou negativos (para baixo, na figura) em relação ao eixo da parábola.)

2.5 Problemas Propostos

- Deduza a equação da parábola com foco $F = (\alpha, 0)$, com o eixo x perpendicular à diretriz e o eixo y coincidindo com a mediatriz do segmento $\overline{FF'}$, onde F' é a projeção ortogonal de F sobre a diretriz.
 - Em que semi-plano está contida esta parábola?
 - Qual o seu eixo de simetria?
 - Qual o seu vértice?
 - Qual a equação da reta diretriz? (Em todos os itens, estude os casos $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$.)
 - Em que condições esta equação define y como função de x ?
- Nas mesmas condições do Problema 1, suponha agora que o foco da parábola seja o ponto $F = (0, \alpha)$. Deduza a equação da parábola nesse caso.
 - Em que semi-plano está contida esta parábola?
 - Qual o seu eixo de simetria?
 - Qual o seu vértice?
 - Qual a equação da reta diretriz? (Em todos os itens, estude os casos $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$.)
 - Em que condições esta equação define y como função de x ?
- Em cada um dos itens abaixo, determine as coordenadas do vértice e do foco da parábola. Determine também a equação da diretriz e esboce o gráfico da parábola.

- (a) $(y - 2)^2 = 8(x + 3)$
- (b) $(y + 1)^2 = -4(x - 1)$
- (c) $(x + 1)^2 = -8y$
- (d) $y^2 - 8y - 6x - 2 = 0$
- (e) $x^2 - 6x - 8y + 1 = 0$

4. Sejam A , B e C constantes com $A > 0$.

- (a) Mostre que $y = Ax^2 + Bx + C$ é a equação de uma parábola com eixo de simetria vertical e concavidade para cima.
- (b) Determine p e as coordenadas do vértice V e do foco F .
- (c) Encontre condições para que o gráfico dessa parábola intercepte o eixo x .
- (d) O que muda nesse exercício se $A < 0$?

5. Cometas são corpos celestes que podem ser visitantes temporários ou membros permanentes de um sistema solar. Eles podem, ou não, gravitar permanentemente em torno do sol, dependendo de sua velocidade. Se a velocidade do cometa for igual a velocidade de escape (cerca de 42 km/s), sua órbita se torna parabólica. O cometa Zagon segue uma órbita parabólica, com o planeta Zyfor no foco da parábola. Zagon está a 95 milhões de quilômetros de Zyfor quando a reta que liga Zyfor ao cometa é perpendicular ao eixo da parábola. Qual a distância mínima do cometa ao planeta?

Capítulo 3

Elipses

3.1 Uma visão geométrica

3.1.1 Construindo a curva com lápis, barbante e tachinha

No caso de elipses, é bastante conhecida a construção com barbante, lápis e tachinha (Figura 3.1). Para realizar esta construção será necessário um pedaço de madeira, uma folha de papel A4, duas tachinhas, um pedaço de barbante com cerca de 20cm de comprimento e um lápis.

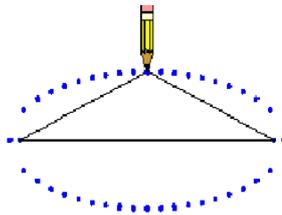


Figura 3.1: Traçando a curva

Use as tachinhas para prender o papel na madeira, afastando-os um do outro mais ou menos 6cm . Amarre o barbante nas tachinhas deixando mais ou menos 15cm entre os nós. Se um lápis for inserido no laço de corda assim construído e for deslocado de um lado para outro de modo a manter o fio sempre esticado, uma curva fechada será desenhada no papel. Chamaremos de F_1 e F_2 os pontos onde estão localizados as tachinhas.

Esta curva é chamada de elipse. De fato, a maneira como construímos a curva nos fornece uma definição geométrica da palavra elipse.

Definição 3.1. *Uma elipse é o lugar geométrico dos pontos P , do plano, cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante. Os pontos fixos são chamados pontos focais ou focos da elipse. O ponto médio do segmento de reta $\overline{F_1F_2}$ é chamado centro da elipse. A distância entre os pontos focais é designada, em geral, por $2c$ e a distância fixa $PF_1 + PF_2$, por $2a$, onde por AB estamos denotando a medida do segmento \overline{AB} .*

Elipses aparecem naturalmente na natureza. Em 1609, o astrônomo alemão Johann Kepler, após coletar dados referentes a treze anos de observações relativas aos movimentos do planeta Marte, estabeleceu que cada planeta se move sobre uma elipse com o sol em um dos focos.

Usando somente a definição geométrica e congruência de triângulos, é fácil provar que a elipse é simétrica em relação à reta que passa pelos focos. Para isso, precisamos mostrar que se P é um ponto qualquer da elipse, sua imagem espelhada em relação a reta que passa por F_1 e F_2 , que designaremos por P' , também pertence à elipse, como indica a Figura 3.2.

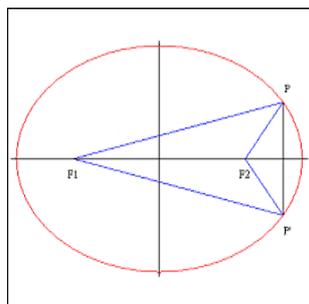


Figura 3.2: Simetrias na elipse

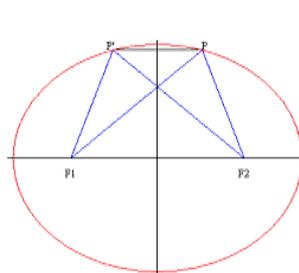


Figura 3.3: Simetrias na elipse

De fato, como a reta que passa pelos focos é mediatriz do segmento $\overline{PP'}$ (por quê?), usando congruência de triângulos, podemos concluir que os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{P'F_1}$ têm a mesma medida. A mesma conclusão vale para os segmentos $\overline{PF_2}$ e $\overline{P'F_2}$. Como P pertence à elipse temos que $PF_1 + PF_2 = 2a$, logo $P'F_1 + P'F_2 = 2a$ e daí, usando a definição geométrica de elipse, concluímos que o ponto P' também pertence à elipse.

Uma elipse também é simétrica em relação à mediatriz do segmento de reta que passa pelos seus focos.

Agora é com você

- Observe a Figura 3.3 e, usando novamente congruência de triângulos e a definição geométrica de elipse, prove a afirmação anterior.

É fácil concluir, também, que a elipse é simétrica em relação ao seu centro. Para isso, basta observar que se uma curva é simétrica em relação a duas retas perpendiculares, é simétrica em relação ao seu ponto de interseção. (Observe a Figura 3.4.)

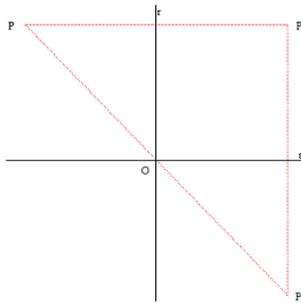


Figura 3.4: Simetria central

Agora é com você

- Demonstre a afirmação anterior e use-a para concluir que uma elipse é simétrica em relação ao seu centro.

Os quatro pontos onde uma elipse corta os seus dois eixos de simetria são chamados *vértices* da elipse. O segmento de reta entre os dois vértices que contém os dois focos chama-se *eixo maior* da elipse, enquanto que o segmento de reta entre os dois vértices restantes chama-se *eixo menor*.

Agora é com você

- Prove, geometricamente, que o comprimento do eixo maior de uma elipse mede $2a$.

Numa elipse, os números a e c representam, respectivamente, o comprimento do semi-eixo maior e da semi-distância focal. Assim, na Figura 3.5, temos que o segmento V_1V_2 (eixo maior) mede $2a$, o segmento V_3V_4 é o eixo menor e a distância focal F_1F_2 mede $2c$.

A seguir vamos obter uma relação entre o comprimento do semi-eixo maior, do semi-eixo menor e do segmento que determina a semi-distância focal em uma elipse.

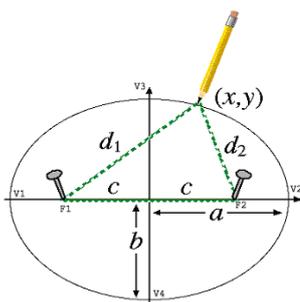


Figura 3.5: Elementos da elipse

Como V_1 e V_3 são pontos da elipse, temos que $V_1F_1 + V_1F_2 = V_3F_1 + V_3F_2$. Pela simetria da elipse temos que $V_3F_1 = V_3F_2$ e $V_1F_2 = V_2F_1$ (Figura 3.6).

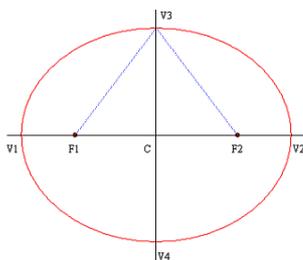


Figura 3.6: Vértices e simetria

Deste modo, a equação anterior pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$2(V_3F_2) = V_1F_1 + V_1F_2 = V_1F_1 + V_2F_1 = V_1V_2 = 2a$$

Da equação acima, concluímos que $V_3F_2 = a$. Como o triângulo ΔV_3CF_2 é retângulo, temos que $a^2 = (CV_3)^2 + c^2$. Isto é, o comprimento do semi-eixo menor é dado por $a^2 - c^2$ que denotamos por b^2 (Figura 3.7).

Como $c^2 > 0$, a última equação mostra que $b^2 < a^2$, de forma que $b < a$, ou ainda $2b < 2a$, ou seja, o eixo maior de uma elipse é sempre mais longo que o seu eixo menor e os focos estão localizados a c unidades de cada um dos lados do centro, ao longo do seu eixo maior.

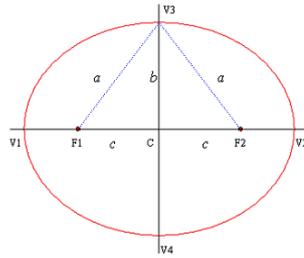


Figura 3.7: relação entre a , b e c na elipse

3.1.2 Construção por dobraduras

Como foi feito no caso de parábolas, vamos, agora, construir elipses por meio de dobraduras. Esta construção é menos conhecida mas permite entender, geometricamente, a propriedade refletora característica de elipses.

