

**Editado por**

**Célia A. Zorzo Barcelos**

Universidade Federal de Uberlândia - UFU  
Uberlândia, MG, Brasil

**Eliana X.L. de Andrade**

Universidade Estadual Paulista - UNESP  
São José do Rio Preto, SP, Brasil

**Maurílio Boaventura**

Universidade Estadual Paulista - UNESP  
São José do Rio Preto, SP, Brasil

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7)**, as figuras em eps e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página  
<http://www.sbmac.org.br/notas.php>

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS, TEOREMA DOS RESÍDUOS E AS TRANSFORMADAS INTEGRAIS

Edmundo Capelas de Oliveira  
capelas@ime.unicamp.br

Jayme Vaz Jr.  
vaz@ime.unicamp

Departamento de Matemática Aplicada  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil  
2012

Coordenação Editorial: Sandra Mara Cardoso Malta

Coordenação Editorial da Série: Eliana Xavier Linhares de Andrade

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2012 by Edmundo Capelas de Oliveira e Jayme Vaz Jr. Direitos reservados, 2012 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

**Catálogo elaborado pela Biblioteca do IBILCE/UNESP  
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner**

Capelas de Oliveira, Edmundo  
Equações Diferenciais, Teorema dos Resíduos e as Transformadas  
Integrais - São Carlos, SP : SBMAC, 2012, 106 p.; 20,5cm  
- (Notas em Matemática Aplicada; v. 37)

e-ISBN 978-85-86883-98-9

1. Teorema dos Resíduos. 2. Transformadas Integrais.  
3. Equações Diferenciais.  
I. Capelas de Oliveira, Edmundo. II. Vaz Jr., Jayme.  
III. Título. IV. Série.

CDD - 51

Esta é uma republicação em formato de e-book do livro original do mesmo título publicado em 2008 nesta mesma série pela SBMAC.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Equações Diferenciais Parciais</b>	<b>1</b>
1.1	Método das Características . . . . .	2
1.1.1	Equações com Duas Variáveis Independentes . . . . .	2
1.1.2	A Forma Canônica . . . . .	4
1.1.3	Equação do Tipo Hiperbólico . . . . .	5
1.1.4	Equação do Tipo Parabólico . . . . .	5
1.1.5	Equação do Tipo Elíptico . . . . .	6
1.2	Problemas Resolvidos . . . . .	6
1.3	Exercícios Propostos . . . . .	10
1.3.1	Respostas e/ou Sugestões . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Transformadas Integrais</b>	<b>13</b>
2.1	Noções Básicas . . . . .	14
2.2	Transformada de Laplace . . . . .	15
2.2.1	Definição . . . . .	15
2.2.2	Propriedades . . . . .	15
2.3	O Problema da Inversão . . . . .	19
2.3.1	Convolução . . . . .	20
2.3.2	Aplicações . . . . .	21
2.4	Transformada de Fourier . . . . .	28
2.4.1	Definição . . . . .	28
2.4.2	Propriedades . . . . .	28
2.4.3	Derivadas de $f(x)$ . . . . .	29
2.4.4	Convolução . . . . .	30
2.4.5	Aplicações . . . . .	30
2.5	Transformada de Mellin . . . . .	32
2.5.1	Definição . . . . .	33
2.5.2	Propriedades . . . . .	33
2.5.3	Derivadas de $f(x)$ . . . . .	34

2.5.4	Convolução . . . . .	35
2.5.5	Aplicação . . . . .	36
2.6	Transformada de Hankel . . . . .	37
2.6.1	Definição . . . . .	37
2.6.2	Propriedades . . . . .	39
2.6.3	Aplicação . . . . .	40
2.7	Exercícios Propostos . . . . .	42
2.7.1	Respostas e/ou Sugestões . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Resíduos</b>	<b>47</b>
3.1	Resíduos e Pólos . . . . .	48
3.2	Teorema dos Resíduos . . . . .	52
3.3	Lema de Jordan . . . . .	55
3.4	Aplicações . . . . .	57
3.5	Exercícios . . . . .	66
3.6	Respostas e/ou Sugestões . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Aplicações</b>	<b>69</b>
4.1	Transformada de Laplace . . . . .	69
4.1.1	Equação Integrodiferencial . . . . .	70
4.1.2	Equação Diferencial Parcial . . . . .	71
4.2	Transformada de Fourier . . . . .	72
4.2.1	Equação Diferencial Parcial . . . . .	72
4.2.2	Integral com Pontos de Ramificação . . . . .	75
4.3	Transformada de Mellin . . . . .	77
4.3.1	Cálculo de Uma Soma Infinita . . . . .	77
4.3.2	Equação Diferencial com Coeficientes Variáveis . . . . .	79
4.4	Transformada de Hankel . . . . .	81
4.4.1	Funções de Bessel Modificadas . . . . .	81
4.4.2	Equação Diferencial em Coordenadas Cilíndricas . . . . .	83
4.5	Justaposição de Transformadas . . . . .	85
4.5.1	Transformadas de Laplace e Fourier . . . . .	85
4.5.2	Transformadas de Laplace e Hankel . . . . .	87
<b>A</b>	<b>Delta de Dirac e Heaviside</b>	<b>89</b>
A.1	'Função' Delta de Dirac . . . . .	89
A.2	'Função' de Heaviside . . . . .	90
<b>B</b>	<b>Funções Gama e de Bessel</b>	<b>91</b>
B.1	Função Gama . . . . .	91
B.2	Funções de Bessel . . . . .	93

## Introdução

São vários os problemas que podem, em geral, ser modelados por uma equação diferencial<sup>1</sup>, porém vamos mencionar apenas dois, a saber: o estudo do movimento unidimensional de uma mola que, pode ser modelado a partir de uma equação diferencial ordinária e de convenientes condições; e o problema que, pode ser modelado, por exemplo, por uma equação diferencial parcial associado à difusão.

O estudo das equações diferenciais pode ser abordado de várias maneiras dentre as quais, apenas para mencionar, o método específico do tipo séries para uma equação diferencial ordinária e, no caso de uma equação diferencial parcial, separação de variáveis. Devemos também mencionar a metodologia das transformadas integrais; objetivo principal deste trabalho. Ressalte-se que esta metodologia não distingue uma equação diferencial ordinária de uma equação diferencial parcial.

A metodologia das transformadas integrais,<sup>2</sup> em princípio, converte o problema de partida num outro, às vezes chamado de problema transformado, aparentemente mais simples de ser abordado. Resolve-se, quando possível, o problema transformado e recupera-se a solução do problema de partida através da respectiva transformada inversa.

Dividimos este trabalho em quatro capítulos e dois apêndices. No primeiro capítulo, apresentamos as equações diferenciais parciais, em particular, discutimos a redução à forma canônica e a classificação quanto ao tipo, enquanto que no segundo capítulo introduzimos o conceito de transformada integral, particularmente, as transformadas de Laplace, de Fourier, de Mellin e de Hankel. No terceiro capítulo são apresentados o teorema dos resíduos e o lema de Jordan, ferramentas que desempenham papel fundamental no cálculo da transformada inversa, dentre outras aplicações, como vamos ver, no cálculo de uma integral real via funções analíticas. O quarto capítulo é dedicado às aplicações propriamente ditas, envolvendo tanto uma equação

---

<sup>1</sup>Neste trabalho, o termo equação diferencial refere-se unicamente ao caso em que a equação, seja ela ordinária ou parcial, é linear. Não é discutido o caso de uma equação diferencial ordinária ou de uma equação diferencial parcial, ambas não-lineares, uma vez que uma metodologia geral, neste caso, é muito particular no sentido de que cada problema deve ser abordado como sendo único, quase sempre.

<sup>2</sup>Aqui, discutimos apenas as transformadas de Laplace, de Fourier, de Mellin e de Hankel, todas elas lineares.

diferencial ordinária quanto uma equação diferencial parcial, em particular, a chamada justaposição de transformadas.

Visto que muitos problemas envolvem a função delta de Dirac e/ou a função de Heaviside, introduzimos as respectivas definições e algumas de suas propriedades no Apêndice A, enquanto que, no Apêndice B, são apresentadas a função gama e as funções de Bessel, bem como algumas de suas propriedades. Convém ressaltar que nas aplicações tomamos o cuidado de elencar problemas envolvendo apenas a função de Bessel, associada a uma simetria cilíndrica, como única função especial. Por questões de tempo e espaço, não abordamos problemas envolvendo simetria esférica de onde emerge, naturalmente, as importantes funções de Legendre.

Enfim, as referências que aparecem com o símbolo  $\star$  à sua frente, não foram citadas explicitamente no texto. Foram ali colocadas por se tratarem de livros que contêm o tópico *Equações Diferenciais* e se constituem numa fonte a mais para uma eventual consulta.

Gostaríamos de externar nossos sinceros agradecimentos aos membros do Comitê Científico do XXXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional por terem acreditado na proposta inicial do minicurso e ao parecerista pelas valiosas observações que muito contribuíram para a melhoria do presente texto. Obrigado.

Os autores.

# Capítulo 1

## Equações Diferenciais Parciais

Em caráter de revisão, vamos introduzir o conceito de equação diferencial parcial, linear e de segunda ordem envolvendo apenas duas variáveis independentes. A generalização para um maior número de variáveis independentes não é difícil e pode ser encontrada em [14]. A maior atenção às equações diferenciais parciais, lineares, de segunda ordem com duas variáveis independentes se justifica pelo fato delas emergirem de uma gama bastante grande de problemas, em particular, problemas envolvendo processos ondulatórios, associados à chamada equação da onda (equação de onda) e difusivos, associados à chamada equação do calor (equação de difusão), dentre outros.

Um fato muito importante a respeito de uma equação diferencial parcial é que o método de solução depende geralmente do tipo de equação, segundo uma classificação que veremos adiante. Portanto uma classificação, quanto ao tipo, se faz útil e necessária.

Em relação às equações diferenciais parciais de segunda ordem com duas variáveis independentes, vamos dedicar o próximo capítulo para discutirmos como obter a solução, satisfazendo as chamadas condições de contorno, associadas à geometria do problema e as condições iniciais através da metodologia das transformadas integrais. Discutimos o método das características no caso de duas variáveis independentes, explicitamente.

Convém ressaltar que vamos usar a notação para a derivada parcial de  $u$ , em relação à  $x$  tanto na forma  $\frac{\partial u}{\partial x}$  quanto na forma  $u_x$ , por conveniência.

## 1.1 Método das Características

O chamado método das características<sup>1</sup> consiste em mudar convenientemente as coordenadas  $(x, y)$  para as coordenadas características (ou somente características)  $(\xi, \eta)$  de modo que a equação diferencial parcial é levada numa equação diferencial ordinária. Resolve-se a equação nas variáveis  $(\xi, \eta)$  e volta-se para as coordenadas  $(x, y)$  de modo a obter a solução da equação diferencial parcial.

### 1.1.1 Equações com Duas Variáveis Independentes

Nesta seção vamos discutir as equações diferenciais parciais de segunda ordem lineares, com uma variável dependente e duas variáveis independentes.

Chama-se equação diferencial parcial linear de segunda ordem, com duas variáveis independentes, a toda equação da forma

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \quad (1.1.1)$$

onde os coeficientes  $A, \dots, G$  são funções das variáveis independentes  $x$  e  $y$ , e  $u = u(x, y)$  é a variável dependente. Vamos supor desde o início que tanto  $u(x, y)$  quanto os coeficientes presentes na equação (1.1.1) são continuamente diferenciáveis e que os coeficientes  $A, B$  e  $C$  não são simultaneamente nulos.

A classificação de uma equação diferencial parcial baseia-se na possibilidade de reduzi-la à chamada forma canônica, em um ponto de seu domínio, através de uma transformação de coordenadas. Essa classificação é análoga à classificação de uma quádrlica. Partindo da forma geral mostrada na equação (1.1.1), dizemos que uma equação é hiperbólica, parabólica ou elíptica em um certo ponto  $P(x_0, y_0)$  de seu domínio se o discriminante

$$\Delta \equiv B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0) \quad (1.1.2)$$

for respectivamente positivo, zero ou negativo nesse ponto. Se isto é verdadeiro para todos os pontos de um domínio dizemos que a equação é hiperbólica, parabólica ou elíptica no domínio considerado. Quando o discriminante muda de sinal dizemos que a equação é do tipo misto.

No caso de duas variáveis independentes é sempre possível encontrar uma transformação de coordenadas que deixa a equação invariante, isto é, que conserva a forma da equação, desde que o Jacobiano da transformação seja diferente de zero. Vamos verificar este fato.

---

<sup>1</sup>O método das características pode ser aplicado em ambos os tipos de equações lineares e não-lineares.

Consideremos então, para duas variáveis independentes, uma transformação de coordenadas geral dada por

$$\bar{\xi} = \xi(x, y) \quad \text{e} \quad \bar{\eta} = \eta(x, y) \quad (1.1.3)$$

onde devemos supor que  $\xi$  e  $\eta$  são pelo menos duas vezes continuamente diferenciáveis e que o Jacobiano

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$$

é diferente de zero no domínio considerado, de modo que  $x$  e  $y$  podem ser obtidos univocamente das equações para  $\xi$  e  $\eta$ . Então, introduzindo as transformações mostradas nas equações (1.1.3) na equação diferencial original obtemos a nova equação<sup>2</sup>

$$\bar{A} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\xi}^2} + \bar{B} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\xi} \partial \bar{\eta}} + \bar{C} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\eta}^2} + \bar{D} \frac{\partial u}{\partial \bar{\xi}} + \bar{E} \frac{\partial u}{\partial \bar{\eta}} + \bar{F} u = \bar{G}, \quad (1.1.4)$$

onde os novos coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2; \\ \bar{B} &= 2A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + 2C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}; \\ \bar{C} &= A \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2; \\ \bar{D} &= A \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \xi}{\partial x} + E \frac{\partial \xi}{\partial y}; \\ \bar{E} &= A \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + D \frac{\partial \eta}{\partial x} + E \frac{\partial \eta}{\partial y}; \\ \bar{F} &= F \quad \text{e} \quad \bar{G} = G. \end{aligned}$$

O fato notável que permite esse esquema de classificação é que  $\bar{\Delta} = |J|^2 \Delta$  onde  $\bar{\Delta} = \bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C}$ , como pode ser verificado explicitamente.

A classificação da equação depende somente dos coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$  no ponto  $(x, y)$ ; por isso, reescrevemos as equações (1.1.1) e (1.1.4), respectivamente, como

---

<sup>2</sup>Note que ela tem a mesma forma da equação original, pois continua sendo uma equação diferencial parcial, linear e de segunda ordem.

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = H$$

e

$$\bar{A}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \bar{B}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \bar{H},$$

onde  $H$  e  $\bar{H}$  são, respectivamente, funções de  $x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y$  e  $\xi, \eta, u, \partial u/\partial \xi, \partial u/\partial \eta$ .

### 1.1.2 A Forma Canônica

Suponhamos que as funções  $A, B$  e  $C$  não são nulas. Vamos procurar as novas variáveis  $\xi$  e  $\eta$  de modo que os coeficientes  $\bar{A}$  e  $\bar{C}$  sejam nulos. Para isto devemos ter

$$A \left( \frac{\partial \tau}{\partial x} \right)^2 + B \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial \tau}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \tau}{\partial y} \right)^2 = 0, \quad (1.1.5)$$

onde  $\tau$  representa ora  $\xi$ , ora  $\eta$ . A equação anterior pode ainda ser reescrita na seguinte forma:

$$A \left( \frac{\partial \tau / \partial x}{\partial \tau / \partial y} \right)^2 + B \left( \frac{\partial \tau / \partial x}{\partial \tau / \partial y} \right) + C = 0.$$

Ao longo de uma curva  $\tau = \text{constante}$  no plano  $(x, y)$  temos

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy = 0,$$

de onde obtemos

$$\frac{\partial \tau / \partial x}{\partial \tau / \partial y} = - \frac{dy}{dx},$$

com a qual nossa equação para  $\tau$  toma a forma

$$A \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - B \left( \frac{dy}{dx} \right) + C = 0.$$

As raízes desta equação algébrica de segundo grau, com  $\Delta = B^2 - 4AC$ , são

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2A} (B + \sqrt{\Delta}), \quad (1.1.6)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2A} (B - \sqrt{\Delta}). \quad (1.1.7)$$

As duas equações diferenciais ordinárias lineares e de primeira ordem, equações (1.1.6) e (1.1.7), são chamadas equações características e as respectivas integrais são chamadas curvas ou integrais características. Visto que tais equações diferenciais ordinárias, são de primeira ordem, elas admitem, cada uma delas, uma constante de integração.

Enfim, note-se que se os coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes as equações características levam a duas famílias de retas, e a equação é do mesmo tipo em todos os pontos de seu domínio, uma vez que  $\Delta$  também será constante.

### 1.1.3 Equação do Tipo Hiperbólico

Se  $\Delta > 0$  temos duas famílias distintas de curvas características e a equação diferencial original se reduz a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = H_1 \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

onde  $H_1 = \bar{H}/\bar{B}$ , com  $\bar{B} \neq 0$ . Esta é a chamada primeira forma canônica da equação hiperbólica. Ao introduzirmos um segundo par de variáveis independentes

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi + \eta \\ \beta &= \xi - \eta \end{aligned}$$

obtemos a segunda forma canônica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = H_2 \left( \alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right).$$

Um exemplo deste tipo de equação é a chamada equação de propagação das ondas, que será discutida no Capítulo 4.

### 1.1.4 Equação do Tipo Parabólico

Se o discriminante  $\Delta = 0$  as equações características (1.1.6) e (1.1.7) são idênticas. Neste caso só existe uma família de curvas características, de onde obtemos somente uma curva integral  $\xi = \text{constante}$  (ou  $\eta = \text{constante}$ ). Logo, a forma canônica para a equação do tipo parabólico é dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = H_3 \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad \text{para } \bar{C} \neq 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \bar{H}_3 \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad \text{para } \bar{A} \neq 0,$$

dependendo da escolha  $\xi = \text{constante}$  ou  $\eta = \text{constante}$ , respectivamente. Os fenômenos de difusão são os mais representativos de tais equações parabólicas e serão discutidos no Capítulo 4.

### 1.1.5 Equação do Tipo Elíptico

Neste caso  $\Delta < 0$ , e as curvas características não são reais. Entretanto, se os coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são funções analíticas podemos considerar a equação

$$A \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - B \left( \frac{dy}{dx} \right) + C = 0$$

para os complexos  $x$  e  $y$ . Desde que  $\xi$  e  $\eta$  são complexos conjugados, vamos introduzir as variáveis reais

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{2i}(\xi - \eta),$$

de modo que a equação diferencial tome a forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = H_0 \left( \alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right), \quad (1.1.8)$$

chamada forma canônica da equação elíptica. A equação de Laplace [1749 – Pierre Simon Marquis de Laplace – 1827] constitui um exemplo de equação elíptica, e também será discutida no Capítulo 4.

## 1.2 Problemas Resolvidos

Aqui, vamos apresentar alguns problemas envolvendo as chamadas equações da Física-Matemática, dentre elas, as equações de Laplace, de Onda e do Calor, as quais serão formalmente discutidas no Capítulo 4, imediatamente após a apresentação da metodologia das transformadas integrais, Capítulo 2, e o teorema dos resíduos, Capítulo 3.

### Exemplo 1.1 – Equação de Laplace

A chamada equação de Laplace bidimensional, em coordenadas cartesianas, é dada por

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) \equiv \nabla^2 u(x, y) \equiv \Delta u(x, y) = 0. \quad (1.2.9)$$

Introduza as coordenadas polares no plano

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta \quad (1.2.10)$$

com  $r > 0$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  a fim de escrever a equação de Laplace nas coordenadas  $r$  e  $\theta$ . Classifique a equação resultante.

**Solução.** O Jacobiano da transformação é dado por

$$J = \begin{vmatrix} \partial x / \partial r & \partial x / \partial \theta \\ \partial y / \partial r & \partial y / \partial \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

que é diferente de zero. Então, invertendo, podemos escrever

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad \text{e} \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

Calculando as derivadas primeiras, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Então, calculando as derivadas segundas temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \\ &+ \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \\ &+ \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Adicionando as duas últimas expressões e simplificando obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u(r, \theta) = 0$$

que é a equação de Laplace escrita em coordenadas polares no plano.

A fim de classificarmos a equação acima quanto ao tipo, basta calcular o seguinte discriminante, isto é,

$$\Delta = 0^2 - 1 \cdot \frac{4}{r^2} = -\frac{4}{r^2} < 0$$

que é sempre negativo, ou seja, a equação é do tipo elíptico. Isso era esperado pois a equação de Laplace em coordenadas cartesianas está na forma canônica e vemos claramente, comparando-a com a equação (1.1.8), que é elíptica  $\diamond$

**Exemplo 1.2 – Equação do Tipo Misto**

Considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1.2.11)$$

com  $x \neq 0$ . Pede-se: (i) Classificar a equação. (ii) Obter as equações características. (iii) Determinar a forma canônica.

**Solução.** (i) Identificando os termos desta equação com aqueles usados na equação (1.1.1) temos  $A = 1$ ,  $B = 0$  e  $C = 4x^2$ , logo

$$\Delta = B^2 - 4AC = -4 \cdot 1 \cdot 4x^2 = -16x^2 < 0,$$

isto é, a equação é do tipo elíptico.

