

**Editado por**

**Célia A. Zorzo Barcelos**

Universidade Federal de Uberlândia - UFU  
Uberlândia, MG, Brasil

**Eliana X.L. de Andrade**

Universidade Estadual Paulista - UNESP  
São José do Rio Preto, SP, Brasil

**Maurílio Boaventura**

Universidade Estadual Paulista - UNESP  
São José do Rio Preto, SP, Brasil



A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7)**, as figuras em **eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página  
<http://www.sbmac.org.br/notas.php>



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

2012

**UMA ABORDAGEM PARA MODELAGEM  
DE DADOS COM O USO DE SISTEMAS  
NEURO-FUZZY:  
APLICAÇÕES GEOESPACIAIS**

Luiz Carlos Benini  
benini@fct.unesp.br

Messias Meneguette Jr  
messias@fct.unesp.br

Departamento de Matemática, Estatística e Computação  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Universidade Estadual Paulista  
Florianópolis, SC



**Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

São Carlos - SP, Brasil  
2012

Coordenação Editorial: Sandra Mara Cardoso Malta

Coordenação Editorial da Série: Eliana Xavier Linhares de Andrade

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2012 by Luiz Carlos Benini e Messias Meneguette Jr.  
Direitos reservados, 2012 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

**Catálogo elaborado pela Biblioteca do IBILCE/UNESP**  
**Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner**

Benini, Luiz C.

Uma Abordagem para Modelagem de Dados com o uso de  
Sistemas Neuro-Fuzzy: Aplicações Geoespaciais  
- São Carlos, SP: SBMAC, 2012, 88 p.; 20,5cm  
- (Notas em Matemática Aplicada; v. 43)

e-ISBN 978-85-8215-003-0

1. Sistemas Neuro-Fuzzy. 2. Modelagem de Dados.  
3. Aplicações Geoespaciais.

I. Benini, Luiz C. II. Meneguette, Messias Jr. III. Título.  
IV. Série

CDD - 51

Esta é uma republicação em formato de e-book do livro original do mesmo título publicado em 2009 nesta mesma série pela SBMAC.

Às minhas filhas.  
Aos meus filhos.  
*Dedicamos*



# Agradecimentos

Muitas pessoas são merecedoras de nossos agradecimentos: alunos de cursos de graduação e pós-graduação, colegas do departamento de Matemática, Estatística e Computação (DMEC) da Faculdade de Ciências e Tecnologia (FCT/UNESP) e também ao revisor pelo cuidadoso trabalho efetuado com importantes correções. Agradecimentos especiais são direcionados ao Prof. Dr. Ivan Nunes da Silva, da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (EESC/USP), pelas sugestões e orientação dos estudos e constantes encorajamentos durante todos estes últimos anos; ao Prof. Dr. José Angelo Cagnon da Faculdade de Engenharia de Bauru da Universidade Estadual Paulista (FEB/UNESP) pela orientação de doutorado do professor Benini e para a mestre Daniela Anjos pelo seu excelente trabalho com MNT e classificação de vertentes. Nossos familiares merecem nossa gratidão pois nunca faltaram em quaisquer momentos, fossem eles prazerosos ou difíceis.



# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>11</b>
<b>1 Relações e Inferência Fuzzy</b>	<b>13</b>
1.1 Introdução . . . . .	13
1.2 Conceitos e Fundamentos . . . . .	16
1.3 Operadores e Operações . . . . .	22
1.4 Relações Fuzzy . . . . .	26
1.5 Composição de Relações Fuzzy . . . . .	28
1.6 Variáveis Linguísticas . . . . .	31
1.7 Inferência de Regras Fuzzy . . . . .	34
<b>2 Sistemas de Inferência Fuzzy</b>	<b>41</b>
2.1 Agregação . . . . .	42
2.2 Sistema de Mamdani . . . . .	43
2.3 Sistema de Takagi-Sugeno . . . . .	47
2.4 Defuzzificação . . . . .	48
2.5 Sistema de Inferência Fuzzy Neuro Adaptativo (ANFIS) . . .	50
2.5.1 Arquitetura do modelo ANFIS . . . . .	51
2.5.2 Algoritmo de aprendizagem da estrutura ANFIS . . .	56
<b>3 Aplicações</b>	<b>61</b>
3.1 Modelo Fuzzy para a Densidade do Solo . . . . .	61
3.2 Classificação de Vertentes . . . . .	71
<b>Bibliografia</b>	<b>83</b>



# Prefácio

Técnicas de sistemas fuzzy são especialmente utilizadas nos casos onde os modelos matemáticos não são capazes de descrever com rigidez o processo estudado. Estas técnicas fornecem uma estrutura poderosa para manipular informações aproximadas. A teoria de modelagem e identificação fuzzy trata do relacionamento entre entradas e saídas de um conjunto de dados, agregando vários parâmetros de processo e de controle. Neste minicurso será feita uma introdução à modelagem de dados usando sistemas neuro-fuzzy. Os principais conceitos são tratados de forma didática e utilizado o toolbox do Matlab como apoio para se obter a modelagem e os resultados finais. O objetivo principal está direcionado a aplicações geoespaciais. Neste sentido dois exemplos são tratados:

1. estimação da densidade do solo e
2. classificação de vertentes.

Presidente Prudente, 30 de abril de 2009.

Luiz Carlos Benini  
Messias Meneguette Jr.



# Capítulo 1

## Relações e Inferência Fuzzy

### 1.1 Introdução

A reprodução de características inteligentes em máquinas construídas pelo homem é um dos objetivos mais perseguidos pela comunidade científica e tecnológica já há muito tempo. Desde então, muitos paradigmas simbólicos de aprendizagem surgiram, e muitos se desenvolveram como métodos computacionais poderosos, incluindo aquisição indutiva de conceitos, sistemas classificadores, e aprendizagem baseada em explicações.

A Lógica Fuzzy pode ser aceita como a melhor ferramenta para modelar o raciocínio humano, que é aproximado e parcial em sua essência. A teoria dos conjuntos fuzzy e a lógica fuzzy objetivam modelar os modos de representação e raciocínio imprecisos que têm um papel essencial na tomada de decisões racionais em ambientes de imprecisão e incerteza. Além disso, a diversificação de tecnologias advindas da lógica fuzzy tem também permitido sua aplicação em diversas áreas do conhecimento.

Técnicas de sistemas fuzzy são especialmente utilizadas nos casos onde não existem modelos matemáticos capazes de descrever precisamente o processo estudado. Estas técnicas fornecem uma estrutura poderosa para manipular informações aproximadas. Assim, o processo analisado pode ser controlado a partir de um conjunto de regras fuzzy do tipo “se ... então”, capaz de tratar conhecimentos incompletos, incertos ou mesmo conflitantes. A teoria de modelagem e identificação fuzzy trata do relacionamento entre entradas e saídas, agregando vários parâmetros de processo e de controle. Os sistemas resultantes proporcionam resultados mais precisos, além de um desempenho estável e robusto.

Advinda do conceito de conjuntos fuzzy, a lógica fuzzy constitui a base

para o desenvolvimento de métodos e algoritmos de modelagem e controle de processos, permitindo a redução da complexidade de projeto e implementação, tornando-se a solução para problemas de identificação até então intratáveis por técnicas clássicas.

Nas teorias de identificação clássica e moderna, o passo inicial para implementar a identificação de um processo é definir o modelo matemático que o descreve. Esta metodologia requer que se conheça detalhadamente o processo a ser identificado, o que nem sempre é factível se o processo é muito complicado ou nas situações onde um volume considerável de informações essenciais só é conhecido a priori de forma qualitativa, ou ainda quando critérios de desempenho só estão disponíveis em termos lingüísticos. Este panorama leva a imprecisões e falta de exatidão que inviabilizam a maioria das técnicas tradicionais.

A modelagem fuzzy, por outro lado, são técnicas para se manusear informações qualitativas de uma maneira rigorosa. Tais técnicas consideram o modo como a falta de exatidão e a incerteza são descritas e, por isso, tornam-se suficientemente poderosas para manipular de forma conveniente o conhecimento. A sua utilização em sistemas que operam em tempo real, em computadores ou micro-controladores, é também das mais convenientes, pois geralmente não envolvem nenhum problema computacional sério.

Para expressar conceitos ou ações fuzzy é muito comum o uso de elementos qualitativos ao invés de valores quantitativos. Elementos típicos incluem termos “alto”, “médio”, “pequeno”, “mais ou menos”, “em torno de”, etc. Estas idéias são capturadas pela definição de variável lingüística. Uma variável lingüística tem por característica assumir valores dentro de um conjunto de termos lingüísticos, ou seja, palavras ou frases. Assim, ao invés de assumir instâncias numéricas, uma variável lingüística assume instâncias lingüísticas. Como exemplo, uma variável lingüística Temperatura poderá assumir como valor um dos membros do conjunto de termos {muito baixa, baixa, média, alta, muito alta}. Para se atribuir um significado aos termos lingüísticos, é associado cada um destes a um conjunto fuzzy definido sobre um universo de discurso comum que fornece a faixa de variação da variável lingüística.

Uma das formas mais comum de expressar este conhecimento é por meio de regras do tipo condição-ação, onde um conjunto de condições descrevendo uma parcela observável das saídas do processo é associado com uma ação de controle que irá manter ou levar o processo às condições de operação desejadas. Normalmente, uma condição é uma proposição lingüística (envolvendo variáveis lingüísticas) sobre os valores de algumas das variáveis de entrada; e uma ação é simplesmente uma descrição lingüística. Assim, todo o conhecimento é representado por meio de um conjunto de regras nas

quais as condições são dadas a partir de um conjunto de termos lingüísticos associados às variáveis de saída/entrada do processo. As respostas do sistema de controle ou as saídas fuzzy são expressas de modo similar para cada variável de controle (saída).

Após o processo de inferência da ação fuzzy, a determinação da ação de estimação não-fuzzy que melhor represente a decisão fuzzy é calculada e enviada efetivamente ao sistema de identificação.

Na teoria de conjuntos clássica, segundo algum critério, um elemento pertence ou não a um dado conjunto, estando a pertinência do elemento baseado na função característica, dada pela definição

**Definição 1.1.** (*Função característica*) *Seja  $U$  um conjunto universo,  $A$  um subconjunto de  $U$  ( $A \subseteq U$ ) e  $x$  um elemento de  $U$ . Defina-se a função característica como  $\mu_A(x) : U \rightarrow \{0, 1\}$*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Pode-se observar que a função característica, assim definida, é um mapeamento do conjunto universo  $U$ , para os elementos do conjunto  $\{0, 1\}$ , assumindo deste modo apenas valores discretos e dividindo o conjunto universo em duas partes com fronteiras bem definidas.

A teoria dos conjuntos fuzzy, introduzida por Zadeh (1965), surgiu como um meio de representação e manipulação de dados imprecisos, e são conjuntos que não possuem fronteiras bem definidas como na teoria usual de conjuntos. Estes foram propostos pelo fato dos conjuntos clássicos apresentarem limitações para lidar com problemas onde transições (passagem de pertinência para a não pertinência) de uma classe para outra acontecem de forma lenta e gradual.

Zadeh (1973) propôs uma caracterização mais ampla, generalizando a função característica de maneira que esta pudesse assumir um número infinito de valores no intervalo  $[0, 1]$ , sugerindo que alguns elementos são mais membros de um conjunto do que outros. Neste caso, o grau de pertinência pode assumir qualquer valor no intervalo fechado  $[0, 1]$ , sendo o valor 0 usado para representar não-pertinência completa, o valor 1 usado para representar pertinência completa, e os valores entre 0 e 1 usados para representar os graus intermediários de pertinência do subconjunto  $A$ . Esta generalização, faz com que a função característica passa a ser contínua no seu domínio, aumentando o poder de expressão da função característica.

## 1.2 Conceitos e Fundamentos

Na teoria dos conjuntos fuzzy, a idéia da função da inclusão é flexibilizada, a qual indica que um determinado elemento pertence mais ao conjunto do que outros elementos pertencentes ao mesmo conjunto, ou seja, os elementos podem pertencer parcialmente ao conjunto.

A função que define o grau de pertinência de um determinado elemento em um conjunto fuzzy, considerando o seu universo de discurso, é definida como função de pertinência. Formalmente, temos a seguinte definição

**Definição 1.2.** (*Função de pertinência*) (Zadeh, 1965) *Seja  $U$  um conjunto universo não vazio ( $U \neq \phi$ ). Um conjunto fuzzy  $A$  em  $U$  é caracterizado pela função de pertinência  $\mu_A(x) : U \rightarrow [0, 1]$  sendo  $\mu_A(x)$  o grau de pertinência do elemento  $x$  no conjunto fuzzy  $A$  para cada  $x \in U$ .*

Pode ser observado, da Definição 1.2, que um conjunto fuzzy  $A$  em um conjunto universo  $U$  é um conjunto de pares ordenados de um elemento genérico  $x$  e seu respectivo grau de pertinência  $\mu_A(x)$ , e este é completamente determinado pelo conjunto de  $n$ -uplas

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in U\}.$$

A família de todos os conjuntos fuzzy em  $U$  é denotado por  $\mathfrak{F}(U)$ . Subconjuntos fuzzy da reta real são chamados de variáveis fuzzy.

A terminologia usada para denotar um conjunto fuzzy pode ser feita das seguintes formas, conjuntos fuzzy discretos ou contínuos.

### a) Conjuntos Fuzzy Discretos

Seja um conjunto fuzzy  $A$  discreto e finito, com elementos no universo de discurso finito  $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Neste caso, o conjunto fuzzy  $A$ , com suporte em  $U$ , pode ser determinado enumerando os seus elementos juntamente com os seus graus de pertinências, sendo denotado por

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)/x_i$$

sendo que a somatória se refere a operação união, e o termo  $\mu_A(x_i)/x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , significa que  $\mu_A(x_i)$  é o grau de pertinência de  $x_i$  em  $A$ .

### b) Conjuntos Fuzzy Contínuos

Seja um conjunto fuzzy  $A$  contínuo, com elementos no universo de discurso  $U$ . No caso contínuo, o conjunto fuzzy  $A$  é representado por

$$A = \int_U \mu_A(x_i)/x_i$$

onde o sinal da integral denota a união de conjuntos unitários fuzzy.

Quanto ao formato das funções de pertinências, este é restrito a certa classe de funções, representadas por alguns parâmetros específicos. Os formatos mais comuns são: linear por partes (triangular, trapezoidal), gaussiana, sigmóide e singleton (conjuntos unitários).

1. Função Triangular: Parâmetros  $(a, m, b)$ , com  $a \leq m \leq b$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{se } x \in [a, m] \\ \frac{b-x}{b-m} & \text{se } x \in [m, b] \\ 0 & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

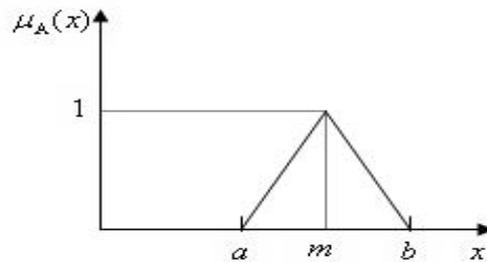


Figura 1.1: Função de pertinência triangular.

onde  $a, b, m$  e  $x$  pertencem ao conjunto universo de discurso  $U$ .

2. Função Trapezoidal: Parâmetros  $(a, m, n, b)$ , com  $a \leq m, n \leq b$  e  $m \leq n$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{se } x \in [a, m] \\ 1 & \text{se } x \in [m, n] \\ \frac{b-x}{b-n} & \text{se } x \in [n, b] \\ 0 & \text{se } x > b \end{cases}$$

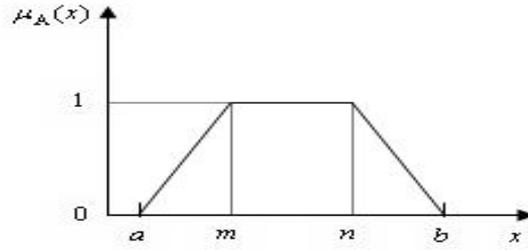


Figura 1.2: Função de pertinência trapezoidal.

onde  $a, b, m, n$  e  $x$  pertencem ao conjunto universo de discurso  $U$ .

3. Função Gaussiana:

$$\mu_A(x) = e^{-k(x-m)^2} \quad (k > 1)$$

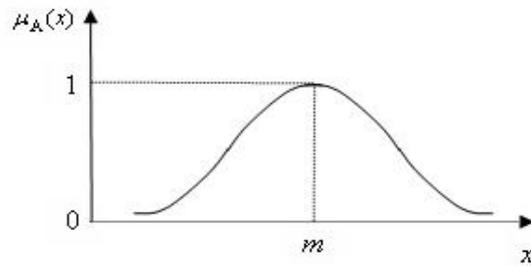


Figura 1.3: Função de pertinência gaussiana.

4. Função Sigmóide:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ 2 \left( \frac{x-a}{b-a} \right)^2 & \text{se } x \in [a, m] \\ 1 - 2 \left( \frac{x-a}{b-a} \right)^2 & \text{se } x \in [m, b] \\ 1 & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

sendo  $m = \frac{a+b}{2}$

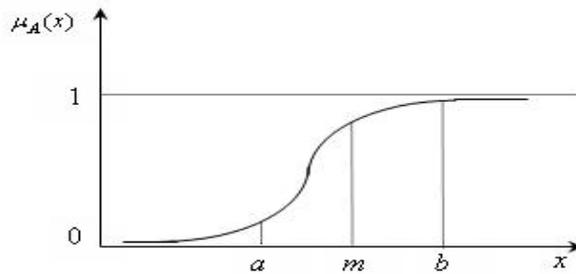


Figura 1.4: Função de pertinência sigmóide.

5. Conjunto Unitário ( Função singleton): Parâmetros  $(m, h)$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} h & \text{se } x = m \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A escolha do formato da função de pertinência mais adequada nem sempre é óbvia, podendo inclusive não estar ao alcance do conhecimento para uma determinada aplicação (Delgado, 2002). No entanto, existem sistemas fuzzy cujos parâmetros das funções de pertinências podem ser completamente definidos por especialistas. Nestes casos, a escolha de funções triangulares e trapezoidais é mais comum, pois a idéia de se definir regiões de pertinências total, média e nula é mais intuitiva do que a especificação do valor médio e de dispersão, conceitos estes ligados às funções gaussianas.

Outro conceito importante na teoria de conjuntos fuzzy é o de conjunto suporte de um conjunto fuzzy  $A$ . O conjunto suporte de um conjunto fuzzy



Figura 1.5: Conjunto unitário.

$A$  é o subconjunto dos pontos  $x$  de  $U$  tal que a função de pertinência seja positiva. Formalmente, tem-se a seguinte definição

**Definição 1.3.** (*Conjunto suporte*) Seja  $U$  um conjunto universo não vazio ( $U \neq \phi$ ), e  $A$  um subconjunto de  $U$  ( $A \subseteq U$ ). O suporte  $Sup(A)$  do conjunto fuzzy  $A$  é o conjunto de todos os elementos tal que a função de pertinência tem valor maior que zero, ou seja,  $Sup(A) = \{x \in U | \mu_A(x) > 0\}$ .

**Definição 1.4.** (*Conjunto unitário fuzzy*) Seja  $U$  um conjunto universo não vazio ( $U \neq \phi$ ), e  $A$  um subconjunto de  $U$  ( $A \subseteq U$ ), então um conjunto fuzzy  $A$  cujo conjunto suporte  $Sup(A)$  é um único ponto de  $U$  com  $\mu_A(x) = 1$  é chamado de conjunto unitário fuzzy.

Da Definição 1.4, observa-se que o conjunto  $A$  é um conjunto unitário, e equivale a um conjunto unitário convencional, e ainda, por esta definição, os conjuntos clássicos passam a ser um caso específico na teoria dos conjuntos fuzzy.

**Definição 1.5.** (*Igualdade de conjuntos fuzzy*) Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos fuzzy de um conjunto clássico  $U$ . Os conjuntos fuzzy  $A$  e  $B$  são iguais, e denotados  $A = B$  se e somente se  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ , para todo  $x \in U$ .