Para esta atividade será necessário papel vegetal, tesoura e compasso. Inicia-se marcando um ponto C mais ou menos no centro da folha de papel. Com o auxílio do compasso, desenha-se uma circunferência de pelo menos 16cm de raio, com centro em C e, a seguir, recorta-se a circunferência desenhada. Marca-se outro ponto qualquer dentro do círculo. Vamos chamar este ponto de F . Escolhe-se, então, um ponto D sobre a circunferência e dobra-se o círculo de tal maneira que o ponto D coincida com o ponto F . Marca-se a dobra, desdobra-se o papel e repete-se essa operação para diferentes escolhas do ponto D (Figura 3.8).

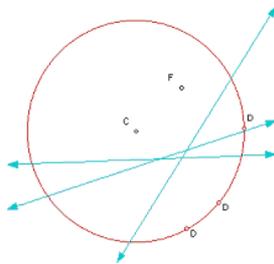


Figura 3.8: Marcando as dobras

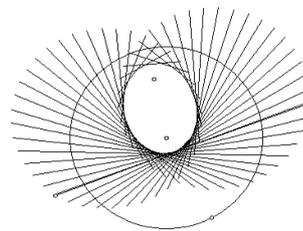


Figura 3.9: Simulação computacional

Quando esta operação tiver sido realizada um grande número de vezes, poderá ser observado que as dobras parecem tangenciar uma curva que

parece uma elipse. Mas será que esta curva é mesmo uma elipse?

A simulação computacional deste modelo permite não só construir rapidamente diversas elipses, testando-se várias localizações para o ponto F , como conjecturar (e provar!) que a curva obtida desta maneira é realmente uma elipse. Veja (Figura 3.9).

Como cada dobra foi obtida de forma a fazer o ponto D coincidir com o ponto F , é fácil concluir que a dobra assim obtida é a mediatriz do segmento de reta determinado pelos pontos F e D . Como no caso da parábola, a questão que se coloca a seguir é como determinar o ponto sobre essa mediatriz que pertence à curva envolvida pelas tangentes.

Usando-se os recursos disponíveis nos programas de G.D. e depois de algumas tentativas e comprovações visuais é possível conjecturar (e depois provar!) que o ponto B sobre a tangente, que pertence à curva, é o ponto obtido pela interseção desta tangente com o raio \overline{CD} do círculo (Figura 3.10).

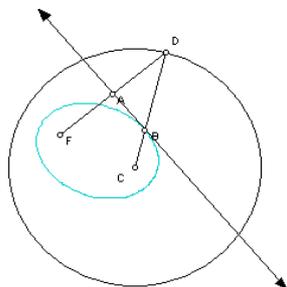


Figura 3.10: Descobrimo o ponto de tangência

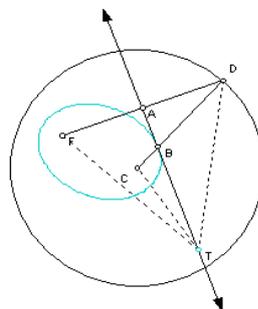


Figura 3.11: Mostrando que a curva é uma elipse

Para provar que a curva traçada é de fato é uma elipse, precisamos mostrar que a soma $CB + BF$ é constante. De fato, como a reta \overleftrightarrow{BA} é a mediatriz do segmento de reta \overline{FD} , os triângulos $\triangle FBA$ e $\triangle DAB$ são congruentes. Assim, temos que $BF = BD$. Então, $CB + BF = CB + BD = \overline{CD}$, o que prova que B está sobre uma elipse de focos em C e F , pois \overline{CD} é o raio da circunferência que é constante, qualquer que seja o ponto D da circunferência.

Além disso, para outro ponto qualquer T , sobre a dobra \overleftrightarrow{RS} temos que $TC + TF = TC + TD > \overline{CD}$ (pois o lado \overline{CD} do triângulo $\triangle CTD$ é menor do que a soma dos outros dois, como mostra a Figura 3.11). Assim, T não está na elipse. Isto é, o único ponto da dobra que pertence à elipse

é, de fato, B . Este fato prova também que a dobra \overleftrightarrow{RS} é realmente tangente à elipse em B e explica porque as dobras envolvem a elipse. Repare ainda que o comprimento do eixo maior desta elipse ($2a$) é igual ao raio da circunferência.

3.1.3 Propriedade Refletora da Elipse

A construção por dobraduras permite demonstrar a propriedade refletora das elipses. De fato, como os triângulos $\triangle FBA$ e $\triangle ABD$ são congruentes e os ângulos \widehat{ABD} e \widehat{CBT} opostos pelo vértice, esta construção nos permite concluir que os ângulos \widehat{CBT} e \widehat{FBA} são congruentes.

Se imaginarmos a elipse como um espelho, um raio de luz viajando na direção \overleftrightarrow{CB} , toca o espelho em B e é refletido segundo a reta \overleftrightarrow{BF} , na direção de F e vice-versa. Isto é, um raio de luz emitido de um dos focos de uma elipse, ao bater na curva, é refletido e, seguindo o caminho da corda no nosso primeiro experimento, atingirá o outro foco. Mais ainda, como $BC + BF = 2a$, todos os raios emitidos do ponto B , não importa em que direção sigam, chegarão ao mesmo tempo em F porque eles percorrem distâncias iguais (Figura 3.12).

Esta propriedade de reflexão das elipses é usada para bombardear pedras nos rins, sem necessidade de cirurgia para extraí-las (Veja a Seção 3.3). Usando esta propriedade, é possível também construir salas do suspiro, existentes em muitos museus da Ciência espalhados pelo mundo: uma pessoa que esteja em um dos focos da elipse ouvirá qualquer som emitido por outra localizada no outro foco, mesmo que este som seja um sussurro e que as duas pessoas estejam muito afastadas ou de costas uma para a outra (Figura 3.12).

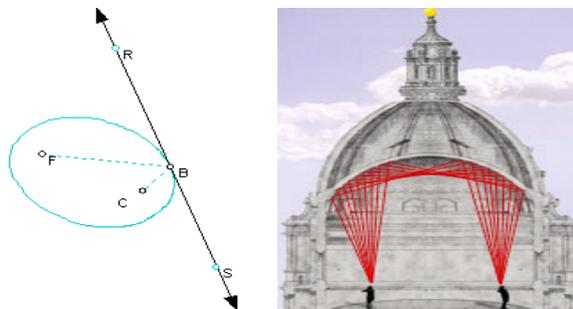


Figura 3.12: Propriedade refletora da elipse

3.1.4 Excentricidade: explorando o modelo computacional

A simulação em computador permite observar elipses com diferentes distâncias focais. Explorações visando a responder às indagações:

- Como se altera a forma de uma elipse quando os focos estão mais próximos do seu centro?
- Como se altera a forma de uma elipse quando os focos se aproximam dos vértices?
- Com que curva se parece a elipse quando os dois focos coincidem com o seu centro?

podem conduzir, naturalmente, à conclusão que a circunferência é um caso especial de elipse. Também, é possível observar que uma elipse cujos focos estão próximos dos vértices tem uma forma muito “achatada” ou “alongada” enquanto que outra, cujos focos estão próximos do centro, é mais “redondinha”. O grau de alongamento de uma elipse é definido pelo que chamamos de excentricidade da elipse. A excentricidade de uma elipse é denotada por e , podendo ser calculada pela razão $\frac{c}{a}$.

Questões adicionais a serem exploradas:

- Qual a excentricidade de uma circunferência?
- Por que a excentricidade de uma elipse muito achatada deve estar próxima de 1?
- É possível esta excentricidade ser igual a 1?

A conclusão de que para qualquer elipse temos que $0 \leq e < 1$ deve ser obtida, após estas explorações e conjecturas.

3.2 A equação da Elipse: Integrando Álgebra e Geometria

Mais uma vez, usando-se um conveniente sistemas de coordenadas cartesianas, como sugerido na Figura 3.5, é fácil obter uma equação para a elipse. De fato, seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da elipse e F_1 e F_2 os seus focos. Então, pela definição da curva temos que $PF_1 + PF_2 = 2a$. Usando esta

condição e a fórmula de distância entre dois pontos do plano obtém-se que x e y devem satisfazer à equação:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Passando uma das parcelas do primeiro termo da equação para o segundo e elevando-se ao quadrado ambos os termos, é fácil concluir que a equação acima pode ser reduzida a:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Dividindo-se ambos os termos da equação anterior por $a^2(a^2 - c^2)$ obtém-se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Como foi visto na seção anterior, $c < a$ (condição necessária para a existência da elipse), o que implica que $a^2 - c^2 > 0$ e, como $a^2 - c^2 = b^2$ obtém-se a equação da elipse na sua forma padrão:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

onde a é o comprimento de seu semi-eixo maior, b é o comprimento de seu semi-eixo menor, c é a semi-distância focal e vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$. Além disso, toda equação desta forma descreve uma elipse de acordo com a nossa definição geométrica. **Agora é com você:**

- (a) Mostre que a equação de uma elipse com centro no ponto (h, k) e focos $F_1 = (h - c, k)$ e $F_2 = (h + c, k)$ é dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

onde $b^2 = a^2 - c^2$.

Sugestão: Use a fórmula da distância entre dois pontos do plano e o fato que $PF_1 + PF_2 = 2a$. Repare que, neste caso, os focos da elipse, que são equidistantes do seu centro, e estão localizados sobre a reta $y = k$, que é paralela ao eixo x .

- (b) Deduza a equação da elipse cujo centro está localizado no ponto de coordenadas (h, k) e focos nos pontos $(h, k - c)$ e $(h, k + c)$. Neste caso, os focos da elipse estão sobre a reta $x = h$, paralela ao eixo y .