(ii) Para obter a equação característica usamos (cf. as equações (1.1.6) e (1.1.7))

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A},$$

de onde se segue que

$$\frac{dy}{dx} = 2ix \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = -2ix.$$

(iii) Integrando as equações acima encontramos

$$y - ix^2 = c_1 \quad \text{e} \quad y + ix^2 = c_2,$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes. Introduzimos (isto é, definimos) as novas variáveis  $\xi$  e  $\eta$  dadas por

$$\begin{aligned} y - ix^2 &= \xi \\ y + ix^2 &= \eta \end{aligned}$$

de onde obtemos, para as variáveis  $\alpha$  e  $\beta$ ,

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = y, \quad (1.2.12)$$

$$\beta = \frac{1}{2i}(\xi - \eta) = -x^2. \quad (1.2.13)$$

Podemos agora calcular explicitamente os operadores de derivada parcial em relação a estas novas variáveis. Para as derivadas primeiras temos

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \beta} = -2x \frac{\partial}{\partial \beta} = -2\sqrt{-\beta} \frac{\partial}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha},$$

e para as derivadas segundas

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 4\sqrt{-\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \sqrt{-\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) = -4\beta \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 2 \frac{\partial}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}.$$

Substituindo estas expressões na equação (1.2.11) obtemos

$$-4\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial \beta} - 4\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Logo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = -\frac{1}{2\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta},$$

que é a forma canônica buscada, isto é, não contém o termo de derivada mista e os coeficientes das derivadas de ordem dois são constantes e de mesmo sinal. Note que  $\beta \neq 0$  uma vez que  $x \neq 0$   $\diamond$

### Exemplo 1.3 – Equação com Coeficientes Constantes

Considere a seguinte equação diferencial parcial

$$3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + 5 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x, y) + 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) = -\frac{1}{3}$$

Pede-se: (i) Classifique a equação quanto ao tipo e (ii) Reduza a equação à forma canônica.

**Solução.** (i) A fim de classificar a equação basta calcularmos o discriminante a ela associada, isto é,

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 - 24 = 1 > 0$$

de onde concluímos que é do tipo hiperbólico.

(ii) Para reduzir à forma canônica, devemos primeiramente obter as equações características, ou seja

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 3}.$$

Integrando-as temos as respectivas curvas características

$$y = x + c_1 \quad \text{e} \quad y = \frac{2}{3}x + c_2$$

de onde introduzimos as coordenadas características, isto é,

$$\xi = y - x \quad \text{e} \quad \eta = y - \frac{2}{3}x.$$

Enfim, calculando as derivadas, substituindo-se na equação diferencial e rearranjando obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} u(\xi, \eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} u(\xi, \eta) = 1$$

que é a primeira forma canônica de uma equação hiperbólica (Ver Ex.3, a seguir).

### 1.3 Exercícios Propostos

1. Classifique as equações diferenciais parciais quanto ao tipo

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \\ \text{(b)} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 \\ \text{(c)} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \text{(d)} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial u}{\partial y} - u = 2 \end{array}$$

2. Para as equações do Ex.1 obtenha: (a) coordenadas características; (b) Reduza-as à forma canônica.

3. A equação de onda (tipo hiperbólico) admite duas formas canônicas, uma envolvendo só a derivada de ordem dois mista e a outra sem o termo de derivada mista. (a) obtenha a outra forma canônica para a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

com  $u = u(x, y)$ . (b) Obtenha a solução geral<sup>3</sup> da equação de onda, isto é, considerando  $y = ct$  com  $t$  a coordenada temporal e  $c$  a velocidade de propagação, suposta constante. Interprete o resultado.

4. Classifique, quanto ao tipo, a chamada equação de Tricomi [1897 – Francesco Giacomo Tricomi – 1978],

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, y) + x \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x, y) = 0.$$

5. Verifique que a função Gaussiana

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp(-x^2/4t)$$

satisfaz, para  $t \neq 0$ , a chamada equação do calor unidimensional<sup>4</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t).$$

6. Verifique que uma onda senoidal,  $u(x, t) = \text{sen}(x + ct)$ , satisfaz a chamada equação de onda unidimensional

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) = 0$$

com  $c$  uma constante positiva.

7. Utilize o método das características para resolver a seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, y) + y \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y}u(x, y) = 0$$

na região em que ela é do tipo hiperbólico.

8. Sejam  $(x, y, z)$  as coordenadas cartesianas. Escreva a equação de Laplace tridimensional

$$\Delta u(x, y, z) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}u(x, y, z) = 0$$

nas coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , definidas por  $x = r \text{sen } \theta \cos \phi$ ,  $y = r \text{sen } \theta \text{sen } \phi$  e  $z = r \cos \theta$ , com  $r > 0$ ,  $0 \leq \theta < \pi$  e  $0 \leq \phi < 2\pi$ .

<sup>3</sup>Nem sempre é fácil (e útil) obter a solução geral de uma equação diferencial parcial. Entretanto, se a forma canônica for simples, podemos quase sempre obter tal solução geral.

<sup>4</sup>Esta nomenclatura é relacionada com a chamada variável espacial, no caso  $x$ .

9. Análogo ao Ex.8 para as coordenadas cilíndricas,  $(r, \theta, z)$ , relacionadas com as coordenadas cartesianas, através das expressões  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  e  $z = z$ , com  $r > 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  e  $-\infty < z < \infty$ .

### 1.3.1 Respostas e/ou Sugestões

1. (a) Parabólica; (b) Elíptica; (c) Hiperbólica; (d) Parabólica.

(a)  $\xi = xy$  e  $\eta = y$ ;  $\eta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} = u$

2. (b) Já se encontra na forma canônica

(c)  $\xi = -x + y$  e  $\eta = 3x + y$ ;  $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{3}{16} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{16} \frac{\partial u}{\partial \xi}$

- (d) Já se encontra na forma canônica

3. (a)  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ ; (b)  $u(x, y) = f(x + ct) + g(x - ct)$ . Uma onda se propagando para a direita e outra a partir da direita.

4.  $x < 0$  Hiperbólico;  $x = 0$  Parabólico;  $x > 0$  Elíptico.

5. Basta efetuar as derivadas.

6. Basta efetuar as derivadas.

7.  $u(x, y) = f(x + 2\sqrt{-y}) + g(x - 2\sqrt{-y})$  onde  $f$  e  $g$  são funções continuamente diferenciáveis.

- 8.

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] u(r, \theta, \phi) = 0$$

- 9.

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, \theta, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta, z) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u(r, \theta, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(r, \theta, z) = 0$$

## Capítulo 2

# Transformadas Integrais

No capítulo precedente introduzimos o conceito de equação diferencial parcial, linear de segunda ordem, particularizando para o caso em que temos duas variáveis independentes, porém não apresentamos um método específico de resolução, tarefa esta que será agora apresentada e discutida. Existem vários métodos para se abordar uma equação diferencial parcial, dentre eles o clássico método de separação de variáveis.

Aqui, vamos apresentar a chamada metodologia das transformadas integrais, em particular, discutimos as transformadas de Laplace, Fourier, Mellin e Hankel. Convém ressaltar que esta metodologia é aplicável quando temos um problema envolvendo uma equação diferencial ordinária ou parcial, como vamos ver no Capítulo 4.

Após a introdução do conceito de transformada integral, discutimos as transformadas de Laplace, Fourier [1768 – Jean Baptiste Joseph Fourier – 1830], Mellin [1854 – Robert Hjalmar Mellin – 1933] e Hankel [1839 – Hermann Hankel – 1873], mencionando algumas de suas propriedades. O problema da inversão da transformada, em geral, envolve o plano complexo e a teoria das funções analíticas, em particular, o chamado teorema dos resíduos, tema este que será abordado no Capítulo 3.

O objetivo principal deste capítulo é utilizar a metodologia das transformadas como ferramenta para procurar soluções de uma equação diferencial ordinária ou uma equação diferencial parcial, no particular caso de ambas lineares com coeficientes constantes, e condições iniciais e/ou condições de contorno.

Em linhas gerais a chamada metodologia das transformadas integrais, também conhecido como método operacional, converte o problema de partida num outro problema, aparentemente mais simples, chamado auxiliar.

Resolve-se o problema auxiliar e a partir da transformada inversa recupera-se a solução do problema de partida. É conveniente ressaltar que o cálculo da transformada inversa requer, em geral, o conhecimento das funções analíticas, em particular o uso do teorema dos resíduos que será abordado no Capítulo 3.

O capítulo está disposto em quatro seções, relativamente às transformadas de Laplace, de Fourier, de Mellin e de Hankel, respectivamente, onde, além das respectivas definições apresentamos algumas de suas propriedades.

## 2.1 Noções Básicas

Vamos, em linhas gerais, introduzir o conceito de transformada integral para, nas próximas seções, particularizar para as transformadas de Laplace, de Fourier, de Mellin e de Hankel, isto é, as transformadas que serão usadas na resolução de equações diferenciais parciais.

Seja  $f(x)$  uma função definida no intervalo,  $I$ , tal que  $a \leq x \leq b$ . Definimos a transformada integral<sup>1</sup>, denotada por  $\mathfrak{T}[f(x)] \equiv F(\xi)$ , da função  $f(x)$ , através da seguinte integral

$$\mathfrak{T}[f(x)] \equiv F(\xi) = \int_a^b G(x|\xi) f(x) dx$$

onde  $G(x|\xi)$  é uma função de duas variáveis  $x$  e  $\xi$ , chamada núcleo da transformada. A função transformada  $F(\xi)$  recebe o nome de função imagem associada à função objeto,  $f(x)$ , e  $\xi$  é a variável transformada.

Uma particular transformada integral requer o conhecimento do núcleo da transformada e do intervalo além, é claro, das condições que devem satisfazer a função objeto de modo que a integral que define a transformada exista.

Neste trabalho, vamos discutir apenas as transformadas de Laplace, de Fourier, de Mellin e de Hankel, conforme a tabela a seguir:

Nome	Intervalo	Núcleo	Parâmetro
Laplace	$0 < x < \infty$	$\exp(-sx)$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
Fourier	$-\infty < x < \infty$	$\exp(ikx)$	$-\infty < k < \infty$
Mellin	$0 < x < \infty$	$x^{p-1}$	$\operatorname{Re}(p) > 0$
Hankel	$0 < x < \infty$	$r J_n(kr)$	$0 < k < \infty$ $n = 0, 1, 2, \dots$

Tabela 1 – Transformadas integrais.

<sup>1</sup>Nas aplicações vamos, também, discutir as transformadas integrais finitas, em particular, as transformadas de Hankel.

## 2.2 Transformada de Laplace

Nesta seção, discutimos a transformada de Laplace, talvez a mais simples de ser manipulada, associada à resolução de uma equação diferencial ordinária. Em geral, este tipo de transformada é útil na resolução de um problema envolvendo condições iniciais, isto é, por exemplo, quando conhecemos o valor da função e de sua derivada primeira (em geral parte temporal) no instante inicial,  $t = 0$ .

### 2.2.1 Definição

Dada uma função  $f(t)$ , definida no intervalo semi-infinito  $[0, \infty)$ , a sua transformada de Laplace, denotada por  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ , é dada pela integral

$$F(s) \equiv \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

sempre que a integral exista. Nesse caso  $G(t|s) = e^{-st}$  é o núcleo da transformada. Às vezes a função  $f(t)$  é chamada de função objeto e a função  $F(s)$  é conhecida como função imagem.

A existência desta integral é garantida para uma classe de funções ditas admissíveis, as quais satisfazem aos critérios: (a) são contínuas por partes no intervalo  $[0, \infty)$  e (b) existem duas constantes positivas  $M$  e  $\alpha$  tais que, para todo  $t$  no intervalo  $[0, \infty)$ , vale a desigualdade

$$|f(t)| < M e^{\alpha t}, \quad \text{para } 0 \leq t < \infty.$$

É costume, também, chamar  $f(t)$  satisfazendo a condição (b) de função de ordem exponencial  $\alpha$  [7].

### 2.2.2 Propriedades

Vamos apresentar apenas as propriedades que serão necessárias para a resolução das equações diferenciais propriamente ditas. Também nesta seção, como exemplo do cálculo explícito da transformada de Laplace, vamos calcular a transformada de Laplace das funções degrau deslocado e das funções trigonométricas seno e co-seno.

#### Linearidade

Sejam  $f(t)$  e  $g(t)$  duas funções de ordens exponenciais  $\alpha$  e  $\beta$  no intervalo  $[0, \infty)$ , respectivamente. Sejam  $A$  e  $B$  duas constantes. As combinações lineares

$$h(t) = Af(t) \pm Bg(t)$$

são também admissíveis de ordem exponencial maior ou igual a  $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$  e valem as relações

$$\mathfrak{L}[h(t)] = \mathfrak{L}[Af(t) \pm Bg(t)] = A\mathfrak{L}[f(t)] \pm B\mathfrak{L}[g(t)].$$

### Deslocamento de $f(t)$

Se a transformada de Laplace da função  $f(t)$  é  $F(s)$ , então, para qualquer número positivo  $a$ , a transformada de Laplace da função deslocada de  $f(t)$ ,

$$f_a(t) \equiv f(t-a)u_0(t-a)$$

é dada por

$$\mathfrak{L}[f_a(t)] = e^{-as}F(s)$$

sendo  $u_0$  a função degrau deslocada definida por

$$u_a(t) \equiv u_0(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < a, \\ 1, & \text{para } t > a. \end{cases}$$

### Deslocamento de $F(s)$

Se a transformada de Laplace da função  $f(t)$  é  $F(s)$ , então, para qualquer  $\beta$ , a transformada de Laplace de  $e^{\beta t}f(t)$  é dada por

$$\mathfrak{L}[e^{\beta t}f(t)] = F(s-\beta).$$

### Escala

Se a transformada de Laplace da função  $f(t)$  é  $F(s)$ , então, a transformada de Laplace de  $f(ct)$ , com  $c$  uma constante positiva, é dada por

$$\mathfrak{L}[f(ct)] = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right).$$

### Exemplo 2.1

Calcular a transformada de Laplace da função degrau unitário e da função degrau unitário deslocada.

**Solução.** Devemos calcular a integral

$$\mathfrak{L}[u_0(t)] = \int_0^{\infty} u_0(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

para  $\operatorname{Re}(s) > 0$ . Por outro lado, utilizando a propriedade do deslocamento de  $f(t)$  podemos escrever para a transformada de Laplace da função degrau deslocada

$$\mathfrak{L}[u_a(t)] \equiv \mathfrak{L}[u_0(t-a)] = e^{-as} \mathfrak{L}[u_0(t)] = \frac{e^{-as}}{s}$$

com  $\operatorname{Re}(s) > 0$

◇

### Exemplo 2.2

Calcular a transformada de Laplace para a função  $f(t) = \operatorname{sen} t$ .

**Solução.** Devemos calcular a integral

$$\mathfrak{L}[\operatorname{sen} t] = \int_0^{\infty} \operatorname{sen} t e^{-st} dt$$

que, através de duas integrações por partes fornece

$$\mathfrak{L}[\operatorname{sen} t] = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Vamos, no entanto, obter o mesmo resultado utilizando a expressão

$$\operatorname{sen} t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

e as propriedades de linearidade e deslocamento, isto é,

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[\operatorname{sen} t] &= \frac{1}{2i} (\mathfrak{L}[e^{it}] - \mathfrak{L}[e^{-it}]) \\ &= \frac{1}{2i} (\mathfrak{L}[e^{it} u_0(t)] - \mathfrak{L}[e^{-it} u_0(t)]) \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i} \right) = \frac{1}{s^2 + 1}. \end{aligned}$$

Deste resultado e da propriedade de escala, podemos escrever

$$\mathfrak{L}[\operatorname{sen} at] = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad (2.2.1)$$

com  $a > 0$  ◇

Com o mesmo raciocínio podemos obter

$$\mathfrak{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad (2.2.2)$$

com  $a > 0$ .

### Exemplo 2.3

Calcular a transformada de Laplace da função  $f(t) = t$ .

**Solução.** Devemos calcular a integral

$$\mathfrak{L}[t] = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt$$

que, novamente, através de uma integração por partes, fornece  $\mathfrak{L}[t] = 1/s^2$ . Vamos obter o mesmo resultado simulando uma derivada no parâmetro  $s$ , isto é,

$$\mathfrak{L}[t] = -\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{d}{ds} \left( \frac{e^{-st}}{-s} \right)_0^{\infty} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s^2}.$$

Procedendo indutivamente mostra-se que, para  $n = 0, 1, 2, \dots$  temos,

$$\mathfrak{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad (2.2.3)$$

Para aplicações da transformada de Laplace em resolução de equações diferenciais de primeira e segunda ordens (aquelas que nos interessam) é importante conhecer a transformada de Laplace das derivadas primeira e segunda. É possível estender este resultado para a ordem  $n$  da derivada [7].

### Derivadas de $f(t)$

Se a função  $f(t)$  e sua derivada  $f'(t)$  são admissíveis no intervalo  $[0, \infty)$ , vale

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[f'(t)] &= s\mathfrak{L}[f(t)] - f(0) \\ &= sF(s) - f(0). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Com as devidas condições impostas para a derivada segunda  $f''(t)$  temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[f''(t)] &= s^2\mathfrak{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

A partir destas expressões já podemos inferir sua importância para a resolução de um problema de valor inicial, afinal emergem naturalmente o valor da função e de sua derivada em  $t = 0$ .

**Derivada de  $F(s)$** 

Se  $F(s)$  é a transformada de Laplace de  $f(t)$  temos

$$F'(s) = -\mathcal{L}[t f(t)] \quad (2.2.6)$$

sendo  $F'(s)$  a derivada em relação ao parâmetro  $s$ .

**2.3 O Problema da Inversão**

Como já mencionamos, a metodologia das transformadas integrais transforma o problema de partida num outro auxiliar, em geral, mais simples de ser abordado. Resolve-se este problema auxiliar (ou transformado) e, através da inversão da transformada, recupera-se a solução do problema de partida.

A inversão, como também já mencionamos, faz uso da análise complexa, em particular do teorema dos resíduos, que será abordado no Capítulo 3. Inicialmente abordaremos a inversão da transformada usando apenas manipulações algébricas e os exemplos anteriores.

**Exemplo 2.4**

Denotando a transformada de Laplace inversa por  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] \equiv f(t)$ , calcule a inversa de

$$F(s) = \frac{4}{(s-1)^2(s+1)}.$$

**Solução.** Começamos por escrever a fração, utilizando frações parciais, na forma

$$\frac{4}{(s-1)^2(s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+1},$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes que devem ser determinadas. Reduzindo ao mesmo denominador podemos escrever, já simplificando

$$4 = A(s^2 - 1) + B(s + 1) + C(s - 1)^2$$

que nos leva ao seguinte sistema de equações algébricas

$$\begin{cases} A + C & = & 0 \\ B - 2C & = & 0 \\ -A + B + C & = & 4 \end{cases}$$

com solução dada por  $A = -1$ ,  $B = 2$  e  $C = 1$ , de onde podemos escrever

$$F(s) = -\frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1}{s+1}.$$

Da linearidade da transformada de Laplace obtemos

$$\begin{aligned} f(t) &= -\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + 2\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right] + \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \\ &= -e^t + 2 \cdot t \cdot e^t + e^{-t} = (2t-1)e^t + e^{-t} \end{aligned}$$

onde utilizamos explicitamente os resultados, a saber:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[e^{\mp t}] = \frac{1}{s \pm 1} &\iff \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s \pm 1}\right] = e^{\mp t} \\ \mathfrak{L}[t e^t] = \frac{1}{(s-1)^2} &\iff \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right] = t e^t \end{aligned}$$

ambos tabelados

◇

### 2.3.1 Convolução

Um pergunta cabe aqui: A transformada de Laplace de um produto de funções é igual ao produto das transformadas? Isto só é verdade se o produto é o chamado *produto de convolução*. Esta também é uma maneira conveniente para calcularmos a inversa a partir de resultados conhecidos, como vamos ver a seguir.

#### Definição

Sejam  $f(t)$  e  $g(t)$  duas funções de ordens exponenciais  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente, no intervalo  $[0, \infty)$ . Definimos o produto de convolução, ou apenas convolução, de  $f(t)$  e  $g(t)$ , denotado por  $f \star g$ , como a função  $h(t)$  dada por

$$h(t) \equiv (f \star g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

A ordem exponencial da convolução é, no mínimo, igual a  $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$ .

### Transformada de Laplace da Convolução

A transformada de Laplace,  $H(s)$ , da convolução,  $h(t)$ , é dada pelo produto das transformadas de Laplace  $F(s)$  e  $G(s)$  das funções originais  $f(t)$  e  $g(t)$ , respectivamente, isto é,

$$H(s) \equiv \mathcal{L}[(f \star g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)] = F(s)G(s).$$

Note que este resultado é uma outra maneira de recuperarmos a função original, bastando que conheçamos a transformada inversa das funções  $F(s)$  e  $G(s)$ .

#### Exemplo 2.5

Determine a transformada de Laplace inversa

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right].$$

**Solução.** A partir da equação (2.2.1), com  $a = 1$  temos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + 1} \right] = \text{sen } t.$$

Utilizando o produto de convolução podemos escrever

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + 1} \frac{1}{s^2 + 1} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + 1} \right] \star \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + 1} \right] \\ &= \int_0^t [\text{sen } \tau][\text{sen}(t - \tau)] d\tau = \text{sen } t - t \cos t \end{aligned}$$

que é o resultado desejado

◇

### 2.3.2 Aplicações

Aqui, nas aplicações, como já mencionamos, vamos discutir através de exemplos situações onde a transformada de Laplace é muito conveniente.

**Exemplo 2.6**

Resolva o seguinte problema de valor inicial,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) + ax(t) = f(t), \\ x(0) = x_0, \quad t > 0, \end{cases}$$

onde  $a$  é uma constante, através da transformada de Laplace.