**Definição 1.6.** (*Conjunto fuzzy vazio*) Um conjunto fuzzy de um universo de discurso  $U$ , é definido um conjunto vazio se para cada  $x \in U$ ,  $\mu_{\emptyset}(x) = 0$ .

**Definição 1.7.** (*Conjunto universal*) O maior subconjunto fuzzy no universo de discurso  $U$ , chamado de conjunto fuzzy universal em  $U$ , denotado por  $1_U$ , é definido por  $1_U(x) = 1$ , para todo  $x \in U$ .

**Definição 1.8.** (*Centro de um conjunto fuzzy*) Seja  $U$  um conjunto universo não vazio ( $U \neq \phi$ ), e  $A$  um subconjunto de  $U$  ( $A \subseteq U$ ). O centro

de um conjunto fuzzy é definido como o conjunto de elementos  $x \in U$ , nos quais  $\mu_A(x)$  alcança seu valor máximo.

**Definição 1.9.** (Altura de um conjunto fuzzy) Seja  $U$  um conjunto universo não vazio ( $U \neq \emptyset$ ), e  $A$  um subconjunto de  $U$  ( $A \subseteq U$ ). A altura de um conjunto fuzzy  $A$  corresponde ao maior grau de pertinência assumido por um de seus elementos  $Alt(A) = \max_{x_i \in U} \mu_A(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$

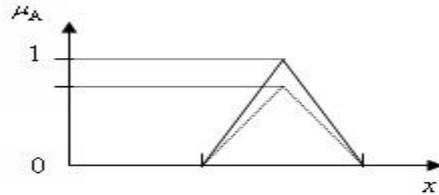


Figura 1.6: Altura de um conjunto fuzzy.

**Definição 1.10.** (Conjunto fuzzy normalizado) Seja  $U$  um conjunto universo não vazio ( $U \neq \emptyset$ ), e  $A$  um subconjunto de  $U$  ( $A \subseteq U$ ). Um conjunto fuzzy  $A$  é normalizado se pelo menos um de seus elementos possuir grau de pertinência igual a 1, ou seja,  $\mu_A(x_i) = 1$ , com  $x_i \in U$ .

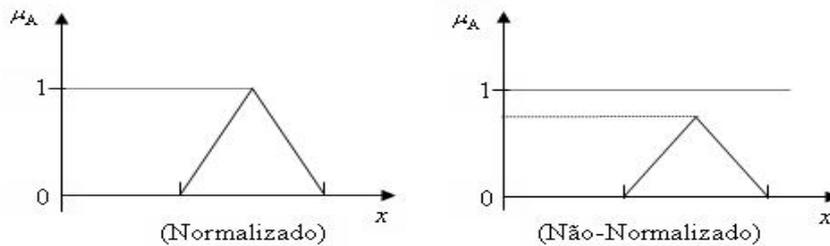


Figura 1.7: Conjunto fuzzy normalizado e não normalizado.

### 1.3 Operadores e Operações

Para os sistemas que utilizam a lógica fuzzy, o processamento de informações fuzzy é normalmente consistido de operações que são realizadas sobre os seus conjuntos fuzzy.

Como na lógica clássica, algumas propriedades foram definidas por Zadeh (1965) a respeito dos operadores de conjuntos fuzzy.

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos fuzzy definidos em um universo de discurso  $U$  com funções de pertinências  $\mu_A(x)$  e  $\mu_B(x)$ , respectivamente. As operações fuzzy básicas de união, intersecção e complemento são definidas por Zadeh, (1965)

**Definição 1.11.** (*Conjunto União*) A união entre dois subconjuntos fuzzy  $A$  e  $B$  de um universo de discurso  $U$  é formado por todos os valores máximos entre  $\mu_A(x)$  e  $\mu_B(x)$ , para todo  $x \in U$ . Formalmente, tem-se  $\mu_{A \cup B}(x) = \max_{x \in U}(\mu_A(x), \mu_B(x))$ .

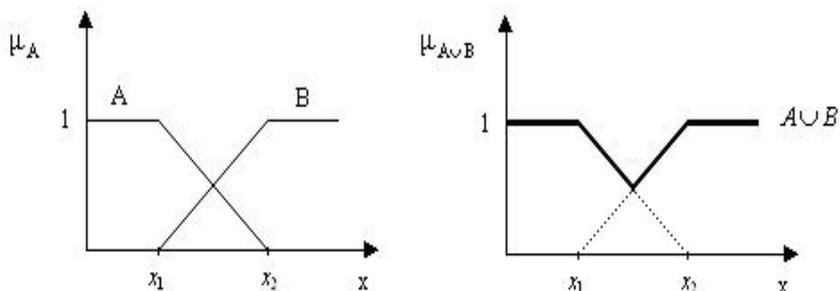


Figura 1.8: União dos conjuntos fuzzy  $A$  e  $B$ .

**Definição 1.12.** (*Conjunto intersecção*) A intersecção entre dois subconjuntos fuzzy  $A$  e  $B$  de um universo de discurso  $U$ , é formado por todos os valores mínimos entre  $\mu_A(x)$  e  $\mu_B(x)$ , para todo  $x \in U$ , ou seja,  $\mu_{A \cap B}(x) = \min_{x \in U}(\mu_A(x), \mu_B(x))$ . (Figura 1.9)

**Definição 1.13.** (*Conjunto complemento*) O complemento de um conjunto fuzzy  $A$ , é formado pela subtração de  $\mu_A(x)$  do valor unitário 1, ou seja,  $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ . (Figura 1.10)

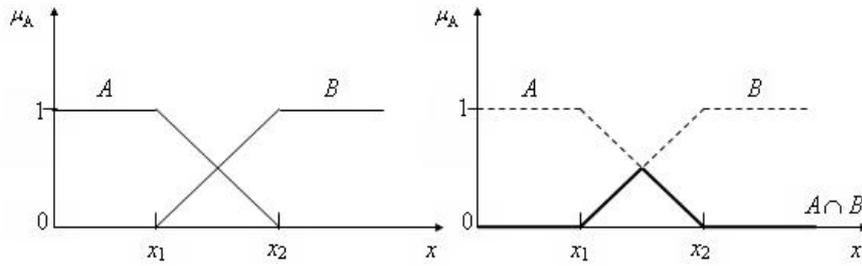


Figura 1.9: Intersecção dos conjuntos fuzzy  $A$  e  $B$ .

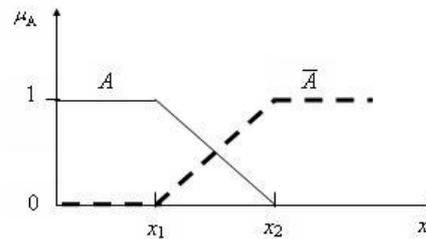


Figura 1.10: Complemento do conjunto  $A$

De modo geral, uma coleção de conjuntos fuzzy  $A_i$ , todos definidos em um mesmo universo de discurso  $U$ , tem as seguintes operações

União Total

$$\mu_{\cup_{i=1}^m A_i}(x) = \max_{x \in U} (\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_m}(x))$$

Intersecção Total

$$\mu_{\cap_{i=1}^m A_i}(x) = \min_{x \in U} (\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_m}(x))$$

Como na teoria de conjuntos clássica, também se define propriedades para conjuntos fuzzy. Assim, para conjuntos fuzzy  $A$ ,  $B$  e  $C$  no conjunto universo  $U$ , as operações que envolvem união e intersecção e complemento continuam valendo e dadas com as suas funções de pertinência como:

i) Propriedade Comutativa:

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A, & \mu_{A \cup B}(x) &= \mu_{B \cup A}(x) \\ A \cap B &= B \cap A, & \mu_{A \cap B}(x) &= \mu_{B \cap A}(x) \end{aligned}$$

ii) Propriedade Associativa:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C, & \mu_{A \cup (B \cup C)}(x) &= \mu_{(A \cup B) \cup C}(x) \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C, & \mu_{A \cap (B \cap C)}(x) &= \mu_{(A \cap B) \cap C}(x) \end{aligned}$$

iii) Propriedade Distributiva:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), & \mu_{A \cup (B \cap C)}(x) &= \mu_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), & \mu_{A \cap (B \cup C)}(x) &= \mu_{(A \cap B) \cup (A \cap C)}(x) \end{aligned}$$

iv) Idempotência:

$$\begin{aligned} A \cup A &= A, & \mu_{A \cup A}(x) &= \mu_A(x) \\ A \cap A &= A, & \mu_{A \cap A}(x) &= \mu_A(x) \end{aligned}$$

v) Identidade

$$\begin{aligned} A \cup \Phi &= A, & \mu_{A \cup \Phi}(x) &= \mu_A(x) \\ A \cap U &= A, & \mu_{A \cap U}(x) &= \mu_A(x) \end{aligned}$$

vi) Absorção

$$\begin{aligned} A \cap \Phi &= \Phi, & \mu_{A \cap \Phi}(x) &= \mu_\Phi(x) \\ A \cup U &= U, & \mu_{A \cup U}(x) &= \mu_U(x) \end{aligned}$$

vi) Lei de Morgan

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}, & \mu_{\overline{(A \cup B)}}(x) &= \mu_{\overline{A} \cap \overline{B}}(x) \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}, & \mu_{\overline{(A \cap B)}}(x) &= \mu_{\overline{A} \cup \overline{B}}(x) \end{aligned}$$

Uma consequência da definição de conjunto fuzzy em contraste com os conjuntos clássicos é a Lei do Meio Excluído e a Lei da Contradição (Ortega, 2001). Na teoria de conjuntos clássica, os conjuntos usuais satisfazem  $A \cup \overline{A} = U$  e  $A \cap \overline{A} = \Phi$ . Na teoria de conjuntos fuzzy isto não é satisfeito devido à flexibilização da função característica, como pode ser visto nas propriedades abaixo:

vii) Contradição:  $A \cup \overline{A} \neq U$

viii) Meio excluído:  $A \cap \overline{A} \neq \Phi$

Além das operações mostradas, outras podem ser usadas para definir operações para união e intersecção de conjuntos fuzzy. Para estas classes de operações foram criadas duas famílias de operadores denominadas normas triangulares ou  $T$ -normas e  $Co$ -normas triangulares ou  $S$ -normas, formalmente, definidas a seguir (Fullér, 1995).

**Definição 1.14.** (*Norma triangular*) Um operador  $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é chamado um operador Norma Triangular ( $T$ -norma) se, e somente se,  $T$  é um operador comutativo, associativo, não-decrescente em cada um dos seus pontos e  $T(x, 1) = x$ , para todo  $x \in [0, 1]$ .

Em outras palavras, da Definição 1.14, tem-se que qualquer  $T$ -norma satisfaz as propriedades:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T(y, x) \text{ (comutatividade)} \\ T(x, T(y, z)) &= T(T(x, y), z) \text{ (associatividade)} \\ T(x, y) &\leq T(z, w) \text{ se } x \leq z \text{ e } y \leq w \text{ (monotonicidade)} \\ T(x, 1) &= x, \text{ para todo } x \in [0, 1] \text{ (identidade).} \end{aligned}$$

De maneira similar, um operador  $Co$ -norma triangular é definido como segue

**Definição 1.15.** (*Co-norma triangular*) Um operador  $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é chamado um operador  $Co$ -norma Triangular ( $T$ -conorma) se  $S$  é comutativo, associativo, não-decrescente ponto a ponto (em cada argumento) e  $S(x, 0) = 1$ , para todo  $x \in [0, 1]$ .

Em outras palavras, qualquer  $T$ -conorma  $S$  deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} S(x, y) &= S(y, x) \text{ (comutatividade)} \\ S(x, S(y, z)) &= S(S(x, y), z) \text{ (associatividade)} \\ S(x, y) &\leq S(z, w) \text{ se } x \leq z \text{ e } y \leq w \text{ (monotonicidade)} \\ S(x, 0) &= 1 \text{ para todo } x \in [0, 1] \text{ (identidade).} \end{aligned}$$

**Definição 1.16.** ( *$T$ -norma baseada na intersecção*) Seja  $T$  uma  $T$ -norma. A  $T$ -intersecção de dois subconjuntos fuzzy  $A$  e  $B$  em  $U$ , é definida como  $\mu_{A \cap B}(x) = \min_{x \in U} (\mu_A(x), \mu_B(x)) = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$  para todo  $x \in U$ .

A operação união pode ser definida por meio do operador  $co$ -norma triangular

**Definição 1.17.** ( *$T$ -conorma baseada na união*) Seja  $S$  uma  $T$ -conorma. A  $S$ -união de dois subconjuntos fuzzy  $A$  e  $B$  em  $U$ , é definida como  $\mu_{A \cup B}(x) = \max_{x \in U} (\mu_A(x), \mu_B(x)) = S(\mu_A(x), \mu_B(x))$  para todo  $x \in U$ .

Em geral, a lei do meio excluído e o princípio da contradição não satisfazem as propriedades de  $T$ -norma e  $T$ -conorma, definidas as operações de intersecção e a união, como descritas a seguir:

$$\mu_{A \cap \bar{A}}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_{\bar{A}}(x)) = T(\mu_A(x), \mu_{\bar{A}}(x)) \neq \Phi$$

e, portanto,  $A \cap \bar{A} \neq \Phi$ ,

$$\mu_{A \cup \bar{A}}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_{\bar{A}}(x)) = S(\mu_A(x), \mu_{\bar{A}}(x)) \neq U$$

e, portanto,  $A \cup \bar{A} \neq U$

O emprego do operador mínimo representando a  $T$ -norma e do operador máximo representando a  $S$ -norma foram propostos por Zadeh (1965), destarte, existem outras  $T$ -normas (tais como: mínimo, produto algébrico, produto limitado, produto drástico) e  $S$ -conormas (tais como: máximo, soma algébrica, soma limitada, soma drástica) que podem ser empregadas na definição dos sistemas fuzzy (Pedrycz e Gomide, 1998).

## 1.4 Relações Fuzzy

As relações fuzzy são generalizações das relações usuais utilizadas na teoria clássica dos conjuntos, e por serem mais gerais do que funções, estas permitem que as dependências entre as variáveis envolvidas sejam capturadas sem que nenhuma caracterização direcional particular seja fixada, ou seja, não há domínio e contradomínio (Pedrycz e Gomide, 1998).

Relações fuzzy entre conjuntos fuzzy podem ser construídas a partir do produto cartesiano dos mesmos, sendo o produto cartesiano fuzzy a intersecção entre conjuntos fuzzy de universos de discurso diferentes (Shaw e Simões, 1999).

**Definição 1.18.** (*Produto cartesiano de conjuntos fuzzy*) (Fullér, 1995) *Sejam  $U$  e  $V$  dois universos de discurso. O produto cartesiano de dois conjuntos fuzzy  $A \in \mathfrak{F}(U)$  e  $B \in \mathfrak{F}(V)$  é  $\mu_{A \times B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$  com  $(x, y) \in U \times V$ .*

Pela definição, observa-se que o produto cartesiano de dois conjuntos fuzzy  $A \in \mathfrak{F}(U)$  e  $B \in \mathfrak{F}(V)$  é uma relação fuzzy binária em  $U \times V$ , ou seja,  $A \times B \in \mathfrak{F}(U \times V)$ .

Sejam  $U$  e  $V$  dois universos de discursos quaisquer. Uma relação fuzzy, definida em um espaço bidimensional, é qualquer conjunto fuzzy do universo de discurso, definido no produto cartesiano  $U \times V$ , que associa cada elemento  $(x, y)$  em  $U \times V$  um grau de pertinência, denotado por  $\mu_R(x, y)$ , definido

no intervalo unitário, ou seja,  $R : U \times V \rightarrow \{0, 1\}$ . Neste caso, a função característica é definida como

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in R \\ 0 & \text{se caso contrário} \end{cases}$$

e a relação fuzzy é vista como uma generalização do produto cartesiano clássico  $U \times V \rightarrow \{0, 1\}$  e é dada por:

$$R = \{((x, y), \mu_R(x, y)) \mid (x, y) \in U \times V\}.$$

Generalizando, as relações bidimensionais fuzzy podem ser obtidas das relações multidimensionais fuzzy e dadas por

$$R = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0, 1]$$

sendo  $U_1, U_2, \dots, U_n$  conjuntos universos de discurso e uma relação pode ser escrita como um conjunto fuzzy

$$R = \{((x_1, x_2, \dots, x_n), \mu_R(x_1, \dots, x_n)) \mid (x_1, \dots, x_n) \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n\}$$

sendo  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  elementos dos conjuntos nos universos de discurso.

Se os valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são discretos, a relação fuzzy  $R$ , pode ser expressa em forma matricial, relacionando os elementos pertencentes aos diferentes conjuntos fuzzy.

Como exemplo, suponha que se queira expressar a relação fuzzy de um sistema de conceito "ambiente confortável" em termos de temperaturas e umidades. Considere o universo de discurso para temperatura dado por:  $U = \{x_1, x_2, x_3\} = \{18, 20, 22\}$ , e o universo de discurso para os graus de umidade dado por:  $V = \{y_1, y_2, y_3\} = \{30, 50, 70\}$ . Pode-se estabelecer o grau de relação entre cada valor de temperatura com cada valor da umidade e, desta forma, o conceito de ambiente confortável pode ser representado pelas funções de pertinência:

$$\begin{aligned} \mu_R(18, 30) &= \mu_R(18, 70) = \mu_R(22, 30) = \mu_R(22, 70) = 0.2 \\ \mu_R(18, 50) &= \mu_R(22, 50) = 0.6 \\ \mu_R(20, 30) &= \mu_R(20, 70) = 0.5 \\ \mu_R(20, 50) &= 1.0 \end{aligned}$$

e, deste modo, podendo ser elaborada uma matriz de relação fuzzy, onde as colunas são as umidades, as linhas são as temperaturas consideradas

e os valores são os graus com que as temperaturas se relacionam com as umidades, dada por:

$$R = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.5 & 1.0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Como no caso de conjuntos fuzzy, as relações fuzzy podem ser combinadas e definidas as operações de união, intersecção e complemento, como dadas nas definições a seguir. Estas operações são importantes porque elas podem descrever interações existentes entre as variáveis. Sejam  $R$  e  $S$  duas relações fuzzy binárias em  $U \times V$ , dadas por

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y), \mu_R(x, y) \mid (x, y) \in U \times V\} \\ S &= \{(x, y), \mu_S(x, y) \mid (x, y) \in U \times V\} \end{aligned}$$

**Definição 1.19.** (*Intersecção de relações fuzzy*) Sejam  $R$  e  $S$  duas relações fuzzy binárias  $U \times V$ . A intersecção das relações fuzzy  $R$  e  $S$  é definida por  $\mu_{(R \cap S)}(x, y) = \min \{\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)\}$ ,  $(x, y) \in U \times V$ .

**Definição 1.20.** (*União de relações fuzzy*) Sejam  $R$  e  $S$  duas relações fuzzy binárias  $U \times V$ . A união das relações fuzzy  $R$  e  $S$  é definida por  $\mu_{(R \cup S)}(x, y) = \max \{\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)\}$ ,  $(x, y) \in U \times V$ .

**Definição 1.21.** (*Complemento de relações fuzzy*) Sejam  $R$  e  $S$  duas relações fuzzy binárias  $U \times V$ . O complemento de uma relação fuzzy  $R$  é definido por  $\mu_{\bar{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y)$ ,  $(x, y) \in U \times V$ .

## 1.5 Composição de Relações Fuzzy

As relações fuzzy definidas em diferentes conjuntos de discurso podem ser combinadas utilizando-se de diferentes operadores de composição, sendo a composição mais conhecida dada como na definição a seguir:

**Definição 1.22.** (*Composição de Relações Fuzzy*) Sejam  $U, V$  e  $W$  três universos de discurso. Seja  $R$  uma relação fuzzy em  $U \times V$  e  $S$  uma relação fuzzy em  $V \times W$ . A composição das relações  $R$  e  $S$  é uma relação fuzzy sup- $T$ , definida por  $R \circ S = \int_{U \times W} \sup_{y \in V} \{T(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))\} / (x, z)$ .