3.3 O Mundo ao Nosso Redor

3.3.1 O segredo do salão oval

O grande salão oval estava cheio até transbordar de espões, contra-espões e contra-contra-espões. Contudo, o primeiro-ministro tinha absoluta necessidade de comunicar imediatamente a Sua Majestade o grande segredo de que acabara de se inteirar. Como quem não quer nada, ao aproximar-se do Rei, disse-lhe em alto e bom som: “Majestade, parece que os focos de rebeldes reclamam a nossa atenção”. Todos os espões se dirigiram às paredes do salão para retirar dos forros das suas capas as chaves das mensagens cifradas. Seguiram-nos, naturalmente com grande sigilo, os contra-espões e, a estes, os contra-contra-espões. O rei, com passo tranqüilo, mas decidido, dirigiu-se a um lado do salão oval. O ministro, por sua vez, com o mesmo passo decidido, mas também tranqüilo, dirigiu-se na direção contrária, ao outro lado do salão oval. Os espões observaram-nos de soslaio enquanto consultavam nos seus livros de códigos as palavras-chaves “parece”, “focos”, “rebeldes” e “exigem”. Os contra-espões estavam atentos aos espões e os contra-contra-espões não perdiam de vista nem por um momento os seus contra-espões correspondentes. O rei parou por um momento e o ministro, respeitoso, parou também. Estavam a mais de 20 metros de distância quando um espão mais astuto observou e anotou no seu livro secreto: “Este ministro ou fala sozinho ou está rezando”. Mas ninguém pôde ouvir nada do que o Ministro balbuciava. Só o Rei pôde ouvir claramente a mensagem do Ministro: “Majestade, com todo o meu respeito, a sua braguilha está totalmente aberta”.

- Você é capaz de explicar como a comunicação entre o Ministro e o Rei foi possível ou em que consiste, fundamentalmente, o mistério do salão oval?

3.3.2 Ultrassom

Se uma elipse for girada no espaço tridimensional em torno de seu eixo maior, obtém-se uma superfície chamada *elipsóide*. Ondas luminosas ou sonoras emitidas de um dos focos serão refletidas pela superfície, passando pelo outro foco. Esta propriedade fornece aos médicos um procedimento (*litotripsia*) não invasivo, isto é, que não requer cirurgia, para a remoção de cálculos renais. O paciente é colocado em um aparelho em formato de um elipsóide de tal forma que o cálculo renal esteja posicionado em um de seus focos. Uma fonte de ondas sonoras de alta frequência (*ultrassom*) é colocada no outro foco. Todas as ondas sonoras emitidas pela fonte de alta frequência

convergem para o cálculo provocando vibrações que acabam por quebrá-lo em pedacinhos bem pequenos que devem ser expelidos, naturalmente e de modo indolor, na urina do paciente. A figura 3.13 ilustra o esquema do aparelho.

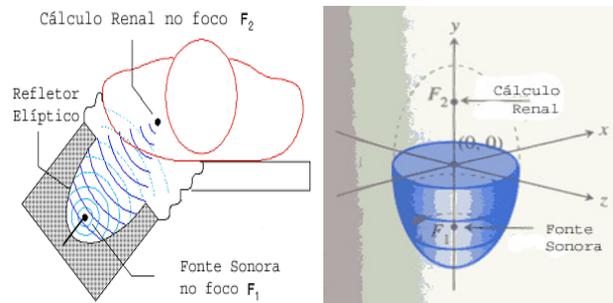


Figura 3.13: Esquema para litotripsia

- Se a seção transversal do aparelho, que é uma elipse, tem 3 metros de comprimento no seu eixo maior e 1 metro no seu eixo menor, onde deverão ser posicionados a fonte sonora e o rim do paciente?

3.4 Problemas propostos

1. Considere uma elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Esta equação representa uma elipse de centro na origem e eixos de simetria coincidentes com os eixos coordenados e é também chamada de forma canônica da equação de uma elipse.
 - (i) Qual o significado geométrico das constantes a e b ?
 - (ii) O que acontece quando $a = b$?
 - (iii) Quais as coordenadas dos seus vértices?
2. Usando as equações de translação $X = x - h$ e $Y = y - k$ é possível determinar facilmente a equação de uma elipse cujos eixos de simetria são paralelos aos eixos coordenados, mas cujo centro é o ponto (h, k) no sistema de coordenadas xy .

- (a) Deduza a equação da elipse com eixo maior horizontal, eixo menor vertical e centro no ponto (h, k) .
- (b) Esboce os gráficos das elipses abaixo.
Sugestão: Use uma translação de eixos adequada para reduzir cada equação à forma canônica.
- (i) $x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$
- (ii) $9x^2 + y^2 - 18x + 2y + 9 = 0$
- (iii) $6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 51 = 0$
- (iv) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$
- (c) Mostre que o gráfico de uma equação da forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0,$$

onde A e B são ambos positivos ou ambos negativos é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.

3. Satélites e artefatos espaciais viajam ao redor da terra em órbitas elípticas, com a Terra em um de seus focos. Para tais órbitas, as distâncias a e c são, geralmente, difíceis de determinar. É mais fácil medir as distâncias máxima e mínima, M e m respectivamente, do veículo espacial à Terra. Ache uma fórmula que expresse a excentricidade desta órbita como função das constantes M e m .
4. A fórmula encontrada no exercício anterior, pode ser usada para calcular a excentricidade das órbitas planetárias se M e m representam, respectivamente, as distâncias máxima e mínima do planeta ao sol, que se localiza num dos focos da órbita elíptica. Para o planeta Netuno, $M = 30,33$ e $m = 29,79$ onde as distâncias são medidas em unidades astronômicas. (Uma unidade astronômica é a distância média da Terra ao sol: cerca de 149,6 milhões de km .)
- (a) Calcule a excentricidade da órbita de Netuno.
- (b) Ache os valores de a e c para a órbita de Netuno.
- (c) Ache a equação da órbita de Netuno num sistema de coordenadas no qual o sol esteja localizado na origem, o eixo-maior da órbita, sobre o eixo x .
Sugestão: Considere o sol como o foco esquerdo da elipse em questão.
- (d) Repita o exercício para a órbita de Plutão. Neste caso, $M = 49,3$ e $m = 29,6$.

5. À exceção de pequenas perturbações, um satélite em órbita da Terra se move sobre uma elipse com o centro da Terra em um dos seus focos. Suponha que um satélite no perigeu (ponto mais próximo da Terra) esteja a $400km$ da superfície da Terra e no apogeu (ponto mais afastado do centro da Terra) esteja a $600km$ da superfície da Terra. Suponha que a Terra seja uma esfera de raio igual a $6371km$.
- Determine o semi-eixo menor da órbita elíptica descrita pelo satélite.

Capítulo 4

Hipérboles

4.1 Uma visão geométrica

4.1.1 Construindo e definindo a curva

No modelo por dobraduras, explorado para o caso de elipses, pode surgir a questão do que acontece quando o ponto F se localiza no exterior do círculo. O modelo computacional torna esta questão fácil de explorar e de responder. Clicando e arrastando o ponto F para o exterior do círculo e movendo-se o ponto A sobre a circunferência, como anteriormente, obtém-se a curva mostrada na Figura 4.1. (Este modelo pode ser construído por dobraduras em papel vegetal da mesma forma como foi feito no caso de elipses, dobrando-se, agora, um ponto F , marcado no exterior do círculo, de tal forma a fazê-lo coincidir com os pontos sobre a circunferência.)

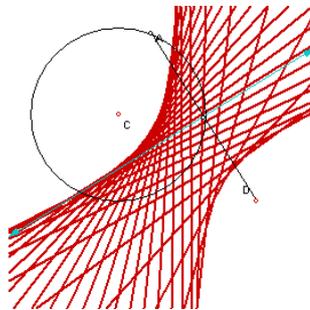


Figura 4.1: Construindo hipérboles por dobraduras

A questão que se coloca é determinar que tipo de curva é construída com esse modelo. Como nos casos anteriores, vamos tentar definir esta curva por meio de alguma propriedade geométrica. Na construção com papel vegetal, cada marca é obtida dobrando-se o papel de forma a fazer o ponto D , sobre a circunferência, coincidir com o ponto F , no exterior do círculo. Como no caso da elipse, é fácil concluir que a dobra assim obtida é a mediatriz do segmento de reta determinado pelos pontos F e D e que cada uma dessas dobras é tangente à curva traçada. (Figura 4.2)

Também como no caso da elipse, é preciso, antes de mais nada, determinar que ponto da dobra pertence à curva em questão. O modelo computacional respalda fortemente a conjectura que o ponto B de tangência é determinado pela interseção da dobra com o prolongamento do raio \overline{CD} (Figura 4.2).

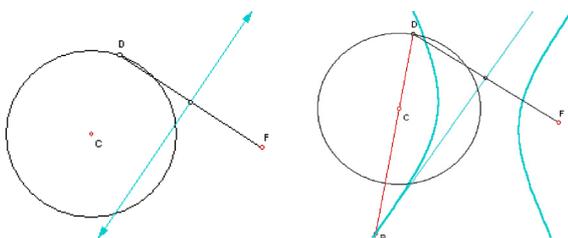


Figura 4.2: Entendendo a construção

A curva traçada pelo ponto B , determinado pela interseção da dobra com o prolongamento do raio \overline{CD} , à medida que o ponto D se move sobre a circunferência, tem uma propriedade muito especial.

De fato, como a reta \overleftrightarrow{BA} é a mediatriz do segmento de reta \overline{FD} , os triângulos $\triangle FBA$ e $\triangle DAB$ são congruentes. Desse modo, $BF = BD$. Assim, $BF - BC = BD - BC = CD$ que é igual a medida do raio da circunferência e , portanto, constante para todos os pontos D sobre a circunferência. Vamos chamar as curvas com esta propriedade de hipérboles.

Desse modo, podemos definir hipérbole como se segue.

Definição 4.1. *Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P , do plano, cujo valor absoluto da diferença entre as distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante e igual a um número positivo $2a$. Os pontos fixos são chamados de focos da hipérbole.*

Além disso, na construção por dobraduras, para outro ponto qualquer T , sobre a dobra \overleftrightarrow{BA} , temos que $TF - TC = TD - TC < CD$ (pois o lado \overline{CD}

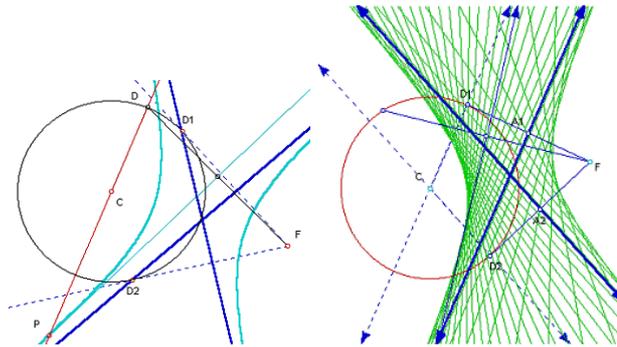


Figura 4.6: Hipérbole e suas assíntotas

construções são obtidas com régua e barbante, como no caso de parábolas (com a diferença que, para obter uma hipérbole, a régua deve deslizar sobre uma circunferência), ou com barbante e percevejo, como no caso de elipses.