**Solução.** Sejam  $x(t)$  e  $f(t)$  funções admissíveis. Vamos tomar a transformada de Laplace da equação, multiplicando os dois membros por  $\exp(-st)$  e integrando de zero até infinito, temos

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt}x(t) e^{-st} dt + \int_0^{\infty} a x(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Usando a propriedade dada pela equação (2.2.4) podemos escrever

$$sX(s) - x(0) + aX(s) = F(s)$$

onde introduzimos a notação

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad \text{e} \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Utilizando a condição inicial e resolvendo para  $X(s)$  temos<sup>2</sup>

$$X(s) = \frac{F(s) + x_0}{s + a}.$$

O problema se resume, agora, em determinar a transformada de Laplace inversa. Utilizando o resultado

$$\mathfrak{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s + a} \iff \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + a}\right] = e^{-at}$$

podemos escrever

$$\mathfrak{L}^{-1}[X(s)] = x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s + a}\right] + x_0 e^{-at}.$$

---

<sup>2</sup>Note que é uma equação algébrica de primeiro grau, com solução imediata. Sem dúvida esta equação é muito mais simples que a equação de partida, uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.

Ora, visto que sabemos qual é a transformada inversa de  $F(s)$ , podemos utilizar a convolução para escrever

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathfrak{L}^{-1}[F(s)] \star \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] + x_0 e^{a-t} \\ &= \int_0^t f(t-\tau) e^{-a\tau} d\tau + x_0 e^{-at} \\ &= \int_0^t f(\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau + x_0 e^{-at} \end{aligned}$$

que é a solução do problema de valor inicial

◇

### Exemplo 2.7

Resolver a equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + a \frac{d}{dt}x(t) + bx(t) = f(t)$$

com  $a$  e  $b$  constantes e  $f(t)$  uma função conhecida.

**Solução.** Note que é uma equação diferencial ordinária do oscilador harmônico amortecido e forçado ou do circuito RLC com uma força eletromotriz aplicada.

Multiplicando os dois membros da equação diferencial por  $\exp(-st)$ , integrando de zero até infinito e definindo

$$X(s) = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt \quad \text{e} \quad F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

obtemos, usando as propriedades dadas pelas equações (2.2.4) e (2.2.5), a seguinte equação algébrica

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + a[sX(s) - x(0)] + bX(s) = F(s)$$

com solução dada por

$$X(s) = \frac{F(s) + (a+s)x(0) + x'(0)}{s^2 + as + b}.$$

Dado  $f(t)$  obtemos, através da transformada de Laplace,  $F(s)$ . Os valores de  $x(0)$  e  $x'(0)$  também são conhecidos, condições iniciais. De modo a recuperar a solução do problema de partida basta procedermos com a inversão da transformada.

A fim de explicitar os cálculos, vamos considerar dois casos particulares:

a)  $f(t) = 3$ ,  $a = 4$  e  $b = 3$ , bem como as condições iniciais  $x(0) = 0 = x'(0)$ , isto é, devemos calcular a transformada inversa da função

$$X(s) = \frac{3/s}{(s+1)(s+3)} = \frac{3}{s(s+1)(s+3)}.$$

Utilizando frações parciais podemos escrever

$$\frac{3}{s(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3} = \frac{A(s^2 + 4s + 3) + B(s^2 + 3s) + C(s^2 + s)}{s(s+1)(s+3)}$$

de onde segue-se o sistema de equações algébricas

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ 4A + 3B + C &= 0 \\ 3A &= 3 \end{aligned}$$

com solução  $A = 1$ ,  $B = -3/2$  e  $C = 1/2$ , logo

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{3/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+3}.$$

Utilizando a linearidade da transformada, podemos escrever

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[X(s)] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{3}{2}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \frac{1}{2}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]$$

de onde segue-se, utilizando a equação (2.2.3) e a propriedade do deslocamento

$$x(t) = 1 - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

que é a solução do problema de valor inicial.

b) Consideremos, agora, os parâmetros  $a = 0$  e  $b = 1$ , bem como  $f(t) = t$ .

De modo a utilizarmos a técnica da transformada de Laplace, admitamos as condições iniciais,  $x(0) = 1$ , deslocamento inicial e  $x'(0) = 0$ , velocidade inicial é nula (repouso).

Multiplicando a equação diferencial por  $\exp(-st)$ , integrando de zero até infinito, temos

$$s^2 F(s) - sx(0) - x'(0) + F(s) = \frac{1}{s^2}$$

onde

$$F(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt.$$

Impondo as condições iniciais e resolvendo a equação algébrica obtemos

$$(1 + s^2)F(s) = \frac{1}{s^2} + s = \frac{1 + s^3}{s^2}$$

ou ainda, utilizando frações parciais, na seguinte forma

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Agora devemos proceder com a inversão. Utilizando a propriedade de linearidade podemos escrever

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 1}\right] - \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right].$$

A partir das relações conhecidas, equações (2.2.1) e (2.2.2) podemos escrever<sup>3</sup>

$$x(t) = t + \cos t - \sin t$$

que é a solução do problema inicial.

Vamos obter este mesmo resultado, utilizando o produto de convolução. Escrevendo  $F(s)$  na forma

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2(s^2 + 1)}$$

e procedendo com a inversão podemos escrever

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 1}\right] + \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} \frac{1}{s^2 + 1}\right].$$

Utilizando o produto de convolução obtemos

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t + \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] \star \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] \\ &= \cos t + t \star \sin t \\ &= \cos t + \int_0^t \tau \sin(t - \tau) d\tau \\ &= \cos t + \int_0^t (t - \tau) \sin \tau d\tau \\ &= \cos t + t - \sin t \end{aligned}$$

que é exatamente o resultado anteriormente obtido ◇

<sup>3</sup>Note que estas transformadas de Laplace que são conhecidas são aquelas tabeladas.

**Exemplo 2.8 – Equação com Coeficientes Variáveis**

Ao utilizarmos a metodologia da transformada de Laplace para resolver um problema de valor inicial com coeficientes variáveis não obtemos uma simples equação algébrica. A fim de resolvermos explicitamente um problema de valor inicial, vamos considerar a equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + t \frac{d}{dt}x(t) - x(t) = 0$$

satisfazendo as condições iniciais  $x(0) = 0$  e  $x'(0) = 1$ .

**Solução.** Multiplicando a equação diferencial por  $\exp(-st)$  e integrando de zero até infinito temos

$$\int_0^\infty \frac{d^2}{dt^2}x(t) e^{-st} dt + \int_0^\infty t \frac{d}{dt}x(t) e^{-st} dt - \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt = 0.$$

Usando as propriedades dadas pelas equações (2.2.4), (2.2.5) e (2.2.6) e simulando uma derivada na segunda integral podemos escrever

$$s^2 F(s) - sx(0) - x'(0) - \frac{d}{ds} \int_0^\infty \frac{d}{dt}x(t) e^{-st} dt - F(s) = 0$$

onde

$$F(s) = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt.$$

Utilizando as condições iniciais e integrando por partes obtemos

$$s^2 F(s) - 1 - \frac{d}{ds}[sF(s)] - F(s) = 0$$

ou ainda, na seguinte forma

$$s \frac{d}{ds} F(s) + (2 - s^2) F(s) = -1$$

que é uma equação diferencial ordinária, linear, de primeira ordem, não-homogênea e coeficientes variáveis (Capítulo 1).

Primeiramente<sup>4</sup> vamos resolver a respectiva equação diferencial homogênea,

$$s \frac{d}{ds} F_H(s) + (2 - s^2) F_H(s) = 0$$

---

<sup>4</sup>Visto que a equação é uma equação de primeira ordem e linear, poderíamos utilizar o fator integrante.

que é uma equação separável, ou seja,

$$\frac{dF_H}{F_H} = \frac{s^2 - 2}{s} ds$$

cuja integração fornece

$$F_H(s) = \frac{C}{s^2} e^{s^2/2}$$

onde  $C$  é uma constante.

Vamos agora procurar resolver a equação não-homogênea escrevendo

$$F(s) = \frac{v(s)}{s^2} e^{s^2/2}$$

onde  $v(s)$  é uma função a ser determinada. Exigindo que a equação diferencial seja satisfeita temos

$$v'(s) = -s e^{-s^2/2}$$

com solução dada por  $v(s) = e^{-s^2/2} + D$  e com isso

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{D}{s^2} e^{s^2/2}$$

onde  $D$  é uma outra constante. Como estamos interessados em apenas uma solução (solução do problema de valor inicial) podemos tomar<sup>5</sup>  $D = 0$  de onde segue-se

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t$$

que é a solução do problema de valor inicial ◇

Note que, como havíamos mencionado, em sendo a equação diferencial ordinária com coeficientes variáveis, após a transformada de Laplace, não obtivemos uma simples equação algébrica e sim uma outra equação diferencial, neste caso, uma equação diferencial ordinária, linear, não-homogênea, com coeficientes variáveis porém de primeira ordem, isto é, uma ordem a menos, aparentemente mais simples de ser resolvida. Basta, então, integrar esta equação de primeira ordem e tomar apenas uma solução particular da equação diferencial não-homogênea.

---

<sup>5</sup>A maneira de se determinar a constante  $D$  requer o uso das variáveis complexas [8].

## 2.4 Transformada de Fourier

Existem algumas diferentes definições da transformada de Fourier dependendo, geralmente, da área (matemática, física, engenharias, etc) em que está sendo utilizada, e essas definições envolvem algumas convenções que são eventualmente úteis dependendo do contexto envolvido. As diferenças envolvem o fator multiplicativo  $2\pi$  ou  $\sqrt{2\pi}$  e o sinal (em  $\pm i$ ) no núcleo da transformada. A seguir apresentaremos a definição com a qual estamos mais habituados.

### 2.4.1 Definição

Seja  $f(x)$  uma função contínua, suave por partes e absolutamente integrável no intervalo  $-\infty < x < \infty$ . Definimos a transformada de Fourier de  $f(x)$ , denotada por  $F(k) \equiv \mathfrak{F}[f(x)]$ , através da integral

$$F(k) \equiv \mathfrak{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

sempre que a integral exista. Recuperamos a função  $f(x)$  através da transformada de Fourier inversa, denotada por

$$f(x) \equiv \mathfrak{F}^{-1}[F(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx} dk$$

sempre que a integral exista.

### 2.4.2 Propriedades

Em analogia à transformada de Laplace, apresentamos apenas as propriedades que nos serão úteis para a continuação deste trabalho.

#### Linearidade

Se  $\mathfrak{F}[f(x)]$  e  $\mathfrak{F}[g(x)]$  são as transformadas de Fourier, respectivamente, das funções  $f(x)$  e  $g(x)$ , então

$$\mathfrak{F}[c_1 f(x) + c_2 g(x)] = c_1 \mathfrak{F}[f(x)] + c_2 \mathfrak{F}[g(x)],$$

para quaisquer constantes  $c_1$  e  $c_2$ .

**Deslocamento**

Se a transformada de Fourier da função  $f(x)$  é  $\mathfrak{F}[f(x)]$  então

$$\mathfrak{F}[f(x - c)] = e^{ikc} \mathfrak{F}[f(x)]$$

para  $c > 0$ .

**Exemplo 2.9**

Calcule a transformada de Fourier da função delta de Dirac,  $\delta(x)$ .

**Solução.** Utilizando a definição da transformada de Fourier e o resultado do Apêndice A, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[p(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} h e^{ikx} dx = \frac{2h\epsilon}{\sqrt{2\pi}} e^{ika} \frac{\text{sen } k\epsilon}{k\epsilon}. \end{aligned}$$

Calculamos a transformada de Fourier da função delta como o limite da transformada da função  $p_\epsilon(x)$ , logo

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[\delta(x - a)] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathfrak{F}[p_\epsilon(x)] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{ika}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen } k\epsilon}{k\epsilon} = \frac{e^{ika}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

que, no caso em que  $a = 0$ , fornece  $\mathfrak{F}[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ .

**2.4.3 Derivadas de  $f(x)$** 

Seja  $f(x)$  uma função contínua e suave por partes em  $(-\infty, \infty)$ , com  $f(x)$  indo a zero quando  $|x| \rightarrow \infty$ . Se  $f(x)$  e  $f'(x)$  são absolutamente integráveis, então

$$\mathfrak{F}[f'(x)] = -ik \mathfrak{F}[f(x)].$$

Se as primeiras  $(n - 1)$  derivadas de  $f(x)$  são contínuas e a  $n$ -ésima derivada é contínua por partes, o resultado anterior se estende, ou seja,

$$\mathfrak{F}[f^{(n)}(x)] = (-ik)^n \mathfrak{F}[f(x)].$$

Ressaltamos que, em analogia às séries de Fourier em senos e co-senos, existem, também, as transformadas de Fourier em senos e em co-senos, respectivamente, para funções pares e ímpares, amplamente utilizadas quando a região de interesse é semi-infinita.

### 2.4.4 Convolução

Se  $F(k)$  e  $G(k)$  são as transformadas de Fourier das funções  $f(x)$  e  $g(x)$ , respectivamente, então a transformada de Fourier do produto de convolução<sup>6</sup>

$$f(x) \star g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x - \xi)d\xi$$

é igual ao produto das transformadas correspondentes, isto é,

$$\mathfrak{F}[f(x) \star g(x)] = F(k)G(k).$$

### 2.4.5 Aplicações

Em analogia às aplicações envolvendo a transformada de Laplace, aqui, como já mencionamos, vamos discutir, através de exemplos, situações onde a transformada de Fourier é conveniente.

#### Exemplo 2.10 – Movimento Harmônico Simples

Considere a equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) + k_0 \frac{d}{dx}f(x) + \omega_0^2 f(x) = \varphi(x)$$

onde  $k_0$  e  $\omega_0^2$  são constantes positivas, para  $x > 0$ . Suponha que  $k_0^2 < 4\omega_0^2$ . Tome a transformada de Fourier de ambos os lados desta equação e denote as transformadas de Fourier de  $f(x)$  e  $\varphi(x)$ , respectivamente, por  $F(k)$  e  $\Phi(k)$ . Resolva a equação algébrica para  $F(k)$ .

**Solução.** Multiplicando ambos os membros da equação diferencial ordinária por  $\exp(ikx)$  e utilizando as expressões envolvendo as derivadas primeira e segunda podemos escrever

$$(k^2 + ikk_0 - \omega_0^2)f(k) = -\Phi(k)$$

de onde segue-se

$$F(k) = -\frac{\Phi(k)}{k^2 + ikk_0 - \omega_0^2}.$$

---

<sup>6</sup>Uma interpretação física para a convolução pode ser encontrada em [11], página 46.

**Exemplo 2.11 – Função de Green**

Utilizando o resultado do Exemplo 2.10, obtenha explicitamente a função  $G(x)$ , um tipo de função de Green [1793 – George Green – 1841], onde

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x - \xi) d\xi$$

em termos de uma integral, ou seja mostre que

$$G(x) = \frac{\exp(k_0 x/2)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{dk}{\beta^2 - k^2}$$

onde  $\beta^2 = \omega_0^2 - k_0^2/4 > 0$ .

**Solução.** Neste caso, consideremos  $\varphi(x) = \delta(x)$  de onde segue-se que  $\Phi(k) = 1$  logo, devemos calcular a integral

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-e^{ikx}}{k^2 + ikk_0 - \omega_0^2} dk.$$

Introduzindo a mudança de variável

$$k \rightarrow k - \frac{ik_0}{2}$$

podemos escrever

$$G(x) = \frac{\exp(k_0 x/2)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{dk}{\beta^2 - k^2}$$

onde  $\beta^2 = \omega^2 - k_0^2/4$  que é o resultado desejado.

**Exemplo 2.12 – Transformada de Fourier Tridimensional**

A transformada de Fourier pode ser generalizada para mais de uma dimensão. Por exemplo, no espaço tridimensional temos

$$\mathfrak{F}[f(\vec{x})] \equiv \Psi(\vec{k}) = \int d^3x f(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

onde  $\cdot$  denota o produto escalar, cuja transformada inversa é dada por

$$\mathfrak{F}^{-1}[\Psi(\vec{k})] \equiv f(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Psi(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}.$$

Note que, neste caso, consideramos o sinal negativo e sem o fator  $2\pi$  na transformada direta enquanto que o sinal positivo e o fator  $2\pi$  na respectiva transformada inversa.

Como um exemplo específico, encontre a transformada de Fourier da função de onda para o estado  $2p$  do elétron do átomo de hidrogênio

$$\Psi(\vec{x}) = \frac{z}{\sqrt{32\pi a_0^5}} e^{-r/2a_0}$$

onde  $a_0$  é o raio da primeira órbita de Bohr [1885 – Niels Henrik David Bohr – 1962] e  $z$  é uma coordenada cartesiana.

**Solução.** Seja  $J(\vec{k})$  a transformada de Fourier de  $\Psi(\vec{x})$ . Introduzindo as coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  podemos escrever

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty d\phi d\theta dr r^2 \sin\theta \frac{r \cos\theta}{\sqrt{32\pi a_0^5}} e^{-r/2a_0} e^{-ikr \cos\theta}$$

onde temos  $\vec{k} \cdot \vec{x} = kr \cos\theta$ , isto é, escolhemos  $\vec{k}$  na direção de  $z$ .

Integrando na variável  $\phi$  e introduzindo a mudança de variável  $\cos\theta = x$  obtemos

$$J = \frac{2\pi}{\sqrt{32\pi a_0^5}} \int_0^\infty dr r^3 e^{-\alpha r} \int_{-1}^1 x e^{-\beta x} dx$$

onde definimos  $\alpha = 1/2a_0$  e  $\beta = ikr$ . Efetuando as integrações e voltando nas variáveis iniciais temos

$$J = \frac{32k}{i} \frac{\sqrt{32\pi a_0^5}}{(1 + 4a_0^2 k^2)^3}$$

## 2.5 Transformada de Mellin

A transformada de Mellin é útil na resolução de problemas de valor na fronteira bem como para somar séries infinitas. Aqui, em analogia às transformadas de Laplace e de Fourier vamos nos concentrar apenas na resolução de equações diferenciais cuja solução satisfaz certas condições. A maneira canônica de se introduzir a transformada de Mellin e sua inversa é através da transformada de Fourier complexa e a respectiva inversa, isto é, a partir de uma conveniente mudança de variável na expressão para a transformada de Fourier [24].

### 2.5.1 Definição

Sejam  $f(x)$  uma função de variável real definida no intervalo  $0 < x < \infty$  e  $p$  um número complexo, a variável transformada. Definimos a transformada de Mellin a partir da integral

$$\mathfrak{M}[f(x)] \equiv F(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} f(x) dx$$

e a respectiva inversa

$$\mathfrak{M}^{-1}[F(p)] \equiv f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p} F(p) dp$$

com  $c > 0$ .

### 2.5.2 Propriedades

Aqui, também, em analogia as outras transformadas integrais, vamos apresentar algumas poucas propriedades relativas à transformada de Mellin.

#### Linearidade

Sejam  $\mathfrak{M}[f(x)]$  e  $\mathfrak{M}[g(x)]$  as transformadas de Mellin, respectivamente, das funções  $f(x)$  e  $g(x)$  temos

$$\mathfrak{M}[c_1 f(x) + c_2 g(x)] = c_1 \mathfrak{M}[f(x)] + c_2 \mathfrak{M}[g(x)]$$

com  $c_1$  e  $c_2$  constantes arbitrárias.

#### Escala

Sejam  $\mathfrak{M}[f(x)] = F(p)$  a transformada de Mellin da função  $f(x)$  e  $a > 0$  então

$$\mathfrak{M}[f(ax)] = a^{-p} F(p).$$

#### Deslocamento

Sejam  $\mathfrak{M}[f(x)] = F(p)$  a transformada de Mellin da função  $f(x)$  e  $a > 0$  então

$$\mathfrak{M}[x^a f(x)] = F(p + a).$$

### 2.5.3 Derivadas de $f(x)$

Seja  $f^{(n)}(x)$  a derivada de ordem  $n$  da função  $f(x)$ . A transformada de Mellin de  $f^{(n)}(x)$  é dada por (integração por partes)

$$\int_0^\infty \frac{d^n}{dx^n} f(x) x^{p-1} dx = \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) x^{p-1} \right]_0^\infty - (p-1) \int_0^\infty \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) x^{p-2} dx$$

e considerando  $f(x)$  de tal modo que o termo entre colchetes vá a zero obtemos

$$F^{(n)}(p) = -(p-1)F^{(n-1)}(p-1)$$

que aplicada  $n-1$  vezes fornece

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-n)} F(p-n)$$

que é a expressão que relaciona a transformada de Mellin da derivada de ordem  $n$  com a transformada de Mellin da própria função.

Por outro lado, admitindo que  $x^p f(x)$  vai a zero quando  $x \rightarrow 0$  e  $x \rightarrow \infty$  podemos mostrar que

$$\mathfrak{M}[x^n f^{(n)}(x)] = (-1)^n \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)} F(p). \quad (2.5.7)$$

#### Exemplo 2.13

Mostre que

$$\mathfrak{M} \left[ \left( x \frac{d}{dx} \right)^2 f(x) \right] = p^2 F(p).$$

**Solução.** Utilizando a propriedade de linearidade da transformada e a relação (2.5.7) podemos escrever

$$\mathfrak{M} \left[ \left( x \frac{d}{dx} \right)^2 f(x) \right] = \mathfrak{M}[x^2 f''(x) + x f'(x)] = \frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(p)} F(p) - \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)} F(p).$$

A partir da relação  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  e simplificando, obtemos

$$\mathfrak{M} \left[ \left( x \frac{d}{dx} \right)^2 f(x) \right] = p^2 F(p)$$

que é o resultado desejado  $\diamond$

### 2.5.4 Convolução

Sejam  $\mathfrak{M}[f(x)] = F(p)$  e  $\mathfrak{M}[g(x)] = G(p)$  as transformadas de Mellin, respectivamente, das funções  $f(x)$  e  $g(x)$ . Definimos o produto de convolução  $f(x) \star g(x)$  através da integral

$$f(x) \star g(x) = \int_0^\infty f(\xi) g\left(\frac{x}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi}$$

cuja transformada de Mellin fornece

$$\mathfrak{M}[f(x) \star g(x)] = F(p)G(p).$$

#### Exemplo 2.14 – Identidade de Parseval

Mostre a chamada identidade de Parseval [1755 – Marc-Antoine Parseval des Chênes – 1836]

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)G(1-p)dp$$

onde  $F(p)$  e  $G(p)$  são as transformadas de Mellin, respectivamente, das funções  $f(x)$  e  $g(x)$ .