As composições mais usadas, definidas sobre as relações fuzzy, são aquelas que utilizam o operador mínimo e máximo sendo, respectivamente, denominadas composição sup-min e sup-max, que combinam relações fuzzy de produtos de espaços diferentes. Fazendo a notação:

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in V} \{T(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))\}$$

a função de pertinência da composição de relações fuzzy, no caso discreto, a composição sup-min é denominada max-min, podendo esta ser representada em forma matricial, sendo cada um dos termos da matriz,  $\mu_{R \circ S}(x, z)$ , dado por:

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \max_{y \in V} \{\min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))\}$$

e, portanto, a composição max-min entre  $R$  e  $S$  é o seguinte conjunto fuzzy:

$$R \circ S = \{(x, y), \max_{y \in V} \{\min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))\} \mid x \in U, y \in V, z \in W\}$$

Note que se  $R$  e  $S$  são duas relações fuzzy em  $U \times V$  e  $V \times W$ , com  $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $V = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  e  $W = \{z_1, z_2, \dots, z_l\}$ , respectivamente, conjuntos fuzzy finitos, a forma matricial da relação, considerando a composição max-min, é obtida como na multiplicação de matrizes usual, substituindo a operação produto pelo mínimo e a soma pelo máximo. Deste modo, se  $R$  é uma relação fuzzy em  $U \times V$  e  $S$  é uma relação fuzzy em  $V \times W$ , então,  $R$  e  $S$  podem ser representadas, respectivamente, por:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1l} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{ml} \end{bmatrix}$$

e, portanto, usando a Definição 1.22, a relação fuzzy  $Q = R \circ S$  dada pela composição max-min, tem a forma matricial

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1l} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nl} \end{bmatrix}$$

com,

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \mu_{R \circ S}(x, z) = \max_{y_k} \{\min(\mu_R(x_i, y_k), \mu_S(y_k, z_j))\} \\ &= \max_k \{\min(r_{ik}, s_{kj})\} \end{aligned}$$

De modo análogo, pode ser definida uma composição inf- $S$  de relações fuzzy  $R$  e  $S$ , com os elementos da composição definida como:

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \inf_{y \in V} \{S(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))\}$$

que para o caso discreto, com a utilização do operador máximo, tem-se a composição min-max, expressa como:

$$R \circ S = \{(x, y), \min_{y \in V} \{\max(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))\} \mid x \in U, y \in V, z \in W\}$$

Como exemplo de composição de relações fuzzy sejam  $R$  e  $S$  duas relações fuzzy discretas, dadas por:

$$R = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.3 & 0.9 & 0.0 \\ 0.3 & 1.0 & 0.8 & 1.0 \\ 0.9 & 0.8 & 1.0 & 0.8 \\ 0.0 & 1.0 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 0.9 \\ 1.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.3 & 0.1 & 0.0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Para melhor compreender a composição de relações fuzzy, é construído um grafo (Figura 1.11), explicitando a composição das variáveis  $(x_2, z_3)$ , com  $x_2$  correspondendo aos valores da segunda coluna em  $R$  e os valores de  $z_3$  correspondentes à terceira coluna em  $S$ , e para os demais pares de variáveis o raciocínio é análogo.

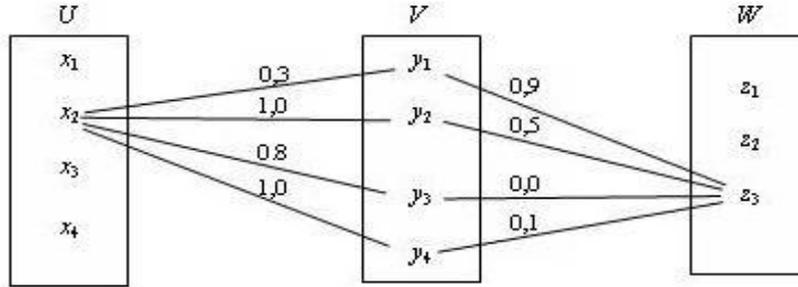


Figura 1.11: Composição do par  $(x_2, z_3) \in U \times V$ .

Considerando o operador mínimo ( $\min$ ) como  $T$ -norma, a composição  $R \circ S$  para as variáveis  $(x_2, z_3)$  torna-se:

$$\begin{aligned}
\mu_{R \circ S}(x_2, z_3) &= \\
&= \max_{y \in V} \{ \min(\mu_R(x_2, y_k), \mu_S(y_k, z_3)) \} \\
&= \max_{y \in V} \{ \min(0.3, 0.9), \min(1.0, 0.5), \min(0.8, 0.0), \min(1.0, 0.1) \} \\
&= \max_{y \in V} \{ 0.3, 0.5, 0.0, 0.1 \} = 0.5
\end{aligned}$$

Para todos os outros pares de variáveis envolvidas, de modo análogo, tem-se a matriz de composição dada por:

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.3 & 0.9 & 0.0 \\ 0.3 & 1.0 & 0.8 & 1.0 \\ 0.9 & 0.8 & 1.0 & 0.8 \\ 0.0 & 1.0 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 0.9 \\ 1.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.3 & 0.1 & 0.0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 0.9 \\ 1.0 & 0.3 & 0.5 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 1.0 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos fuzzy, com suas funções de pertinências  $\mu_A(x)$  e  $\mu_B(y)$ , em  $U \times V$ , respectivamente. A implicação fuzzy entre os conjuntos fuzzy  $A$  e  $B$  é um novo conjunto fuzzy  $C$ , representado por  $C = A \rightarrow B$ , definida mediante a função de pertinência  $\mu_{A \rightarrow B} : U \times V \rightarrow [0, 1]$ , tal que

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = I(\mu_A(x), \mu_B(y)); \forall x \in U, \forall y \in V$$

onde,  $I : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é um operador de implicação obedecendo as seguintes propriedades, para qualquer  $x, x', y, y' \in [0, 1]$ :

- i) se  $y \leq y'$  então  $I(x, y) \leq I(x, y')$
- ii)  $I(0, y) = 1$
- iii)  $I(1, y) = y$

Uma interpretação simples consiste em definir a implicação fuzzy através de uma função de pertinência particular mediante o operador mínimo ( $\min$ ), representando a implicação fuzzy pela função de pertinência:

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$$

## 1.6 Variáveis Linguísticas

As variáveis linguísticas são variáveis que permitem a descrição de informações que estão normalmente disponibilizadas de forma qualitativa, ou seja, são variáveis cujos possíveis valores são palavras ou frases, ao invés de números (Pedrycz; Gomide, 1998), podendo ser representadas mediante

um conjunto fuzzy. Estas são expressas qualitativamente através de termos lingüísticos, fornecendo um conceito à variável, e quantitativamente por uma função de pertinência.

Cada variável lingüística tem um conjunto de termos fuzzy associados (denominados termos primários) que é o conjunto de valores que a variável fuzzy pode tomar. Por exemplo, a variável fuzzy compactação do solo pode ter o conjunto de termos primários {baixa, média, alta}, sendo que cada termo primário representa um conjunto fuzzy específico.

Zadeh definiu, formalmente, a variável lingüística fuzzy através da quintupla:  $\langle X, T(X), U_X, G, M \rangle$ , com  $X$  representando o nome da variável lingüística (rótulo associado a uma variável lingüística);  $T(X)$  representa o conjunto de termos lingüísticos, com cada elemento de  $T(X)$  sendo um dos termos que a variável  $X$  pode assumir;  $U_X$  é o universo de discurso da variável lingüística  $X$ ;  $G$  representa a gramática para a geração dos termos;  $M$  é a regra que associa a cada termo um conjunto fuzzy no universo  $U_X$ , representando o seu significado  $M_X$ .

Como exemplo, considere como variável o parâmetro mecânico do solo “resistência à penetração”, como um indicador da compactação do mesmo com medição (em MPa-megapascal) realizada por um aparelho denominado Penetrômetro. Seja a variável lingüística “resistência à penetração do solo (RP)” admitindo valores lingüísticos: baixa, média e alta. Cada um dos valores lingüístico admite valores numéricos entre 0 e a resistência à penetração máxima (RPmax), isto é, num intervalo  $[0, \text{RPmax}]$ , e assim, podendo associar os valores lingüísticos sobre o intervalo  $[0, \text{RPmax}]$  através de funções de pertinência. À atribuição de um significado para os termos lingüísticos, é associado a cada um destes termos um conjunto fuzzy definido sobre um universo de discurso comum. Assim, desde que uma variável lingüística tem por característica assumir valores dentro de um conjunto de termos lingüísticos (cada termo da variável “resistência do solo à penetração”), cada valor fuzzy da “resistência do solo à penetração”, que são elementos de  $T(\text{RP})$ , é caracterizado por um conjunto fuzzy, digamos; baixa:  $[0.0, 2.5]$ , média:  $[2.0, 3.0]$  e alta:  $[2.5, 15.0]$ , em um universo de discurso, por exemplo  $[0.0, 15.0]$ . Na Figura 1.12 é mostrado como os elementos da variável fuzzy “resistência do solo à penetração” podem ser dispostos pela quintupla  $\langle X, T(X), U_X, G, M \rangle$ .

Pela Figura 1.12 pode-se citar a variável lingüística com rótulo  $X =$  resistência do solo à penetração, com conjunto de termos  $T(\text{resistência do solo à penetração}) = \{\text{baixa, média, alta}\}$ , universo de discurso  $U = [0.0, 15.0]$  e um dos valores  $M(X)$  escrito como:

$$M(\text{baixa}) = \{(x, \mu_{\text{baixa}}(x)) | x \in [0.0, 2.50]\}$$

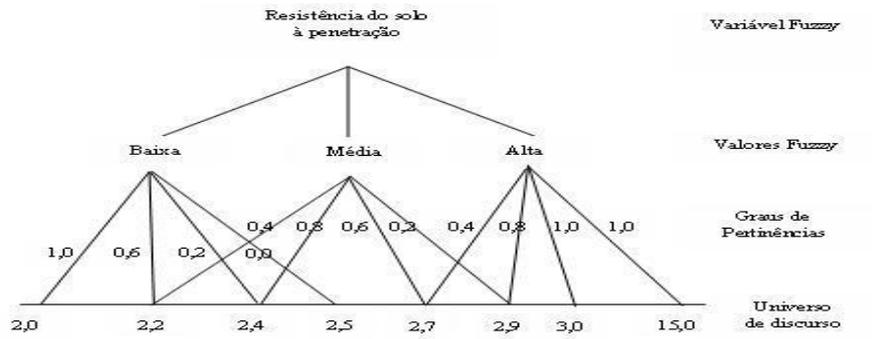


Figura 1.12: Variável linguística “resistência do solo à penetração”.

Na Figura 1.13 são ilustrados os três possíveis termos linguísticos para a variável representando a “resistência do solo à penetração”.

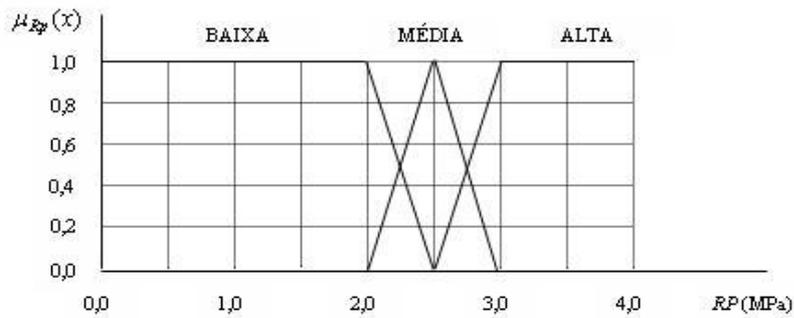


Figura 1.13: Representação da variável linguística “resistência à penetração do solo”.

Supondo uma medida do universo de discurso discreto e tendo em conta que foram definidas três funções: duas retangulares (baixa e alta) e uma triangular (média), que qualquer valor da resistência à penetração, digamos 2.2 MPa, tem um único grau de pertinência a cada valor:

$$\begin{aligned}\mu_{baixa}(2.2) &= 0.6 \\ \mu_{média}(2.2) &= 0.4 \\ \mu_{alta}(2.2) &= 0.0\end{aligned}$$

e pode ser observado que a medida com 2.2 MPa está incluída em dois conjuntos, ela pertence ao conjunto de resistência à penetração “*baixa*” com grau de pertinência 0.6 e ao conjunto de resistência à penetração “*média*” com grau de pertinência 0.4. A fuzzificação, ou seja, a conversão da medida de valor 2.2 MPa do universo de discurso, em valores compreensíveis para fuzzy, é dada por:

$$2.2\text{MPa} = 0.6/\text{“baixa”} + 0.4/\text{“média”} + 0.0/\text{“alta”}.$$

sendo que o sinal “+” se refere a uma forma de conectar o elemento  $2.2 \in U$  que está nos conjuntos de termos lingüísticos, e o símbolo “/” não indica divisão, mas uma forma de visualizar o elemento  $2.2 \in U$  e o seu grau de pertinência.

As principais operações entre variáveis lingüísticas são realizadas por meio da utilização dos conectivos “e”, “ou” e “não”, e por meio desses conectivos podem ser realizadas composições lógicas entre os termos das variáveis lingüísticas. Assim, dados dois termos  $A$  e  $B$  de uma determinada variável lingüística, as operações compostas “ $A$  e  $B$ ” e “ $A$  ou  $B$ ” são definidas, respectivamente, em função de seus graus de pertinências por  $\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$  e  $\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ .

Para a operação de complemento “não” de uma variável lingüística  $A$ , tem-se a expressão  $1 - \mu_A(x)$ .

## 1.7 Inferência de Regras Fuzzy

O processo de inferência fuzzy ou raciocínio aproximado permite que sistemas fuzzy sejam elaborados por um conjunto de regras fuzzy através de proposições condicionais, do tipo “se (condição) ... então (ação)”, baseadas nas variáveis lingüísticas para executar um processo de tomada de decisão.

As regras fuzzy descrevem situações específicas que podem ser submetidas à análise de especialistas, e cuja inferência conduz a algum resultado desejado (Ortega, 2001). A inferência baseada em regras fuzzy pode ser compreendida como um funcional que mapeia um conjunto de uma ou mais variáveis de entrada associadas a um conjunto fuzzy, denominadas premissa ou antecedentes, para um conjunto de uma ou mais variáveis de saída, também, associadas a conjuntos fuzzy, denominadas conseqüentes ou conclusão,

de um dado sistema. Segundo Ortega (2001), cada regra fuzzy é composta por uma parte antecedente ou premissa, parte "se", e uma parte conseqüente ou conclusão, parte "então", resultando em uma estrutura do tipo:

Se < proposição fuzzy antecedente > Então < proposição fuzzy conseqüente >.

Uma proposição fuzzy simples, representada por " $x$  é  $A$ ", onde  $x$  um valor do domínio e  $A$  uma variável lingüística, estabelece uma relação entre um valor  $x$  do domínio e o espaço fuzzy (Cox, 1992). Dessa maneira, modelos fuzzy representam um sistema através de um conjunto do tipo:

Se " $x$  é  $A$ " Então " $y$  é  $B$ "

sendo a proposição " $x$  é  $A$ " o antecedente e a proposição " $y$  é  $B$ " o conseqüente da regra fuzzy.

As proposições podem também ser estabelecidas através de composição de proposições simples, denominadas proposições fuzzy compostas, usando conectivos lógicos "e", "ou" e "não" representando, respectivamente, a intersecção, união e complemento fuzzy. Assim, se  $x$  e  $y$  são variáveis lingüísticas nos universos de discurso  $U$  e  $V$ , e  $A$  e  $B$  são conjuntos fuzzy, respectivamente, em  $U$  e  $V$ , tem-se:

– a proposição fuzzy composta dada por:

" $x$  é  $A$  e  $y$  é  $B$ "

é uma relação fuzzy  $A \cap B$  em  $U \times V$  definida por seu grau de pertinência:

$$\mu_{A \cap B}(x, y) = T(\mu_A(x), \mu_B(y)) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

com  $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma  $T$ -norma;

– a proposição fuzzy composta dada por:

" $x$  é  $A$  ou  $y$  é  $B$ "

é uma relação fuzzy  $A \cup B$  em  $U \times V$  definida por seu grau de pertinência:

$$\mu_{A \cup B}(x, y) = S(\mu_A(x), \mu_B(y)) = \max(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

com  $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma  $S$ -norma;

– a proposição fuzzy composta dada por:

" $x$  é não  $A$ "

é uma relação fuzzy  $\bar{A}$  em  $U$  definida por seu grau de pertinência:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

As variáveis de entrada são conectadas entre si por intermédio de operadores lógicos fuzzy, e estas se associam a valores lingüísticos (conjuntos fuzzy), em todo universo de discurso por meio de funções de pertinências.

Na utilização de regras composicionais de inferência é possível definir procedimentos para se obter uma conclusão fuzzy a partir de uma ou mais regras, representadas por uma relação fuzzy  $R$ , e de um fato fuzzy (Delgado, 2002). Assim, se  $x$  e  $y$  são variáveis lingüísticas compostas respectivamente por um conjunto de termos  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  e  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  então o problema básico do processo de inferência é encontrar uma função de pertinência  $B'$  que represente a consequência da aplicação simultânea de regras da forma “se ... então”.

Formalmente, dado um fato observável ( $x$  é  $A'$ ), o qual é representado por um conjunto fuzzy  $A'$ , e uma base de regras dada por uma relação fuzzy  $R$ , um conjunto fuzzy induzido pelo fato  $x$  é  $A'$  e pela regra  $R$ , é dado por:

Fato :  $x$  é  $A'$   
 Regra 1 : se  $x$  é  $A_1$  então  $y$  é  $B_1$   
 Regra 2 : se  $x$  é  $A_2$  então  $y$  é  $B_2$   
 :  
 Regra  $n$  : se  $x$  é  $A_n$  então  $y$  é  $B_n$   
 Consequência :  $y$  é  $B'$ .

O processo de inferência fuzzy aplicado nas regras acima, em geral, é baseado na regra *modus ponens* generalizada explicitada por:

Fato :  $x$  é  $A'$   
 Regra : se  $x$  é  $A$  então  $y$  é  $B$   
 Consequência :  $y$  é  $B'$

com  $A, A', B$  e  $B'$  são conjuntos fuzzy associados aos valores das variáveis lingüísticas  $x$  e  $y$ . Simbolicamente:

Fato :  $A'$   
 Regra :  $A \rightarrow B$   
 Conclusão :  $B' = A' \circ (A \rightarrow B)$ .

Isto significa que a regra *modus ponens generalizada* permite inferir o valor fuzzy  $B$ , dado um valor de entrada  $A$  e uma relação de implicação  $R_{A \rightarrow B}(x, y)$  relacionando ambas variáveis. O valor inferido  $B$  é calculado através da composição do valor  $A$  com a relação de implicação  $R$ :

$$B = A \circ R_{A \rightarrow B}(x, y) = A \circ (A \rightarrow B)$$

com função de pertinência (Arnould e Tano,1995) dada por:

$$\mu_B(y) = \sup_x \{ \min [ \mu_A(x); I(\mu_A(x), \mu_B(y)) ] \}$$

onde  $I : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é o operador implicação.

Como um exemplo da regra *modus ponens*, dado um fato observável (densidade é muito alta) e uma base de regras (se densidade é alta então solo é compactado), um conjunto fuzzy induzido pelo fato e pela regra, é dado por:

Fato	:	densidade é muito alta
Regra	:	se densidade é alta então solo é compactado
Conseqüência	:	solo é muito compactado.

Vários tipos de inferência fuzzy podem ser utilizados para relacionar as entradas e saídas de um conjunto finito de regras, e estas inferências diferem pelo tipo de operador e pelos tipos de proposições antecedentes e consequentes utilizados. O método de inferência determina a forma operacional do modelo fuzzy, e este é um mapeamento que define uma transformação do valor fuzzy de entrada em um valor de saída.

As bases de regras fuzzy podem ser constituídas de várias formas, de acordo com o número de variáveis lingüísticas apresentadas na entrada e na saída dos sistemas, determinando e classificando os modelos lingüísticos como: modelo SISO (Single-Input/Single-Output), modelo MISO (Multiple-Input/Single-Output) e modelo MIMO (Multiple-Input/Multiple-Output).