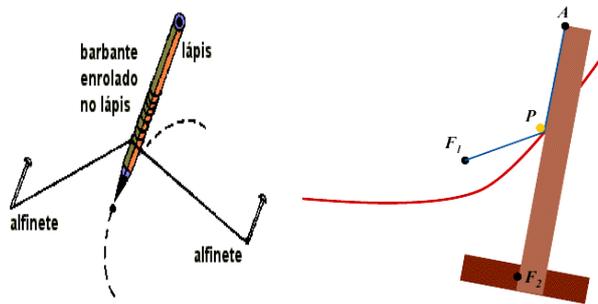


Figura 4.7: Construindo Hipérboles

Assim como elipses e parábolas, hipérboles aparecem com frequência na natureza. Um cometa que entra no sistema solar com mais energia do que a necessária para escapar da atração gravitacional do Sol descreve um ramo de uma hipérbole.

4.2 A equação da hipérbole: integrando Álgebra e Geometria

Como foi feito nos outros capítulos, vamos obter a equação cartesiana de uma hipérbole. Para isso, é conveniente definir um sistema de coordenadas apropriado, localizando os focos nos pontos F_1 , F_2 de coordenadas $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, como ilustrado na Figura 4.8. Observe, portanto, que os focos estão sobre o eixo x e equidistam da origem do sistema de coordenadas. Considere um ponto qualquer $P(x, y)$ sobre a hipérbole. Usando a definição de hipérbole, temos que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a,$$

onde por $d(P, F)$ estamos denotando a distância entre os pontos P e F .

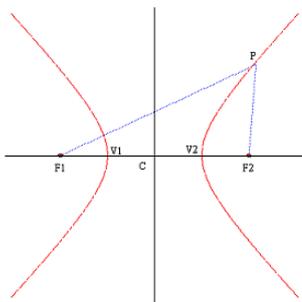


Figura 4.8: Estabelecendo um sistema de coordenadas

Usando a fórmula da distância entre dois pontos do plano e as coordenadas estabelecidas para os pontos P , F_1 e F_2 , obtemos que x e y devem satisfazer à equação:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

(Como, na figura 4.8 o ponto P está sempre mais perto de F_2 do que de F_1 , a distância de P a F_1 é maior do que a distância de P a F_2 . Daí vem que o primeiro membro da equação é positivo e, portanto, igual ao seu módulo.)

Simplificando esta equação, obtemos:

$$(a^2 - c^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Sabe-se que num triângulo qualquer, a diferença entre a medida de dois de seus lados é sempre menor que o outro lado. Assim, observando a Figura 4.8, vemos que

$$|d(P, F_2) - d(P, F_1)| < d(F_1, F_2)$$

(diferença entre a distância de P a F_2 e de P a F_1 , que é igual a $2a$, é menor do que a distância entre F_1 e F_2 que é igual a $2c$). Logo, $c > a$ e, portanto, $(c^2 - a^2) > 0$.

Dessa maneira podemos dividir ambos os termos da última equação por $(c^2 - a^2)$ para obter:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

que é a equação de uma hipérbole.

Chamando o número $c^2 - a^2$, que é positivo, de b^2 , obtemos a equação da hipérbole na sua forma canônica, isto é,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Da mesma maneira, se os focos da hipérbole estivessem localizados sobre o eixo y , a sua equação seria dada por:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Reciprocamente, toda equação desses dois tipos descreve uma hipérbole.

Por semelhança de triângulos, da mesma forma como foi feito para o caso de elipses, podemos mostrar que uma hipérbole é simétrica em relação à reta s que passa pelos seus focos e à reta r , perpendicular à s , que passa pelo ponto médio do segmento de reta $\overline{F_1F_2}$, dito *centro* da hipérbole.

Os dois pontos V_1 e V_2 , onde os dois ramos da hipérbole interceptam o eixo de simetria que passa pelos focos, chamam-se *vértices* da hipérbole. O segmento de reta que une os dois vértices de uma hipérbole chama-se *eixo transverso*. A distância entre os focos da hipérbole é dada por $2c$ e a distância entre seus vértices é $2a$ (para provar esta última afirmação, basta usar simetria e o fato que os vértices são pontos da hipérbole). Assim, a distância do centro a um dos vértices é a , enquanto que a distância do centro a um dos focos é c , como mostra a Figura 4.9.

Mais geralmente, podemos estabelecer os seguinte fatos:

- Toda equação na forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

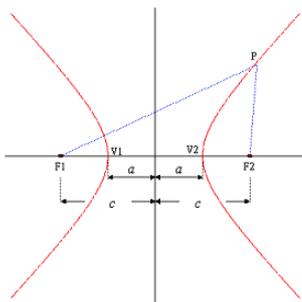


Figura 4.9: Elementos de uma hipérbole

ou

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

descreve uma hipérbole, com centro no ponto (h, k) . (Observe que a partir da translação $X = x - h$ e $Y = y - k$ as equações acima podem ser reduzidas à forma canônica.)

- $c^2 = a^2 + b^2$ ou, equivalentemente, $b^2 = c^2 - a^2$, os focos da hipérbole estão localizados a c unidades de cada lado do centro, ao longo da reta que suporta o seu eixo transverso.

Embora as assíntotas da hipérbole não sejam parte do seu gráfico, elas podem ser de grande ajuda para desenhá-la, conforme é ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo 4.1. *Traçando o gráfico de uma hipérbole.*

Para traçar o gráfico da hipérbole de equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

podemos começar traçando um retângulo, com centro na origem, altura igual a $2b$ e base horizontal igual a $2a$. As assíntotas são as duas diagonais desse retângulo (prove!).

Agora, basta lembrarmos que os vértices da hipérbole estão localizados nos pontos $(-a, 0)$ e $(a, 0)$, pontos médios dos lados esquerdo e direito do retângulo, e que, ao percorrer uma hipérbole, um ponto que se afasta dos vértices, se aproxima cada vez mais das suas assíntotas.

Esta construção é ilustrada na Figura 4.10, onde é traçado o gráfico da hipérbole de equação

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$

Nesse exemplo $a = 2$ e $b = 1$.

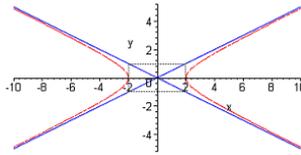


Figura 4.10: Gráfico da hipérbole de equação $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

Exemplo 4.2. Trace o gráfico da hipérbole de equação

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{16} = 1$$

Solução: O ponto $(2, 5)$ é o centro desta hipérbole. Seu eixo transversal está contido na reta $y = 5$. Para determinar as coordenadas dos focos, precisamos calcular o valor de c . Este valor pode ser encontrado a partir da equação $c^2 = a^2 + b^2$. Nesse exemplo, $c^2 = 16 + 9$, conseqüentemente $c = 5$.

Assim, os focos estão localizados a 5 unidades à esquerda e à direita do foco, nos pontos de coordenadas $(-3, 5)$ e $(7, 5)$, respectivamente. Como $a = 3$, os vértices estão a 3 unidades à direita e à esquerda do centro, nos pontos de coordenadas $(-1, 5)$ e $(5, 5)$.

As assíntotas são as retas

$$\frac{y-5}{4} = \frac{x-2}{3}$$

e

$$\frac{y-5}{4} = -\frac{x-2}{3}.$$

O gráfico desta hipérbole é mostrado na Figura 4.11.

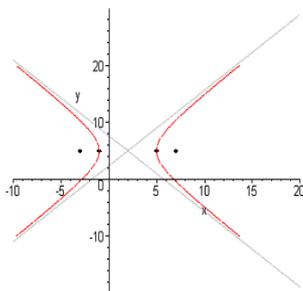


Figura 4.11: Gráfico da hipérbole de equação $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{16} = 1$

4.3 O mundo ao nosso redor

4.3.1 Navegação de grande curso

Numa viagem de longo curso, o sistema de rádio-navegação, que permite localizar a posição de um avião ou de um navio, é baseado na transmissão simultânea de um sinal de rádio por duas estações terrestres localizadas em pontos conhecidos. Estes sinais são captados pelo computador de bordo da aeronave ou embarcação que converte a diferença de tempo entre o recebimento dos sinais, na diferença entre as distâncias do avião ou navio até cada uma das estações terrestres. A partir desta informação, é possível localizar a posição da embarcação. Vamos entender como isto é possível?

Suponha que um transmissor localizado em um aeroporto transmita um sinal eletromagnético para uma aeronave. Este sinal se propaga com a velocidade da luz, cerca de 300 metros a cada microsegundo (1 microsegundo = $1/1000000$ de segundo). A aeronave recebe, também, um outro sinal transmitido de uma torre localizada a 50km do aeroporto. O avião ajusta o seu curso de maneira a sempre receber o sinal transmitido do aeroporto 100 microsegundos antes do recebimento do sinal transmitido pela torre. Isto significa que o avião está sempre 30km ($300\text{ metros} \times 100\text{ microsegundos} = 30000\text{ metros}$ ou 30km) mais perto do aeroporto do que da torre. **Agora**

é com você

Descubra que tipo de curva é determinada pela rota do avião.

4.3.2 Tremores de Terra

Quando ocorre um tremor de terra, sismografistas tentam imediatamente, localizar o seu epicentro ou ponto de origem. Isto é possível a partir de dados coletados por várias estações sismográficas. Vamos exemplificar este procedimento usando dados coletados durante o grande tremor de Terra (7.1 graus na escala Richter) que abalou São Francisco em 17 de outubro de 1989. Para nosso modelo vamos fazer as seguintes hipóteses:

- (a) O epicentro se localiza perto da superfície da Terra. (Na realidade, o epicentro se localiza a $19km$ abaixo da superfície terrestre.)
- (b) A onda de choque primária se propaga a partir do epicentro com uma velocidade constante de $25\frac{km}{s}$. (Na realidade a velocidade das ondas de choque variam de acordo com o tipo de rocha que atravessam.)
- (c) A porção da superfície terrestre onde estão localizadas as estações sismográficas pode ser modelada por uma porção de um plano coordenado. (Um modelo mais acurado requer uma geometria esférica.)