**Solução.** Da definição da transformada de Mellin e da sua respectiva transformada inversa, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}[f(x)g(x)] &= \int_0^\infty x^{p-1} f(x)g(x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty x^{p-1} g(x)dx \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} F(s)ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)ds \int_0^\infty x^{p-s-1} g(x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)G(p-s)ds. \end{aligned}$$

No caso em que  $p = 1$  segue-se o resultado desejado

◇

### 2.5.5 Aplicação

Resolva a equação diferencial parcial (Capítulo 1)

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

com  $u = u(x, y)$ ,  $0 \leq x < \infty$ ,  $0 < y < 1$ , satisfazendo as condições de contorno:  $u(x, 0) = 0$  e

$$u(x, 1) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

**Solução.** Definindo a transformada de Mellin da função  $u(x, y)$  em relação à variável  $x$

$$F(p, y) = \int_0^\infty x^{p-1} u(x, y) dx$$

e usando o resultado do Exemplo 2.13, obtemos

$$(-1)^2 \frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(p)} F(p, y) + (-1) \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)} F(p, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(p, y) = 0$$

bem como, simplificando, através das propriedades da função gama (Apêndice B), podemos escrever a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} F(p, y) + p^2 F(p, y) = 0$$

para  $0 < y < 1$ , cuja solução satisfaz as condições  $F(p, 0) = 0$  e  $F(p, 1) = 1/p$ .

Resolvendo a equação diferencial parcial (resolvida como ordinária) temos

$$F(p, y) = A \operatorname{sen} py + B \cos py$$

com  $A = A(p)$  e  $B = B(p)$ . Impondo as condições e simplificando obtemos

$$F(p, y) = \frac{1}{p} \frac{\operatorname{sen} py}{\operatorname{sen} p}$$

com  $0 < \operatorname{Re} p < 1$ .

A fim de determinarmos  $u(x, y)$ , solução do problema de partida, devemos calcular a transformada de Mellin inversa, isto é, a seguinte integral

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{-p} \operatorname{sen} py}{p \operatorname{sen} p} dp$$

cujo integrando tem pólos simples nos pontos  $p = k\pi$  com  $k = 1, 2, \dots$ . Visto serem pólos simples, basta calcularmos a soma dos resíduos (Capítulo 3) logo

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \text{Resíduos} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \text{sen } k\pi y}{k x^{k\pi}}.$$

## 2.6 Transformada de Hankel

A transformada de Hankel é bastante útil como ferramenta para resolver equações diferenciais parciais em coordenadas cilíndricas no caso de simetria axial. A maneira usual de se introduzir a chamada transformada de Hankel é a partir da transformada de Fourier bidimensional e sua inversa. Visto que esta transformada integral, diferentemente das três outras, anteriormente apresentadas, tem no núcleo uma função de Bessel [1784 – Friedrich Wilhelm Bessel – 1846], é conveniente uma rápida introdução desta importante função especial, em particular, associada à geometrias cilíndricas, coisa que é feita no Apêndice B. Ressalte-se, também, que o uso da transformada de Hankel, junto com a transformada de Laplace, desempenha um papel importante na resolução da equação de onda em coordenadas cilíndricas.

### 2.6.1 Definição

Seja  $f(r)$  uma função real de variável real. Definimos a transformada de Hankel de  $f(r)$  através da seguinte integral

$$\mathfrak{H}_n[f(r)] \equiv F_n(k) = \int_0^{\infty} r J_n(kr) f(r) dr$$

onde  $J_n(kr)$  é uma função de Bessel de ordem  $n$  sendo  $k$  a variável transformada. A respectiva transformada de Hankel inversa é dada por

$$\mathfrak{H}_n^{-1}[F_n(k)] \equiv f(r) = \int_0^{\infty} k J_n(kr) F_n(k) dk.$$

Convém ressaltar que tais integrais existem para uma ampla classe de funções que, em geral, emergem em várias aplicações advindas da Física [26].

#### Exemplo 2.15

Utilizando a transformada de Fourier bidimensional, obtenha as expressões envolvendo as transformadas de Hankel, direta e inversa.

**Solução.** O par de transformadas de Fourier bidimensional, direta e inversa, com parâmetros das transformadas  $k_1$  e  $k_2$  é dado por

$$\mathfrak{F}[f(x, y)] \equiv F(k_1, k_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(\vec{k} \cdot \vec{r})] f(x, y) dx dy$$

onde  $\vec{r} = (x, y)$  e  $\vec{k} = (k_1, k_2)$ , cuja inversa é tal que

$$\mathfrak{F}^{-1}[F(k_1, k_2)] \equiv f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r})] F(k_1, k_2) dk_1 dk_2.$$

Introduzindo-se as coordenadas polares no plano, isto é,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & k_1 &= k \cos \phi \\ y &= r \sin \theta & k_2 &= k \sin \phi \end{aligned}$$

segue-se para o produto escalar  $\vec{k} \cdot \vec{r} = kr \cos(\theta - \phi)$ , logo podemos escrever

$$F(k, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} \exp[-ikr \cos(\theta - \phi)] f(r, \theta) d\theta.$$

Considerando a seguinte mudança de variáveis  $\theta - \phi = \alpha - \pi/2$  e admitindo que a função  $f(r, \theta)$  possa ser escrita como um produto do tipo  $\exp(in\theta)f(r)$ , podemos escrever a expressão anterior na forma

$$F(k, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r f(r) dr \int_{\phi_0}^{2\pi+\phi_0} \exp[-in\phi_0 + i(n\alpha - kr \sin \alpha)] d\alpha$$

onde  $\phi_0 = \frac{\pi}{2} - \phi$ . Utilizando a representação integral para a função de Bessel de ordem  $n$  (Apêndice B)

$$J_n(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi_0}^{2\pi+\phi_0} \exp[i(n\alpha - kr \sin \alpha)] d\alpha$$

a integral toma a forma

$$\begin{aligned} F(k, \phi) &= \exp(-in\phi_0) \int_0^{\infty} r J_n(kr) f(r) dr \\ &= \exp(-in\phi_0) F_n(k) \end{aligned}$$

onde  $F_n(k)$  é a transformada de Hankel de  $f(r)$ . Convenientemente, a fase  $\phi_0$  pode ser considerada igual a zero. Um procedimento análogo permite obter a respectiva transformada de Hankel inversa  $\diamond$

### 2.6.2 Propriedades

Em analogia as outras transformadas integrais, apresentamos apenas as propriedades que nos serão úteis no decorrer das aplicações.

#### Linearidade

Se  $\mathfrak{H}_n[f(r)]$  e  $\mathfrak{H}_n[g(r)]$  são as transformadas de Hankel das funções  $f(r)$  e  $g(r)$ , respectivamente, então

$$\mathfrak{H}_n[af(r) + bg(r)] = a\mathfrak{H}_n[f(r)] + b\mathfrak{H}_n[g(r)]$$

com  $a$  e  $b$  constantes quaisquer.

#### Escala

Se  $\mathfrak{H}_n[f(r)]$  é a transformada de Hankel da função  $f(r)$  então

$$\mathfrak{H}_n[f(ar)] = \frac{1}{a^2} F_n\left(\frac{k}{a}\right)$$

com  $a > 0$ .

#### Derivadas

Se  $\mathfrak{H}_n[f(r)]$  é a transformada de Hankel da função  $f(r)$  então

$$\mathfrak{H}[f'(r)] = \frac{k}{2n} [(n-1)F_{n+1}(k) - (n+1)F_{n-1}(k)]$$

com a ordem  $n \geq 1$  e considerando que  $rf(r)$  vai a zero tanto para  $r \rightarrow 0$  quanto para  $r \rightarrow \infty$ .

Note que no caso em que  $n = 1$  segue-se

$$\mathfrak{H}_1[f'(r)] = -kF_0(k).$$

Em analogia a derivada de ordem um, podemos obter uma expressão para a transformada de Hankel da derivada de ordem dois, isto é,

$$\mathfrak{H}_n[f''(r)] = \frac{k^2}{4} \left[ \left(\frac{n+1}{n-1}\right) F_{n-2}(k) - 2 \left(\frac{n^2-3}{n^2-1}\right) F_n(k) + \left(\frac{n-1}{n+1}\right) F_{n+2}(k) \right]$$

que, em termos da transformada de Hankel da derivada de ordem um, pode ser escrita na forma

$$\mathfrak{H}_n[f''(r)] = \frac{k}{2n} \{(n-1)\mathfrak{H}_{n+1}[f'(r)] - (n+1)\mathfrak{H}_{n-1}[f'(r)]\}.$$

No particular caso em que  $n = 1$ , a expressão anterior toma a forma

$$\mathfrak{H}_1[f''(r)] = -k\mathfrak{H}_0[f'(r)].$$

**Exemplo 2.16 – Parte Radial do Laplaciano**

Visto ser de grande importância, em particular, na resolução de problemas envolvendo o Laplaciano escrito em coordenadas polares no plano e cilíndricas, calcular a transformada de Hankel deste Laplaciano.

**Solução.** Sendo  $\Delta$  a parte radial do Laplaciano escrita em coordenadas polares no plano, podemos mostrar a relação

$$\mathfrak{H}_n \left[ \left( \Delta - \frac{n^2}{r^2} \right) f(r) \right] = -k^2 F_n(k).$$

que, no caso particular  $n = 0$ , fornece

$$\mathfrak{H}_0 \left[ f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) \right] = -k^2 F_0(k)$$

enquanto que no caso  $n = 1$ , fornece

$$\mathfrak{H}_1 \left[ f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{1}{r^2} f(r) \right] = -k^2 F_1(k).$$

Estes resultados são bastante significativos quando temos problemas envolvendo uma equação diferencial parcial contendo o Laplaciano escrito em coordenadas polares no plano e coordenadas cilíndricas  $\diamond$

**2.6.3 Aplicação**

(Difusão com Simetria Axial) Obtenha a solução da equação de difusão

$$\frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u(r, t) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u(r, t)$$

para  $0 < r < \infty$  e  $t > 0$ , sendo a constante de difusividade  $\Omega$  uma constante real e positiva, impondo a condição

$$u(r, 0) = f(r) \equiv \frac{r}{2\pi} \delta(r)$$

isto é, uma fonte de calor concentrada num círculo de raio  $\epsilon$  tal que tenhamos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi \int_0^\epsilon r f(r) dr = 1.$$

**Solução.** Aplicando a transformada de Hankel de ordem zero na variável radial, obtemos o seguinte problema de primeira ordem, isto é, uma equação diferencial de primeira ordem e uma condição inicial,

$$\frac{d}{dt}F_0(k, t) + \Omega k^2 F_0(k, t) = 0$$

satisfazendo  $F_0(k, 0) = F(k)$ , sendo  $k$  a variável transformada.

A solução deste problema de primeira ordem é dado por

$$F_0(k, t) = F(k) \exp(-\Omega k^2 t).$$

Utilizando a transformada de Hankel inversa podemos escrever

$$\begin{aligned} u(r, t) &= \int_0^\infty k F(k) J_0(kr) e^{-\Omega k^2 t} dk \\ &= \int_0^\infty k \left[ \int_0^\infty x J_0(kx) f(x) dx \right] e^{-\Omega k^2 t} J_0(kr) dk \end{aligned}$$

ou ainda, na seguinte forma

$$\begin{aligned} u(r, t) &= \int_0^\infty x f(x) dx \int_0^\infty k J_0(kx) J_0(kr) e^{-\Omega k^2 t} dk \\ &= \int_0^\infty x f(x) dx \Lambda(x, t) \end{aligned}$$

onde  $\Lambda(x, t)$  é uma integral tabelada dada por [15]

$$\Lambda(x, t) = \frac{1}{2\Omega t} \exp\left(-\frac{r^2 + x^2}{4\Omega t}\right) I_0\left(\frac{rx}{2\Omega t}\right)$$

sendo  $I_0(y)$  uma função de Bessel modificada de ordem zero (Apêndice B).

Voltando à expressão que recupera a solução da equação diferencial temos

$$u(r, t) = \frac{1}{2\Omega t} \int_0^\infty x f(x) \exp\left(-\frac{r^2 + x^2}{4\Omega t}\right) I_0\left(\frac{rx}{2\Omega t}\right) dx$$

que, em nosso particular caso envolvendo a função delta, é possível ser integrado logo

$$u(r, t) = \frac{1}{4\pi\Omega t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\Omega t}\right),$$

que é o resultado desejado

◇

## 2.7 Exercícios Propostos

1. Calcule  $\mathcal{L}[e^{-t}]$ .
2. Mostre o seguinte teorema: Se  $f'(t)$  é uma função contínua em  $[0, \infty)$  e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$$

então  $\mathcal{L}[f'(t)]$  existe para  $\operatorname{Re}(s) > 0$  se, e somente se,  $\mathcal{L}[f(t)]$  existe para  $\operatorname{Re}(s) > 0$  e

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

3. Utilizando a transformada de Laplace, resolva o problema de valor inicial de primeira ordem, isto é, a equação diferencial ordinária

$$x' - x = 1 - t$$

com  $x = x(t)$  e satisfazendo a condição  $x(0) = 1$ .

4. Resolva a equação diferencial ordinária

$$x'' + x = t + \cos t$$

de modo que a solução satisfaça as condições  $x(0) = 0 = x'(0)$ .

5. Seja  $\star$  o produto de convolução, mostre que  $f \star g = g \star f$ , onde

$$f \star g = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

6. Utilize o produto de convolução para calcular a transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)}$$

isto é,  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ .

7. Resolva o problema de valor inicial, utilizando a metodologia da transformada de Laplace, constituído pela equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 4x(t) = 4t$$

e satisfazendo as condições iniciais  $x(0) = 0$  e  $x'(0) = 1$ .

8. Utilize a metodologia da transformada de Laplace para obter uma solução da equação diferencial ordinária com coeficientes variáveis

$$t \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2(t-1) \frac{d}{dt} x(t) + (t-2)x(t) = 0.$$

9. Análogo ao anterior para a equação diferencial ordinária

$$t \frac{d^2}{dt^2} x(t) - 2 \frac{d}{dt} x(t) + tx(t) = 0.$$

satisfazendo a condição  $x(0) = 1$ .

10. Resolva a equação  $x'' + x = u(t-1)$ , com  $x = x(t)$  sendo  $u(t)$  a função degrau, satisfazendo as condições  $x(0) = 0 = x'(0)$ .
11. Encontre a transformada de Fourier da função  $f(x) = \exp(-|x|)$ .

12. Sendo  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , calcule a transformada de Fourier da função Gaussiana  $g(x) = a \exp(-bx^2)$ .

13. (Identidade de Parseval) Use o teorema da convolução para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) G(k) dk$$

onde  $F(k)$  e  $G(k)$  são as transformadas de Fourier das funções  $f(x)$  e  $g(x)$ , respectivamente.

14. (Função de Green) Considere a equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x|\xi) - k_0^2 G(x|\xi) = \delta(x - \xi)$$

para  $-\infty < x < \infty$  onde  $\xi$  é um parâmetro real e  $k_0^2 > 0$ . Utilize a transformada de Fourier para expressar  $G(x|\xi)$  na forma de uma integral.

15. (Teorema Integral de Fourier) Se  $f(x)$  é uma função suave por partes em todo intervalo finito da reta real e absolutamente integrável em  $(-\infty, \infty)$  então [7]

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos[k(x - \xi)] dx \right\} d\xi.$$

Considere uma função  $f(x)$  definida em  $0 \leq x < \infty$ . Seja  $f(x)$  para ser estendida como uma função ímpar em  $(-\infty, \infty)$  satisfazendo as

condições do teorema integral de Fourier. Se nos pontos de continuidade da função  $f(x)$  temos

$$F_S(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx$$

então

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_S(k) \operatorname{sen} kx \, dk,$$

isto é, a transformada de Fourier em senos e a respectiva inversa, respectivamente.

16. Análogo ao anterior para o par de transformada de Fourier em co-senos e a sua inversa,

$$F_C(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{cos} kx \, dx$$

então

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_C(k) \operatorname{cos} kx \, dk,$$

respectivamente.

17. Calcule a transformada de Mellin da função

$$f(x) = x^k \exp(-x)$$

com  $k > 0$ .

18. Mostre que

$$\mathfrak{M}\left[\frac{1}{1+x}\right] = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi p}.$$

19. Sendo  $\mathfrak{M}[f(r, \theta)] = F(p, \theta)$ , mostre que a transformada de Mellin do Laplaciano, em coordenadas polares no plano, aplicado à função  $f(r, \theta)$ , isto é,  $\mathfrak{M}[\Delta f(r, \theta)]$  é igual a

$$\mathfrak{M}[\Delta f(r, \theta)] = \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} + (p-2)^2 \right] F(p-2, \theta).$$

20. Mostre o seguinte teorema: Uma condição necessária para que a equação integral

$$I[f(\alpha)] = \int_0^{\infty} f(x) K(\alpha x) \, dx$$

tenha uma solução na forma

$$f(x) = \int_0^\infty I[f(\alpha)] H(\alpha x) d\alpha$$

é que as transformadas de Mellin  $\mathfrak{M}[K(x)] = \mathsf{K}(p)$  e  $\mathfrak{M}[H(x)] = \mathsf{H}(p)$  satisfaçam à equação funcional

$$\mathsf{K}(p)\mathsf{H}(1-p) = 1.$$

21. A partir do anterior, discuta o caso em que  $\mathsf{H} = \mathsf{K}$ , isto é, uma condição necessária para que a função  $K(\alpha x)$  seja um núcleo de Fourier é que a transformada de Mellin  $\mathfrak{M}[K(x)] = \mathsf{K}(p)$  satisfaça a equação funcional  $\mathsf{K}(p)\mathsf{K}(1-p) = 1$ .

22. Calcule a transformada de Hankel para a função  $f(r) = \frac{1}{r}$ , isto é, obtenha a igualdade

$$\mathfrak{H}\left[\frac{1}{r}\right] = \frac{1}{k}.$$

23. Sendo  $\delta(r)$  a função delta de Dirac, mostre que

$$\mathfrak{H}\left[\frac{\delta(r)}{r}\right] = 1.$$

24. (Identidade de Parseval) Se  $F(k) = \mathfrak{H}_n[f(r)]$  e  $G(k) = \mathfrak{H}_n[g(r)]$  são as transformadas de Hankel das funções  $f(r)$  e  $g(r)$ , respectivamente, mostre que

$$\int_0^\infty r f(r) g(r) dr = \int_0^\infty k F(k) G(k) dk.$$

### 2.7.1 Respostas e/ou Sugestões

1.  $\mathfrak{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}$
2. Integrar por partes usando a hipótese  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$
3.  $x(t) = t + e^t$
4.  $x(t) = t - \text{sen } t + \frac{t}{2} \text{sen } t$
5. Efetue uma mudança de variável do tipo  $t - \tau = \xi$

6.  $f(t) = t - \text{sen } t$ .
7.  $x(t) = t$ .
8.  $x(t) = x(0)e^{-t}$  com  $x(0)$  uma constante.
9.  $x(t) = \cos t + t \text{sen } t$ .
10.  $x(t) = [1 - \cos(t - 1)]u(t - 1)$ .
11.  $\mathfrak{F}[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + k^2}$ .
12.  $\mathfrak{F}[g(x)] = \frac{a}{\sqrt{2b}} \exp(-k^2/4b)$ .
13. Direto da definição da transformada de Fourier do produto de convolução.
14. Utilize a definição e a fórmula para a derivada segunda.
15. Utilizar o teorema integral de Fourier e a paridade da função.
16. Utilizar o teorema integral de Fourier e a paridade da função.
17. Direto da definição.
18. Efetue a mudança de variável  $x = \xi/(1 - \xi)$ .
19. Utilize a definição da transformada de Mellin e a relação (2.5.7).
20. Ver [24] página 7.
21. Ver [24] página 3.
22. Utilize a relação  $\int_0^\infty J_0(x) dx = 1$ .
23. Direto da definição.
24. Direto da definição.

## Capítulo 3

# Resíduos

Convém ressaltar que este tópico, em particular o teorema dos resíduos, faz parte de uma importante área da Matemática, a Análise Complexa. Devido a sua importância, no sentido de ser um tópico bastante extenso, vamos nos concentrar apenas na ferramenta que será de fundamental importância no cálculo da transformada inversa. Como pré-requisito o estudante deve ter noções básicas do que se entende por uma função analítica e, em particular, o teorema integral de Cauchy [1789 – Augustin Louis Cauchy – 1857] [8].

No Capítulo 1, apresentamos, em caráter de revisão, as equações diferenciais parciais. No Capítulo 2, introduzimos uma metodologia para discutirmos a resolução destas equações, isto é, transformamos a equação diferencial em uma outra equação, eventualmente algébrica, a chamada equação auxiliar. Resolvemos a equação auxiliar e recuperamos a solução da equação de partida através do cálculo da respectiva transformada inversa. Esse cálculo da transformada inversa será discutido aqui.

Como já mencionamos, neste capítulo, vamos apresentar o teorema dos resíduos, ferramenta de fundamental importância, por exemplo, no cálculo de integrais reais via funções analíticas, utilizando-se um caminho apropriado no plano complexo, associadas ao cálculo das transformadas inversas.

As chamadas séries de Laurent [1813 – Pierre Aphonse Laurent – 1854] nos possibilitam descrever e classificar as possíveis singularidades que podem estar associadas a uma função analítica, em particular, o coeficiente  $b_1$ , coeficiente associado ao termo  $(z - z_0)^{-1}$ , em tal expansão desempenha um papel importante. Este termo é conhecido pelo nome de resíduo.