O modelo SISO (Single-Input/Single-Output), apresenta regras constituídas por uma única entrada e uma única saída. Neste caso o conhecimento é expresso por meio de um conjunto de regras possuindo a seguinte estrutura:

Regra 1 : se  $x$  é  $A_1$  então  $y$  é  $B_1$   
 ou  
 Regra 2 : se  $x$  é  $A_2$  então  $y$  é  $B_2$   
 ou  
 $\vdots$   
 ou  
 Regra  $n$  : se  $x$  é  $A_n$  então  $y$  é  $B_n$

onde  $x$  é a variável lingüística de entrada (antecedentes),  $y$  é a variável lingüística de saída (conseqüentes) e  $A_i$  e  $B_i$  são valores fuzzy (subconjuntos fuzzy dos conjuntos  $U$  e  $V$ , universos de discurso das variáveis) das entradas e saídas, em geral, os conjuntos fuzzy  $A_i$  e  $B_i$  estão associados a algum termo lingüístico, tais como, pequeno, médio, muito alto, baixo, rápido.

O modelo MISO (Multiple-Input/Single-Output) caracteriza-se por sistemas que consistem de múltiplas entradas e uma única saída. Uma base de regras para o modelo MISO com  $m$  regras e  $n$  variáveis fuzzy de entradas e uma variável fuzzy de saída tem a seguinte forma:

Regra 1 : Se  $x_1$  é  $A_{1,1}$  e  $x_2$  é  $A_{2,1}$  e ... e  $x_n$  é  $A_{n,1}$ , Então  $y$  é  $B_1$ ;  
 ou  
 Regra 2 : Se  $x_1$  é  $A_{1,2}$  e  $x_2$  é  $A_{2,2}$  e ... e  $x_n$  é  $A_{n,2}$ , Então  $y$  é  $B_2$ ;  
 ou  
 $\vdots$   
 ou  
 Regra  $m$  : Se  $x_1$  é  $A_{1,m}$  e  $x_2$  é  $A_{2,m}$  e ... e  $x_n$  é  $A_{n,m}$ , Então  $y$  é  $B_m$

onde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as variáveis lingüísticas de entrada e  $y$  é a variável de saída e  $A_{n,m}$  e  $B_m$ , subconjuntos de um universo de discurso  $U$  e  $V$ , respectivamente, os valores fuzzy de entrada e saída do modelo.

O modelo MIMO (Multiple-Input/Multiple-Output) apresenta múltiplas variáveis fuzzy de entrada e múltiplas variáveis fuzzy de saída, com as regras possuindo a seguinte forma:

- Regra 1 : Se  $x_1$  é  $A_{1,1}$  e  $x_2$  é  $A_{2,1}$  e ... e  $x_n$  é  $A_{n,1}$ ,  
Então  $y_1$  é  $B_{1,1}$ ,  $y_2$  é  $B_{2,1}, \dots$ ,  $y_s$  é  $B_{s,1}$ ;  
ou
- Regra 2 : Se  $x_1$  é  $A_{1,2}$  e  $x_2$  é  $A_{2,2}$  e ... e  $x_n$  é  $A_{n,2}$ ,  
Então  $y_1$  é  $B_{1,2}$ ,  $y_2$  é  $B_{2,2}, \dots$ ,  $y_s$  é  $B_{s,2}$ ;  
ou  
:  
ou
- Regra  $m$  : Se  $x_1$  é  $A_{1,m}$  e  $x_2$  é  $A_{2,m}$  e ... e  $x_n$  é  $A_{n,m}$ ,  
Então  $y_1$  é  $B_{1,m}$ ,  $y_2$  é  $B_{2,m}, \dots$ ,  $y_s$  é  $B_{s,m}$

onde as variáveis de entrada  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e os termos lingüísticos  $A_{i,j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, m$ , são definidos como no modelo MISO,  $y_1, y_2, \dots, y_s$  são as variáveis de saída e  $B_{i,j}$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , são subconjuntos fuzzy definidos no universo de discurso  $V_1, V_2, \dots, V_m$  das variáveis de saída.

Este capítulo tratou dos fundamentos básicos associados à teoria dos conjuntos e lógica fuzzy, buscando facilitar o entendimento e utilização dos sistemas fuzzy. Destaque foi dado aos modelos baseados em regras. No capítulo seguinte as características dos principais modelos de sistema fuzzy são descritas.



## Capítulo 2

# Sistemas de Inferência Fuzzy

Os sistemas de inferência fuzzy são sistemas que mapeiam as entradas advindas de um conjunto de dados resultante de medições ou observações experimentais em saídas precisas,  $y = f(x)$ , onde  $x$  é a entrada e  $y$  a saída do sistema de inferência fuzzy e  $f$  uma representação quantitativa do mapeamento.

A estrutura de um sistema de inferência é baseada em um conjunto de regras fuzzy incluindo quatro componentes básicos principais (Delgado, 2002)

1. – um fuzzificador, que traduz a informação de entrada em conjuntos fuzzy. A cada variável de entrada são atribuídos termos lingüísticos que são os estados da variável, e cada termo lingüístico é associado a um conjunto fuzzy traduzido por uma função de pertinência;
2. – uma base de conhecimento, que consiste de um conjunto de regras fuzzy e de uma base de dados. No conjunto de regras fuzzy (conhecido como base de regras) estão as declarações lingüísticas do tipo “se...então”, definidas por especialistas ou retiradas de um conjunto de dados numéricos. Na base de dados estão as variáveis lingüísticas, as definições dos respectivos universos de discursos e o conjunto de funções de pertinências;
3. – um método de inferência, que aplica um raciocínio fuzzy para obter uma saída fuzzy;
4. – um defuzzificador, que traduz a saída por um valor numérico.

As relações entre as variáveis de entrada e saída em um sistema fuzzy é, como já visto, representado através da forma geral: “se antecedente então

conseqüente”, e dependendo da forma da parte “então” (parte conseqüente), existem dois tipos de sistema de inferência fuzzy: sistema de inferência fuzzy Mamdani (onde as proposições do antecedente e do conseqüente são proposições fuzzy) e sistema de inferência fuzzy Takagi-Sugeno (onde o antecedente é uma proposição fuzzy e o conseqüente uma expressão funcional das variáveis lingüísticas definidas no antecedente).

## 2.1 Agregação

Em uma base de regras, quando mais de uma regra é acionada, as contribuições das diversas regras após a inferência são combinadas por um operador produzindo uma única regra. Este tipo de operador é denominado de agregação. Exemplos de operadores de agregação são as  $T$ -normas e  $S$ -normas. Para uma única regra  $R : A \rightarrow B$ , o processo de inferência de  $B$  a partir do fato  $A$ , e da regra fuzzy  $R$ , é dado por

$$B' = A \circ R = A \circ (A \rightarrow B).$$

Quando são apresentadas mais de duas regras, o raciocínio fuzzy é realizado sobre um conjunto de  $m$  regras fuzzy na forma

$$\text{Regra } i = R_i : \text{Se } x \text{ é } A_i \text{ então } y \text{ é } B_i, i = 1, 2, \dots, m.$$

Cada regra individual  $R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) é induzida por uma relação fuzzy diferente. Assim, o conjunto de regras, por sua vez, resulta numa relação fuzzy obtida pela agregação de todas as relações individuais, através da operação união

$$B' = \bigcup_{i=1}^m B_i' = \bigcup_{i=1}^m (A \circ R_i).$$

Em geral, o operador agregação, representado pelo símbolo “ $\bigcup$ ”, é caracterizado por uma  $S$ -norma, podendo ainda ser utilizado as  $T$ -normas.

Um exemplo de função para o operador agregação é o operador união, ou seja, a agregação do conjunto de regras é realizada através do operador união sobre todas as relações individuais (Ortega, 2001).

Utilizando a regra de inferência composicional de Zadeh (Zadeh,1973) para uma relação do tipo  $R_{A_i \rightarrow B_i}$ , onde  $A_i \in U$  e  $B_i \in V$ , e dado um conjunto fuzzy de  $U$  denotado por  $A$  e um conjunto fuzzy  $B'$  de  $V$ , a inferência  $B'$  é dada pela função de pertinência, através do operador max-min, por

$$\mu_{B'}(y) = \max_{x \in A} \{ \min(\mu_A(x); \mu_{R_i}(x, y)) \} ; x \in U, y \in V.$$

Para a agregação do conjunto de regras, vários métodos podem ser utilizados, na maioria dos casos o antecedente (parte “se”) é formado por proposições lingüísticas e a distinção entre os modelos se dá no conseqüente (parte “então”) das regras fuzzy. Entre os modelos mais conhecidos podem ser destacados

- – modelo de Mamdani (Delgado, 2002): utiliza conjuntos fuzzy tanto no antecedente como no conseqüente das regras fuzzy. A saída final é representada por um conjunto fuzzy resultante da agregação da saída inferida de cada regra. Para se obter uma saída final não fuzzy adota-se um dos métodos de transformação da saída fuzzy em não-fuzzy descritos na defuzzificação dos dados.
- – modelo de Takagi-Sugeno (Delgado, 2002): no qual o antecedente é uma proposição fuzzy e o conseqüente é representado por uma função das variáveis de entrada. A saída final é obtida pela média ponderada das saídas inferidas de cada regra. Os coeficientes da ponderação são dados pelos graus de ativação das respectivas regras.

A seguir, serão detalhados os dois sistemas mais comuns: Mamdani e Takagi-Sugeno.

## 2.2 Sistema de Mamdani

No sistema de Mamdani as saídas são construídas pela superposição dos conseqüentes das regras individuais do tipo

Regra  $i$  : Se  $x$  é  $A_i$  então  $y$  é  $B_i$

onde  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  é o número de regras,  $x$  é a variável lingüística de entrada,  $y$  é a variável lingüística de saída e  $A_i$  e  $B_i$  são subconjuntos fuzzy, respectivamente, dos universos de discursos  $U$  e  $V$ .

Cada uma das regras acima, pode ser expressa por uma relação fuzzy  $R_i$  interpretada como o produto cartesiano dos conjuntos fuzzy  $A_i$  e  $B_i$ ,

$$R_i = A_i \times B_i$$

ou seja, a relação  $R_i$  é um subconjunto de  $U \times V$ , com função de pertinência dada por:

$$\mu_{R_i}(x, y) = \min(\mu_{A_i}(x), \mu_{B_i}(y))$$

onde “min” (operador mínimo) é o operador de conjunção fuzzy.

A agregação dos conjuntos de regras é realizada através do operador união sobre todas as relações individuais e, desta maneira, denotando por  $R$  a união de todas estas relações tem-se:

$$R = \bigcup_{i=1}^n R_i$$

e a função de pertinência  $\mu_R(x, y)$  da relação fuzzy  $R$  é dada por

$$\mu_R(x, y) = \bigcup_{i=1}^n \mu_{R_i}(x, y) = \max \{ \min (\mu_{A_i}(x); \mu_{B_i}(y)) \}.$$

onde “max” (operador máximo) é um operador de disjunção fuzzy.

Dessa forma, dado um conjunto fuzzy de entrada  $A$ , o conjunto fuzzy de saída  $B'(y)$  é então obtida através da regra de inferência “max-min”

$$B'(y) = A(x) \circ R(x, y)$$

“ $\circ$ ” é um operador de composição, cuja função de pertinência é dada por

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) &= \bigcup_x \{ \mu_A(x) \wedge \mu_R(x, y) \} = \bigcup_x \left\{ \mu_A(x) \wedge \bigcup_{i=1}^n \mu_{R_i}(x, y) \right\} = \\ &= \bigcup_x \left\{ \bigcup_{i=1}^n (\mu_A(x) \wedge \mu_{R_i}(x, y)) \right\}. \end{aligned}$$

onde o símbolo “ $\bigcup$ ” representa o operador agregação e “ $\wedge$ ” é o operador  $T$ -norma.

Em resumo, o modelo de Mamdani de inferência fuzzy é baseado na composição “max-min” e dado pela definição a seguir.

**Definição 2.1.** *Sejam  $A, A'$  e  $B$  conjuntos fuzzy em  $U, U$  e  $V$  respectivamente. Supondo a implicação fuzzy  $A \rightarrow B$  expressa pela relação fuzzy  $R$  sobre  $U \times V$ , então o conjunto fuzzy  $B'$  induzido por “ $x$  é  $A$ ” e pela regra fuzzy “se  $x$  é  $A$  então  $y$  é  $B$ ” é definido por  $B' = A' \circ R = A' \circ (A \rightarrow B)$  com função de pertinência dada por*

$$\mu_{B'}(y) = \bigvee_{x \in U} \{ \mu_{A'}(x) \wedge \mu_R(x, y) \} = \max_{x \in U} \{ \min (\mu_{A'}(x); \mu_R(x, y)) \}$$

onde “ $\bigvee$ ” é o operador  $S$ -norma e “ $\wedge$ ” é o operador  $T$ -norma.

Sem perda de generalidade, podem ser consideradas bases com múltiplas regras fuzzy com múltiplos antecedentes da forma

Regra  $i$  : Se  $x_1$  é  $A_{1,i}$  e  $x_2$  é  $A_{2,i}$  e ...e  $x_n$  é  $A_{n,i}$  então  $y$  é  $B_i$ ,

onde,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $m$  é o número de regras,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são variáveis lingüísticas e  $A_{1,i}, A_{2,i}, \dots, A_{n,i}$  são conjuntos fuzzy, respectivamente, nos universos de discursos  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , e  $B_i$  são subconjuntos de um universo de discurso  $V$ , de valores fuzzy de saída do modelo.

A Figura 2.1 ilustra o processo de inferência “max-min” quando existem duas regras,  $A_1 \rightarrow B_1$  e  $A_2 \rightarrow B_2$ ,  $A'$  é o fato de entrada representado como um conjunto fuzzy.

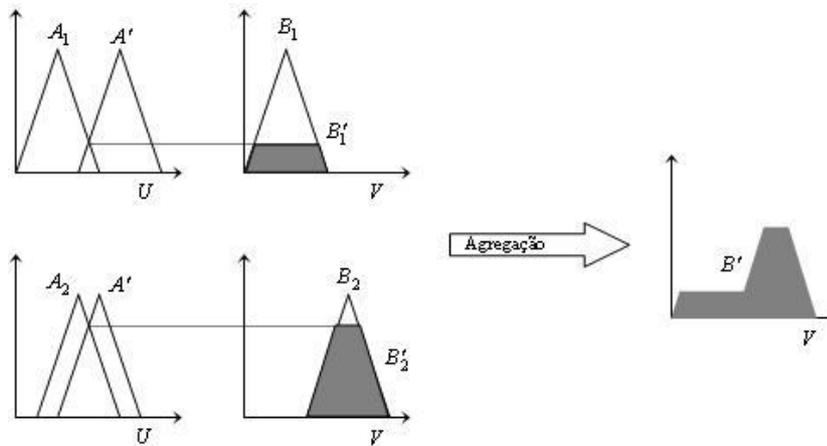


Figura 2.1: Mecanismo de inferência fuzzy de Mamdani.

Cada uma destas regras é interpretada através de uma implicação fuzzy

Regra  $i$  :  $\mu_{A_{1,i}}(x_1) \wedge \mu_{A_{2,i}}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{A_{n,i}}(x_n) \rightarrow \mu_{B_i}(y), i = 1, 2, \dots, m$

onde “ $\wedge$ ” denota uma  $T$ -norma,  $\mu_{A_{1,i}}(x_1) \wedge \mu_{A_{2,i}}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{A_{n,i}}(x_n)$  é uma relação fuzzy das entradas lingüísticas entre si, sobre o universo de discurso  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  e  $\mu_{B_i}(y)$  é a saída definida sobre o universo de discurso  $V$ .

Neste caso, cada uma das regras é expressa por uma relação fuzzy  $R_i$  como o produto cartesiano dos conjuntos fuzzy  $R_i = A_{1,i} \times A_{2,i} \times \dots \times A_{n,i} \times B_i$ , ou seja, a relação  $R_i$  é um subconjunto de  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \times V$ , com função de pertinência dada por

$$\mu_{R_i}(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = \mu_{A_{1,i}}(x_1) \wedge \dots \wedge \mu_{A_{n,i}}(x_n) \wedge \mu_{B_i}(y).$$

O conjunto de todas estas implicações corresponde a uma única relação fuzzy em  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \times V$ , obtida pelo operador união fuzzy máximo (max) sobre todas as relações individuais  $R_i$ , da forma

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = \bigcup_{i=1}^n R_i = \bigcup_{i=1}^n (\mu_{A_{1,i}}(x_1) \wedge \dots \wedge \mu_{A_{n,i}}(x_n) \rightarrow \mu_{B_i}(y))$$

e a função de pertinência da relação fuzzy  $R$  é dada por:

$$\begin{aligned} \mu_R(x_1, x_2, \dots, x_n, y) &= \bigcup_{i=1}^m \mu_{R_i}(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \\ &= \bigcup_{i=1}^m (\mu_{A_{1,i}}(x_1) \wedge \dots \wedge \mu_{A_{n,i}}(x_n) \wedge \mu_{B_i}(y)) \end{aligned}$$

com o símbolo “ $\bigcup$ ” denotando uma  $S$ -norma.

Dessa forma, para um dado conjunto de variáveis de entrada fuzzy  $A_{1,i}, A_{2,i}, \dots, A_{n,i}$ , o conjunto fuzzy de saída  $B(y)$  é então obtida através da regra de inferência “max-min”

$$B(y) = \bigcup_{i=1}^n (\mu_{A_{1,i}}(x_1) \wedge \mu_{A_{2,i}}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{A_{n,i}}(x_n)) \circ R(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$$

onde “ $\circ$ ” é um operador de composição, o símbolo “ $\bigcup$ ” representa o operador agregação, “ $\wedge$ ” é o operador  $T$ -norma e a função de pertinência dada por:

$$\mu_B(y) = \bigcup_{i=1}^n (\mu_{A_{1,i}}(x_1) \wedge \mu_{A_{2,i}}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{A_{n,i}}(x_n)) \wedge \mu_R(x_1, x_2, \dots, x_n, y).$$

Nesta expressão tem-se representado um sistema de inferência fuzzy de Mamdani para um sistema MISO, podendo esta ser estendida para um

sistema MIMO com  $m$  saídas para um conjunto de  $n$  bases de sub-regras MISO agrupadas (Serra, 2005) da seguinte forma:

$$B(y) = \bigcup_{i=1}^n (\mu_{A_{1,i}}(x_1) \wedge \dots \wedge \mu_{A_{n,i}}(x_n)) \circ R_{MIMO}(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$$

onde,  $B(y)$  é um vetor

$$B(y) = [ B(y_1) \quad B(y_2) \quad \dots \quad B(y_m) ]^T$$

e

$$R_{MIMO}(x_1, \dots, x_n, y) = \bigcup_{j=1}^m \left\{ \bigcup_{i=1}^n (\mu_{A_{1,i}}(x_1) \wedge \dots \wedge \mu_{A_{n,i}}(x_n)) \wedge \mu B(y_j) \right\}$$

com “ $\bigcup$ ” o operador união representando a coleção de todas as relações fuzzy de um sistema MISO associadas a cada uma das saídas  $y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

### 2.3 Sistema de Takagi-Sugeno

O sistema de inferência fuzzy Takagi-Sugeno, representa um sistema dinâmico ou um controle que associa um conjunto de regras lingüísticas no antecedente (parte “se”) com proposições fuzzy, e no conseqüente (parte “então”) são apresentadas expressões funcionais, do tipo  $y = f(x)$ , das variáveis lingüísticas do antecedente, ao invés de conjuntos fuzzy como usados no modelo de Mamdani.

A base de regras fuzzy para o modelo de Takagi-Sugeno, é da forma:

Regra  $i$  : Se  $x_1$  é  $A_{1,i}$  e ... e  $x_n$  é  $A_{n,i}$  então  $y_i = f_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$

onde  $m$  é o número de regras,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as variáveis de entrada,  $A_{1,i}, A_{2,i}, \dots, A_{n,i}$  são conjuntos fuzzy no antecedente das regras de um sistema MISO, nos universos de discursos  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , respectivamente, e  $f_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , são funções lineares ou não-lineares das variáveis numéricas de entrada.