A primeira onda de choque no terremoto ocorrido em São Francisco foi detectada por um sismógrafo perto da cidade de Sacramento $22,3$ segundos depois das $15h4min$. A mesma onda foi detectada na cidade de Petaluma $22,8$ segundos depois das $15h4min$.

Baseados na diferença entre estes dois tempos, os cientistas podem afirmar que o epicentro deve estar localizado sobre um ramo de uma hipérbole com focos em Sacramento e em Petaluma. Para descrever a hipérbole por meio de uma equação, devemos estabelecer um sistema de coordenadas apropriado, como o que é mostrado na Figura 4.12. As unidades são dadas em quilômetros. Sacramento está na origem do sistema e Petaluma, a $110km$ a oeste, no ponto de coordenadas $(-110, 0)$.

Agora é com você

- (a) Para esta hipérbole, explique por que o valor de c é a metade da distância entre as posições dos dois sismógrafos e o valor de a é $12,5$ vezes a diferença entre os tempos de chegada dos sinais.
- (b) Ache a equação desta hipérbole, esboce o seu gráfico e identifique em qual dos seus ramos se localiza o epicentro do terremoto.
- (c) Descreva como é possível localizar precisamente o epicentro de um terremoto, usando-se os sinais recebidos por três sismógrafos.

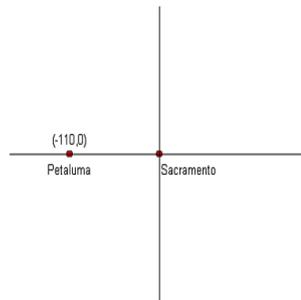


Figura 4.12: Estabelecendo um sistema de coordenadas

4.4 Problemas propostos

1. Determine as coordenadas do centro, dos focos e dos vértices da hipérbole $y^2 - 4x^2 - 8x - 4y - 4 = 0$. Determine também as equações das assíntotas e esboce o seu gráfico.
2. Dois microfones estão localizados nos pontos $(-c, 0)$ e $(c, 0)$. Uma explosão ocorre num ponto P , desconhecido, localizado à direita do eixo y . O som da explosão é detectado pelo microfone em $(c, 0)$ exatamente T segundos antes de ser detectado pelo microfone em $(-c, 0)$.

Supondo que o som atravessa o ar com uma velocidade constante de v metros por segundo, mostre que o ponto P deve estar localizado no ramo direito da hipérbole cuja equação é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

onde $a = vT$ e $b = \frac{\sqrt{4c^2 - v^2T^2}}{2}$.

Capítulo 5

Seções Cônicas

5.1 Uma visão geométrica

Circunferências, elipses, parábolas e hipérbolas são curvas planas descritas por equações do 2º grau em suas variáveis. Essas curvas são denominadas, genericamente, cônicas porque podem ser obtidas através de interseções de um cone de revolução com um plano. Consideremos um cone com um ângulo de abertura igual a α , obtido pela rotação de uma reta, em torno do eixo z . Se interceptarmos esta superfície com um plano, perpendicular ao seu eixo de simetria, passando por um ponto qualquer com exceção da origem, obtém-se como curva interseção uma circunferência, como mostrado na Figura 5.1

Se o ângulo entre o plano e o eixo de simetria for maior que α obtém-se uma elipse, como mostra a Figura 5.2.

Se o ângulo entre o plano e o eixo de simetria for igual a α obtém-se uma parábola, Figura 5.3.

No caso em que o plano é paralelo ao eixo de simetria, ou possui uma inclinação β com $\beta < \alpha$ então a curva obtida é uma hipérbole. Um exemplo desse tipo de cônica pode ser visto na Figura 5.4.

Para provar que as cônicas podem ser obtidas como nos exemplos anteriores é necessário o uso de resultados de geometria espacial (consulte, por exemplo [7]). Ao invés disso, damos uma definição unificada para essas curvas.

Definição 5.1. *Considere uma reta r e um ponto fixo F , no plano, tal que F não pertença à reta r . Uma cônica é o lugar geométrico dos pontos P do plano, tal que a distância de P a F mantenha uma razão constante com a*

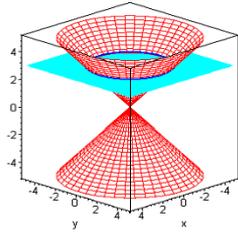


Figura 5.1: Circunferência como seção cônica

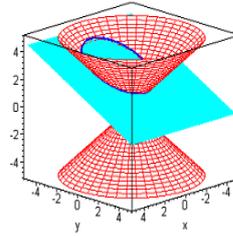


Figura 5.2: Circunferência como seção cônica

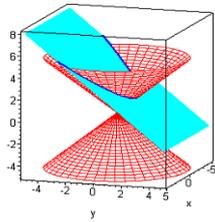


Figura 5.3: Parábola como seção cônica

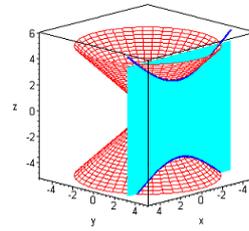


Figura 5.4: Hipérbole como seção cônica

distância de P a r . O ponto fixo F é chamado foco, a reta r , diretriz e a razão constante e , excentricidade da cônica.

A definição acima diz, simplesmente, que o ponto P pertence à cônica com foco F , diretriz r e excentricidade e , se e somente se $\frac{PF}{PQ} = e$, onde Q é o pé da perpendicular de P a r .

Exemplo 5.1. Determinar a equação da cônica com excentricidade $e = 2$, cujo foco está na origem e cuja diretriz é a reta $x = -3$.

Solução: Seja $P = (x, y)$ um ponto da cônica dada. Então, pela definição, $\frac{PF}{PQ} = 2$, isto é

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3 + x} = 2$$

ou

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 6 + 2x$$

Elevando ambos os lados da última equação ao quadrado, completando o quadrado e simplificando, temos:

$$\frac{x + 4^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

Portanto, a cônica é uma hipérbole com centro no ponto $(-4, 0)$.

Procedendo como no exemplo acima, podemos mostrar que, de acordo com a definição dada, uma cônica é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, dependendo do valor da sua excentricidade. Este resultado será estabelecido na próxima seção. (Para maiores informações sobre os resultados e teoremas tratados nas próximas seções, consulte [13] e [16].)

5.2 Cônicas: Uma visão Analítica

Teorema 5.1. *Teorema das Cônicas Considere uma cônica com excentricidade $e > 0$, foco F na origem e que tenha como diretriz a reta $x = -d$ com $d > 0$. Então uma das alternativas a seguir é verdadeira:*

(i) Se $e < 1$, a cônica é uma elipse de equação

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\text{onde } a = \frac{ed}{1 - e^2}, b = \frac{ed}{\sqrt{1 - e^2}} \text{ e } c = \sqrt{a^2 - b^2} = ae.$$

(ii) Se $e = 1$, a cônica é uma parábola de equação

$$4p(x + p) = y^2,$$

$$\text{onde } p = \frac{d}{2}.$$

(iii) Se $e > 1$, a cônica é uma hipérbole de equação

$$\frac{(x + c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\text{onde } a = \frac{ed}{e^2 - 1}, b = \frac{ed}{\sqrt{e^2 - 1}} \text{ e } c = \sqrt{a^2 + b^2} = ae.$$

Vamos estudar cada um dos casos acima. O Teorema nos garante que:

- (i) Se $e < 1$, a cônica é uma elipse de equação

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Desta equação podemos concluir que essa elipse tem seu centro no ponto $C = (c, 0)$, eixo maior horizontal, foco esquerdo no ponto $F_1 = (c - c, 0) = (0, 0)$ e foco direito no ponto $F_2 = (c + c, 0) = (2c, 0)$.

Portanto a origem é, realmente, um dos focos da elipse. Além disso, como a reta $x = -d$ é, por definição, uma diretriz para esta curva e como a elipse é simétrica em relação ao seu centro, concluímos que a elipse tem uma segunda diretriz dada pela reta $x = 2c + d$, pois esta reta está tão distante, à direita de C , quanto a diretriz $x = -d$ estava à esquerda de C . Esta situação é ilustrada na Figura 5.5.

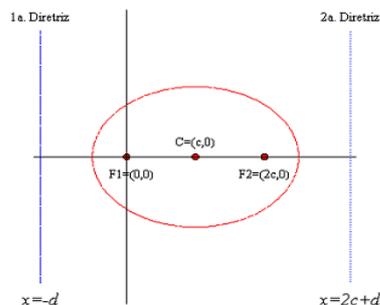


Figura 5.5: Elipse de equação $\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- (ii) Se $e = 1$, a cônica é uma parábola de equação

$$y^2 = 2d\left(x + \frac{d}{2}\right).$$

Esta parábola tem vértice no ponto $V = \left(-\frac{d}{2}, 0\right)$, concavidade para direita e foco no ponto $F = \left(-\frac{d}{2} + \frac{d}{2}, 0\right) = (0, 0)$. Esta situação é ilustrada na Figura 5.6.

- (iii) Se $e > 1$, a cônica é uma hipérbole de equação

$$\frac{(x + c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

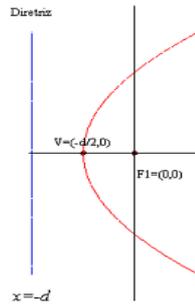


Figura 5.6: Parábola de equação $y^2 = 2d(x + \frac{d}{2})$

onde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Esta hipérbole tem centro no ponto $C = (-c, 0)$, eixo transversal horizontal, foco esquerdo no ponto $F_1 = (-2c, 0)$, foco direito no ponto $F_2 = (0, 0)$.