Apresentaremos duas expressões para o cálculo do resíduo no caso em que temos pólos simples. No caso em que temos um pólo de ordem  $k$ , demonstramos uma fórmula geral para o cálculo dos resíduos.

Enfim, apresentamos e discutimos o teorema dos resíduos e, finalizando o capítulo, demonstramos o chamado lema de Jordan [1838 – Camille Marie Ennemond Jordan – 1922] que desempenha, também, papel fundamental no cálculo de integrais reais, quando estas são obtidas como parte de uma integral por caminhos de uma função apropriada de variável complexa, em particular no cálculo da transformada inversa.

### 3.1 Resíduos e Pólos

Começemos por explicar o que se entende por *resíduo* e como pode ser utilizado para calcular integrais do tipo

$$\oint_C f(z) dz$$

onde  $C$  é um caminho orientado e simples. Sabemos que se  $f(z)$  é uma função analítica no interior de uma região cuja fronteira é  $C$ , tal integral é zero, pelo teorema integral de Cauchy.

Se  $f(z)$  tem uma singularidade no ponto  $z = z_0$  que se encontra na região interior de uma região cuja fronteira é  $C$  mas, por outro lado, é analítica sobre  $C$  e nos demais pontos tais que  $z \neq z_0$ , então ela possui um desenvolvimento em série de Laurent do tipo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots$$

que converge para todos os pontos próximos de  $z = z_0$ , exceto o próprio  $z_0$ , ou seja, em algum domínio da forma  $0 < |z - z_0| < R$ .

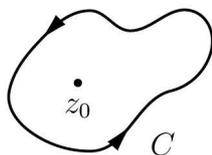


Figura 3.1: Região descrita no texto.

O coeficiente  $b_1$ , coeficiente da primeira potência negativa na série de Laurent, é dado pela fórmula integral

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z' - z)^{k-1} f(z') dz'$$

com  $k = 1$ , isto é

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z') dz'.$$

Mas, desde que podemos obter as séries de Laurent por diversos métodos, sem utilizar a fórmula integral para os coeficientes, podemos encontrar  $b_1$  por um destes métodos e então utilizar a fórmula para  $b_1$  a fim de calcular a integral, ou seja

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i b_1$$

onde a integração é efetuada no sentido anti-horário, em torno de um caminho simples e fechado  $C$  de modo que  $z = z_0$  está no interior de  $C$ . O coeficiente  $b_1$  é chamado resíduo de  $f(z)$  em  $z = z_0$  e será denotado como

$$b_1 = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z).$$

Para estarmos devidamente equipados para solucionar este tipo de integral, devemos responder à seguinte questão: Para obtermos o resíduo, que é um simples coeficiente em uma dada série de Laurent, é necessário que conheçamos toda a série, ou existe alguma maneira mais simples? A resposta a esta pergunta é: Quando as singularidades são pólos, existe um modo bastante simples, caso contrário devemos expandir a função numa série de Laurent explicitamente e obter o coeficiente  $b_1$ .

Se os coeficientes  $b_k$  da série de Laurent forem tais que  $b_k = 0$  para  $k = N + 1, N + 2, \dots$  dizemos que  $z_0$  é um pólo de ordem  $N$ . Vamos considerar primeiramente o caso de um pólo de ordem um, também denominado pólo simples. Seja  $f(z)$  uma função que tem um pólo simples em  $z = z_0$ . Então, a série de Laurent correspondente é dada por

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

em  $0 < |z - z_0| < R$ . Multiplicando ambos os lados da expressão anterior por  $z - z_0$  temos

$$(z - z_0)f(z) = b_1 + (z - z_0)[a_0 + a_1(z - z_0) + \dots].$$

Tomando o limite para  $z \rightarrow z_0$ , note que a série é uniformemente convergente, o segundo membro tende para  $b_1$ , ou seja, o resíduo, isto é,

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) \equiv b_1 \equiv \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

Uma outra maneira, que muitas vezes é mais conveniente, para a obtenção do resíduo, no caso de um pólo simples, consiste em investigarmos o comportamento do seguinte quociente

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

com  $p(z)$  e  $q(z)$  analíticas, onde supomos que  $p(z_0) \neq 0$  e  $q(z)$  tem um zero simples em  $z = z_0$ , de modo que  $f(z)$  tem pólo simples em  $z = z_0$ . Pela definição de um zero simples,  $q(z)$  admite uma série de Taylor [1685 – Brook Taylor – 1731] da forma

$$q(z) = (z - z_0)q'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!}q''(z_0) + \dots$$

Agora, substituimos esta expressão em  $f = p/q$  e obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{p(z)}{q(z)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)p(z)}{(z - z_0) \left[ q'(z_0) + \frac{(z - z_0)}{2}q''(z_0) + \dots \right]} \end{aligned}$$

Temos que, no lado direito desta expressão, o fator  $(z - z_0)$  é cancelado e o limite resulta em  $p(z_0)/q'(z_0)$ , de onde obtemos uma segunda expressão para o resíduo no caso de um pólo simples, a saber

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Consideremos agora o resíduo em um pólo de ordem  $k$ . Seja  $f(z)$  uma função analítica que tem um pólo de ordem  $k > 1$  no ponto  $z = z_0$ . Então, pela definição de tal pólo, a série de Laurent de  $f(z)$  convergindo próximo a  $z = z_0$ , exceto em  $z = z_0$ , é dada por

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{z - z_0} + \\ &+ a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

onde  $b_k \neq 0$ . Multiplicando-se ambos os membros por  $(z - z_0)^k$  obtemos

$$\begin{aligned} (z - z_0)^k f(z) &= b_k + b_{k-1}(z - z_0) + \dots + b_2(z - z_0)^{k-2} + \\ &+ b_1(z - z_0)^{k-1} + a_0(z - z_0)^k + a_1(z - z_0)^{k+1} + \dots \end{aligned}$$

de onde vemos que o resíduo,  $b_1$ , de  $f(z)$  em  $z = z_0$  é agora o coeficiente da potência  $(z - z_0)^{k-1}$  na série de Taylor da função

$$g(z) = (z - z_0)^k f(z)$$

com centro em  $z = z_0$ . Pelo teorema da expansão de Taylor, o coeficiente  $b_1$  é dado por

$$b_1 = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(z_0).$$

Assim, se  $f(z)$  tem um pólo de ordem  $k$  em  $z = z_0$ , o resíduo é dado por

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)] \right\}$$

isto é, uma expressão que fornece o resíduo através do cálculo da derivada.

### Exemplo 3.1

Calcule a seguinte integral

$$\oint_C \frac{z}{(z+4)(z-1)^2} dz$$

onde  $C$  é um caminho fechado tomado no sentido anti-horário, tal que  $z = 1$  encontra-se na região interior a  $C$  e  $z = -4$  na região exterior a  $C$ , conforme Figura 3.1.

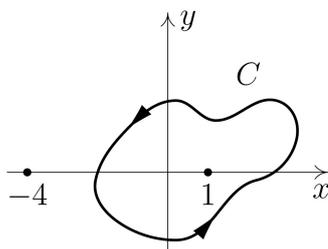


Figura 3.2: Contorno para a integral do Exemplo 3.1.

**Solução.** A função

$$f(z) = \frac{z}{(z+4)(z-1)^2}$$

tem pólos em  $z = -4$ , simples e em  $z = 1$ , pólo duplo, também chamado de pólo de ordem dois.

Devido ao contorno dado, apenas o pólo em  $z = 1$  vai contribuir para a integral, visto que  $z = -4$  está fora do contorno. Como mostrado acima, basta que calculemos o resíduo em  $z = 1$  e multipliquemos por  $2\pi i$  para termos o valor da integral, ou seja

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{z dz}{(z+4)(z-1)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1} f(z).$$

Como o pólo é de ordem dois vamos tomar, como caso particular da expressão que nos fornece o resíduo,  $k = 2$ , isto é,

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)] \right\}$$

e, para o nosso específico caso temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=1} \left[ \frac{z}{(z+4)(z-1)^2} \right] &= \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 \frac{z}{(z+4)(z-1)^2} \right] \right\} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z+4} \right) \right\} = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{4}{(z+4)^2} \right\} = \frac{4}{25} \end{aligned}$$

logo, podemos escrever para a integral de partida

$$\oint_C \frac{z dz}{(z+4)(z-1)^2} = \frac{8\pi i}{25},$$

que é o resultado da integral que desejávamos ◇

## 3.2 Teorema dos Resíduos

Nesta seção, vamos apresentar o resultado de maior importância deste capítulo, o teorema dos resíduos, ferramenta fundamental para o cálculo das transformadas inversas.

**Teorema 1.** Seja  $f(z)$  uma função analítica na região interna ao contorno<sup>1</sup> do caminho fechado e simples  $C$  bem como sobre  $C$ , exceto para um número finito de pontos singulares  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , dentro de  $C$ . Então

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z)$$

com a integral sendo tomada no sentido anti-horário no caminho  $C$ .

<sup>1</sup>Para um ponto sobre o contorno, ver [8].

*Demonstração.* Supomos que cada um dos pontos singulares  $z_j$  esteja circundado por uma circunferência  $C_j$  com raio  $r_j \ll 1$ , de maneira que cada uma das circunferências  $C_j$  e  $C$  sejam disjuntas, como mostra a Figura 3.3.

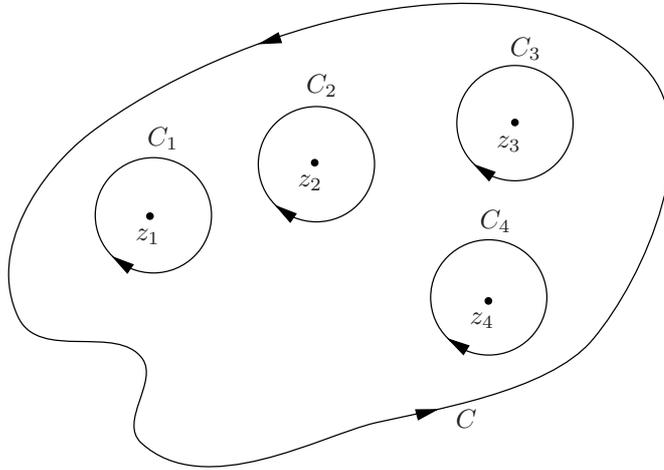


Figura 3.3: Contorno para a integral do Teorema 1.

Então,  $f(z)$  é analítica num domínio multiplamente conexo cuja fronteira é a união das curvas  $C_1, C_2, \dots, C_k$  e  $C$ , mostradas na Figura 3.3. Do teorema da integral de Cauchy temos

$$\oint_C f(z)dz + \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \dots + \oint_{C_k} f(z)dz = 0$$

com a integral ao longo de  $C$  tomada no sentido anti-horário e as outras integrais tomadas no sentido horário. Invertendo-se o sentido de integração ao longo das circunferências  $C_1, C_2, \dots, C_k$  obtemos, da expressão anterior

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \dots + \oint_{C_k} f(z)dz$$

de onde, agora, todas as integrais são tomadas no sentido anti-horário. Utilizando o resultado da seção anterior

$$\oint_{C_j} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z)$$

obtemos, finalmente

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z)$$

e o teorema está provado.  $\square$

### Exemplo 3.2

Considere a elipse de equação  $9x^2 + y^2 = 9$ . Calcule a seguinte integral

$$\oint_C \left( \frac{z e^{\pi z}}{z^4 - 16} + z e^{\pi/z} \right) dz$$

sendo  $C$  conforme a Figura 3.2, a seguir.

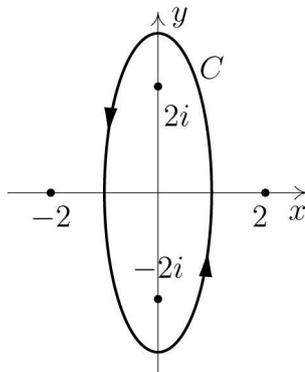


Figura 3.4: Contorno para a integral do Exemplo 3.2.

**Solução.** O integrando tem pólos simples em  $z = \pm 2i$  e  $z = \pm 2$  e uma singularidade essencial em  $z = 0$ . Destes pontos singulares apenas  $z_1 = 2i$ ,  $z_2 = -2i$  e  $z = 0$  encontram-se dentro do contorno  $C$ . Para os pontos  $z_1$  e  $z_2$  vamos calcular os respectivos resíduos:

$$\operatorname{Res}_{z=2i} \left( \frac{z e^{\pi z}}{z^4 - 16} \right) = \left( \frac{z e^{\pi z}}{4z^3} \right)_{z=2i} = -\frac{1}{16}$$

$$\operatorname{Res}_{z=-2i} \left( \frac{z e^{\pi z}}{z^4 - 16} \right) = \left( \frac{z e^{\pi z}}{4z^3} \right)_{z=-2i} = -\frac{1}{16}.$$

Para determinarmos o resíduo em  $z = 0$ , expandimos o segundo termo do integrando numa série de Laurent, isto é,

$$z e^{\pi/z} = z \left( 1 + \frac{\pi}{z} + \frac{\pi^2}{2!z^2} + \frac{\pi^3}{3!z^3} + \dots \right) = z + \pi + \frac{\pi^2}{2z} + \dots$$

de onde o resíduo é dado por  $b_1 = \pi^2/2$ . Logo, utilizando o teorema dos resíduos temos

$$\oint_C \left( \frac{z e^{\pi z}}{z^4 - 16} + z e^{\pi/z} \right) dz = 2\pi i \left( -\frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{\pi^2}{2} \right) = \pi \left( \pi^2 - \frac{1}{4} \right) i.$$

### 3.3 Lema de Jordan

Vamos agora apresentar o lema de Jordan que, junto com o teorema dos resíduos, fornecem as ferramentas necessárias para o cálculo de algumas integrais reais, calculadas através das funções analíticas, em particular, no cálculo de algumas transformadas inversas.

**Lema 3.1.** (Jordan) *Seja  $C_R$  uma semicircunferência de raio  $R$  no semi-plano superior e centrada na origem. Seja  $f(z)$  uma função que tende uniformemente a zero quando  $|z| \rightarrow \infty$  e  $0 < \arg z < \pi$ . Seja  $\alpha$  um número real não negativo, então*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0.$$

*Demonstração.* Para  $z \in C_R$  podemos escrever

$$z = R e^{i\theta}, \quad dz = iR e^{i\theta} d\theta$$

e

$$i\alpha z = i\alpha (R \cos \theta + iR \operatorname{sen} \theta) = i\alpha R \cos \theta - \alpha R \operatorname{sen} \theta.$$

Assim, tomando o módulo de  $I_R$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} |I_R| &= \left| \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |e^{i\alpha z}| |f(z)| |dz| \\ &= \int_0^\pi |e^{i\alpha R \cos \theta - \alpha R \operatorname{sen} \theta}| |f(R e^{i\theta})| R d\theta \\ &= \int_0^\pi e^{-\alpha R \operatorname{sen} \theta} R |f(R e^{i\theta})| d\theta. \end{aligned}$$

Por hipótese,  $|f(Re^{i\theta})| < \epsilon(R)$  é independente de  $\theta$ , onde  $\epsilon(R)$  é um parâmetro positivo arbitrário que tende a zero quando  $R \rightarrow \infty$ . Então

$$|I_R| < R \epsilon(R) \int_0^\pi e^{-\alpha R \operatorname{sen} \theta} d\theta = 2R \epsilon(R) \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \operatorname{sen} \theta} d\theta.$$

Ainda mais, para  $\theta$  no intervalo  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  temos que

$$\operatorname{sen} \theta \geq \frac{2\theta}{\pi} \quad \implies \quad e^{-\alpha R \operatorname{sen} \theta} \leq e^{-\frac{2\alpha R}{\pi} \theta}$$

logo

$$|I_R| < 2R \epsilon(R) \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\alpha R}{\pi} \theta} d\theta = \frac{\pi \epsilon(R)}{\alpha} (1 - e^{-\alpha R})$$

que implica em  $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$ .

É de se notar que o lema de Jordan se aplica para  $\alpha = 0$  visto que

$$(1 - e^{-\alpha R}) \rightarrow 0$$

quando  $\alpha \rightarrow 0$ . Enfim, se  $\alpha < 0$  o lema ainda é válido se a semicircunferência  $C_R$  for tomada no semiplano inferior e  $f(z)$  vai uniformemente a zero para  $\pi < \arg(z) < 2\pi$ .  $\square$

### Exemplo 3.3

Sendo  $C$  um contorno orientado no sentido anti-horário, como na Figura 3.5. Mostre que a integral sobre a semicircunferência vai a zero, isto é

$$\int_{C_R} \frac{z^2 dz}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)} \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad R \rightarrow \infty.$$

**Solução.** Neste caso  $\alpha = 0$  uma vez que não temos exponenciais no integrando. Assim, podemos escrever

$$R |f(Re^{i\theta})| = R \left| \frac{R^2 e^{2i\theta}}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)(R^2 e^{2i\theta} + 9)} \right| = \frac{R^3}{|R^2 e^{2i\theta} + 1| |R^2 e^{2i\theta} + 9|}.$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} |R^2 e^{2i\theta} + 1| &= \sqrt{(R^2 e^{2i\theta} + 1)(R^2 e^{-2i\theta} + 1)} = \sqrt{R^4 + 2R^2 \cos \theta + 1} \\ &\geq \sqrt{R^4 - 2R^2 + 1} = R^2 - 1 \end{aligned}$$

e, analogamente para

$$|R^2 e^{2i\theta} + 9| \geq R^2 - 9$$

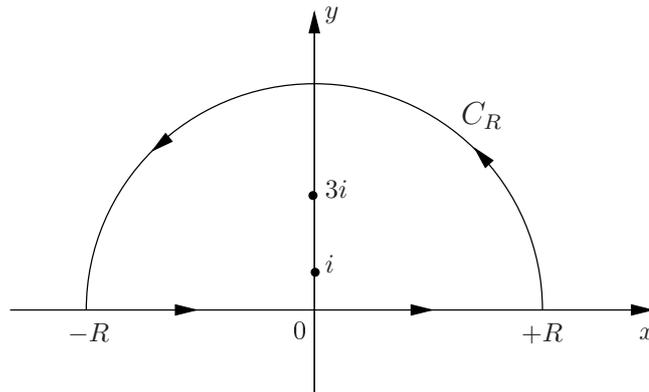


Figura 3.5: Contorno para a integral do Exemplo 3.3.

temos que

$$R|f(Re^{i\theta})| \leq \frac{R^3}{(R^2 - 1)(R^2 - 9)} \equiv \epsilon(R).$$

Então, para  $R \rightarrow \infty$  temos  $R|f(Re^{i\theta})| \rightarrow 0$  logo podemos escrever

$$\int_{C_R} \frac{z^2 dz}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)} \rightarrow 0,$$

que é o resultado desejado

◇

### 3.4 Aplicações

Nesta seção apresentamos como calcular algumas integrais de funções de variável real, integrando-se certas funções analíticas em caminhos convenientes no plano complexo. Em cada um de nossos exemplos, deixamos claro a razão da escolha de uma dada função analítica e do respectivo contorno de integração.

#### Exemplo 3.4 – Singularidade Removível

Resolva a integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \equiv \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\epsilon}^R \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \operatorname{Im} \left( \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right).$$

**Solução.** Notemos que o integrando tem uma singularidade removível em  $x = 0$ . Vamos, então, considerar a seguinte integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz,$$

uma vez que a parte imaginária desta integral é

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz,$$

que é, a menos do fator 2, exatamente a integral desejada. Ora, como, agora, temos uma integral de  $-\infty$  a  $+\infty$  é conveniente tomarmos um contorno  $C$ , composto de duas semicircunferências  $C_1$  e  $C_2$  centradas na origem e com raios, respectivamente, iguais a  $\epsilon$  e  $R$  e dois segmentos de reta, conforme a Figura 3.6 e daí consideramos os limites para  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow \infty$ . Notamos que o cálculo da integral real poderia ser obtido com a escolha da função complexa  $e^{-iz}/z$  e com um contorno diferindo daquele indicado na Figura 3.6, pelo fato de as semicircunferências  $C_1$  e  $C_2$  encontrarem-se no semiplano complexo  $\operatorname{Im} z < 0$ . Podemos verificar que, ainda neste caso, obtém-se o mesmo resultado para a integral real que no caso anterior.

Então, de posse da função e do contorno convenientemente escolhidos vemos que nenhuma singularidade encontra-se dentro do contorno. Portanto, o teorema dos resíduos fornece

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

onde a integração é feita no sentido anti-horário. Então, podemos escrever, percorrendo o contorno no sentido positivo,

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Nota-se que a primeira e a terceira integrais têm a parte imaginária nula ou seja  $z = x + i0 \equiv x$ . Calculemos, separadamente, as integrais sobre  $C_1$  e  $C_2$  com  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow \infty$ .

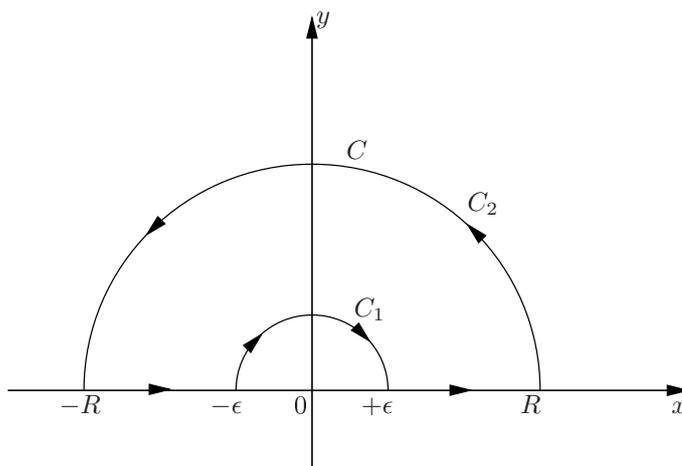


Figura 3.6: Contorno para a integral do Exemplo 3.4.