No caso em que  $x = [ x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n ]^T$  é um vetor de dimensão  $n$ , as regras fuzzy para o modelo de Takagi-Sugeno podem ser escritos na forma:

Regra  $i$  : Se  $x_1$  é  $A_{1,i}$  e  $x_2$  é  $A_{2,i}$  e ... e  $x_n$  é  $A_{n,i}$   
então  $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$

onde os  $n$  conjuntos fuzzy  $A_{1,i}, A_{2,i}, \dots, A_{n,i}$  do antecedente da regra  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) formam uma região no espaço de entrada de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , respectivamente, denominada de superfície fuzzy entrada-saída.

A saída do modelo de Takagi-Sugeno (Ortega,2001) é definida como a soma ponderada dos conseqüentes  $y_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), de cada subsistema linear, de forma análoga à realizada no modelo de Mamdani, dada por:

$$y = \sum_{i=1}^m \tau_i y_i$$

onde,

$$\tau_i(x) = \frac{h_i(x)}{\sum_{j=1}^m h_j(x)}$$

é o grau de ativação normalizado para a regra  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), com o grau de ativação  $h_i$  para a regra  $i$  dada por

$$h_i(x) = \mu_{A_{1,i}}(x_1) \wedge \mu_{A_{2,i}}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{A_{n,i}}(x_n) ; i = 1, 2, \dots, m$$

onde  $x_j$  é um ponto do universo de discurso  $U_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

A Figura 2.2 ilustra o processo de inferência de Takagi-Sugeno quando existem duas regras definidas por:

Regra 1 : Se  $x_1$  é  $A_{1,1}$  e  $x_2$  é  $A_{2,1}$  então  $y_1 = f_1(x_1, x_2)$   
Regra 2 : Se  $x_1$  é  $A_{1,2}$  e  $x_2$  é  $A_{2,2}$  então  $y_2 = f_2(x_1, x_2)$

onde  $y_i = f_i(x_1, x_2) = p_i x_1 + q_i x_2 + r_i$ ,  $i = 1, 2$ .

## 2.4 Defuzzificação

A ação de controle consiste da união de todas as funções fuzzy ativadas. O valor final, ou seja, aquele que será apresentado pelas saídas do sistema fuzzy, será determinado pelo processo de defuzzificação.

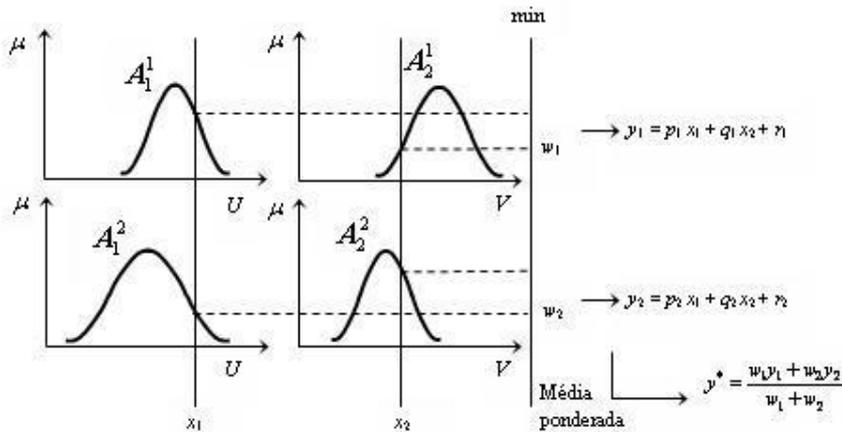


Figura 2.2: Mecanismo de inferência fuzzy de Takagi-Sugeno.

A defuzzificação consiste em determinar o valor da estimacão não-fuzzy, ou seja, obter a melhor representao para o conjunto de saída fuzzy, aplicando um método de defuzzificao no conjunto  $B = \bigcup_{i=1}^m B_i'$  resultante da agregao de todos os conjuntos fuzzy da saída  $B_i'$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Desta forma, defuzzificao consiste em converter os dados fuzzy em valores numéricos precisos, utilizando vários métodos para encontrar a saída do sistema, sendo os principais: método do centro de área (centróide), método do máximo e o método da média dos máximos. No método centróide, procura-se encontrar o ponto de domínio associado ao centro de massa da região de saída. No método do máximo, a saída é o ponto no domínio com o maior grau de pertinência. E o método do centro dos máximos calcula a média das saídas com alto grau de pertinência.

### 1. Método do Centro de rea

O método do centro de rea (*CDA*), ou método centróide, é a técnica de defuzzificao mais comumente usada (Ortega, 2001). Neste caso, o valor de saída é aquele que divide ao meio a área da funo de pertinência gerada pela combinao das conseqüentes das regras. Ainda, o método do centro de área pode ser compreendido como uma média ponderada, onde  $\mu_A(x)$  funciona como o peso do valor  $x$ . A defuzzificao da conclusão fuzzy  $A$  é dada por:

$$CDA = \begin{cases} \frac{\sum_x \mu_A(x) \cdot x}{\sum_x \mu_A(x)} & \text{se } x \text{ é discreto} \\ \frac{\int_x \mu_A(x) \cdot x \, dx}{\int_x \mu_A(x) \, dx} & \text{se } x \text{ é contínuo.} \end{cases}$$

## 2. Método da Média dos Máximos

O método de defuzzificação da média dos máximos (*MM*) calcula a média de todos os valores de saída que tenham os maiores graus de pertinências. Supondo que “ $y$  é  $B$ ” é uma conclusão fuzzy que deve ser defuzzificada, o método de defuzzificação pode ser expresso como:

$$MM = \sum_{i=1}^m \frac{y_i^*}{m}$$

onde  $y_i^*$  são os valores do universo de discurso de  $B' = \bigcup_{i=1}^m B_i'$  que contém graus de pertinências máximos e  $m$  é a quantidade deles.

## 2.5 Sistema de Inferência Fuzzy Neuro Adaptativo (ANFIS)

Os sistemas de inferência fuzzy permitem que sistemas fuzzy sejam elaborados por um conjunto de regras fuzzy através de proposições condicionais, do tipo “se ... então”, baseadas nas variáveis lingüísticas para executar um processo de tomada de decisão.

Takagi e Sugeno (1985) estão entre os pesquisadores pioneiros a proporem estruturas de sistemas de inferência fuzzy próprio à agregação, ou seja, sistemas de inferência fuzzy baseada em um conjunto de padrões de ajuste para a sua definição. Ainda, segundo os mesmos autores, o sistema fuzzy paramétrico se baseia no espaço das variáveis de entradas onde é realizada uma partição fuzzy, e em cada subespaço fuzzy, que corresponde a uma regra, se estabelece uma relação linear entre a variável de entrada e a variável de saída.

Sistemas de inferência fuzzy tem sido utilizados para modelar processos complexos, não lineares e vagos, com base em um conjunto regras do tipo “se ... então”, que representam as entradas e saídas do modelo, que combinadas com métodos de redes neurais artificiais, dão origem a um novo método classificado como híbrido. Deste modo, os sistemas neuro-fuzzy combinam a capacidade de aprendizado das redes neurais artificiais, através de dados de treinamento, com o poder de interpretação lingüístico dos sistemas de

inferência fuzzy. Neste caso, uma rede adaptativa baseada em um sistema de inferência fuzzy implementa um sistema de inferência fuzzy do tipo Takagi-Sugeno e redes neurais.

Uma rede neural adaptativa se caracteriza por um grafo formado por nós e conexões, onde os nós representam entradas e saídas, e cada um destes nós representa uma unidade de processamento, tendo associado a ele uma função. Cada arco do grafo indica uma relação entre os nós conectados. O conjunto de nós pode ser dividido em dois subconjuntos: os nós adaptativos, cujas saídas dependem não só de suas entradas, mas também de parâmetros modificáveis, internos ao modelo; e, em caso contrário, os nós, cuja função depende somente das entradas, denominados não adaptativos. Em geral, para se representar as redes neurais adaptativas, são utilizados retângulos para os nós adaptativos e círculos para os nós não adaptativos.

Dentre as abordagens que usam métodos híbridos destaca-se o sistema de inferência fuzzy neuro adaptativo (ANFIS), do inglês Adaptive-Network-based Fuzzy Inference System, proposto por Jang (1993). O modelo ANFIS funciona de modo equivalente aos sistemas de inferência fuzzy, e suas capacidades adaptativas as fazem aplicáveis a uma grande quantidade de áreas de estudos como, por exemplo, em classificação de dados e extração de características a partir de modelos. Uma propriedade do modelo ANFIS é que o conjunto de parâmetros pode ser decomposto para utilizar uma regra de aprendizagem híbrida mais eficiente que os mecanismos tradicionais encontrados na literatura.

O modelo ANFIS é uma ferramenta disponível no programa MATLAB que suporta apenas o sistema de Takagi-Sugeno de ordem zero ou um, e permite várias variáveis de entrada, porém, com somente uma variável saída que o faz ser identificado como um modelo MISO, e os pesos entre as regras são iguais à unidade.

### 2.5.1 Arquitetura do modelo ANFIS

Diferentes sistemas de inferência fuzzy proporcionam diferentes arquiteturas para o modelo ANFIS. O sistema de inferência fuzzy construído é do tipo Takagi-Sugeno, definido por um conjunto de regras da forma:

$$\text{se } x \text{ é } A \text{ e } y \text{ é } B, \text{ então } z = f(x, y)$$

onde  $x$  e  $y$  são variáveis fuzzy,  $A$  e  $B$  são conjuntos fuzzy e  $f$  é uma função de  $x$  e  $y$  que aproxima o valor de  $z$ . Usualmente a função  $f$  é uma combinação linear das variáveis de entradas, cujos coeficientes são estimados usando mínimos quadrados.

A funcionalidade do modelo neuro-fuzzy com base no modelo do tipo de Takagi-Sugeno de primeira ordem (combinações lineares das entradas) e no algoritmo ANFIS, considerando, por exemplo, um sistema de inferência fuzzy de duas entradas,  $x_1$  e  $x_2$ , uma saída,  $f$ , e composto por duas regras fuzzy:

Regra 1 : Se  $x_1$  é  $A_1^1$  e  $x_2$  é  $A_2^1$ , então  $f_1 = p_1x_1 + q_1x_2 + r_1$

Regra 2 : Se  $x_1$  é  $A_1^2$  e  $x_2$  é  $A_2^2$ , então  $f_2 = p_2x_1 + q_2x_2 + r_2$

pode ser representada pela Figura 2.3.

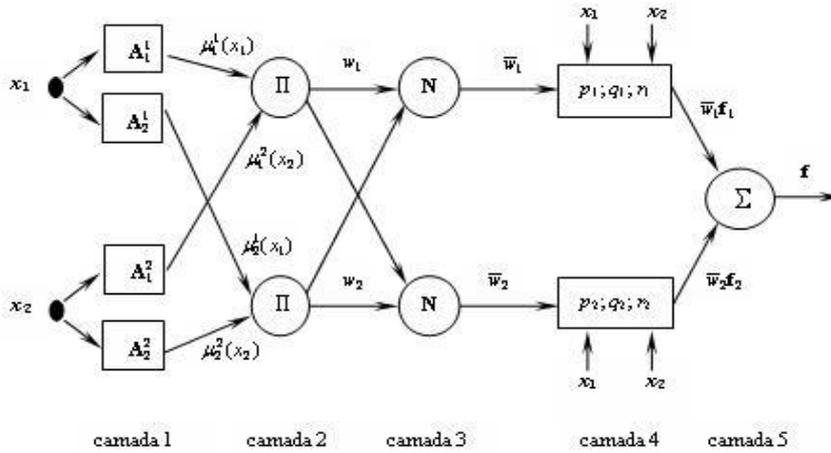


Figura 2.3: Mecanismo da arquitetura ANFIS.

A arquitetura do ANFIS é composta por 5 camadas, os nós da camada 1 e 4 são adaptativos sendo seus valores os parâmetros das partes antecedentes e conseqüentes da regra, respectivamente. A Figura 2.3 apresenta a arquitetura ANFIS equivalente ao mecanismo do raciocínio utilizado para o modelo do tipo de Takagi-Sugeno, onde os nós situados na mesma camada desempenham tarefas similares.

Cada camada da rede neural realiza um processo específico na inferência da saída do sistema, com os nós das camadas adjacentes conectadas entre si conforme descrito a seguir

Camada 1: Os nós desta camada são representados por:

$$O_j^1 = \mu_i^j(x_i)$$

onde,  $i = 1, 2$  é o número de variáveis e  $j = 1, 2$  é o número regras. Os nós são constituídos pelos conjuntos fuzzy  $A_i^j$ ,  $i, j = 1, 2$ , associados às variáveis de entrada  $x_i$ ,  $i = 1, 2$ . A saída de cada nó é o grau de pertinência do valor  $x_i$  ao conjunto fuzzy  $A_i^j$ . Todos os nós são adaptativos, possuem parâmetros que podem ser ajustados, e as funções de pertinências  $\mu_i^j(x_i)$  podem ser definidas de várias maneiras; triangulares, trapezoidais, gaussianas, sigmóides e outras, com a restrição de que estas funções devem ser diferenciáveis. A função de pertinência do tipo gaussiana possui formato do tipo de sino, com imagem no intervalo  $[0, 1]$ , definida por

$$\mu_i^j(x_i) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x_i - c_i^j}{\sigma_i^j} \right)^2 \right\}$$

onde,  $i = 1, 2$  é o número de variáveis e  $j = 1, 2$  é o número regras,  $x_i$  é a variável de entrada e  $c_i^j$  e  $\sigma_i^j$  são os parâmetros ajustáveis das funções de pertinências, e denominados parâmetros antecedentes, os quais são coeficientes não lineares, e correspondem ao centro e a variabilidade da função de pertinência.

Camada 2: Cada nó desta camada é não adaptativo, não tem parâmetros para serem ajustados, e tem como saída  $w_j = w_j(\mu_1^j, \mu_2^j)$ ,  $j = 1, 2$  o produto dos sinais de entrada de suas entradas

$$O_j^2 = w_j = \prod_{i=1}^2 \mu_i^j = \mu_1^j \times \mu_2^j$$

Cada saída  $w_j$  corresponde à intensidade de disparo de uma regra, ou seja, calcula com que grau de pertinência o conseqüente da regra está sendo atendido. Os neurônios desta camada simbolizam a operação de  $T$ -norma e, em geral, se pode utilizar outro operador, em lugar do produto. Para regras que empregam o conectivo “e”, os operados mais usados são o “produto”, e o operador mínimo (“min”) dado por:

$$O_j^2 = w_j = \prod_{i=1}^2 \mu_i^j = \min(\mu_1^j, \mu_2^j) ; j = 1, 2$$

Camada 3: Os nós desta camada não são adaptativos. A saída deste nó é definida por  $\bar{w}_j = \bar{w}_j(\mu_1^j, \mu_2^j)$ ,  $j = 1, 2$ , como a razão entre a intensidade de disparo da  $j$ -ésima regra e a soma dos disparos de todas as outras regras, denominada de intensidade de disparo normalizado, dada por:

$$O_j^3 = \bar{w}_j = \frac{w_j}{\sum_{i=1}^2 w_i} = \frac{w_j}{w_1 + w_2} ; j = 1, 2$$

A normalização é utilizada como um pré-processamento para a defuzzificação do sistema.

Camada 4: Cada nó desta camada é adaptativo e seus parâmetros,  $p_j$ ,  $q_j$ , e  $r_j$ ,  $j = 1, 2$ , correspondem à parte do conseqüente de cada regra do modelo. As saídas são calculadas pelo produto entre os níveis de disparos normalizados e o valor do conseqüente da regra. Assim, a saída  $f_j = f_j(\bar{w}_j, x_1, x_2, p_j, q_j, r_j)$  corresponde à saída parcial da  $j$ -ésima regra, dada por:

$$O_j^4 = f_j = \bar{w}_j (p_j x_1 + q_j x_2 + r_j) ; j = 1, 2$$

onde,  $\bar{w}_j$ ,  $j = 1, 2$ , é a saída da camada 3 e  $\{ p_j, q_j, r_j \}$  é o conjunto de parâmetros do conseqüente de cada regra, ou seja, os valores  $p_j$ ,  $q_j$ , e  $r_j$  correspondem aos conseqüentes 'singletons' ou aos conseqüentes do modelo de Takagi-Sugeno de primeira ordem (combinações lineares das entradas).

Camada 5: Esta camada é constituída por um único nó, não adaptativo. O nó desta última camada da arquitetura calcula a saída do sistema e, juntamente com os nós das camadas 3 e 4, promove a defuzzificação do sistema. A sua saída  $f = f(f_1, f_2)$ , que é a saída global do modelo, é definida como a soma de todas as saídas parciais  $f_j$ ,  $j = 1, 2$ :

$$O_j^5 = f = \sum_{j=1}^2 f_j.$$

A aprendizagem do sistema ANFIS tem dois conjuntos de parâmetros que devem ser treinados: os parâmetros do antecedente, que são as constantes que caracterizam as funções de pertinências, e os parâmetros do conseqüente, que são os parâmetros lineares da saída do modelo de inferência. A aprendizagem do modelo ANFIS emprega algoritmos do gradiente descendente para otimizar os parâmetros do antecedente e o algoritmo de mínimos quadrados para determinar os parâmetros lineares do conseqüente, ou seja, o aprendizado é realizado em duas etapas, dadas a seguir, que se repetem

até que o critério de parada seja alcançado

Etapa 1 - os parâmetros do antecedente permanecem fixos, e se utiliza do algoritmo de estimação de mínimos quadrados sobre os parâmetros do conseqüente para cada regra. Uma vez identificado os parâmetros do conseqüente, o erro é calculado como a diferença entre a saída da rede e a saída desejada apresentada nos pares de treinamento. Uma das medidas mais usuais para o erro de treinamento é a soma de erros quadráticos, definido por:

$$SEQ = \sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k)^2$$

onde,  $N$  é o número de pares observados,  $y_k$  correspondem aos dados de treinamento proporcionados (saídas desejadas) e  $\hat{y}_k$  é a correspondente saída da rede;

Etapa 2 - os parâmetros dos conseqüentes permanecem fixos, e se utiliza o algoritmo de retropropagação sobre os parâmetro do precedente para cada regra.

Estas etapas são executadas até que o número de épocas (interações) de treinamento ou o valor do erro, ambos pré-fixados, sejam atingidos primeiro pela rede. Ressalta-se que um número grande de épocas de treinamento pode levar a uma deformidade das funções de pertinência.

O modelo ANFIS ajusta através do algoritmo backpropagation os parâmetros das funções de pertinência, as quais serão de um tipo único (todas triangulares, todas gaussianas, etc), dependendo da escolha realizada. O método dos mínimos quadrados é usado para encontrar os coeficientes das funções lineares, que formam o conseqüente das regras fuzzy.

A aprendizagem da rede é obtida combinando o algoritmo de backpropagation e o método dos mínimos quadrados. Para cada época de treinamento o método é realizado através de uma passagem à frente (forward step) e uma passagem para trás (backward step). Na passagem à frente, para cada vetor de entrada, a rede é avaliada até a camada 4, e os parâmetros do conseqüente são estimados usando o método de mínimos quadrados. Em seguida, são calculados os erros para cada par do conjunto de treinamento, ou seja, os erros são estimados pela soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e o observado. No passo para trás, os erros são propagados e os parâmetros dos antecedentes são modificados pelo mecanismo do algoritmo de backpropagation.

## 2.5.2 Algoritmo de aprendizagem da estrutura ANFIS

A aprendizagem da estrutura ANFIS envolve a seleção de variáveis, a determinação do número de funções de pertinência por variável e a obtenção de um conjunto de regras fuzzy. Para se obter um conjunto de regras fuzzy Chiu (1994) desenvolveu uma técnica de agrupamento fuzzy denominada agrupamento subtrativo, utilizada para particionar o espaço de entrada e saída de um conjunto de dados.

Quando não se conhece “a priori” quantos agrupamentos deve haver para um determinado conjunto de dados, o agrupamento subtrativo é um algoritmo rápido e robusto para saber este número. Ainda, esta técnica permite a localização do centro do agrupamento, sendo as funções de pertinência e as regras obtidas a partir destes centros de agrupamento e, portanto, com estas informações é possível gerar um sistema de inferência fuzzy do tipo Takagi-Sugeno que modela o comportamento dos dados.