Portanto, a origem é o foco direito da hipérbole. Além disso, uma vez que a hipérbole é simétrica em relação ao seu centro, ela tem uma segunda diretriz relacionada com o seu foco esquerdo da mesma maneira como a diretriz dada está relacionada com o seu foco direito. A equação da segunda diretriz será $x = d - 2c$, pois esta reta está situada exatamente a mesma distância à esquerda de C , como a reta $x = -d$ (diretriz dada) estava à direita. Esta situação é ilustrada na Figura 5.7.

Agora é com você

Usando a Definição 5.1, prove o Teorema das Cônicas.

Já que qualquer elipse, parábola ou hipérbole satisfaz a definição de uma cônica o Teorema tem uma recíproca, que é evidente no caso de parábolas, pois estas curvas foram definidas em termos de foco e diretriz. É necessário, no entanto, um cálculo simples para determinar as diretrizes e a excentricidade de elipses e hipérbolas. Assim temos que:

- (i) Toda elipse tem duas diretrizes r_1 e r_2 , relacionadas, respectivamente, aos seus dois focos F_1 e F_2 e excentricidade e , com $0 < e < 1$. Se a elipse tiver semi-eixo maior a e semi-eixo menor b , então a excentricidade será dada por $e = \frac{c}{a}$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ é a distância do

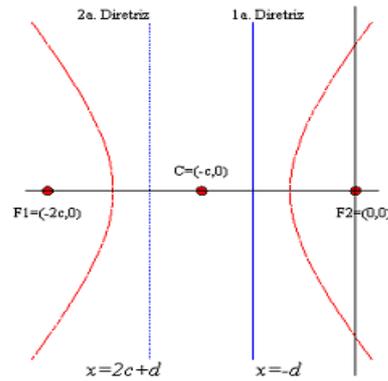


Figura 5.7: Hipérbole de equação $\frac{(x+c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

centro C a cada um dos focos. Cada diretriz está a d unidades do seu foco correspondente, onde $d = \frac{b^2}{c}$ (prove!) e são perpendiculares ao eixo maior. A distância do centro C a qualquer diretriz é $c + d = \frac{a^2}{c}$ unidades.

- (ii) Toda hipérbole tem duas diretrizes r_1 e r_2 , relacionadas, respectivamente, aos seus dois focos F_1 e F_2 e excentricidade e , com $e > 1$. Se a distância do centro C da hipérbole a cada foco for de c unidades, e se V_1 e V_2 estiverem à a unidades do centro, então a excentricidade será dada por $e = \frac{c}{a}$, onde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Cada diretriz está a d unidades do seu foco correspondente, onde $d = \frac{b^2}{c}$ (prove!) e são perpendiculares ao eixo transversal. A distância do centro C a qualquer diretriz é $c - d = \frac{a^2}{c}$ unidades.

5.3 Equações Quadráticas

As equações da parábola, da elipse, da hipérbole e da circunferência obtidas nas seções anteriores têm uma expressão algébrica bastante simples. Todas podem ser escritas na forma

$$Ax^2 + By^2 + C = 0$$

ou

$$Ax^2 + By = 0 \quad (5.3.1)$$

ou ainda

$$Ay^2 + Bx = 0$$

que são equações do segundo grau em x e y .

O fato das equações acima representarem elipses, parábolas, hipérbolas ou circunferências depende unicamente dos valores e sinais dos coeficientes A , B e C .

Esta representação simples, obtida para as cônicas, foi devido à hipótese de que cada uma delas estava numa posição privilegiada em relação ao sistema de coordenadas adotado. Nos capítulos anteriores sempre supomos os focos sobre um dos eixos e portanto os eixos de simetria das cônicas sempre coincidiam com os eixos coordenados.

Estas equações são ditas *equações canônicas das cônicas*.

Agora é com você

Deduz a equação da parábola que tem como foco o ponto $(3, 2)$ e como diretriz a reta $x = 1$. A equação que você deduziu está na forma canônica?

Nosso objetivo nessa seção é estudar em que condições equações de segundo grau em x e y na forma mais geral

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (5.3.2)$$

representam uma cônica e qual é a cônica representada.

A idéia é reduzir a equação 5.3.2 a uma das equações que aparecem em 5.3.1.

Dependendo das relações entre os coeficientes A , B , C , D , E e F a equação 5.3.2 pode representar uma parábola, uma elipse, uma hipérbole, uma circunferência, um par de retas, um ponto ou um conjunto vazio. Nos três últimos casos, dizemos que a equação 5.3.2 representa uma cônica degenerada.

Nesta seção, estudaremos os casos onde $B = 0$ e A e C não são ambos nulos, ou seja, onde a equação seja, realmente, de segundo grau.

O estudo destas equações se torna mais fácil, completando-se os quadrados em cada uma das variáveis, se isto for possível. Este procedimento permite reconhecer que tipo de curva é determinada pela equação. Este tipo depende do produto AC . As próximas seções se destinam a explorar estas idéias.

5.3.1 Parábolas

Suponhamos que o produto AC seja igual a zero. Esta condição significa que ou $A = 0$ ou $C = 0$.

Quando $C = 0$ a equação não contém o termo em y^2 . Neste caso, completando o quadrado da equação $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$, é possível concluir que esta equação é uma função quadrática do tipo

$$y = a(x - h)^2 + k$$

Como já vimos, o gráfico desta função é uma parábola com as seguintes características:

- seu vértice está localizado no ponto de coordenadas (h, k) ;
- seu eixo de simetria é a reta $x = h$;
- se $a > 0$, sua concavidade é para cima e se $a < 0$ sua concavidade é para baixo.

Analogamente, quando $A = 0$, a equação não contém o termo em x^2 . Neste caso, completando o quadrado da equação

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

, é possível concluir que esta equação é uma função quadrática do tipo

$$x = a(y - k)^2 + h$$

O gráfico desta função é uma parábola com as seguintes características:

- seu vértice está localizado no ponto de coordenadas (h, k) ;
- seu eixo de simetria é a reta $y = k$, se $a > 0$;
- sua concavidade se abre para direita e se $a < 0$, para a esquerda se $a > 0$.

Exemplo 5.2. Identifique a curva determinada pela equação $y^2 + 2x - 4y + 6 = 0$. Especifique as suas principais características e esboce o seu gráfico.

Solução: Para esboçar o gráfico da equação dada, precisamos, antes de mais nada completar o quadrado para escrevê-la em uma das formas padrão. Desse modo, temos:

$$y^2 + 2x - 4y + 6 = y^2 - 4y + 4 + 2 + 2x = (y - 2)^2 + 2x + 2 = 0$$

Agora, é fácil ver que a equação dada é equivalente a:

$$2x = -(y - 2)^2 - 2$$

isto é,

$$x = -\frac{(y - 2)^2}{2} - 1$$

O gráfico desta equação é uma parábola cujo eixo de simetria é a reta $y = 2$. Como $a = -\frac{1}{2} < 0$, esta parábola se abre para a esquerda e seu vértice é o ponto $(-1, 2)$.

Agora é com você

Esboce o gráfico da parábola do Exemplo 5.2.

5.3.2 Elipses

Vamos agora, analisar a equação

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

quando $AC > 0$.

Esta condição significa que A e C têm o mesmo sinal. Completando os quadrados tanto em x quanto em y , obtemos uma equação do tipo:

$$A(x - h)^2 + C(y - k)^2 = G$$

Desde que G seja positivo, dividindo-se ambos os termos por G , a equação acima se reduz a:

$$\frac{x - h}{\frac{G}{A}} + \frac{y - k}{\frac{G}{C}} = 1$$

que é a equação de uma elipse na sua forma canônica. (Mais tarde, ainda neste capítulo, estudaremos o caso em que $G \leq 0$).

Exemplo 5.3. *Escreva a equação*

$$9x^2 + 4y^2 - 180x - 56y + 1060 = 0$$

na sua forma canônica e esboce o gráfico da curva descrita por esta equação.

Solução: Para escrever a equação acima na sua forma canônica é necessário, antes de mais nada, completar o quadrado em x e em y . Isto é feito procedendo-se como a seguir:

$$9x^2 + 4y^2 - 180x - 56y + 1060 = 0$$

$$\begin{aligned}
& 9(x^2 - 20x) + 4(y^2 - 14y) + 1060 = 0 \\
& 9(x^2 - 20x + 100 - 100) + 4(y^2 - 14y + 49 - 49) + 1060 = 0 \\
& 9(x^2 - 20x + 100) - 900 + 4(y^2 - 14y + 49) - 196 + 1060 = 0 \\
& 9(x - 10)^2 + 4(y - 7)^2 = 36
\end{aligned}$$

Finalmente, dividindo-se ambos os termos da equação acima por 36, obtemos:

$$\frac{(x - 10)^2}{4} + \frac{(y - 7)^2}{9} = 1$$

que é a equação de uma elipse com centro no ponto $(10, 7)$, eixo maior sobre a reta $x = 10$, eixo menor sobre a reta $y = 7$ e vértices nos pontos $(10, 10)$, $(10, 4)$, $(8, 7)$ e $(12, 7)$.

5.3.3 Circunferências: Um caso especial de elipse

Na seção anterior, vimos que, quando A e C têm o mesmo sinal, a equação

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

pode ser escrita na sua forma canônica, a saber,

$$\frac{x - h^2}{\frac{G}{A}} + \frac{y - k^2}{\frac{G}{C}} = 1.$$

Se $A = C$, então $\frac{G}{A} = \frac{G}{C}$ e obtemos a equação:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$

cujo gráfico é uma circunferência de centro em (h, k) e raio r . Repare que a circunferência pode ser entendida como uma elipse cujos eixos têm a mesma medida.

Agora é com você

Use a definição de circunferência como o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de um ponto fixo e a fórmula da distância entre dois pontos do plano para explicar por que um ponto (x, y) pertence à circunferência de centro em (h, k) e raio r se e somente se satisfaz à equação $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

5.3.4 Hipérboles

Nesta seção estudaremos a equação

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

quando $AC < 0$, isto é, quando A e C têm sinais opostos. Como no caso de elipses e circunferências, completando os quadrados em x e em y obtemos uma equação da forma:

$$A(x - h)^2 + C(y - k)^2 = G.$$

Desde que G seja diferente de zero (mais tarde, ainda neste capítulo, veremos o que acontece quando $G = 0$), podemos dividir por G ambos os membros desta última igualdade para obtermos a equação na sua forma canônica:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - (y - k)^2 b^2 = 1$$

ou

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

O exemplo a seguir ilustra esta técnica.