Para a integral  $\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz$  vamos escrever  $z$  na forma polar, ou seja, tomar  $z = \epsilon e^{i\theta}$  com  $0 < \theta < \pi$ . Logo, temos  $dz = \epsilon i e^{i\theta} d\theta$ , de onde

$$\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\pi}^0 \frac{e^{i\epsilon e^{i\theta}}}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon i e^{i\theta} d\theta,$$

e tomando o limite para  $\epsilon \rightarrow 0$  temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = i \int_{\pi}^0 d\theta = -i\pi.$$

Analogamente para a integral sobre  $C_2$ , ou seja, para  $z = R e^{i\theta}$  de onde  $dz = Ri e^{i\theta} d\theta$  logo

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_0^{\pi} \frac{e^{iR e^{i\theta}}}{R e^{i\theta}} Ri e^{i\theta} d\theta = \\ &= i \int_0^{\pi} e^{iR(\cos \theta + i \text{sen} \theta)} d\theta = i \int_0^{\pi} e^{iR \cos \theta - R \text{sen} \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Para tal integral, partimos da desigualdade, advinda do lema de Jordan, isto é,

$$\left| \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq R \epsilon(R) \int_0^{\pi} e^{-R \text{sen} \theta} d\theta = 2R \epsilon(R) \int_0^{\pi/2} e^{-R \text{sen} \theta} d\theta$$

que vai para zero nos limites de  $R \rightarrow \infty$  e  $\epsilon(R) \rightarrow 0$ , logo

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{x} dx - i\pi + \int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = 0.$$

Lembrando da relação  $2i \operatorname{sen} x = e^{ix} - e^{-ix}$  temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi,$$

e uma vez que o integrando é uma função par e os limites de integração são simétricos temos, finalmente,

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

que é o resultado desejado.

### Exemplo 3.5 – Pólo Simples e Ponto de Ramificação

Resolva a integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$$

com  $0 < \alpha < 1$ .

**Solução.** Vamos considerar a seguinte integral

$$\oint_C \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz$$

cujo integrando tem um pólo simples em  $z = -1$  e um ponto de ramificação em  $z = 0$ . Aqui, vamos escolher um contorno que exclua o ponto de ramificação e deixe dentro do contorno  $C$  somente o pólo simples. O contorno  $C$  é composto de duas circunferências concêntricas  $C_1$  e  $C_2$  com raios, respectivamente,  $\epsilon$  e  $R$  e dois segmentos de reta,  $L_1$  e  $L_2$ , como na Figura 3.7.

Então, pelo teorema dos resíduos podemos escrever

$$\oint_C \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} \left( \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} \right) = 2\pi i (-1)^{\alpha-1} = 2\pi i e^{i\pi(\alpha-1)}.$$

Percorrendo o contorno fechado, no sentido anti-horário, temos

$$\oint_C \frac{z^{\alpha-1}}{z+1} dz = \int_{\epsilon}^R \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx + \int_{C_2} \frac{z^{\alpha-1}}{z+1} dz +$$

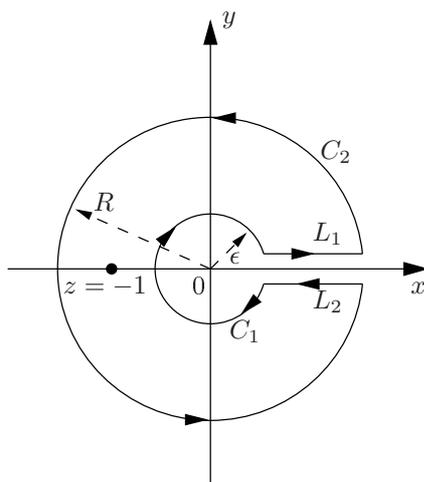


Figura 3.7: Contorno para a integral do Exemplo 3.5.

$$+ \int_R^\epsilon \frac{(x e^{2\pi i})^{\alpha-1}}{1+x} dx + \int_{C_1} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz = 2\pi i e^{i\pi(\alpha-1)} .$$

A segunda integral, pelo lema de Jordan, vai a zero quando  $R \rightarrow \infty$ . A integral sobre  $C_1$  é calculada escrevendo-se

$$z = \epsilon e^{i\theta} \quad \text{com} \quad 0 < \theta < 2\pi$$

logo

$$\int_{C_1} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz = \int_{2\pi}^0 \frac{(\epsilon e^{i\theta})^{\alpha-1} \epsilon i e^{i\theta}}{1 + \epsilon e^{i\theta}} d\theta = 0$$

para  $\epsilon \rightarrow 0$ . Finalmente, tomando-se os limites  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow \infty$  temos

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx + e^{2\pi i(\alpha-1)} \int_\infty^0 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = 2\pi i e^{i\pi(\alpha-1)}$$

ou ainda

$$\left[ 1 - e^{2\pi i(\alpha-1)} \right] \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = 2\pi i e^{i\pi(\alpha-1)} .$$

Multiplicando-se ambos os membros da expressão anterior por  $e^{-i\pi(\alpha-1)}$  temos

$$\left[ e^{-i\pi(\alpha-1)} - e^{i\pi(\alpha-1)} \right] \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = 2\pi i$$

e, usando a relação envolvendo o seno e a exponencial obtemos

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{-\pi}{\operatorname{sen}[\pi(\alpha-1)]}.$$

Finalmente, expandindo o seno da soma podemos escrever

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi \alpha}$$

que constitui o resultado desejado.<sup>2</sup>

### Exemplo 3.6 – Oscilador Harmônico Amortecido

Consideramos um oscilador harmônico amortecido sobre o qual age uma força externa  $g(t)$ . O movimento de tal oscilador é governado pela equação diferencial ordinária<sup>3</sup>

$$\frac{d^2}{dx^2} x(t) - 2\alpha \frac{d}{dx} x(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t),$$

com  $x : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $f(t) = g(t)/m$  e  $g : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ , sendo  $m$  a massa,  $2\alpha > 0$  o coeficiente de amortecimento e  $\omega_0$  a frequência. Utilize a metodologia da transformada de Fourier para determinar a solução  $x(t)$ .

**Solução.** Admitamos que  $f(t)$  possui uma transformada de Fourier; então

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

onde

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt.$$

Esperamos que a solução  $x(t)$  possua também uma transformada de Fourier, de modo que possamos escrever

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

onde

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt.$$

<sup>2</sup>Este resultado pode ser colocado na forma de um produto de funções gama [6].

<sup>3</sup>Uma equação análoga é obtida quando do estudo do circuito RLC. Ver refs. [4, 9].

Transformando a equação diferencial, utilizando as propriedades das derivadas, obtemos para  $A(\omega)$  uma equação algébrica

$$-\omega^2 A(\omega) - 2\alpha\omega i A(\omega) + \omega_0^2 A(\omega) = F(\omega)$$

que resolvida para  $A(\omega)$  fornece

$$A(\omega) = \frac{F(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\alpha\omega i}.$$

Ora, conhecida a função  $A(\omega)$ , a solução do problema será obtida pela transformada de Fourier inversa, ou seja

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega) e^{-i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\alpha\omega i} d\omega.$$

Esta integral, na maioria dos casos, pode ser calculada utilizando o teorema dos resíduos. Para tanto é necessário que conheçamos os zeros do denominador, uma vez que eles darão origem aos pólos do integrando.

Com  $\alpha > 0$  os pólos estão no semiplano inferior, localizados nos seguintes pontos:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \pm \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \alpha i & \text{se } \omega_0 > \alpha \\ \omega_{1,2} &= (-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}) i & \text{se } \omega_0 < \alpha \\ \omega_1 &= \omega_2 = -\alpha i & \text{se } \omega_0 = \alpha. \end{aligned}$$

Basta, portanto, calcular os resíduos nos pólos simples (dois primeiros casos) e pólo de segunda ordem (terceiro caso).

Para fazermos uso do teorema dos resíduos especificamente, vamos considerar um exemplo onde supomos  $f(x)$  dada na seguinte forma

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & \text{se } |t| < \tau \\ 0 & \text{se } |t| \geq \tau \end{cases}$$

onde  $f_0$  é uma constante e que  $\omega_0 > \alpha$ , isto é, o caso do chamado oscilador fracamente amortecido.

A transformada de Fourier de  $f(t)$  é dada por

$$F(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{i\omega t} dt = f_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen } \omega\tau}{\omega}$$

de onde temos para a solução  $x(t)$ , a expressão

$$x(t) = -\frac{f_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } \omega\tau e^{-i\omega t}}{\omega(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} d\omega$$

sendo  $\omega_1 = \beta - \alpha i$  e  $\omega_2 = -\beta - \alpha i$  com  $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ .

As únicas singularidades do integrando são aquelas em que  $\omega = \omega_1$  e  $\omega = \omega_2$ . Para escolhermos um contorno conveniente, vamos verificar se a integral é limitada. Para tal escrevemos

$$\operatorname{sen} \omega \tau = \frac{1}{2i} (e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau})$$

e, é claro que se  $t > \tau$ , a função

$$\frac{\operatorname{sen} \omega \tau}{\omega} e^{-i\omega t}$$

é limitada no semiplano inferior e o contorno pode ser fechado por baixo, como mostra a Figura 3.8.

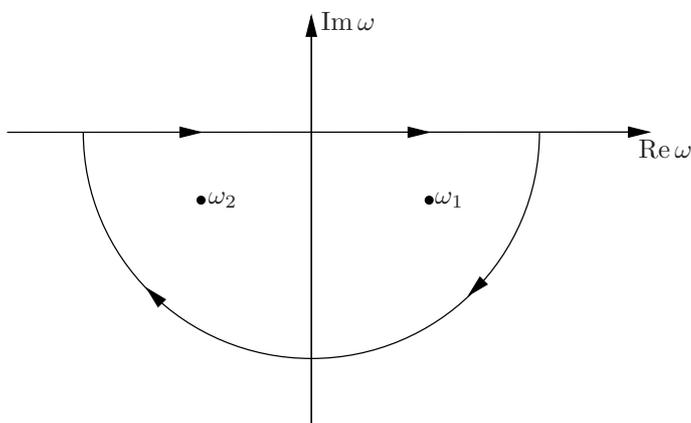


Figura 3.8: Contorno para a integral do Exemplo 3.6.

Utilizando o teorema dos resíduos, temos

$$x(t) = -\frac{f_0}{\pi} 2\pi i \left[ \frac{\operatorname{sen} \omega_1 \tau e^{-i\omega_1 t}}{\omega_1(\omega_1 - \omega_2)} - \frac{\operatorname{sen} \omega_2 \tau e^{-i\omega_2 t}}{\omega_2(\omega_1 - \omega_2)} \right] \quad t > \tau$$

que, fazendo uso das relações

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

pode ser escrito em termos de funções reais.

Para  $t < -\tau$  o contorno pode ser fechado por cima e a integral é zero visto que, antes da ação de uma força externa o oscilador harmônico está

em estado de repouso. Finalmente, vamos estudar o caso em que  $|t| < \tau$ . É conveniente separar a integral de  $x(t)$  em duas partes a partir da expansão do seno em termos das exponenciais, isto é: A parte contendo  $\exp[-i\omega(t+\tau)]$  pode ser calculada utilizando-se um contorno fechado por baixo e a parte contendo  $\exp[-i\omega(t-\tau)]$  por um contorno fechado por cima. Note-se que cada integrando terá um pólo em  $\omega = 0$ . Para tal, considere os caminhos de integração como na Figura 3.9.<sup>4</sup>

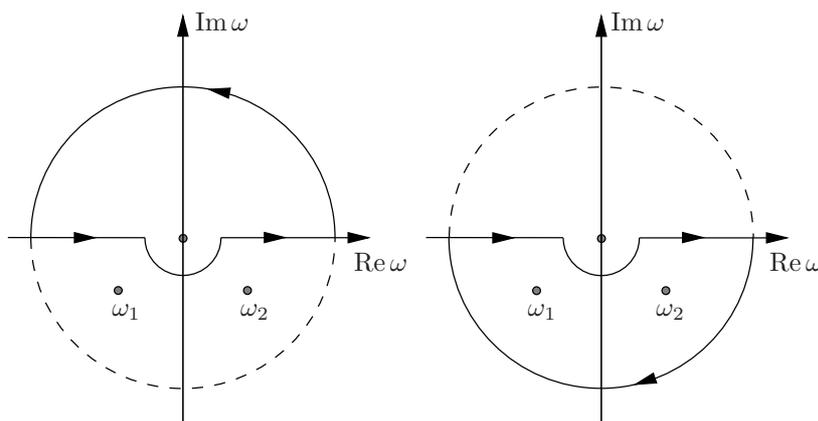


Figura 3.9: Contornos para a integral da Seção 3.4.

Logo, podemos escrever a seguinte expressão:

$$x(t) = -\frac{f_0}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} d\omega + \frac{f_0}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{e^{-i\omega(t+\tau)}}{\omega(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} d\omega.$$

Utilizando o teorema dos resíduos temos

$$x(t) = -\frac{f_0}{\omega_1\omega_2} - f_0 \frac{e^{-i\omega_1(t-\tau)}}{\omega_1(\omega_1 - \omega_2)} + f_0 \frac{e^{-i\omega_2(t+\tau)}}{\omega_2(\omega_1 - \omega_2)}$$

que, também, pode ser escrito em termos de funções reais.

---

<sup>4</sup>O resultado não se altera se evitarmos o pólo por cima.

### 3.5 Exercícios

1. Encontre os resíduos nos pontos singulares das seguintes funções:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \frac{\operatorname{sen} 3z}{z^4} & \text{(b)} \quad \frac{z-3}{z+1} & \text{(c)} \quad \frac{z^2+5z-6}{(z+1)^2(z-2)^3} \\ \text{(d)} & (1-e^z)^{-1} & \text{(e)} \quad \operatorname{cosec} z & \text{(f)} \quad \operatorname{tgh} z. \end{array}$$

2. Encontre os resíduos somente nos pontos singulares que se encontram no interior da circunferência  $|z| = 2$  para:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \frac{z}{1+z^2} & \text{(b)} \quad \frac{1}{1-z^4} & \text{(c)} \quad \frac{3-z}{z^3+3z^2} \\ \text{(d)} & \frac{-z^2-22z+8}{z^3-5z^2+4z} & \text{(e)} \quad \frac{1}{z(z-3)} & \text{(f)} \quad \frac{1}{1+z^3} \end{array}$$

3. Sendo  $C$  uma circunferência centrada na origem e de raio unitário, orientada no sentido anti-horário, calcule as seguintes integrais:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \oint_C \operatorname{tg} z \, dz \\ \text{(c)} & \oint_C \frac{\cos z}{3z+2i} dz \\ \text{(e)} & \oint_C \frac{dz}{1-e^z} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(b)} & \oint_C \frac{z}{(z-2)^2} dz \\ \text{(d)} & \oint_C \frac{z^2+1}{z^2-2z} dz \\ \text{(f)} & \oint_C \frac{\operatorname{tgh}^2(z+1/2)}{e^z \operatorname{sen} z} dz \end{array}$$

4. Integre a função

$$f(z) = \frac{5+3z}{-z^3+4z}$$

ao longo dos seguintes caminhos, orientados no sentido anti-horário:

$$\text{(a)} \quad |z+1| = 4, \quad \text{(b)} \quad 9x^2 + y^2 = 9.$$

5. Calcule as integrais, onde  $C$  é um contorno simples e fechado, orientado no sentido anti-horário tal que todas as singularidades se encontram na região interior a  $C$ .

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \oint_C \frac{dz}{4z^2-1} \\ \text{(c)} & \oint_C \frac{\operatorname{senh} z}{2z+i} dz \\ \text{(e)} & \oint_C \frac{\operatorname{senh} z}{z(z-i/4)} dz \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(b)} & \oint_C \frac{ze^{iz}}{z^4+1} dz \\ \text{(d)} & \oint_C \frac{z \operatorname{cosh} \pi z}{z^4-13z^2+36} dz \\ \text{(f)} & \oint_C \frac{z}{z+1} dz \end{array}$$

6. Calcule as integrais, onde  $C$  é uma circunferência centrada na origem e de raio 0,9, orientada no sentido anti-horário.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \oint_C \frac{dz}{z^4 - 2z^3} & \text{(b)} \oint_C \operatorname{tg} \pi z \, dz \\ \text{(c)} \oint_C \frac{(z-2)^2}{z^2 + 5z + 6} dz & \text{(d)} \oint_C \frac{z \cosh \pi z}{z^3 + 5z^2 + 6z} dz \\ \text{(e)} \oint_C \frac{dz}{(z+3)(z+2)(z+1/2)} & \text{(f)} \oint_C \frac{e^z}{\cos \pi z} dz \end{array}$$

7. Calcule a integral

$$\int_C \frac{dz}{1+z^4}$$

onde  $C$  é a circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 2x$ , orientada no sentido positivo.

8. Utilize o lema de Jordan para mostrar que as integrais

$$\text{(a)} \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2+1)^3} \quad \text{(b)} \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1}$$

vão a zero para  $R \rightarrow \infty$ . Aqui  $C_R$  é uma semi-circunferência de raio  $R$ , centrada na origem e no semi-plano superior, orientada no sentido anti-horário.

9. Calcule as integrais indicadas utilizando um contorno adequado para cada uma delas

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} & \text{(b)} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} & \text{(c)} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} \\ \text{(d)} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx & \text{(e)} \int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x(1+x^2)} dx & \text{(f)} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{25-24\cos\theta} \\ \text{(g)} \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^4} dx & \text{(h)} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\operatorname{sen}\theta} & \text{(i)} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)^3} \end{array}$$

10. Calcule a transformada de Fourier da função

$$f(x) = \frac{1}{-\mu x^2 + \beta x}$$

com  $\mu > 0$  e  $\beta > 0$ .

11. Calcule a transformada de Laplace da função  $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ .

12. Calcule a transformada de Laplace inversa  $\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(1+s^2)^2} \right]$ .

### 3.6 Respostas e/ou Sugestões

1. a) Ponto singular  $z = 0$  com resíduo  $-9/2$ . b) Ponto singular  $z = -1$  e resíduo  $-4$ . c) Pontos singulares  $z = -1$  e  $z = 2$  com resíduos  $7/27$  e  $-7/27$ , respectivamente. d) Em  $z = 0$  o resíduo é  $-1$ . e) Pontos singulares  $z_0 = \pm k\pi$  com  $k = 0, 1, 2, \dots$ , com resíduo  $1$  se  $\pm 2k\pi$  e  $-1$  se  $\pm(2k+1)\pi$ . f) Pontos singulares  $z_0 = \pm(k+1/2)\pi i$  com  $k = 0, 1, 2, \dots$  e resíduo  $1$  se  $(2k+1/2)\pi i$  e  $-1$  se  $-(2k+1/2)\pi i$ .
2. a) Em  $z = \pm i$ , resíduo é  $1/2$ . b) Em  $z = \pm 1$ , resíduo é, respectivamente,  $\mp 1/4$ . Em  $z = \pm i$  temos  $\mp i/4$ . c)  $z = 0$  é pólo de ordem dois com resíduo  $-2/3$ . d) Em  $z = 0$  o resíduo é  $2$  e em  $z = 1$  é  $5$ . e) Em  $z = 0$  o resíduo é  $-1/3$ . f) Os pólos são em  $z = -1$  e  $z = 1/2 \pm i\sqrt{3}/2$  com resíduo  $1/3$  e  $-\frac{1}{6}(1 \pm i\sqrt{3})$ , respectivamente.
3. a) Zero. b) Zero. c) Para  $z = -2i/3$  temos  $(2i\pi/3) \cosh(2/3)$ . d) Para  $z = 0$  temos  $-\pi i$ . e) Para  $z = 0$  temos  $-2\pi i$ . f) Para  $z = 0$  temos  $2\pi i \operatorname{tgh}^2(1/2)$ .
4. a) Zero. b)  $5\pi i/2$ .
5. a) Zero. b)  $-2\pi i \operatorname{sen}(\sqrt{2}/2) \operatorname{senh}(\sqrt{2}/2)$ . c)  $\pi \operatorname{sen}(1/2)$ . d)  $\frac{2\pi i}{5}(-\cosh 2\pi + \cosh 3\pi)$ . e)  $8\pi i \operatorname{sen}(1/4)$ . f)  $-2\pi i$ .
6. a)  $-\pi i/4$ . b)  $-4i$ . c) Zero. d) Zero. e)  $-8\pi i/15$ . f)  $\frac{-2i}{\sqrt{e}}(1+e)$ .
7.  $\pi i\sqrt{2}/2$ .
8. Direto do lema de Jordan.
9. (a)  $\pi/2$ ; (b)  $2\pi/3\sqrt{3}$ ; (c)  $\pi/\sqrt{2}$ ; (d)  $\pi/e$ ; (e)  $\pi(e-1)/2e$ ; (f)  $2\pi/7$ ; (g) Zero; (h)  $2\pi/3$ ; (i)  $3\pi/8$ .
10.  $-\frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} \exp\left(-\frac{i\omega\beta}{2\mu}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\omega\beta}{2\mu}\right)$
11.  $\arctan s$ .
12.  $-\frac{t}{2} \cos t + \frac{\operatorname{sen} t}{2}$ .

# Capítulo 4

## Aplicações

Neste capítulo vamos apresentar as aplicações propriamente ditas. Por conveniência e por ter um número de páginas restrito, discutimos apenas poucas aplicações, em particular, aquelas que envolvem, quando muito, um ponto de ramificação e, quando absolutamente necessário, também, uma função de Bessel.