O procedimento do método do algoritmo de agrupamento subtrativo desenvolvido por Chiu (1994) considera um conjunto de  $N$  amostras (vetores de observações) de dados,  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , definidas em um espaço de dimensão  $m + n$  (no problema da identificação do sistema,  $m$  é o número de entradas e  $n$  é o número de saídas) e que são normalizados em cada uma das dimensões.

Como se referiu, cada uma das observações define um eventual candidato a centro de um agrupamento e uma medida potencial associada ao ponto  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , para servir como centro do agrupamento, é dado por:

$$p_i = \sum_{j=1}^N \exp\left\{-\frac{4}{r_a^2} \cdot \|x_i - x_j\|^2\right\}$$

onde  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $r_a^2$  é uma constante que define o raio de vizinhança de cada centro de agrupamento e  $\|\cdot\|$  denota a norma euclidiana.

Da expressão pode ser observado que os pontos  $x_j$  localizados fora do raio de ação de  $x_i$  irão ter influência pequena no potencial do ponto. Em caso contrário, quanto mais próximo estiverem os pontos na vizinhança de  $x_i$  maior será a influência no potencial. Assim, o potencial associado a cada ponto vai depender de sua distância a todos os outros, o que faz com que pontos com uma vizinhança densa irá originar um potencial elevado para o seu centro.

Após o cálculo do potencial de cada um dos pontos, aquele com maior potencial é selecionado como o primeiro centro de agrupamento. Considerando  $x_1^*$ , o primeiro centro, e  $p_1^*$ , seu valor potencial, haverá uma revisão do potencial de cada ponto  $x_i$  conforme

$$p_i \leftarrow p_i - p_1^* = \exp\left\{-\frac{4}{r_b^2} \cdot \|x_i - x_1^*\|^2\right\}$$

onde  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $r_b^2 > 0$  é uma constante que define o raio de vizinhança de cada centro ou a distância onde os pontos serão afetados pela redução de potencial.

Deste modo, é feita uma subtração do potencial de cada ponto em função da distância do centro do primeiro agrupamento. Os pontos próximos ao centro do primeiro agrupamento têm potencial muito reduzido e, portanto, pouca possibilidade de serem escolhidos como o próximo centro de agrupamento. Em geral, o valor atribuído a  $r_b$  deve ser um pouco superior a  $r_a$ , para se obter grupos espaçados. De acordo com Chiu (1994) define-se o valor do raio de vizinhança  $r_b$  por:  $r_b = 1,25 \cdot r_a$ .

Efetuada a redução de potencial de cada ponto, pela última expressão, aquele que apresentar o maior potencial é escolhido para ser o local do segundo centro de agrupamento e, assim sucessivamente, efetuando-se a redução de potencial de maneira análoga para todos os pontos restantes. De modo geral, após ser obtido o  $k$ -ésimo centro de agrupamento o potencial de cada ponto é reduzido por

$$p_i \leftarrow p_i - p_k^* = \exp\left\{-\frac{4}{r_b^2} \cdot \|x_i - x_k^*\|^2\right\}$$

onde  $x_k^*$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , é a localização do centro do  $k$ -ésimo agrupamento,  $p_k^*$  é o seu valor potencial e  $r_b$  é uma constante positiva que define o raio de vizinhança de cada centro.

O processo de seleção de novos centros e a redução de potencial se repete de modo iterativo até que todos os pontos estejam abaixo de uma fração de potencial do primeiro centro de agrupamento  $p_1^*$ ; como critério de parada do processo toma-se  $p_k^* < (1,5) \cdot p_1^*$ .

Esta fração de potencial é um parâmetro  $\varepsilon$  que especifica o limiar entre a aceitação ou rejeição do potencial de um ponto como centro de agrupamento, isto é, se a relação entre o potencial do ponto e o do primeiro centro é superior a  $\varepsilon$ , então ele é aceito como candidato a centro; em caso contrário, especifica o limiar oposto segundo o qual o ponto é rejeitado como candidato ao centro, pondo fim ao processo de procura. Recomenda-se o parâmetro  $\varepsilon = 0,5$  um limiar para o qual o ponto é aceito  $\varepsilon = 0,15$  o limiar no qual o ponto é rejeitado.

Para um conjunto  $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*\}$  de  $k$  centros de agrupamentos em um espaço  $m$ -dimensional, se as  $n$  primeiras dimensões correspondem às variáveis de entrada e as últimas  $m-n$  dimensões correspondem às variáveis de saída, cada vetor  $x_i^*$  pode ser decomposto em dois vetores componentes:

$y_i^* \in \mathfrak{R}^n$  e  $z_i^* \in \mathfrak{R}^{m-n}$  tal que  $x_i^* = [y_i^* \mid z_i^*]^\top$ . Cada centro de agrupamento  $x_i^*$  representa uma regra fuzzy da forma:

“se a entrada está próxima de  $y_i^*$ , então a saída está próxima de  $z_i^*$ ”

onde  $y_i^*$  é a localização do centro de agrupamento no espaço de entrada e  $z_i^*$  é a localização do centro de agrupamento no espaço de saída.

Para um vetor de entrada  $y$ , o grau no qual a regra  $i$  é ativada é definido por:

$$g_i = \exp\left\{-\frac{4}{r_a^2} \cdot \|y_i - y_i^*\|^2\right\}$$

onde,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $r_a$  é o raio de vizinhança de cada centro de agrupamento e o vetor de saída  $z$  é calculado por:

$$z = \frac{\sum_{i=1}^k g_i z_i^*}{\sum_{i=1}^k g_i}$$

O modelo neuro-fuzzy obtido pode ser visto em termos de um sistema de inferência através de uma base de regras fuzzy do tipo “se ... então ...”, sendo cada uma das regras da forma:

“se  $y_1$  é  $\mu_{A_{i1}}$  e  $y_2$  é  $\mu_{A_{i2}}$  e...e  $y_n$  é  $\mu_{A_{in}}$  então  $z$  é  $\mu_{B_i}$ ”

onde  $y_i$  é a  $i$ -ésima variável de entrada,  $z$  a variável de saída,  $\mu_{A_{ij}}$  é uma função de pertinência da  $i$ -ésima regra associada com à  $j$ -ésima entrada e  $\mu_{B_i}$  é uma função de pertinência (singleton) na  $i$ -ésima regra associada à variável de saída.

A  $i$ -ésima regra tem função de pertinência, cujo centro do agrupamento é representado por  $x_i^*$ , dada por:

$$\mu_{A_{ij}}(y_i) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_i - y_{ij}^*}{\sigma_{ij}}\right)^2\right\}$$

onde  $y_{ij}^*$  é o  $j$ -ésimo elemento de  $y_i^*$  e  $\sigma_{ij} = 1/2\alpha$ , com  $\alpha = 4/r_a^2$ .

O algoritmo descrito por Chiu (1994), é utilizado na estimação do número de regras necessárias à definição de um modelo fuzzy baseado em um conjunto de dados, e não necessita de ser especificado previamente o número de agrupamentos no modelo. No entanto, é importante notar que o parâmetro  $r_a$ , raio de vizinhança do agrupamento, está diretamente relacionado com o número de regras e/ou agrupamentos encontrados. Assim, um raio pequeno gera um número elevado de regras e/ou agrupamentos, o que, no

caso de ser excessivo, pode redundar em problemas de sobre ajustamento, não dando boas generalizações. Por outro lado, um raio grande produz um número menor de regras e/ou agrupamentos, o que poderá gerar modelos com capacidades de aproximação reduzidas, no caso do número de regras se mostrar pequeno. Deste modo, em aplicações práticas é necessário o teste de diversos valores para  $r_a$  e selecionar o mais adequado em função dos resultados obtidos. Quanto ao parâmetro  $r_b$ , este tem uma relação constante com  $r_a$ , e por definição,  $r_b$  afeta igualmente o número de centros obtidos, sendo necessário também experimentar valores diferentes em algumas ocasiões.

Neste capítulo foram apresentadas as principais características dos modelos de sistemas fuzzy, Mamdani e Takagi-Sugeno e também ao sistema de inferência fuzzy neuro-adaptativo (ANFIS), os quais são usados para modelar processos complexos, não lineares com base em um conjunto de regras. No próximo capítulo são descritas duas aplicações: uma referente a estimação da densidade de solos e outra relativa classificação de vertentes.



## Capítulo 3

# Aplicações

### 3.1 Modelo Fuzzy para a Densidade do Solo

Para a construção de um modelo fuzzy (Benini, 2007), considerando um solo do tipo Latossolo Roxo em que não houve nenhum tipo de preparo, foram utilizados 104 observações compostas de três características do solo na profundidade de 0 a 40 centímetros, que são: a resistência à penetração, representada pelo índice de cone (iCone), em quilopascal (kPa), o teor de água, representada pela umidade do solo, em porcentagem (%), e a textura do solo, representada pela quantidade de argila, em porcentagem (%), entre 30% e 50%. Estas observações foram separadas aleatoriamente em dois arquivos de dados, um constituindo o conjunto de treinamento (84 observações) e o outro o conjunto de teste (20 observações).

Foram consideradas três variáveis: duas de entradas, resistência à penetração e teor de água do solo, e uma de saída representando a densidade do solo. Na Tabela 3.1 são mostrados os universos de discurso para cada uma das variáveis.

Para a identificação do modelo, após simulações, foram atribuídos aos parâmetros de ajustes os valores,  $r_a = 0.65$  e  $r_b = 1.25$ , para determi-

Variável de entrada	Universo de discurso
Resistência à penetração ( $kPa$ )	[ 463.4 , 8152.3 ]
Teor de água (%)	[ 12.51 , 22.04 ]
Variável de saída	Universo de discurso
Densidade do solo ( $kg.dm^{-3}$ )	[ 1.41 , 1.67 ]

Tabela 3.1: Universo de discurso das variáveis de entrada e saída.

nar o número de funções de pertinência das variáveis de entrada e, conseqüentemente, o número de regras para o modelo, observando o menor erro obtido para o conjunto de treinamento como para o conjunto de teste, com o objetivo de obter o melhor desempenho do modelo. Em virtude de não se conhecer o comportamento do erro, o número de interações (épocas de treinamento) foi considerado 500 épocas e o erro de tolerância igual a zero.

Na fase de treinamento, o modelo neuro-fuzzy calcula a saída do erro em 0.0437 com respeito aos dados de treinamento e um erro de 0.0547 com respeito ao erro de teste do modelo, indicando uma boa generalização para o modelo. Verifica-se que após 250 interações a diferença entre os erros de treinamento e de teste foi constante durante todas as interações restantes. Vale ressaltar que quanto mais próximos os valores dos erros estiverem, melhor é o desempenho do modelo, pois isto indica uma boa generalização para o modelo. Na Figura 3.1 estão representados os erros de treinamento e de teste para todas as interações.

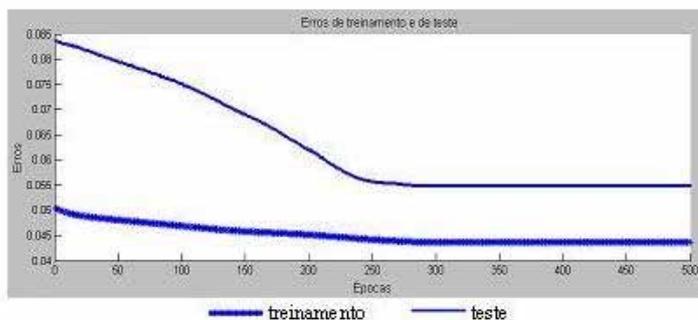


Figura 3.1: Erros de treinamento e de teste para os dado do solo.

Para a determinação do modelo, o sistema ANFIS fornece cinco funções de pertinência para a variável resistência à penetração e cinco funções para a variável teor de água, todas do tipo gaussiano, pois é a combinação dos valores dos parâmetros de ajustes considerados que apresenta o menor erro de treinamento e de teste entre todos os outros valores envolvidos na simulação.

O modelo identificado para estimar a densidade do solo é então constituído de duas variáveis de entrada, com cinco conjuntos fuzzy associados a cada uma das variáveis, cinco regras com os antecedentes de cada uma conectados pelo operador “e” e, portanto, cinco funções lineares, cada qual, representando a parte do conseqüente da regra fuzzy.

Modelo de inferência neuro-fuzzy	
Operador "e"	Produto
Número de nós	35
Número de parâmetros lineares	15
Número de parâmetros não lineares	20
Número total de parâmetros	35
Número de pares de dados treinamento	84
Número de pares de teste	20
Número de regras fuzzy	5

Tabela 3.2: Caracterização do modelo neuro-fuzzy (ANFIS).

Funções	Parâmetros	Variáveis de entrada	
		iCone	Umidade
$\mu_1$	$\sigma$	1766.9	1.42
	$m$	1718.6	20.20
$\mu_2$	$\sigma$	1766.9	1.37
	$m$	2909.6	17.29
$\mu_3$	$\sigma$	1766.9	1.00
	$m$	4199.8	18.54
$\mu_4$	$\sigma$	1766.9	2.43
	$m$	1671.2	21.39
$\mu_5$	$\sigma$	1766.9	2.19
	$m$	5995.3	13.69

Tabela 3.3: Parâmetros das funções de pertinência para o modelo neuro-fuzzy.

Na Tabela 3.2 é dada a caracterização do modelo, obtido através do ANFIS, e a Tabela 3.3 apresenta os parâmetros das funções de pertinência, onde o parâmetro  $m$  denota o centro da função e  $\sigma$  a variação dos dados observados com relação à sua média.

Estas funções de pertinência são simétricas e caracterizadas pelos seus centros  $m$  e variabilidades  $\sigma$ . O centro de cada função de pertinência representa o ponto que melhor caracteriza cada uma destas regiões. Na Figura 3.2 são dadas as regiões para as cinco funções de pertinência para a variável resistência à penetração do solo, em quilopascal (kPa).

Pela Tabela 3.3, as funções de pertinência que definem os conjuntos fuzzy para as variáveis resistência à penetração do solo (iCone) e teor de água (umidade) são dadas na Tabela 3.4.

Para cada função de pertinência é identificado um intervalo para cada um dos espaços da variável de entrada considerada. Assim, tendo como

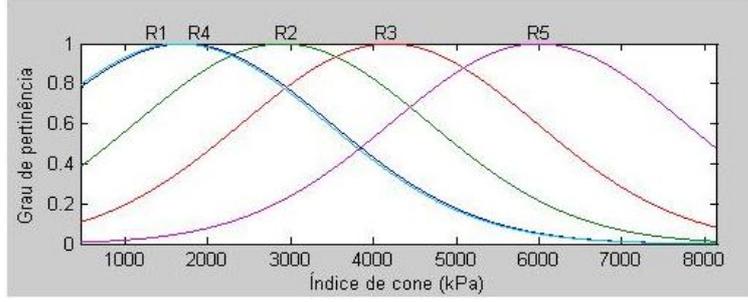


Figura 3.2: Funções de pertinência para a variável de entrada resistência do solo à penetração.

Resistência à penetração	Teor de água (Umidade)
$\mu_1^{iCone}(x_1) = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_1 - 1718.9)^2}{(1766.9)^2}\right)$	$\mu_1^{Umidade}(x_2) = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_2 - 20.20)^2}{(1.42)^2}\right)$
$\mu_2^{iCone}(x_1) = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_1 - 2909.6)^2}{(1766.9)^2}\right)$	$\mu_2^{Umidade}(x_2) = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_2 - 17.29)^2}{(1.37)^2}\right)$
$\mu_3^{iCone}(x_1) = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_1 - 4199.8)^2}{(1766.9)^2}\right)$	$\mu_3^{Umidade}(x_2) = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_2 - 18.54)^2}{(1.00)^2}\right)$
$\mu_4^{iCone}(x_1) = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_1 - 1671.2)^2}{(1766.9)^2}\right)$	$\mu_4^{Umidade}(x_2) = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_2 - 21.39)^2}{(2.19)^2}\right)$
$\mu_5^{iCone}(x_1) = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_1 - 5995.3)^2}{(1766.9)^2}\right)$	$\mu_5^{Umidade}(x_2) = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_2 - 13.69)^2}{(2.19)^2}\right)$

Tabela 3.4: Funções de pertinência para as variáveis fuzzy de entrada.

centro do intervalo o valor  $m$  e dispersão  $\sigma$ , os intervalos para o conjunto de dados para a variável resistência à penetração do solo são dados por:  $[463.40, 7019.30]$ ,  $[463.40, 8210.30]$ ,  $[463.40, 8152.30]$ ,  $[463.40, 6971.90]$  e  $[694.36, 8152.30]$ .

Na Figura 3.3 é apresentado o gráfico para a variável teor de água (umidade) no solo.

Os intervalos que definem os conjuntos fuzzy para a variável teor de água (umidade do solo) são especificados por:  $[15.94, 22.04]$ ,  $[13.18, 21.40]$ ,  $[15.54, 21.54]$ ,  $[14.10, 22.04]$ ,  $[12.51, 20.26]$ .

Na Tabela 3.5 são apresentados os parâmetros das funções lineares dos conseqüentes, onde os parâmetros  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) são os coeficientes da função linear do conseqüente de cada uma das regras do modelo.

O modelo ANFIS estabelece uma relação linear entre a variável de entrada e a variável de saída, baseado em regras, onde o conseqüente de cada regra define um modelo linear ao redor do centro das funções de pertinência. Ressalta-se que o centro  $m$  da função de pertinência representa o ponto que melhor caracteriza cada uma dessas regiões. Deste modo, quanto mais

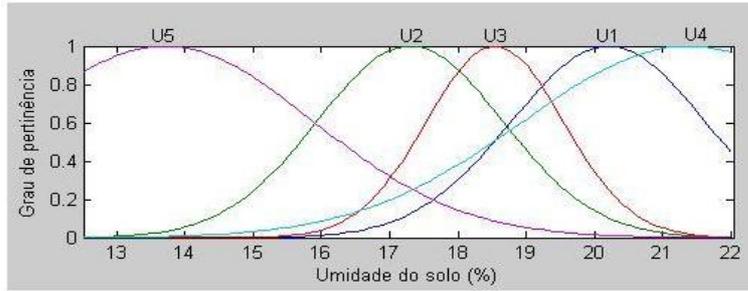


Figura 3.3: Funções de pertinência para a variável de entrada teor de água.

Regras	Parâmetros das funções		
	$C1$	$C2$	$C3$
1	0.000677	-0.851817	18.6280
2	-0.000230	-0.89060	3.8569
3	0.000162	-0.944996	17.9846
4	-0.000380	0.702583	-12.9082
5	-1.041071	0.086086	0.5033

Tabela 3.5: Parâmetros das funções lineares de saída dos conseqüentes.

um valor se distancia do centro da função de pertinência, mais aumenta a possibilidade de erros, pois a capacidade de predição do modelo é reduzida, isto porque se um ponto se colocar numa posição entre dois centros o modelo neuro-fuzzy realiza uma interpolação entre os resultados de duas regras vizinhas.

Na Figura 3.4 estão representadas as funções de pertinência para as variáveis de entradas, resistência à penetração e o teor de água no solo, que formam a parte antecedente das regras.

Com os intervalos que definem os conjuntos fuzzy e os parâmetros apresentados na Tabela 3.4 as regras e as funções lineares que definem as saídas para os conseqüentes de cada regra, onde  $x_1$  representa a resistência à penetração (índice de cone) e  $x_2$  o teor de água (umidade) no solo, são as seguintes

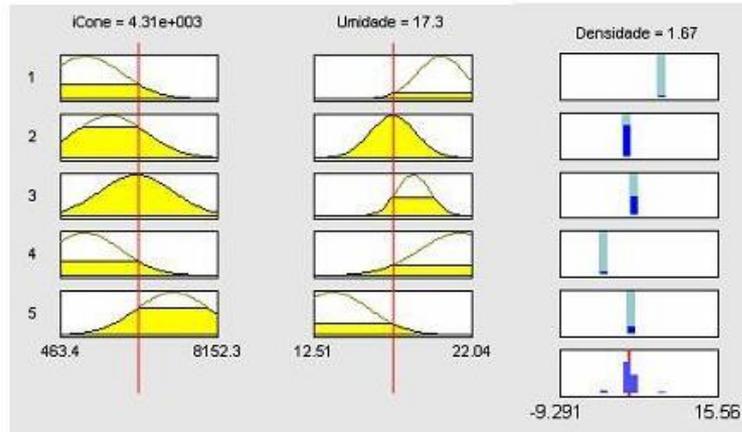


Figura 3.4: Regras do modelo da estimativa da densidade do solo.