Exemplo 5.4. *Escreva a equação $9x^2 - 4y^2 - 180x + 56y + 668 = 0$ na sua forma canônica.*

Solução: Completando os quadrados em x e em y , obtemos:

$$\begin{aligned} 9(x^2 - 20x) - 4(y^2 - 14y) + 668 &= 0 \\ 9(x^2 - 20x + 100 - 100) - 4(y^2 - 14y + 49 - 49) + 668 &= 0 \\ 9(x^2 - 20x + 100) - 900 - 4(y^2 - 14y + 49) + 196 + 668 &= 0 \\ 9(x - 10)^2 - 4(y - 7)^2 &= 36 \end{aligned}$$

Nesta etapa, dividimos ambos os termos da equação por 36. Assim, temos:

$$\frac{(x - 10)^2}{4} - \frac{(y - 7)^2}{9} = 1$$

que é a forma padrão procurada.

Esta é a equação de uma hipérbole com as seguintes características:

- seu centro é o ponto de coordenadas $(10,7)$;

- seus vértices estão a 2 unidades à esquerda e à direita de seu centro, nos pontos de coordenadas (12, 7) e (8, 7);
- suas assíntotas são as retas

$$\frac{x - 10}{2} = \frac{y - 7}{3}$$

e

$$\frac{x - 10}{2} = -\frac{y - 7}{3}.$$

5.3.5 Casos Degenerados

Vimos nas últimas seções que o gráfico de uma equação da forma

$$A(x - h)^2 + C(y - k)^2 = G$$

é uma elipse quando $AC > 0$ e $G > 0$ e representa uma hipérbole quando $AC < 0$ e $G \neq 0$.

Os exemplos a seguir ilustram as situações que podem acontecer quando as condições sobre G , enunciadas acima, não se verificam.

Exemplo 5.5. *Visto que a soma de quadrados é sempre maior ou igual a zero e só é zero quando os quadrados são nulos, temos que o gráfico da equação $x^2 + y^2 = 0$ é constituído por um único ponto, a saber, (0, 0) e o gráfico da equação $x^2 + y^2 = -1$ é o conjunto vazio.*

Exemplo 5.6. *O gráfico da equação $x^2 - y^2 = 0$ é constituído por duas retas concorrentes.*

De fato, a equação dada é equivalente a $y^2 = x^2$ ou $|x| = |y|$. Existem, então, quatro casos a considerar:

(i) $x > 0$ e $y > 0$;

(ii) $x < 0$ e $y > 0$;

(iii) $x < 0$ e $y < 0$;

(iv) $x > 0$ e $y < 0$.

O primeiro e o terceiro caso conduzem à solução $y = x$. Os outros dois, à reta $y = -x$.

Estamos agora prontos a examinar a equação geral

$$A(x - h)^2 + C(y - k)^2 = G.$$

Baseando-nos nos exemplos acima, podemos concluir que:

- (i) Se $AC > 0$ e $G = 0$, o gráfico desta equação é constituído por um único ponto cujas coordenadas são (h, k) .
- (ii) Se $A > 0$, $C > 0$ e $G < 0$ não existe nenhum ponto que satisfaça à equação e, portanto, o seu gráfico é o conjunto vazio.
- (iii) Se $AC < 0$ e $G = 0$ o gráfico da equação é constituído pelas duas retas $y - k = \sqrt{\frac{A}{C}}(x - h)$ e $y - k = -\sqrt{\frac{A}{C}}(x - h)$.

5.3.6 O caso mais geral

A equação mais geral do segundo grau é dada por:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (5.3.3)$$

Esta equação se reduz àquela estudada nas seções anteriores no caso em que $B = 0$.

O objetivo dessa seção é definir uma transformação, no plano, de modo a reduzir a equação 5.3.3, àquela estudada anteriormente, isto é, de modo a eliminar o termo que contém o produto xy .

Esta transformação é uma rotação do sistema xOy de um ângulo α conveniente, conforme ilustra a Figura 5.8.

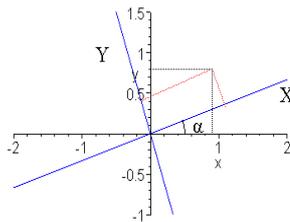


Figura 5.8: Estabelecendo um novo sistema de coordenadas por rotação

Agora é com você

- (i) Considerando a Figura 5.8, mostre que a transformação procurada é dada pelas equações

$$x = X \cos(\alpha) - Y \sin(\alpha)$$

e

$$y = X \operatorname{sen}(\alpha) + Y \operatorname{cos}(\alpha)$$

- (ii) Use as equações acima e conclua que, para que a equação transformada não contenha o termo XY , o ângulo α deve ser tal que

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2B}{A - C}, \quad \text{se } A \neq C$$

e

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \text{se } A = C.$$

- (iii) Use método descrito acima para eliminar o termo cruzado xy da equação

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 - 12x + 20y + 16 = 0$$

e identificar a cônica representada por esta equação.

5.4 Problemas propostos

- Determine a equação da elipse com foco F na origem, diretriz $x = -\frac{5}{2}$ e excentricidade $e = \frac{2}{3}$. Esboce o gráfico desta elipse mostrando o segundo foco e a diretriz correspondente.
- Determine a equação da cônica com excentricidade $e = 1$, diretriz $x = -1$ e foco F na origem. Esboce o seu gráfico.
- Determine a equação da hipérbole com foco F na origem, diretriz $x = -2$ e excentricidade $e = \sqrt{3}$. Esboce o gráfico desta hipérbole mostrando o segundo foco e a diretriz correspondente.
- Nos itens abaixo, determine a excentricidade e as equações das diretrizes das cônicas dadas. Esboce o gráfico de cada uma delas.

(i) A elipse $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

(ii) A hipérbole $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

- Se as duas diretrizes de uma elipse são consideradas fixas e a excentricidade é diminuída, o que acontece com a forma da elipse?

6. Se as duas diretrizes de uma hipérbole são consideradas fixas e a excentricidade é aumentada, o que acontece com a forma da hipérbole?

7. Sabemos que a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tem excentricidade $e = \frac{c}{a} < 1$, onde $c^2 = a^2 - b^2$. Assim sendo, quando e se aproxima de zero, a se aproxima de b (por quê?).

(i) Qual a forma, aproximada, da elipse na qual a e b estão próximos em valor?

(ii) O que acontece quando $a = b$?

(iii) Como é possível definir uma cônica com excentricidade zero?

(iv) Use os itens anteriores para definir circunferência como uma cônica.

8. Um matemático aceitou um cargo numa nova Universidade situada a $6km$ de uma margem retilínea de um grande lago. O professor deseja construir uma casa que esteja a uma distância da Universidade igual à metade da distância até a margem do lago. Os possíveis locais satisfazendo esta condição pertencem a uma curva.

- Identifique a curva solução deste problema e determine a sua equação com relação a um sistema de coordenadas que tenha a margem do lago como eixo x e a universidade no ponto $(0, 6)$ sobre o eixo y .

9. À exceção de pequenas perturbações, a órbita da Terra é uma elipse com o Sol em um dos focos. A razão entre a menor e a maior distância da Terra ao Sol é $\frac{29}{30}$. Determine a excentricidade da órbita elíptica.

10. O som cruza o ar com velocidade s , e um projétil, disparado de um revólver, viaja com velocidade b de um ponto localizado em $(-h, 0)$ para um alvo em $(h, 0)$ no plano xy . Em que pontos (x, y) podem ser ouvidos simultaneamente o estrondo do revólver disparando e o barulho do projétil perfurando o alvo?

11. Sejam k e p dois números positivos dados com $k > p$. Considere a elipse com eixo maior vertical, centro em $(0, k)$, focos em $(0, p)$ e $(0, 2k - p)$ e vértice inferior na origem cuja equação é dada por:

$$\frac{x^2}{2pk - p^2} + \frac{(y - k)^2}{k^2} = 1.$$

Mostre que quando $k \rightarrow \infty$, esta elipse se aproxima da parábola cuja equação é

$$y = \frac{x^2}{4p}.$$

12. Sejam k e p dois números positivos dados com $k > p$.

(i) Esboce o gráfico da hipérbole cuja equação é

$$\frac{(y+k)^2}{k^2} - \frac{x^2}{2kp+p^2} = 1.$$

(ii) Mostre que quando $k \rightarrow \infty$, o ramo superior desta hipérbole se aproxima da parábola cuja equação é

$$y = \frac{x^2}{4p}.$$

Capítulo 6

Conclusões

Este trabalho procura mostrar que a combinação de construções concretas com simulações computacionais oferece uma abordagem bem balanceada para o estudo das cônicas.

Esta abordagem aumenta a compreensão das definições e dos conceitos geométricos envolvidos neste estudo. Se não se entende a geometria existente por detrás de cada construção não é possível criar o modelo computacional correspondente.

Além disso, a construção de modelos usando G.D. permite o exame de uma ampla variedade de exemplos, favorecendo o estabelecimento de conjecturas razoáveis e mostrando caminhos a serem seguidos para a obtenção da necessária prova matemática dessas suposições.

Existem muitas outras construções para as cônicas possíveis de serem simuladas usando-se G.D. Procuramos neste trabalho fornecer somente alguns exemplos e sugestões de atividades simples, possíveis de serem desenvolvidas em sala de aula.

Esperamos que estas sugestões e os modelos estudados possam ser usados como material complementar para formação de professores e alunos, além de servir como motivação adicional para integração e utilização de ferramentas computacionais no ensino.