Devemos observar que, como já afirmamos, cada uma das transformadas tem uma particularidade. Dessa forma, a escolha da transformada a ser utilizada na busca da solução do problema é um aspecto fundamental dessa metodologia. Aqui, apresentamos as aplicações já com esta observação levada em conta, isto é, a conveniente transformada para discutir a respectiva aplicação.

São muitas as aplicações onde a metodologia das transformadas integrais junto com as funções analíticas, tem um papel importante dos quais podemos citar: cálculo de integrais reais; resolução de equações diferenciais, ordinárias ou parciais; resolução de equações integrais e integrodiferenciais; cálculo de somas infinitas, bem como equações diferenciais fracionárias, dentre outras.

Aqui, também, vamos separar as aplicações em seções, isto é, começamos com as transformadas de Laplace; de Fourier; de Mellin e de Hankel para, ao final do capítulo, apresentarmos a justaposição das transformadas a fim de resolver problemas com duas e três variáveis independentes.

### 4.1 Transformada de Laplace

Nesta seção discutimos o uso da transformada de Laplace para discutir uma equação integrodiferencial e uma equação diferencial parcial.

### 4.1.1 Equação Integrodiferencial

Resolver a seguinte equação integrodiferencial<sup>1</sup>

$$f(t) = \operatorname{sen} t + 2 \int_0^t f'(\xi) \operatorname{sen}(t - \xi) d\xi \quad (4.1.1)$$

satisfazendo a condição  $f(0) = 0$ , utilizando a transformada de Laplace.

**Solução.** Multiplicando a equação (4.1.1) pelo núcleo da transformada de Laplace, usando integração por partes e utilizando o teorema de convolução podemos escrever

$$F(s) = \frac{1}{1 + s^2} + 2\mathcal{L}[f'(t)]\mathcal{L}[\operatorname{sen} t]$$

onde  $F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$ .

Fazendo uso da expressão que fornece a transformada de Laplace da derivada primeira bem como impondo a condição  $f(0) = 0$  obtemos uma equação algébrica, cuja solução é dada por

$$F(s) = \frac{1}{(s - 1)^2}.$$

A fim de recuperar a solução da equação (4.1.1), devemos obter a transformada inversa, isto é, devemos calcular a seguinte integral no plano complexo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{st}}{(s - 1)^2} ds$$

onde  $\Gamma$  é o contorno de Bromwich [1875 – Thomas John lanson Bromwich – 1929].

O integrando desta integral apresenta um pólo duplo em  $s = 1$  logo, utilizando o teorema do resíduos, temos

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ \frac{d}{ds} \left[ (s - 1)^2 \frac{e^{st}}{(s - 1)^2} \right] \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \left[ \frac{d}{ds} (e^{st}) \right] = \lim_{s \rightarrow 1} (t e^{st}), \end{aligned}$$

de onde segue-se, finalmente,  $f(t) = t e^t$ .

<sup>1</sup>Chama-se equação integrodiferencial visto que a derivada da função incógnita aparece também sob o sinal de integração.

### 4.1.2 Equação Diferencial Parcial

Utilizar a transformada de Laplace na variável temporal,  $t$ , de modo a resolver a seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} u(x, t) = -\operatorname{sen} t, \quad t > 0 \quad (4.1.2)$$

cuja solução deve satisfazer a condição inicial  $u(x, 0) = x$  e a condição de contorno  $u(0, t) = 0$ .

**Solução.** Seja  $F(x, s) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-st} dt$ . Multiplicando a equação (4.1.2) pelo núcleo de Laplace e integrando na variável  $t$  de zero até  $\infty$ , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) e^{-st} dt = - \int_0^\infty \operatorname{sen} t e^{-st} dt.$$

Utilizando a expressão envolvendo a transformada de Laplace da derivada primeira e, no segundo membro, integração por partes, podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial x} [sF(x, s) - u(x, 0)] = -\frac{1}{s^2 + 1}.$$

A partir da condição inicial e efetuando a derivada em relação à variável  $x$  temos

$$s \frac{\partial}{\partial x} F(x, s) = 1 - \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{s^2}{s^2 + 1}$$

isto é, a seguinte equação diferencial (pode ser integrada como sendo uma equação diferencial ordinária)

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

cuja integração fornece a seguinte solução geral

$$F(x, s) = \frac{sx}{s^2 + 1} + A$$

onde  $A = A(s)$  é uma "constante" de integração.

Visto que a transformada de Laplace da condição de contorno fornece  $F(0, s) = 0$ , implica que  $A = 0$ , logo

$$F(x, s) = \frac{sx}{s^2 + 1}.$$

A fim de recuperar a solução  $u(x, t)$  devemos proceder com a inversão, isto é, calcular a seguinte integral

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{sx}{s^2 + 1} e^{st} ds$$

onde  $\Gamma$  é o contorno de Bromwich. Temos apenas pólos simples em  $s = \pm i$  logo, utilizando o teorema dos resíduos, obtemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \sum [\text{Resíduos em } s = \pm i] \\ &= \lim_{s \rightarrow i} \left[ (s - i) \frac{sx e^{st}}{s^2 + 1} \right] + \lim_{s \rightarrow -i} \left[ (s + i) \frac{sx e^{st}}{s^2 + 1} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow i} \left( \frac{sx}{s + i} e^{st} \right) + \lim_{s \rightarrow -i} \left( \frac{sx}{s - i} e^{st} \right) \end{aligned}$$

de onde podemos escrever, finalmente,  $u(x, t) = x \cos t$ .

## 4.2 Transformada de Fourier

Nesta seção discutiremos o uso da transformada de Fourier na solução de uma equação diferencial parcial e no cálculo de uma integral cujo integrando contém pontos de ramificação.

### 4.2.1 Equação Diferencial Parcial

Utilizar a transformada de Fourier para encontrar a solução fundamental (função de Green) da equação de Helmholtz [1821 – Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz – 1894] bidimensional;

$$-\Delta \mathcal{G}(x, y) + \alpha^2 \mathcal{G}(x, y) = \delta(x)\delta(y) \quad -\infty < x, y < \infty$$

onde  $\Delta$  é o operador de Laplace bidimensional e  $\alpha$  é um parâmetro positivo. Discutir o caso  $\alpha = 0$ .

**Solução.** Seja  $G(k_1, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x, y) e^{-ik_1 x} dx$  a transformada de Fourier, na variável  $x$ , da função  $\mathcal{G}(x, y)$ . Multiplicando a equação diferencial parcial pelo núcleo da transformada de Fourier, utilizando a propriedade

da transformada de Fourier da derivada segunda e rearranjando, podemos escrever a seguinte equação

$$k_1^2 G(k_1, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} G(k_1, y) + \alpha^2 G(k_1, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(y).$$

De maneira inteiramente análoga, introduzimos a transformada de Fourier na variável  $y$  o que nos conduz à seguinte equação algébrica,

$$k_1^2 G(k_1, k_2) + k_2^2 G(k_1, k_2) + \alpha^2 G(k_1, k_2) = \frac{1}{2\pi}$$

cuja solução é

$$G(k_1, k_2) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k^2 + \alpha^2}$$

onde  $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ ,  $k_1$  e  $k_2$  são os respectivos parâmetros das transformadas de Fourier.

Devemos agora proceder com a inversão, isto é, calcular a seguinte integral dupla (duas transformadas de Fourier inversas)

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik_1x + ik_2y)}{k^2 + \alpha^2} dk_1 dk_2.$$

É conveniente introduzir as coordenadas polares, a saber,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & k_1 &= \rho \cos \phi \\ y &= r \sin \theta & k_2 &= \rho \sin \phi \end{aligned}$$

que fornece

$$\begin{aligned} k^2 + \alpha^2 &= k_1^2 + k_2^2 + \alpha^2 = \rho^2 + \alpha^2 \\ k_1x + k_2y &= r\rho \cos(\phi - \theta) \end{aligned}$$

de onde segue-se a expressão para a função de Green

$$\mathcal{G}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + \alpha^2} \int_0^{2\pi} \exp[ir\rho \cos(\phi - \theta)] d\phi.$$

A integral na variável  $\phi$  é tabelada [15], isto é,

$$\int_0^{2\pi} \exp[ir\rho \cos(\phi - \theta)] d\phi = 2\pi J_0(r\rho)$$

onde  $J_0(r\rho)$  é a função de Bessel de ordem zero, de onde podemos escrever

$$\mathcal{G}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho J_0(r\rho)}{\rho^2 + \alpha^2} d\rho, \quad (4.2.3)$$

que, em termos das variáveis  $x$  e  $y$ , pode ser escrita como

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho J_0(\rho \sqrt{x^2 + y^2})}{\rho^2 + \alpha^2} d\rho.$$

Esta expressão é conhecida como uma representação integral para a chamada função de Green associada à equação de Helmholtz bidimensional a qual permite obter a solução da respectiva equação diferencial não-homogênea

$$(\Delta - \alpha^2)u(x, y) = -f(x, y)$$

através de

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathcal{G}(x, y|\xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Passemos ao caso  $\alpha = 0$ . Este caso deve ser tratado separadamente visto que a integral para  $\mathcal{G}(x, y)$  não está definida. O procedimento é como se segue: diferenciamos, em relação a  $r$ , a equação (4.2.3)

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho^2 J_0'(r\rho)}{\rho^2 + \alpha^2} d\rho$$

que fornece, para  $\alpha = 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}_0(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0'(r\rho) d\rho = -\frac{1}{2\pi r}$$

cuja integração nos leva à expressão

$$\mathcal{G}_0(r, \theta) = -\frac{1}{2\pi} \ln r$$

que, em termos das variáveis  $x$  e  $y$  pode ser escrita como

$$\mathcal{G}_0(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \ln(x^2 + y^2).$$

Esta é a chamada função de Green associada à equação de Poisson [1781 – Siméon Denis Poisson – 1840] bidimensional  $\Delta u(x, y) = -f(x, y)$  cuja solução é dada por

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathcal{G}_0(x, y|\xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

### 4.2.2 Integral com Pontos de Ramificação

No estudo da propagação do som na ionosfera, conforme proposto em [18] encontramos o cálculo da seguinte transformada de Fourier inversa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon} \exp[-\omega^2 + \omega\sqrt{\omega^2-1} + i\omega t] \frac{d\omega}{i\omega} \quad (4.2.4)$$

com  $0 < \epsilon \leq 1$  e  $\omega$  é o parâmetro da transformada. O contorno de integração, cuja justificativa apresentamos a seguir, é conforme a Figura (4.1):

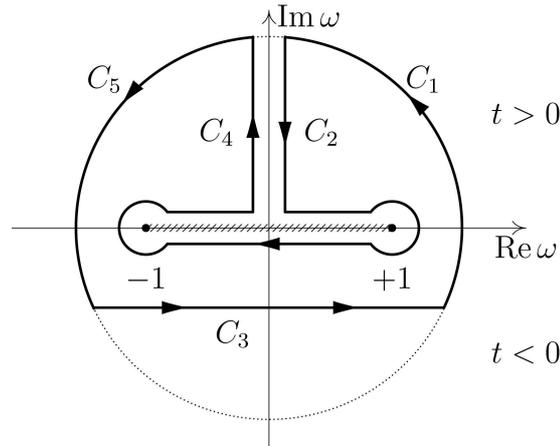


Figura 4.1: Contorno  $C$   $\omega = x + iy$  com  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Antes de utilizarmos o teorema dos resíduos para calcular a integral vamos, por conveniência e simplicidade, usar o seguinte argumento: derivando os dois membros da equação (4.2.4), em relação à variável  $t$ , obtemos

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon} \exp[-\omega^2 + \omega\sqrt{\omega^2-1} + i\omega t] d\omega. \quad (4.2.5)$$

Note que, enquanto a equação (4.2.4) apresenta três pontos singulares, a equação (4.2.5) apresenta apenas dois deles, isto é,  $\omega = 0$  não é mais um ponto singular.

Introduzindo o contorno  $C$ , como na Figura (4.1), tal que  $C = C_1 +$

$C_2 + C_3 + C_4 + C_5$ , podemos escrever, através dos teorema do resíduos

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_C \exp[-\omega^2 + \omega\sqrt{\omega^2 - 1} + i\omega t]d\omega \quad (4.2.6)$$

visto que a função é analítica no interior do contorno  $C$ .

Considerando a raiz quadrada positiva, as integrais sobre  $C_1$  e  $C_5$ , pelo lema de Jordan, vão a zero, enquanto que as integrais sobre  $C_2$  e  $C_4$  se cancelam, restando apenas a integral sobre  $C_3$ .

A fim de calcular a integral sobre  $C_3$ , podemos escrever, separando em quatro trechos, para a direita da origem, acima da linha de corte,

$$\omega = x e^{i0} \quad \implies \quad \omega - 1 = (1 - x) e^{i\pi} \quad \text{e} \quad \omega + 1 = (1 + x) e^{i0}$$

de onde segue-se, para o termo envolvendo a raiz quadrada,

$$\sqrt{\omega^2 - 1} = \sqrt{1 - x^2} e^{i\pi/2}$$

com  $0 < x < 1$ . Analogamente, para o lado esquerdo

$$\omega = x e^{i\pi} \quad \implies \quad \omega - 1 = (1 + x) e^{i\pi} \quad \text{e} \quad \omega + 1 = (1 - x) e^{i0}$$

de onde segue-se, para o termo envolvendo a raiz quadrada,

$$\sqrt{\omega^2 - 1} = \sqrt{1 - x^2} e^{i\pi/2}.$$

Por outro lado, abaixo da linha de corte, ainda com  $0 < x < 1$ , temos

$$\omega = x e^{2\pi i} \quad \implies \quad \omega - 1 = (1 - x) e^{i\pi} \quad \text{e} \quad \omega + 1 = (1 + x) e^{2\pi i}$$

logo,

$$\sqrt{\omega^2 - 1} = \sqrt{1 - x^2} e^{3i\pi/2}$$

enquanto que à esquerda do ponto  $\omega = 0$ ,

$$\omega = x e^{i\pi} \quad \implies \quad \omega - 1 = (1 - x) e^{i\pi} \quad \text{e} \quad \omega + 1 = (1 + x) e^{2\pi i}$$

de onde segue-se,

$$\sqrt{\omega^2 - 1} = \sqrt{1 - x^2} e^{3i\pi/2}.$$

Percorrendo o circuito (apenas com a integral que contribui e tomando os raios das circunferências, respectivamente, menores indo a zero e da maior indo ao infinito), obtemos

$$2\pi \frac{d}{dt}f(t) + \int_0^1 \exp[-x^2 + ix\sqrt{1 - x^2} + ixt]dx +$$

$$+ \int_{-1}^1 \exp[-x^2 - ix\sqrt{1-x^2} + ixt] dx + \int_{-1}^0 \exp[-x^2 + ix\sqrt{1-x^2} + ixt] dx = 0.$$

Separando a segunda integral na expressão anterior, efetuando uma conveniente mudança de variável nesta e da última integral, podemos, rearranjando, escrever a seguinte expressão

$$2\pi \frac{d}{dt} f(t) + \int_0^1 e^{-x^2} \left[ \exp(ix\sqrt{1-x^2} + ixt) - \exp(-ix\sqrt{1-x^2} + ixt) + \right. \\ \left. + \exp(ix\sqrt{1-x^2} - ixt) - \exp(-ix\sqrt{1-x^2} - ixt) \right] dx = 0.$$

Fazendo uso das relações envolvendo as funções trigonométricas e a função exponencial

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$$

e rearranjando, podemos escrever

$$\frac{d}{dt} f(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 e^{-x^2} \operatorname{sen}(x\sqrt{1-x^2}) \operatorname{sen} xt \, dx = 0,$$

cujas integração fornece

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 e^{-x^2} \operatorname{sen}(x\sqrt{1-x^2}) \cos xt \frac{dx}{x} + \beta,$$

onde  $\beta$  é uma constante de integração que é determinada a partir do conhecimento de  $f(0)$ , por exemplo. Note que  $x = 0$  é uma singularidade removível.

### 4.3 Transformada de Mellin

Nessa seção discutiremos o uso da transformada de Mellin dentro do cálculo de uma soma infinita e na solução de uma equação diferencial parcial com coeficientes variáveis.

#### 4.3.1 Cálculo de Uma Soma Infinita

Antes de calcularmos uma específica soma, utilizando a transformada de Mellin, vamos mostrar o seguinte teorema:

**Teorema 2.** Seja  $f(x)$  uma função que possui transformada de Mellin  $F(p)$ , ou seja,

$$\mathfrak{M}[f(x)] \equiv F(p) = \int_0^{\infty} f(x) x^{p-1} dx.$$

Então

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)\zeta(p) dp$$

onde  $\zeta(p)$  é a chamada função zeta de Riemann<sup>2</sup>.

*Demonstração.* A partir da definição da transformada de Mellin inversa podemos escrever

$$f(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)k^{-p} dp$$

cujas soma sobre todos os valores de  $k$  permite escrever

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)k^{-p} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} k^{-p} \right] dp$$

de onde segue-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)\zeta(p) dp,$$

que é o resultado desejado.  $\square$

A partir deste resultado, vamos mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen } k}{k} = \frac{\pi - 1}{2}$$

isto é, utilizar a transformada de Mellin como ferramenta para calcular uma específica soma infinita.

Primeiramente, vamos calcular a transformada de Mellin da função  $\frac{\text{sen } k}{k}$ , ou seja, calcular a seguinte integral

$$\mathfrak{M} \left[ \frac{\text{sen } k}{k} \right] = F(p) = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } k}{k} k^{p-1} dk = -\Gamma(p-1) \cos \left( \frac{\pi p}{2} \right).$$

<sup>2</sup>A função zeta de Riemann [1826 – Bernard Riemann – 1866], denotada por  $\zeta(p)$ , é definida através da seguinte série [28]  $\zeta(p) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-p}$  para todo número complexo  $p$  tal que  $\text{Re}(p) > 1$ . Note que no caso em que  $p = 2$ , recuperamos o clássico resultado obtido por Euler [1707 – Leonhard Euler – 1783], isto é,  $\zeta(2) = \pi^2/6$ .

Substituindo este resultado na expressão do teorema anterior, obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen } k}{k} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(p-1)\zeta(p) \cos\left(\frac{\pi p}{2}\right) dp.$$

Utilizando a relação funcional envolvendo a função zeta de Riemann [28]

$$(2\pi)^p \zeta(1-p) = 2\Gamma(p)\zeta(p) \cos\left(\frac{\pi p}{2}\right)$$

bem como a relação envolvendo a função gama (Apêndice B)  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen } k}{k} = -\frac{1}{4\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (2\pi)^p \frac{\zeta(1-p)}{p-1} dp.$$

O integrando desta integral apresenta dois pontos singulares, ambos pólos simples, nos pontos  $p = 0$  e  $p = 1$ . Utilizando o teorema dos resíduos podemos escrever

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen } k}{k} = -\frac{1}{4\pi i} 2\pi i [\text{Res}(p=0) + \text{Res}(p=1)].$$

O resíduo em  $p = 0$  é igual a um enquanto que em  $p = 1$  é igual a  $-\pi$ , devido ao fato que  $\zeta(0) = -1/2$  [28].

Enfim, podemos escrever

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen } k}{k} = \frac{\pi - 1}{2}$$

que é o resultado desejado.

### 4.3.2 Equação Diferencial com Coeficientes Variáveis

Utilizar a transformada de Mellin para resolver a equação de Laplace escrita em coordenadas polares no semi-plano superior, isto é,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi$$

com  $u = u(r, \theta)$ , cuja solução satisfaz as condições de contorno

$$u(r, 0) = f(r) = u(r, \pi)$$

sendo  $f(r)$  uma função admissível segundo a definição da transformada de Mellin.

**Solução.** Multiplicando a equação diferencial parcial pelo núcleo da transformada de Mellin e integrando na variável  $r$ , de zero até infinito, temos

$$\int_0^{\infty} r^{p-1} r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} dr + \int_0^{\infty} r^{p-1} r \frac{\partial u}{\partial r} dr + \int_0^{\infty} r^{p-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} dr = 0.$$

Utilizando a propriedade da transformada de Mellin da derivada e rearranjando, obtemos a seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} F(p, \theta) + p^2 F(p, \theta) = 0$$

onde

$$F(p, \theta) = \int_0^{\infty} r^{p-1} u(r, \theta) dr$$

é a transformada de Mellin da função  $u(r, \theta)$ . A solução geral da equação diferencial ordinária é

$$F(p, \theta) = A \operatorname{sen} p\theta + B \cos p\theta$$

com  $A = A(p)$  e  $B = B(p)$  independentes de  $\theta$ . A fim de determinar estas constantes, primeiramente devemos calcular a transformada de Mellin das condições, isto é,

$$\begin{aligned} F(p, 0) &= \int_0^{\infty} r^{p-1} u(r, 0) dr = \int_0^{\infty} r^{p-1} u(r, \pi) dr = F(p, \pi) = \\ &= \int_0^{\infty} r^{p-1} f(r) dr = F(p). \end{aligned}$$

Então, impondo estas condições obtemos  $A$  e  $B$  dadas por

$$A(p) = F(p) \frac{\operatorname{sen} \pi p/2}{\cos \pi p/2} \quad \text{e} \quad B(p) = F(p)$$

de onde segue-se para a solução da equação diferencial na variável  $\theta$ ,

$$F(p, \theta) = \frac{F(p)}{\cos \pi p/2} \cos[p(\theta - \pi/2)].$$

A fim de obter a solução do problema de partida, devemos proceder a inversão, isto é,

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-p} F(p, \theta) dp \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-p} \frac{F(p)}{\cos \pi p/2} \cos[p(\theta - \pi/2)] \end{aligned}$$

que é o resultado desejado.

## 4.4 Transformada de Hankel

Aqui, devido a sua freqüência em problemas envolvendo as funções de Bessel modificadas, vamos calcular a transformada de Laplace inversa da função de Bessel modificada de segunda espécie e de ordem zero. Em seguida resolvemos um problema, através da transformada de Hankel, para o Laplaciano em coordenadas cilíndricas.