*Regra 1.* Se  $x_1 \in [463.40, 7019.30]$  e  $x_2 \in [15.94, 22.04]$   
Então  $y_1 = 0.000677x_1 - 0.851817x_2 + 18.6280$

*Regra 2.* Se  $x_1 \in [463.40, 8210.30]$  e  $x_2 \in [13.18, 21.40]$   
Então  $y_2 = -0.000230x_1 - 0.089060x_2 + 13.8569$

*Regra 3.* Se  $x_1 \in [463.40, 8152.30]$  e  $x_2 \in [15.54, 21.54]$   
Então  $y_3 = 0.000162x_1 - 0.944996x_2 + 17.9846$

*Regra 4.* Se  $x_1 \in [463.40, 6971.90]$  e  $x_2 \in [14.10, 22.04]$   
Então  $y_4 = -0.000380x_1 - 0.702583x_2 - 12.9082$

*Regra 5.* Se  $x_1 \in [694.36, 8152.30]$  e  $x_2 \in [12.51, 20.26]$   
Então  $y_5 = -1.041071x_1 + 0.086086x_2 + 0.5033$

Na Tabela 3.6 são apresentados os dados da densidade do solo obtidos experimentalmente, e as estimativas obtidas pelo modelo neuro-fuzzy, juntamente com os erros relativos os quais são utilizados para medir a precisão entre os valores experimentais e os valores estimados pelo modelo.

Amostra	$iCone$ ( $kPa$ )	Umidade (%)	Densidade Experimental ( $kg.dm^{-3}$ )	Densidade Estimada ( $kg.dm^{-3}$ )	Erro Relativo (%)
1	6419.40	13.05	1.59	1.56	1.96
2	4605.30	12.89	1.51	1.56	3.28
3	2676.90	16.63	1.59	1.58	0.73
4	4127.50	15.77	1.53	1.57	2.41
5	3839.80	16.20	1.51	1.56	3.26
6	2159.30	15.50	1.53	1.53	0.06
7	2413.00	15.50	1.53	1.53	0.03
8	2137.90	15.50	1.53	1.53	0.07
9	2652.60	15.50	1.53	1.53	0.07
10	3073.70	15.50	1.53	1.54	0.37
11	1449.80	20.20	1.41	1.53	8.25
12	881.70	20.20	1.41	1.46	3.69
13	892.60	20.20	1.41	1.46	3.78
14	1062.40	20.20	1.41	1.48	5.25
15	794.00	20.20	1.41	1.45	2.90
16	3176.30	16.55	1.61	1.57	2.36
17	3971.80	14.73	1.66	1.62	2.51
18	1953.30	20.43	1.61	1.56	3.39
19	2141.10	20.08	1.66	1.58	4.74
20	2405.90	20.95	1.67	1.55	7.09
Erro relativo médio (ERM)					2.81
Variância					5.36

Tabela 3.6: Resultados do modelo da densidade do solo.

Para a comparação entre os conjuntos de dados experimentais e estimados, calculou-se o valor do coeficiente de correlação, cujo valor é  $r = 0.836$ , indicando uma relação moderadamente forte entre os dois conjuntos de dados. Ainda, como o  $p$ -valor para o coeficiente de correlação é igual a  $4.34 \times 10^{-6}$ , menor que um nível de significância  $\alpha = 0.01$ , tem-se que a associação entre os valores experimentais e estimados é estatisticamente significativa, para um nível de confiança de 99%. Deste modo, os resultados produzem evidência de que as estimativas são correlacionadas com o conjunto de dados experimentais, e possuem a mesma tendência movendo-se na mesma direção, isto é, como o coeficiente de correlação é positivo e o  $p$ -valor é menor que 0.01, existe uma relação significativa entre os dois conjuntos dados.

Como existem evidência de que os dois conjuntos de dados possuem um relacionamento linear pode-se prever o comportamento de um deles em função da variação do outro, ajustando uma reta de regressão entre eles para o auxílio na análise dos dados. Assim, é construído o gráfico de dispersão, com a regressão linear e o coeficiente de determinação entre os conjuntos de valores da densidade experimental e os da densidade estimadas, obtidos pelo modelo neuro-fuzzy para os dados de teste. A Figura 3.5 mostra o ajuste feito pela reta de regressão.

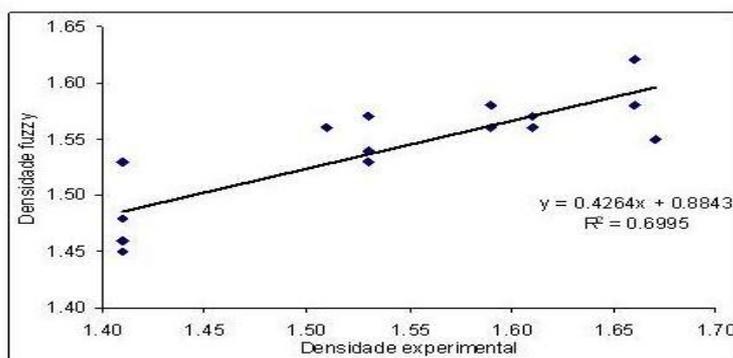


Figura 3.5: Gráfico de dispersão e de regressão das densidades observadas e obtidas pelo modelo neuro-fuzzy.

Para verificar se o modelo de regressão gerado é significativo, ou seja, para saber se existe regressão linear entre a densidade experimental e a densidade estimada se realizou um teste de hipótese utilizando a estatística “ $t$ -de-student”, fixado um nível de significância de  $\alpha = 0.05$ , com “ $n - 2$ ” graus de liberdade para o coeficiente angular da reta de regressão (0.4264).

Parâmetros	Estimativas	Erro padrão	Estatística- <i>t</i>	<i>p</i> -valor
Intercepto	0.884314	0.101073	8.74924	0.0000
Coefficiente angular	0.426362	0.0658722	6.47256	0.0000

Fonte de variação	Graus de liberdade	Soma de Quadrados	Quadrados médios	Estatística- <i>F</i>	<i>p</i> -valor
Regressão	1	0.0265623	0.0265623	41.89	0.0000
Resíduo	18	0.0114127		0.0006340	
Total	19	0.037975			

Tabela 3.7: Análise de regressão e quadro da análise de variância para os dados experimentais e estimados.

A estatística *t* calculada para uma significância de 5% foi de 6.47, e comparada com o valor de *t* tabelado para 18 graus de liberdade de 2.101. Como a estatística *t* calculada (6.47) é maior que o valor *t* tabelado (2.101), pela distribuição “*t*-de-student”, rejeita-se a hipótese de não haver regressão, isto é, de que o coeficiente de regressão é diferente de zero e, portanto, é estatisticamente significativa, existindo então relação entre os dados experimentais e estimados.

O teste do coeficiente linear da regressão (0.363409) foi estatisticamente significativo ao nível de significância de 5%. A Tabela ?? mostra a análise de regressão e de variância para os dados experimentais e estimados pelo modelo neuro-fuzzy.

A Tabela 3.7 mostra que os resultados do ajuste do modelo linear para descrever a relação entre o conjunto de densidade fuzzy e a densidade experimental é dada pela equação:

$$y_{\text{Fuzzy}} = 0.884314 + 0.426362 y_{\text{Experimental}}$$

Observa-se, ainda pela Tabela 3.7, que como o *p*-valor na tabela da análise de variância é menor que 0.01, há evidência de que existe uma relação estatisticamente significativa entre o conjunto de densidade estimada pelo modelo neuro-fuzzy e o conjunto de densidade experimental ao nível de confiança de 99%.

Na análise do modelo observa-se que os valores calculados a partir do modelo neuro-fuzzy representam de fato o que acontece no estudo da densidade do solo, onde diversos fatores influenciam na determinação dos valores da densidade. O modelo apresenta uma variação para os erros relativos de 5.36%, sendo o maior erro da 11<sup>a</sup> observação, onde o erro relativo é de 8.25%, seguido pela 20<sup>a</sup> observação que apresenta erro relativo igual

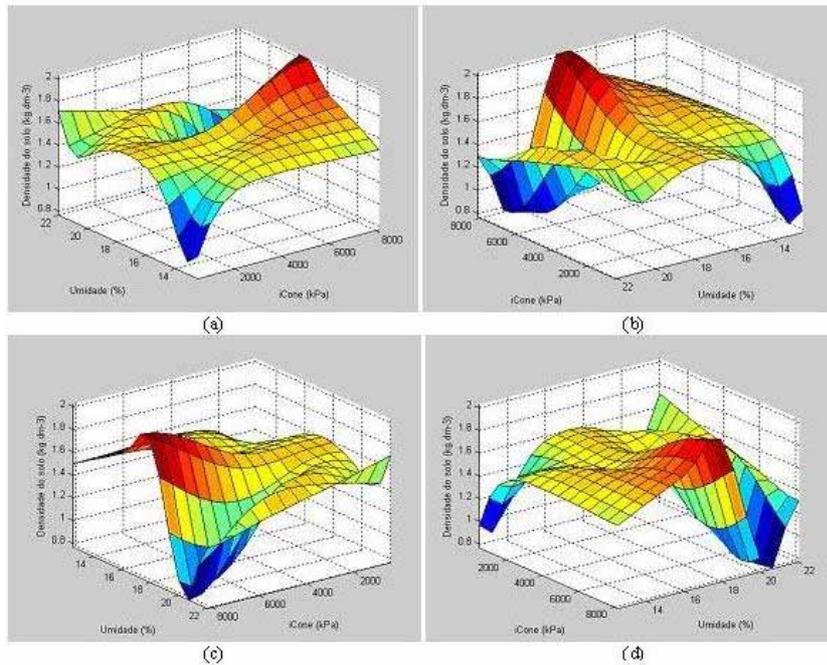


Figura 3.6: Gráfico de superfície de respostas para as variáveis de entrada e saída do modelo neuro-fuzzy.

a 7.09%, ambas as observações com teor de argila igual a 48.50%. Deste modo, entre as densidades experimentais e as estimativas das densidades fuzzy, não há disparidade significativa dos dados, apesar da superestimação de 8.25% com relação à décima primeira observação e da subestimação de 7.09% com relação à vigésima observação.

A Figura 3.6 mostra o gráfico de superfície de respostas, em diferentes ângulos de visão, para as variáveis de entrada e saída do modelo neuro-fuzzy onde se pode verificar o comportamento do modelo neuro-fuzzy para os valores dos dados estimados.

Nesta seção observa-se que os sistemas de inferências fuzzy podem ser utilizados para a estimativa da densidade do solo para áreas não amostradas com boa eficiência. Os modelos obtidos tem bom desempenho pois não apresentam diferenças estatísticas significativas de modo que seja necessária a rejeição da hipótese de igualdade de médias entre os dados obtidos pelo modelo e os dados experimentais.

## 3.2 Classificação de Vertentes

Uma representação de terreno com crescente importância visa a classificação da curvatura vertical de vertentes. A classificação de uma determinada vertente entre retilínea, côncava ou convexa contribui para a produção de informações relevantes à tomada de decisões em áreas como agricultura, construção civil, empreendimentos imobiliários, estudo de microbacia entre outros. Para melhor explorar esse aspecto do relevo foi desenvolvida uma implementação capaz de gerar Modelos Numéricos de Terreno (MNT), de qualquer área que possua dados planialtimétricos. O método de interpolação é o Thin Plate Spline (Barbosa, 2003 e 2008). É feito o cálculo dos valores de curvatura em perfil para todos os pontos do MNT. A classificação se dá de acordo com os limites obtidos para cada classe via Inferência Fuzzy, caminho natural devido a não rigidez desses limites na Natureza.

Alguns tipos de feições geomorfológicas são consideradas unidades básicas do relevo e fundamentais para explicar o desenvolvimento das paisagens. As vertentes que são definidas como planos de declives que divergem a partir das cristas enquadrando o vale (Anjos, 2008) também podem ser descritas, de maneira mais simples, como um elemento da superfície terrestre inclinado em relação à horizontal, que apresenta um gradiente e uma orientação no espaço. Podem assim ser classificadas de acordo com a sua curvatura tanto no plano quanto em perfil.

A curvatura no perfil é a taxa de variação da declividade na direção de sua orientação e está relacionada ao caráter convexo ou côncavo do terreno, sendo decisiva na aceleração ou desaceleração do fluxo da água sobre o mesmo.

Vertentes retilíneas têm valor de curvatura nulo, vertentes convexas têm curvatura negativa e côncavas positiva. Mas, vertentes com valores nulos são inexistentes na natureza, na verdade deve ser considerado que os valores estão na vizinhança do zero.

Este exemplo traz pequena parte dos resultados obtidos no trabalho desenvolvido por Anjos (2008) com o objetivo de distinguir as vertentes de um terreno de maneira semi-automática, como produto derivado do Modelo Numérico de Terreno (MNT) da área, classificando-as com precisão próxima à obtida através do contato de um especialista. Apenas uma amostra da validação faz parte deste exemplo: é uma comparação da classificação de uma pequena área e o respectivo trecho do mapa geomorfológico do perímetro urbano de Presidente Prudente - SP na escala 1:25.000 (Nunes, 2007).

A validação foi feita utilizando-se três áreas escolhidas no município. Área 1, Figura 3.7, considerada uma vertente retilínea conforme a classificação visual de um especialista, Área 2, Figura 3.8, e Área 3, Figura 3.9,



Figura 3.7: Área teste 1 - Vertente Retilínea.

são classificadas visualmente como vertentes côncava e convexa.

Após a seleção destas áreas, os dados topográficos (latitude, longitude e altimetria) foram coletados através da base digital planialtimétrica georreferenciada do município de Presidente Prudente, com escala 1 : 10.000 que contém dados dos pontos pertencentes as curvas de nível do município com espaçamento de 10 metros

A aquisição via curva de nível fornece dados como semi-regulares, sendo necessário um método de adensamento de dados (interpolação) para a geração de um Modelo Numérico de Terreno com malha regular. Dentre os diversos métodos de interpolação existentes, o Thin Plate Spline (TPS) foi escolhido devido apresentar superfícies suaves.

A interpolação pelo TPS tem comportamento global, as funções são globais, mas as influência de deformações locais tendem a diminuir rapidamente à medida que se afasta do ponto analisado. O método TPS consiste na combinação linear de múltiplos termos  $r_i^2 \ln(r_i^2)$ ,  $r_i$  é um valor real não negativo dado pela diferença (distância) entre as coordenadas do ponto onde a função é avaliada e as coordenadas dos pontos de referência. O TPS é descrito pela função bivariada  $z(x, y)$

$$z(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 \ln(r_i^2)$$

com  $r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$ .

A função é então usada para adensar os pontos, fornecendo uma malha regular, incrementos  $inc_x$  e  $inc_y$  nos eixos  $x$  e  $y$  respectivamente, com valores interpolados para o terreno conhecida como Modelo Numérico de Terreno.



Figura 3.8: Área teste 2 - Vertente Côncava.

Nos pontos da malha são calculados os valores da curvatura. Cada valor é obtido por uma relação entre as derivadas de primeira e segunda ordem da variável altitude e é calculado para cada elemento  $(x, y)$  de acordo com os valores de seus vizinhos como mostra a Figura 3.10.

A relação que expressa o valor da curvatura para cada ponto é dada por

$$C_{i,j} = \frac{2DG^2 + 2EH^2 + 2FGH}{G^2 + H^2}$$

$$D = \frac{\partial^2 z}{2\partial x^2}, E = \frac{\partial^2 z}{2\partial y^2}, F = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, G = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ e } H = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Na malha os valores são calculados conforme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{2inc_x}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z_{i-1,j} - z_{i+1,j}}{2inc_y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{2\partial x^2} = \frac{z_{i,j+1} - 2z_{i,j} + z_{i,j-1}}{inc_x^2}, \frac{\partial^2 z}{2\partial y^2} = \frac{z_{i-1,j} - 2z_{i,j} + z_{i+1,j}}{inc_y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z_{i-1,j+1} - z_{i-1,j-1} - z_{i+1,j+1} + z_{i+1,j-1}}{inc_x 4inc_y}.$$

Assim cada ponto  $(x, y)$  da malha possui dois valores: altitude e curvatura em perfil, permitindo a classificação do MNT de acordo com essa característica: vertentes retilíneas possuem valor nulo, côncavas valor positivo e convexas valor negativo.

É importante salientar que o tamanho da malha tem influência nos resultados. A Figura 3.11 apresenta o resultado visual da convexidade ou



Figura 3.9: Área teste 3 - Vertente Convexa.

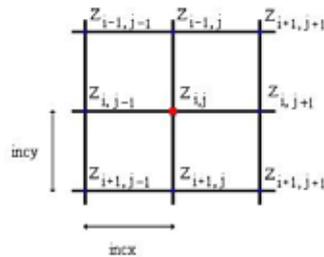


Figura 3.10: Célula para o cálculo da curvatura em  $z_{i,j}$ .

concurvidade para pontos de um perfil de vertente de acordo com a proximidade dos vizinhos analisados, ou seja, de acordo com a quantidade de pontos da malha sobre a qual o MNT (de uma mesma área) é gerado. Um pequeno número de pontos capta apenas grandes variações na curvatura do terreno, enquanto valores menores conseguem captar mais variações, porém é importante ressaltar que o excesso de pontos não é interessante pois cria curvatura retilínea (falsa) localmente. De acordo com os experimentos realizados nessa etapa, o valor de  $inc_x$  e  $inc_y$  que apresentou Modelos Numéricos de Terreno mais condizentes com a realidade conhecida em campo e com as classificações visuais feitas pelo especialista foi o valor de incremento intermediário de 5 metros, ou seja, a geração das malhas regulares utiliza pontos com distância de 5 metros entre si.

Um limite rígido separando características naturais não acontece na prática. Este também é o caso das vertentes. Na busca de melhor definição

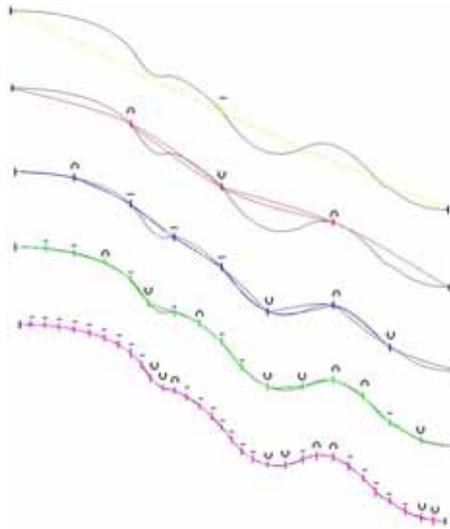


Figura 3.11: Influência do tamanho da malha na curvatura para um mesmo perfil.

das classes foram consideradas não mais as três classes côncava, convexa e retilínea, mas sim cinco classes distintas

- *Convexa*: Área de certeza na qual os valores de curvatura são negativos,
- *Convexa-retilínea*: Área de incerteza na qual os valores são negativos e próximos de zero, mas não se encontram certamente na faixa considerada retilínea,
- *Retilínea*: Área de certeza na qual os valores estão certamente contidos na faixa considerada retilínea,
- *Retilínea-côncava*: Área de incerteza na qual os valores são positivos e próximos de zero, mas não se encontram certamente na faixa considerada retilínea,
- *Côncava*: Área de certeza na qual os valores de curvatura são positivos.

A ferramenta matemática inferência fuzzy se apresenta como o caminho natural para a determinação desses limites, pois é uma ferramenta que

objetiva modelar, de modo aproximado, o raciocínio humano na presença de incerteza e imprecisão fornecendo resposta aproximada baseada em conhecimento inexato. Foram utilizadas funções de pertinência triangulares e trapezoidais.