Bibliografia

- [1] B. Bolt, “Actividades Matemáticas”, Coleção o Prazer da Matemática, Gradiva, Lisboa, 1991.
- [2] F. Demana, B.K. Waits, S.R. Clemens, G.D. Foley, “Precalculus: A Graphing Approach”, Addison-Wesley, New York, 1997.
- [3] L.C. Guimarães, E. Belfort e F. Bellemain, Geometry: back to the future? in “Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics”, (J. Wiley and Sons Inc.), 2002.
- [4] L.C. Guimarães e E. Belfort, “Roteiros de Laboratório de Geometria”, Série de Roteiros Didáticos, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 1999.
- [5] M. Guzmán, “Contos com Contas”, Coleção o Prazer da Matemática, Gradiva, Lisboa, 1991.
- [6] J. Hadamard, “Leçons de Géométrie Elementaire I - Géométrie Plane”, Armand Colant, Paris, 1947.
- [7] J. Hadamard, “Leçons de Géométrie Elementaire II - Géométrie dans L'Espace”, Armand Colant, Paris, 1932.
- [8] N. Jackiw, “The Geometer’s Sketchpad”, Key Curriculum Press, Berkeley, 1991 (Software).
- [9] R. Hartshorne, “Geometry: Euclid and Beyond”, London, Springer-Verlag , 2000.
- [10] J. King e D. Schattschneider, “Geometry Turned On”, The Mathematical Association of America, Washington, 1997.
- [11] C. Laborde e B. Capponi, “Cabri-géomètre constituant d’un milieu pour l’apprentissage de la notion de figure géométrique”, en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **14** (1994), 165-210.

- [12] A.M. Legendre, “Elementos de Geometria”, Imprensa Régia, Rio de Janeiro, 1809. (Tradução da 5^a edição francesa, Librarie de Firmin Didot Frères, Paris, 1801.)
- [13] L.A. Medeiros, N.G. Andrade e A.M. Wanderley, “Álgebra Vetorial e Geometria Analítica”, Editora Campus, Rio de Janeiro, 1981.
- [14] D. Scher, “Exploring Conic Sections with The Geometer’s Sketchpad”, Key Curriculum Press, Berkeley, 1995.
- [15] D. Scher, “Folded paper, dynamic geometry, and proof: a three-tier approach to the conics”, in *The Mathematics Teacher*, **89-3** (1996), 188-193.
- [16] E.W. Swokowsky, “Cálculo com Geometria Analítica”, vol. 2, Makron Books, São Paulo, 1995.
- [17] D. Wells e L. Tilson, “Precalculus: A View of the World Around Us”, Prentice Hall, New Jersey, 1998.

Índice

- cônicas, 13, 15, 57, 62
 - casos degenerados, 63, 68
 - circunferências, 66
 - construção das, 15, 17
 - definição, 57
 - diretriz, 57
 - elipses, 15, 31, 60, 61, 65
 - equações canônicas, 63
 - excentricidade, 15, 57
 - focos, 57
 - hipérboles, 15, 45, 60, 62, 66
 - parábolas, 15, 17, 60, 64
 - problemas propostos, 70
 - propriedades, 15
 - rotação das, 69
 - seções cônicas, 57
 - Teorema das, 16, 59, 61
- circunferências, 15, 38, 57, 62, 66
 - excentricidade, 38
- elipsóide, 40
- elipses, 14, 31, 57, 62, 65
 - aplicações, 39, 40
 - centro, 32
 - construção, 31, 35
 - definição, 32
 - diretriz, 61
 - distância focal, 33, 37
 - eixos, 33, 34
 - equação, 38, 39
 - excentricidade, 37, 61
 - focos, 32, 37, 61
 - litotripsia, 40
 - movimento planetário, 32
 - problemas propostos, 41
 - propriedade refletora, 37, 39, 40
 - simetrias, 32–34
 - simulação computacional, 36, 37
 - tangente, 35, 36
 - vértices, 33
- equações quadráticas, 62
 - circunferências, 66
 - elipses, 65
 - hipérboles, 66
 - parábolas, 64
- espelho parabólico, 22
- Geometria Dinâmica, 14, 15, 36
 - construção da elipse, 36
 - construção da hipérbole, 45
 - construção da parábola, 18, 20
 - recursos de, 15
 - simulação computacional, 15, 21, 36, 45
- hipérboles, 14, 45, 57, 62, 66
 - aplicação, 54, 55
 - assíntotas, 47, 48, 67
 - centro, 51, 67
 - construção, 45, 46, 48
 - definição, 46
 - diretriz, 62
 - eixo de simetria, 51
 - eixo transversal, 51

equação, 49
 equação canônica, 51
 equação geral, 51
 excentricidade, 62
 focos, 46, 62
 gráfico, 52
 propriedade, 46
 propriedade refletora, 47
 simetria, 51
 simulação computacional, 45
 tangente, 46–48
 vértices, 51, 67

parábolas, 57
 superfície parabólica, 27, 28

Lei da reflexão, 22

parábolas, 14, 17, 20, 57, 62, 64
 aplicações, 22, 27, 28
 concavidade, 25, 64
 construção das, 17, 20
 construção por dobraduras, 20
 definição, 18
 diretriz, 18, 19, 21, 24–26, 29, 30
 eixo, 19
 eixo de simetria, 19, 22, 25, 64
 equação, 23–26, 29, 30
 foco, 18, 19, 21, 22, 24–27, 29, 30
 gráficos, 25
 problemas propostos, 29
 propriedade refletora, 20, 22, 27, 28
 propriedades, 19, 20
 simetrias, 19
 tangente, 20, 21
 vértice, 19, 25–27, 29, 30, 64
 parabolóide, 22

seções cônicas, 57
 circunferências, 57
 elipses, 57
 hipérboles, 57

NOTAS EM MATEMÁTICA APLICADA

Arquivos em pdf disponíveis em <http://www.sbmac.org.br/notas.php>

1. Restauração de Imagens com Aplicações em Biologia e Engenharia
Geraldo Cidade, Antônio Silva Neto e Nilson Costa Roberty
2. Fundamentos, Potencialidades e Aplicações de Algoritmos Evolutivos
Leandro dos Santos Coelho
3. Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Águas Subterrâneas
Edson Wendlander
4. Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais
Maria Cristina de Castro Cunha e Maria Amélia Novais Schleicher
5. Modelagem em Biomatemática
Joyce da Silva Bevilacqua, Marat Rafikov e Cláudia de Lello
Courtouke Guedes
6. Métodos de Otimização Randômica: algoritmos genéticos e “simulated annealing”
Sezimária F. Pereira Saramago
7. “Matemática Aplicada à Fisiologia e Epidemiologia”
H.M. Yang, R. Sampaio e A. Sri Ranga
8. Uma Introdução à Computação Quântica
Renato Portugal, Carlile Campos Lavor, Luiz Mariano Carvalho
e Nelson Maculan
9. Aplicações de Análise Fatorial de Correspondências para Análise de Dados
Homero Chaib Filho

10. Modelos Matemáticos baseados em autômatos celulares para Geoprocessamento
Marilton Sanchotene de Aguiar, Fábria Amorim da Costa,
Graçaliz Pereira Dimuro e Antônio Carlos da Rocha Costa
11. Computabilidade: os limites da Computação
Regivan H. N. Santiago e Benjamín R. C. Bedregal
12. Modelagem Multiescala em Materiais e Estruturas
Fernando Rochinha e Alexandre Madureira
13. Modelagem em Biomatemática (Coraci Malta ed.)
 - 1 - “Modelagem matemática do comportamento elétrico de neurônios e algumas aplicações”
Reynaldo D. Pinto
 - 2 - “Redes complexas e aplicações nas Ciências”
José Carlos M. Mombach
 - 3 - “Possíveis níveis de complexidade na modelagem de sistemas biológicos”
Henrique L. Lenzi, Waldemiro de Souza Romanha e Marcelo Pelajo- Machado
14. A lógica na construção dos argumentos
Angela Cruz e José Eduardo de Almeida Moura
15. Modelagem Matemática e Simulação Numérica em Dinâmica dos Fluidos
Valdemir G. Ferreira, Hélio A. Navarro, Magda K. Kaibara
16. Introdução ao Tratamento da Informação nos Ensinos Fundamental e Médio
Marcilia Andrade Campos, Paulo Figueiredo Lima
17. Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações
Rosana Sueli da Motta Jafelice, Laércio Carvalho de Barros,
Rodney Carlos Bassanezi
18. Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira
Socorro Rangel

19. Observar e Pensar, antes de Modelar
Flavio Shigeo Yamamoto, Sérgio Alves, Edson P. Marques Filho,
Amauri P. de Oliveira
20. Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações
Eliana Xavier Linhares de Andrade, Cleonice Fátima Bracciali
21. Uma Introdução à Teoria de Códigos
Carlile Campos Lavor, Marcelo Muniz Silva Alves, Rogério
Monteiro de Siqueira, Sueli Irene Rodrigues Costa
22. Análise e Processamento de Sinais
Rubens Sampaio, Edson Cataldo, Alexandre de Souza Brandão
23. Introdução aos Métodos Discretos de Análise Numérica de EDO e
EDP
David Soares Pinto Júnior
24. Representações Computacionais de Grafos
Lílian Markenzon, Oswaldo Vernet
25. Ondas Oceânicas de Superfície
Leandro Farina
26. Técnicas de Modelagem de Processos Epidêmicos e Evolucionários
Domingos Alves, Henrique Fabrício Gagliardi
27. Introdução à teoria espectral de grafos com aplicações
Nair Maria Maia de Abreu, Renata Raposo Del-Vecchio, Cybele
Tavares Maia Vinagre e Dragan Stevanović
28. Modelagem e convexidade
Eduardo Cursi e Rubens Sampaio
29. Modelagem matemática em finanças quantitativas em tempo discreto
Max Oliveira de Souza e Jorge Zubelli
30. Programação não linear em dois níveis: aplicação em Engenharia
Mecânica
Ana Friedlander e Eduardo Fancello

31. Funções simétricas e aplicações em Combinatória
José Plínio de Oliveira Santos e Robson da Silva
32. Semigrupos aplicados a sistemas dissipativos em EDP
Carlos Raposo da Cunha
33. Introdução à Simulação Estocástica para Atuária e Finanças Usando R
Hélio Côrtes Vieira, Alejandro C. Frery e Luciano Vereda
34. Modelos de Sustentabilidade nas Paisagens Amazônicas Alagáveis
Maurício Vieira Kritz, Jaqueline Maria da Silva e Cláudia Mazza
35. Uma Introdução à Dinâmica Estocástica de Populações
Leonardo Paulo Maia
36. Geometria de Algoritmos Numéricos
Gregorio Malajovich
37. Equações Diferenciais, Teorema do Resíduo e as Transformadas Integrais
Edmundo Capelas de Oliveira e Jayme Vaz Júnior