O sistema de inferência fuzzy utilizou diferentes características da variável curvatura, buscando obter uma classificação mais condizente com a realidade como saída do sistema. Assim as variáveis linguísticas de entrada do sistema foram definidas como o grau da curvatura com o conjunto de termos  $\{inexpressivo, baixo e alto\}$  e o tipo de curvatura com os termos linguísticos  $\{negativa, nula e positiva\}$ . Essas variáveis foram submetidas aos processos inerentes ao sistema de inferência fuzzy com modelo linguístico de Mamdani através do software Matlab 7 apresentando como variável de saída a curvatura final com o conjunto de termos  $\{convexa, convexa/retilínea, retilínea, retilínea/côncava, côncava\}$ .

Para analisar o sistema fuzzy em ambiente Matlab primeiramente foi necessário determinar o número de variáveis de entrada e de saída a serem utilizadas. A Figura 3.12 apresenta a interface inicial do toolbox fuzzy, na qual as variáveis foram nomeadas e os métodos de agregação e defuzzificação foram escolhidos.

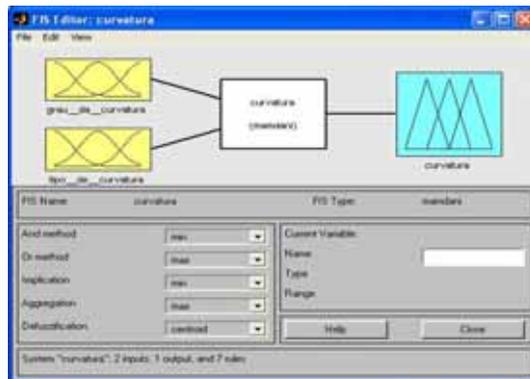


Figura 3.12: Interface no ambiente Matlab.

Posteriormente cada variável de entrada e de saída teve os seus termos associados a funções de pertinência com os coeficientes  $a, m, n$  e  $b$  das funções de pertinência trapezoidais (Figura 1.2) associadas aos termos linguísticos de cada variável de entrada e de saída utilizadas, sendo fornecidos ao sistema de acordo com as classificações existentes para as áreas de testes.

A variável linguística de entrada “grau da curvatura” que possui os termos linguísticos *inexpressivo*, *baixo* e *alto* é apresentada ao sistema de

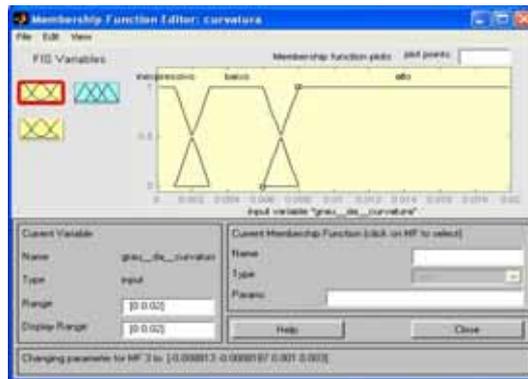


Figura 3.13: Funções de pertinência trapezoidais.

acordo com as funções de pertinência apresentadas na Figura 3.13 e possui fundamental importância, pois esta variável determina os coeficientes que limitam os pontos da vizinhança do valor zero a serem considerados como pontos de curvatura nula.

Já a variável “tipo de curvatura” é apresentada como mostra a Figura 3.14 e é a variável que diferencia vertentes côncavas, associadas a variações angulares positiva, de vertentes convexas, associadas a variação angular negativas.

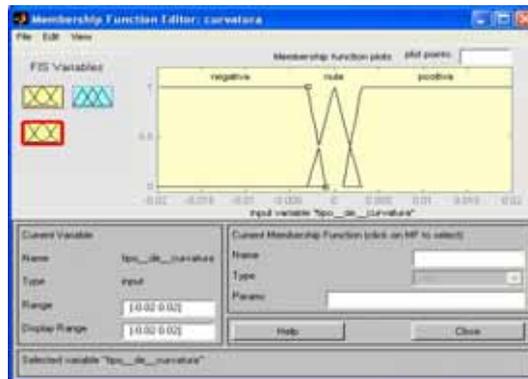


Figura 3.14: Funções de pertinência trapezoidais - grau de curvatura.

A variável de saída também deve ter cada um de seus termos associados a uma função de pertinência como mostra a Figura 3.15.

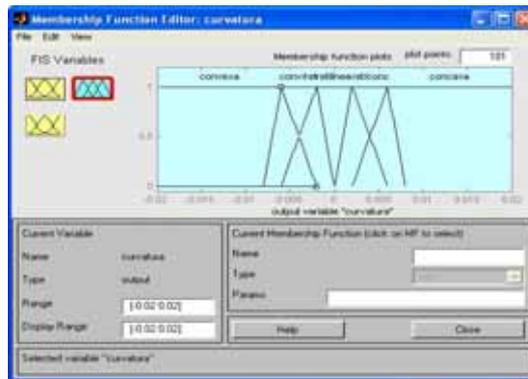


Figura 3.15: Funções de pertinência trapezoidais - grau da curvatura.

Após a etapa de fuzzificação, foram fornecidas as regras fuzzy compostas com antecedentes relacionados as variáveis de entrada e consequentes relacionados a variável de saída. (Figura 3.16).

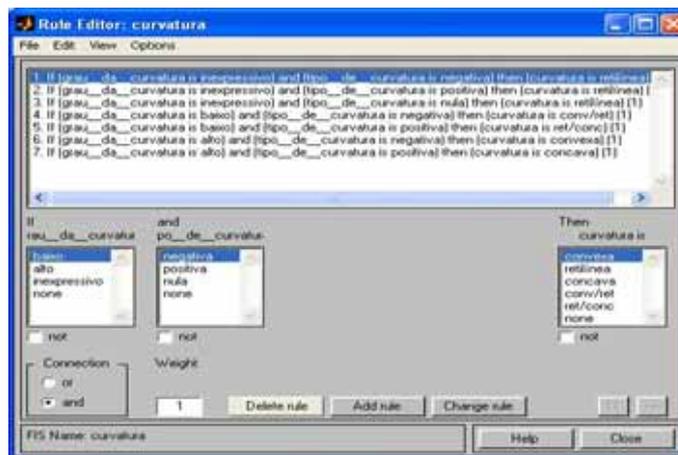


Figura 3.16: Regras fuzzy - Sistema Inferência Fuzzy.

Através dessas regras e dos possíveis valores de entrada o sistema de inferência fuzzy forneceu novos limites para as cinco classes (Figura 3.16) da variável de saída curvatura para que os mesmos pudessem ser utilizados na implementação gerando os MNT's classificados de acordo com a curvatura das vertentes.

É importante salientar que, os primeiros resultados referentes a classificação da curvatura de vertentes foram obtidos para as áreas de teste (Área 1, Área 2 e Área 3), classificando-as apenas como côncava, retilínea ou convexa.

Esta fase foi importante para se estabelecer o tamanho do incremento. O tamanho escolhido após vários testes foi o valor de 5 metros para ambos os incrementos.

Apresentamos aqui apenas um resultado da classificação para a Área 2 e adensamento de 5m.

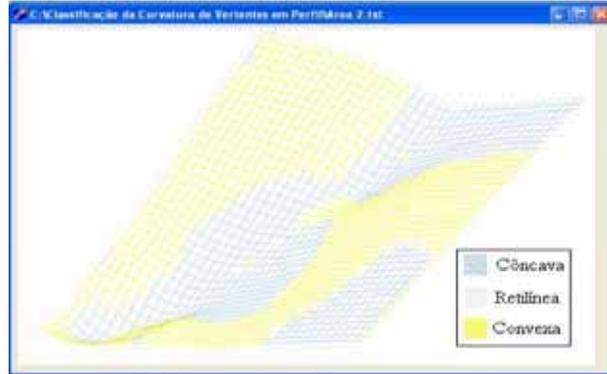


Figura 3.17: Classificação para a Área 2.

Os resultados obtidos através da associação entre as variáveis de entrada (grau de curvatura e tipo de curvatura) e a variável de saída (curvatura) oferecidas ao Sistema de Inferência Fuzzy se mostraram valiosos na obtenção de uma classificação mais condizente com a realidade devido ao fato de serem consideradas vertentes retilíneas aquelas que possuem um valor de curvatura próximo ao valor zero e principalmente ao fato dos limites entre uma classe e outra não serem rígidos o que é uma característica fundamental para o tratamento dos dados através de Inferência Fuzzy.

A saída do sistema de inferência fuzzy para essas variáveis pode ser visualizada na Figura 3.18.

A análise dessas saídas possibilitou a classificação da curvatura em cinco classes diferentes: convexa, convexa/retilínea, retilínea, retilínea/côncava e côncava, levando em consideração também as áreas de transição entre uma classe e outra que foram consideradas como áreas de incerteza. Os resultados obtidos para os limites dessas classes são apresentados na Tabela 3.8.

A partir desta classificação a implementação passou a utilizar como resultado três classes de certeza (convexa, retilínea e côncava), de acordo com

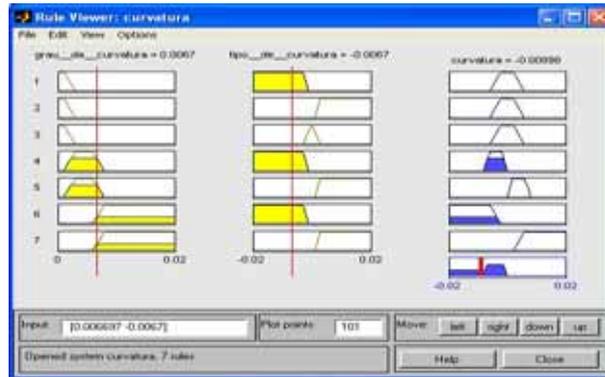


Figura 3.18: Associação entre as variáveis de entrada e de saída.

Intervalos de classificação da curvatura	
Classes	Intervalo
Convexa	$[-1, -0.006[$
Convexa/Retilínea	$[-0.006, -0.005]$
Retilínea	$] -0.005, 0.005[$
Retilínea/Concava	$[0.005, 0.006]$
Concava	$]0.006, 1]$

Tabela 3.8: Intervalos de classificação da curvatura.

os valores obtidos através dos testes realizados, e duas classes de incerteza (convexa/retilínea e retilínea/côncava).

A seguir é apresentado apenas um dos resultados, como ilustração e para comparação visual, de um trecho de informações contidas no mapa geomorfológico do perímetro urbano de Presidente Prudente - SP na escala 1 : 25.000 com a classificação da curvatura de vertentes em perfil via Thin Plate Spline e inferência fuzzy realizada na área correspondente.

A metodologia utilizada se mostra capaz de classificar Modelos Numéricos de Terreno de acordo com a sua curvatura em perfil e no geral apresenta informações mais globais que o mapa geomorfológico convencional.

Os bons resultados obtidos no trabalho indicam uma possibilidade concreta para para as aplicações de interesse. Pesquisas futuras continuarão sendo efetuadas para a melhoria da metodologia, principalmente no sentido de incluir informações espaciais visando, por exemplo, a agregação de classificações vizinhas quando necessário. Pode-se concluir que esta forma de classificação ajuda a otimizar os trabalhos realizados em campo, mas

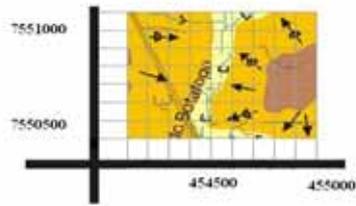


Figura 3.19: Mapa Geomorfológico.

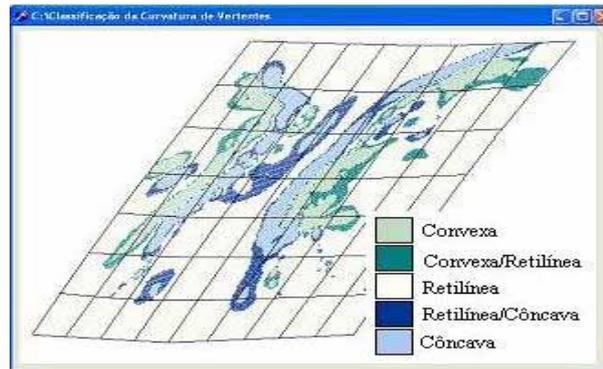


Figura 3.20: Classificação para a área correspondente.

estes continuam sendo de fundamental importância para qualquer análise de terreno.



# Bibliografia

- [1] D.S. Anjos, “Classificação da Curvatura de Vertentes em Perfil via Thin Plate Spline e Inferência Fuzzy”, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós Graduação em Ciências Cartográficas, FCT/UNESP-PP, Presidente Prudente, 2008.
- [2] T. Arnould e S. Tano, Interval-Valued Fuzzy Backward Reasoning, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **3/4** (1995), 425-437.
- [3] R.L. Barbosa, M. Meneguette, J.F.C. Silva e R.B.A. Gallis, Geração de Modelo Digital de Terreno utilizando Triangulação de Delaunay e Thin Plate Spline, em “Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, 3”, Curitiba, 2003.
- [4] R.L. Barbosa, M. Meneguette, J.F.C. Silva, R.B.A. Gallis e O.Y. Itame, Análise Estatística da Qualidade de um Modelo Digital do Terreno gerado com Thin Plate Spline, *Revista Brasileira de Cartografia*, **60/02** (2008), 127-132.
- [5] L.C. Benini, “Estimação da densidade de solos utilizando sistemas de inferência fuzzy”, Tese de Doutorado, Faculdade de Ciências Agrônomicas, Universidade Estadual Paulista, Botucatu, 2007.
- [6] S.L. Chiu, Selecting input variables for fuzzy models, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, **4/4** (1996), 243-256.
- [7] E. Cox, Fuzzy fundamentals, *IEEE Spectrum*, (1992), 58-61.
- [8] M.R.B.S. Delgado, “Projeto automático de sistemas nebulosos: uma abordagem co-evolutiva”, Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.
- [9] R. Fullér “Neural Fuzzy Systems”, Abo Akademi University, Finlandia, 1995.

- [10] J.S. Jang, ANFIS: Adaptive-network based fuzzy inference systems *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, **23/3** (1993), 665-685.
- [11] J.O.R. Nunes, R. Freire e I.U. Perez, Mapeamento Geomorfológico do Perímetro Urbano de Presidente Prudente-SP, em “Simpósio Nacional de Geomorfologia”, Goiania, 2003.
- [12] N.R.S. Ortega, “Aplicação da teoria de conjuntos fuzzy a problemas da biomedicina”, Tese de Doutorado, Instituto de Física, USP, São Paulo, 2001.
- [13] W. Pedrycz e F.A.C. Gomide, “An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design”, MIT Press, 1998.
- [14] G.L.O. Serra, “Propostas de Metodologias para Identificação e controle Inteligentes”, Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.
- [15] I.S. Shaw e M.G. Simões, “Controle e modelagem fuzzy”, Edgard Blucher, São Paulo, 1999.
- [16] T. Takagi e M. Sugeno, Fuzzy Identification of Systems and Applications to Modelling and Control, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **15/1**, (1985), 116-132.
- [17] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and Control*, **8**, (1965), 29-44.
- [18] L.A.Zadeh, Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **3/1**, (1973), 28-44.

# NOTAS EM MATEMÁTICA APLICADA

Arquivos em pdf disponíveis em <http://www.sbmac.org.br/notas.php>

1. Restauração de Imagens com Aplicações em Biologia e Engenharia  
Geraldo Cidade, Antônio Silva Neto e Nilson Costa Roberty
2. Fundamentos, Potencialidades e Aplicações de Algoritmos Evolutivos  
Leandro dos Santos Coelho
3. Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Águas Subterrâneas  
Edson Wendlander
4. Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais  
Maria Cristina de Castro Cunha e Maria Amélia Novais Schleicher
5. Modelagem em Biomatemática  
Joyce da Silva Bevilacqua, Marat Rafikov e Cláudia de Lello  
Courtouke Guedes
6. Métodos de Otimização Randômica: algoritmos genéticos e “simulated annealing”  
Sezimária F. Pereira Saramago
7. “Matemática Aplicada à Fisiologia e Epidemiologia”  
H.M. Yang, R. Sampaio e A. Sri Ranga
8. Uma Introdução à Computação Quântica  
Renato Portugal, Carlile Campos Lavor, Luiz Mariano Carvalho  
e Nelson Maculan
9. Aplicações de Análise Fatorial de Correspondências para Análise de Dados  
Homero Chaib Filho

10. Modelos Matemáticos baseados em autômatos celulares para Geoprocessamento  
Marilton Sanchotene de Aguiar, Fábria Amorim da Costa,  
Graçaliz Pereira Dimuro e Antônio Carlos da Rocha Costa
11. Computabilidade: os limites da Computação  
Regivan H. N. Santiago e Benjamín R. C. Bedregal
12. Modelagem Multiescala em Materiais e Estruturas  
Fernando Rochinha e Alexandre Madureira
13. Modelagem em Biomatemática (Coraci Malta ed.)
  - 1 - “Modelagem matemática do comportamento elétrico de neurônios e algumas aplicações”  
Reynaldo D. Pinto
  - 2 - “Redes complexas e aplicações nas Ciências”  
José Carlos M. Mombach
  - 3 - “Possíveis níveis de complexidade na modelagem de sistemas biológicos”  
Henrique L. Lenzi, Waldemiro de Souza Romanha e Marcelo Pelajo- Machado
14. A lógica na construção dos argumentos  
Angela Cruz e José Eduardo de Almeida Moura
15. Modelagem Matemática e Simulação Numérica em Dinâmica dos Fluidos  
Valdemir G. Ferreira, Hélio A. Navarro, Magda K. Kaibara
16. Introdução ao Tratamento da Informação nos Ensinos Fundamental e Médio  
Marcilia Andrade Campos, Paulo Figueiredo Lima
17. Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações  
Rosana Sueli da Motta Jafelice, Laércio Carvalho de Barros,  
Rodney Carlos Bassanezi
18. Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira  
Socorro Rangel

19. Observar e Pensar, antes de Modelar  
Flavio Shigeo Yamamoto, Sérgio Alves, Edson P. Marques Filho,  
Amauri P. de Oliveira
20. Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações  
Eliana Xavier Linhares de Andrade, Cleonice Fátima Bracciali
21. Uma Introdução à Teoria de Códigos  
Carlile Campos Lavor, Marcelo Muniz Silva Alves, Rogério  
Monteiro de Siqueira, Sueli Irene Rodrigues Costa
22. Análise e Processamento de Sinais  
Rubens Sampaio, Edson Cataldo, Alexandre de Souza Brandão
23. Introdução aos Métodos Discretos de Análise Numérica de EDO e  
EDP  
David Soares Pinto Júnior
24. Representações Computacionais de Grafos  
Lílian Markenzon, Oswaldo Vernet
25. Ondas Oceânicas de Superfície  
Leandro Farina
26. Técnicas de Modelagem de Processos Epidêmicos e Evolucionários  
Domingos Alves, Henrique Fabrício Gagliardi
27. Introdução à teoria espectral de grafos com aplicações  
Nair Maria Maia de Abreu, Renata Raposo Del-Vecchio, Cybele  
Tavares Maia Vinagre e Dragan Stevanović
28. Modelagem e convexidade  
Eduardo Cursi e Rubens Sampaio
29. Modelagem matemática em finanças quantitativas em tempo discreto  
Max Oliveira de Souza e Jorge Zubelli
30. Programação não linear em dois níveis: aplicação em Engenharia  
Mecânica  
Ana Friedlander e Eduardo Fancello

31. Funções simétricas e aplicações em Combinatória  
José Plínio de Oliveira Santos e Robson da Silva
32. Semigrupos aplicados a sistemas dissipativos em EDP  
Carlos Raposo da Cunha
33. Introdução à Simulação Estocástica para Atuária e Finanças Usando R  
Hélio Côrtes Vieira, Alejandro C. Frery e Luciano Vereda
34. Modelos de Sustentabilidade nas Paisagens Amazônicas Alagáveis  
Maurício Vieira Kritz, Jaqueline Maria da Silva e Cláudia Mazza
35. Uma Introdução à Dinâmica Estocástica de Populações  
Leonardo Paulo Maia
36. Geometria de Algoritmos Numéricos  
Gregorio Malajovich
37. Equações Diferenciais, Teorema do Resíduo e as Transformadas Integrais  
Edmundo Capelas de Oliveira e Jayme Vaz Júnior