### 4.4.1 Funções de Bessel Modificadas

A equação de Bessel modificada de ordem  $\mu$  é

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} y(x) + x \frac{d}{dx} y(x) - (x^2 + \mu^2) y(x) = 0,$$

com solução geral dada por

$$y(x) = A I_\mu(x) + B K_\mu(x)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes arbitrárias. A função  $I_\mu(x)$ , conforme Apêndice B, é a função de Bessel modificada de primeira espécie e de ordem  $\mu$ , enquanto que  $K_\mu(x)$  é a chamada função de Bessel modificada de segunda espécie e de ordem  $\mu$ .

Admitamos que um específico problema, envolvendo uma simetria cilíndrica, nos conduza a uma equação diferencial, para a transformada de Laplace da solução do problema, satisfeita por uma função de Bessel modificada,

$$F(s) = K_0(r\sqrt{s^2 - a^2})$$

onde  $r > 0$ ,  $a > 0$ ,  $s$  é o parâmetro da transformada de Laplace e  $K_0(t)$  é a função de Bessel modificada de segunda espécie e de ordem zero.

Utilize a transformada de Laplace inversa de  $F(s)$  a fim de obter a solução  $x(t)$  do problema específico,

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(s)].$$

A fim de resolver este problema, vamos utilizar a seguinte representação integral para a função de Bessel modificada de segunda espécie e de ordem zero [15]

$$K_0(r\mu) = \int_0^\infty \frac{\cos rx}{\sqrt{x^2 + \mu^2}} dx$$

com  $r > 0$  e  $|\arg(\mu)| < \pi/2$ . Da expressão que recupera a solução do problema (transformada inversa) podemos escrever

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} K_0(r\sqrt{s^2 - a^2}) e^{st} ds$$

onde  $\gamma$  deixa todos os pontos singulares do integrando à sua esquerda. Substituindo a representação integral para a função de Bessel modificada de segunda espécie e de ordem zero, temos

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_0^\infty \frac{\cos rx}{\sqrt{x^2 - a^2 + s^2}} e^{st} ds dx \\ &= \int_0^\infty \cos rx \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st}}{\sqrt{x^2 - a^2 + s^2}} ds \right\} dx. \end{aligned}$$

Utilizando a expressão envolvendo a transformada de Laplace da função de Bessel de ordem zero na ordem inversa, isto é, (Apêndice B)

$$\mathfrak{L}[J_0(ct)] = \frac{1}{\sqrt{s^2 + c^2}} \iff \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{\sqrt{s^2 + c^2}} \right] = J_0(ct)$$

podemos escrever para o termo entre chaves, uma função de Bessel de ordem zero,

$$x(t) = \int_0^\infty \cos rx J_0(t\sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

que é, também, uma integral tabelada [15] logo

$$x(t) = \frac{\cosh(a\sqrt{t^2 - r^2})}{\sqrt{t^2 - r^2}} \Theta(t - r)$$

onde  $\Theta(t - r)$  é a função de Heaviside [1850 – Oliver Heaviside – 1925].

#### 4.4.2 Equação Diferencial em Coordenadas Cilíndricas

Sejam  $(r, z)$  coordenadas cilíndricas. Utilize a transformada de Hankel para obter a solução da equação diferencial parcial não-homogênea [1]

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} u(r, z) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u(r, z) - \frac{1}{r^2} u(r, z) = -\frac{1}{r^2} f(z) \delta(r)$$

para  $0 < r < \infty$  e  $z > 0$ , satisfazendo as condições de contorno

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial r} [u(r, z)] &\rightarrow 0, & \lim_{z \rightarrow \infty} u(r, z) &\rightarrow 0, \\ |u(0, z)| &< \infty, & \left. \frac{\partial}{\partial z} u(r, z) \right|_{z=0} &= 0. \end{aligned}$$

**Solução.** Não é difícil perceber que podemos, (por exemplo, separação de variáveis na equação diferencial parcial homogênea) conduzir o problema a uma equação de Bessel de ordem um e daí considerar a seguinte transformada de Hankel, Seção 2.7.1

$$\mathfrak{H}_1[u(r, z)] \equiv F_1(k, z) = \int_0^\infty u(r, z) J_1(kr) r dr$$

onde  $k$  é o parâmetro da transformada.

Multiplicando a equação diferencial parcial por  $r J_1(kr)$ , rearranjando e integrando na variável  $r$ , de zero até infinito, temos

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} u(r, z) \right] - \frac{1}{r^2} u(r, z) \right\} r J_1(kr) dr = \\ &= - \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(r, z) r J_1(kr) dr - \int_0^\infty \frac{1}{r^2} f(z) \delta(r) r J_1(kr) dr. \end{aligned}$$

Utilizando o resultado do Exemplo 2.18, podemos escrever para o primeiro membro da expressão anterior

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} F_1(k, z) - k^2 F_1(k, z) = -f(z) \int_0^\infty \frac{\delta(r)}{r} J_1(kr) dr.$$

Por outro lado, para o segundo membro, usando a expansão em série de Frobenius [1849 – Ferdinand Georg Frobenius – 1917] para a função de Bessel (Apêndice B), podemos escrever

$$\frac{J_1(kr)}{kr/2} = 1 - \frac{(kr/2)^2}{1!2!} + \frac{(kr/2)^4}{2!3!} - \dots$$

Então, reescrevendo, apenas o segundo membro da equação diferencial ordinária na variável  $z$ , temos

$$\frac{k}{2} \int_0^\infty \frac{\delta(r)}{kr/2} J_1(kr) dr = \frac{k}{2} \int_0^\infty \delta(r) \left[ 1 - \frac{(kr/2)^2}{1!2!} + \frac{(kr/2)^4}{2!3!} - \dots \right] dr$$

que, a partir da propriedade de filtragem (Apêndice A), fornece

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} F_1(k, z) - k^2 F_1(k, z) = -\frac{k}{2} f(z) \int_0^\infty \delta(r) dr,$$

ou ainda, a seguinte equação diferencial não-homogênea

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} F_1(k, z) - k^2 F_1(k, z) = -\frac{k}{2} f(z)$$

cuja solução deve satisfazer as seguintes condições de contorno

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F_1(k, z) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial}{\partial z} F_1(k, z) \right|_{z=0} = 0.$$

A solução geral da respectiva equação diferencial homogênea é

$$F_H(k, z) = A e^{kz} + B e^{-kz}$$

com  $A = A(k)$  e  $B = B(k)$ , enquanto que uma solução particular da equação diferencial não-homogênea, procurada, por exemplo, através do método de variação de parâmetros, é dada por

$$F_H(k, z) = e^{kz} \left\{ -\frac{1}{4} \int^z e^{-k\xi} f(\xi) d\xi \right\} + e^{-kz} \left\{ \frac{1}{4} \int^z e^{k\xi} f(\xi) d\xi \right\}.$$

Então, utilizando as condições de contorno podemos escrever para a solução da equação não-homogênea

$$F_1(k, z) = \frac{1}{4} \left\{ \int_0^\infty f(\xi) e^{-k(z+\xi)} d\xi + \int_z^\infty f(\xi) e^{-k(\xi-z)} d\xi + \int_0^z f(\xi) e^{-k(z-\xi)} d\xi \right\}.$$

Devemos, agora, proceder com a inversão, isto é, calcular a integral

$$u(r, z) = \int_0^\infty F_1(k, z) k J_1(kr) dk.$$

A fim de calcular esta integral, façamos uso da seguinte relação

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\ell e^{-k(z+\xi)} f(\xi) d\xi \right\} J_1(kr) k dk =$$

$$\int_0^\ell f(\xi) \left\{ \int_0^\infty e^{-k(z+\xi)} J_1(kr) k dk \right\} d\xi = \int_0^\ell \frac{r f(\xi)}{[(z+\xi)^2 + r^2]^{3/2}} d\xi$$

de onde segue-se

$$u(r, z) = \frac{r}{4} \int_0^\infty \left\{ \frac{f(\xi)}{[(z+\xi)^2 + r^2]^{3/2}} + \frac{f(\xi)}{[(z-\xi)^2 + r^2]^{3/2}} \right\} d\xi$$

que é o resultado desejado.

## 4.5 Justaposição de Transformadas

Vamos agora resolver duas equações diferenciais parciais através da justaposição de transformadas.

### 4.5.1 Transformadas de Laplace e Fourier

Utilize a justaposição de transformadas integrais, transformada de Laplace na variável temporal e transformada de Fourier na variável espacial, de modo a calcular a chamada função de Green do espaço livre (condições iniciais homogêneas), solução da seguinte equação diferencial parcial [19]

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t \partial x} + \mathcal{G} = \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) \quad (4.5.7)$$

para  $-\infty < x < \infty$ ,  $t > 0$ ,  $\tau > 0$  e  $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}(x, t | \xi, \tau)$ , satisfazendo as condições de contorno

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\mathcal{G}(x, t | \xi, \tau)| < \infty, \quad T > 0$$

e iniciais  $\mathcal{G}(x, 0 | \xi, \tau) = 0 = \mathcal{G}_t(x, 0 | \xi, \tau) \quad -\infty < x < \infty$ .

**Solução.** Seja  $G(x, s | \xi, \tau) = \int_0^\infty \mathcal{G}(x, t | \xi, \tau) e^{-st} dt$  a transformada de Laplace da função  $\mathcal{G}(x, t | \xi, \tau)$ . Multiplicando a equação (4.5.7) pelo núcleo de Laplace, integrando de zero até infinito e usando a propriedade da transformada de Laplace das derivadas, podemos escrever

$$s^2 G(x, s | \xi, \tau) - s \mathcal{G}(x, 0 | \xi, \tau) - \mathcal{G}_t(x, 0 | \xi, \tau) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \{ s \mathcal{G}(x, s | \xi, \tau) - \mathcal{G}(x, 0 | \xi, \tau) \} + G(x, s | \xi, \tau) = e^{-s\tau} \delta(x - \xi).$$

Utilizando as condições iniciais e rearranjando obtemos a seguinte equação diferencial ordinária

$$s \frac{\partial}{\partial x} G(x, s | \xi, \tau) + (s^2 + 1) G(x, s | \xi, \tau) = e^{-s\tau} \delta(x - \xi).$$

A fim de resolver esta equação diferencial (pode ser pensada como ordinária), introduzimos a transformada de Fourier da função  $G(x, s|\xi, \tau)$ , definida pela integral

$$g(k, s|\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s|\xi, \tau) e^{-ikx} dx.$$

Então, multiplicando a equação diferencial pelo núcleo de Fourier, integrando na variável  $x$  de  $-\infty$  até  $\infty$  e utilizando a propriedade da transformada de Fourier da derivada (aqui usamos explicitamente as condições de contornos) obtemos a seguinte equação algébrica

$$iks g(k, s|\xi, \tau) + (s^2 + 1)g(k, s|\xi, \tau) = e^{-s\tau} e^{-ik\xi}$$

cuja solução é dada por

$$g(k, s|\xi, \tau) = \frac{e^{-s\tau} e^{-ik\xi}}{iks + s^2 + 1}.$$

Devemos, agora, proceder com a inversão. Começamos pela transformada de Fourier, isto é, calcular a seguinte integral

$$\begin{aligned} G(x, s|\xi, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s\tau} e^{-ik\xi}}{iks + s^2 + 1} e^{ikx} dk \\ &= \frac{e^{-s\tau}}{2\pi i s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-\xi)}}{k + (s^2 + 1)/is} dk. \end{aligned}$$

Utilizando o teorema dos resíduos com um conveniente contorno fechado no semi-plano superior, com  $x - \xi > 0$ , podemos escrever

$$G(x, s|\xi, \tau) = \frac{1}{s} \exp \left\{ -\frac{1}{s}(x - \xi) - s[\tau + (x - \xi)] \right\} \Theta(x - \xi) \quad (4.5.8)$$

onde  $\Theta(x - \xi)$  é a função de Heaviside (Apêndice A).

Enfim, de modo a recuperar a solução do problema de partida (cálculo da função de Green livre) calcular a transformada de Laplace inversa, isto é,

$$\mathcal{G}(x, t|\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} G(x, s|\xi, \tau) e^{st} ds.$$

Substituindo a equação (4.5.8) na expressão acima obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, t|\xi, \tau) &= \Theta(x - \xi) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{ds}{s} \exp \left\{ -\frac{1}{s}(x - \xi) + s[t - \tau - (x - \xi)] \right\} \\ &= \Theta(x - \xi) \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{e^{-(x-\xi)/s}}{s} \right] \end{aligned}$$

para  $\text{Re}[t - \tau - (x - \xi)] > 0$ . Utilizando o par de transformadas envolvendo a função de Bessel de ordem zero [20]

$$\mathfrak{L}[J_0(a\sqrt{x})] = \frac{1}{s} \exp\left(-\frac{a^2}{4s}\right) \iff \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \exp\left(-\frac{a^2}{4s}\right)\right] = J_0(a\sqrt{x})$$

podemos escrever

$$\mathcal{G}(x, t|\xi, \tau) = J_0[2\sqrt{x - \xi}\sqrt{t - \tau - (x - \xi)}] \Theta(x - \xi) \Theta[t - \tau - (x - \xi)]$$

que é o resultado desejado.

#### 4.5.2 Transformadas de Laplace e Hankel

Utilize a justaposição de transformadas integrais, transformada de Laplace na variável temporal e transformada de Hankel<sup>3</sup> na variável radial, de modo a calcular a função de Green associada à seguinte equação diferencial parcial [23]

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = -2\pi\delta(r)\delta(t) \quad (4.5.9)$$

com  $0 < r < \infty$ ,  $t > 0$  e  $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}(r, t)$ , satisfazendo as condições de contorno

$$|\mathcal{G}(0, t)| < \infty \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{G}(r, t) \rightarrow 0$$

e as condições iniciais  $\mathcal{G}(r, 0) = 0 = \mathcal{G}_t(r, 0)$ .

**Solução.** Multiplicando a equação diferencial parcial pelo núcleo de Laplace, integrando de zero até infinito e usando as condições iniciais obtemos a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial r} - s^2 \mathbf{G} - 2s\mathbf{G} = -2\pi\delta(r)$$

com  $\mathbf{G} \equiv \mathbf{G}(r, s) = \int_0^\infty e^{-st} \mathcal{G}(r, t) dt$ .

Agora, multiplicando esta equação diferencial pelo núcleo da transformada de Hankel e usando as condições de contorno, podemos escrever uma equação algébrica cuja solução é dada por

$$G(k, s) = \frac{1}{k^2 + s(s + 2)}$$

<sup>3</sup>Sempre que a simetria é axial, é conveniente utilizar a transformada de Hankel em lugar da transformada de Fourier.

onde  $G(k, s) = \int_0^\infty G(r, s) J_0(kr) r dr$  é a transformada de Hankel da função  $G(r, s)$  e  $J_0(kr)$  é uma função de Bessel de ordem zero.

A fim de calcular a transformada de Hankel inversa, fazemos uso do resultado [15]

$$K_0(r\sqrt{s^2 - 1}) = \int_0^\infty \frac{k J_0(kr)}{k^2 + s^2 - 1} dk$$

com  $\text{Re}(\sqrt{s^2 - 1}) > 0$ , sendo  $K_0(rx)$  uma função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem zero.

Enfim, utilizando um conveniente contorno de Bromwich [2] para inverter a transformada de Laplace obtemos

$$\mathcal{G}(r, t) = e^{-t} \frac{\cosh(\sqrt{t^2 - r^2})}{\sqrt{t^2 - r^2}} \Theta(t - r)$$

que é a solução do problema.

É conveniente notar que, em analogia à aplicação 4.5.1, deveríamos ter escrito formalmente  $\mathcal{G}(r, t|0, 0)$  no lugar de  $\mathcal{G}(r, t)$  o que foi feito para simplificar a notação.

## Apêndice A

# Delta de Dirac e Heaviside

Neste apêndice vamos introduzir o conceito de função delta de Dirac, a partir da chamada função impulso. Apresentamos, também, a importante propriedade de filtragem bem como a relação com a função de Heaviside.

### A.1 ‘Função’ Delta de Dirac

O conceito de função impulso emerge naturalmente em problemas onde a intensidade da força atuante é muito grande e o intervalo de tempo de atuação desta força é muito pequeno. Como exemplos, podemos citar, uma martelada e o ligar-desligar de um interruptor, dentre outros.

Definimos a função impulso, denotada por  $p(t)$ , através de

$$p(t) = \begin{cases} h & \text{se } a - \epsilon < t < a + \epsilon \\ 0 & \text{se } t \leq a - \epsilon, t \geq a + \epsilon \end{cases}$$

onde  $h$  é grande e positivo,  $a > 0$  e  $\epsilon$  é uma constante positiva e pequena.

Vamos calcular a transformada de Laplace da função impulso:

$$\mathfrak{L}[p(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} p(t) dt = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} h e^{-st} dt = \frac{2h}{s} e^{-as} \sinh s\epsilon.$$

Escolhendo a normalização  $2\epsilon h = 1$  temos para a integral de  $p(t)$ , isto é, o chamado impulso,

$$I(\epsilon) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \frac{1}{2\epsilon} dt = 1.$$

Assim, no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , esta função satisfaz as expressões

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_\epsilon(t) = 0, \quad \text{se } t \neq a \quad \text{e} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon) = 1$$

Deste resultado, introduzimos a chamada ‘função’<sup>1</sup> delta de Dirac [1902 – Paul Adrian Maurice Dirac – 1984], denotada por  $\delta(t)$ , como sendo uma ‘função’ tal que

$$\delta(t - a) = 0, \quad t \neq a, \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) dt = 1.$$

Definimos a transformada de Laplace de  $\delta(t)$  como o limite da transformada de Laplace da função impulso, isto é,

$$\mathfrak{L}[\delta(t - a)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathfrak{L}[p_\epsilon(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-as} \frac{\sinh s\epsilon}{s\epsilon} = e^{-as}.$$

No caso particular em que  $a = 0$  obtemos  $\mathfrak{L}[\delta(t)] = 1$  igualdade que motiva a normalização imposta anteriormente.

A função delta de Dirac goza da importante propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$

denominada propriedade de filtragem.

## A.2 ‘Função’ de Heaviside

Definimos a função de Heaviside (função degrau unitário) como<sup>2</sup>

$$\Theta(x) \equiv u_0(x - a) = \begin{cases} 1 & x > a \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Esta função<sup>3</sup> está relacionada com a função delta de Dirac através de

$$\delta(x - a) = \frac{d}{dx} \Theta(x - a).$$

<sup>1</sup>Escrevemos a palavra função entre aspas visto que esta não é uma função no sentido que conhecemos e sim uma distribuição o que foge ao escopo destas notas [5].

<sup>2</sup>Alguns autores definem a função de Heaviside de modo que, para  $x = a$  tenhamos  $\Theta(x - a) = 1/2$  enquanto outros admitem o sinal de igualdade tanto para zero (desligado) quanto para um (ligado).

<sup>3</sup>Aqui, também, o termo função deve ser entendido como sendo uma função generalizada, isto é, uma distribuição tema este que foge do escopo do presente trabalho [5].

## Apêndice B

# Funções Gama e de Bessel

Neste apêndice vamos introduzir duas funções que emergiram naturalmente no texto, em particular no Capítulo 2, onde discutimos as transformadas de Hankel. A função gama, no sentido de uma generalização do fatorial e a função de Bessel, associada a problemas envolvendo uma simetria cilíndrica.

### B.1 Função Gama

Vamos introduzir o conceito de função gama, denotada por  $\Gamma(x)$  que, em geral, pode ser vista como uma função complexa de variável complexa porém, aqui, vamos defini-la somente como uma função de argumento real.

Vamos adotar a definição conforme proposta por Euler, isto é, através de uma integral imprópria, a também chamada função de Euler de segunda espécie.

#### Definição

Seja  $x \in \mathbb{R}$ . Definimos a função gama de  $x$  (argumento  $x$ ) através da integral imprópria

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

com  $x$  diferente de um inteiro negativo ou nulo.

**Propriedade**

A partir da definição podemos escrever

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt$$

que, com uma integração por partes, fornece

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

No caso particular em que  $x = n \in \mathbb{N}^*$  e utilizando integração por partes, temos

$$\Gamma(n+1) = n!$$

o que nos permite assegurar que a função gama é uma possível generalização do conceito de fatorial.

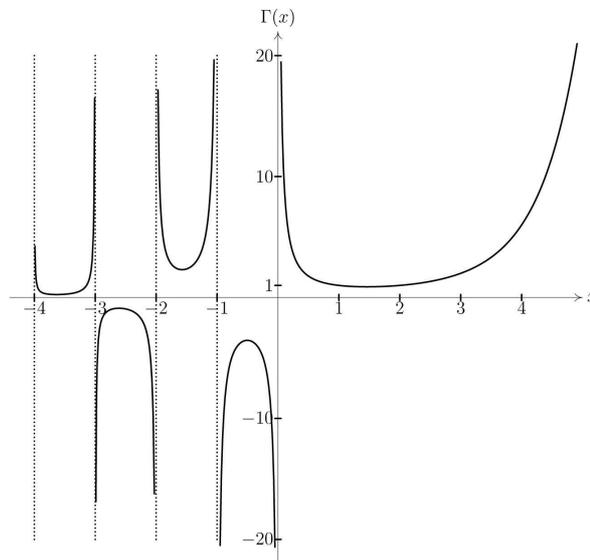


Figura B.1: Gráfico da Função Gama.

**Valores Especiais**

Casos particulares, isto é, valores especiais do argumento  $x$  são, por exemplo,

$$\Gamma(1) = 0! = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

## B.2 Funções de Bessel

Nesta seção introduzimos o conceito de função de Bessel, através de sua representação em série de potências e apresentamos algumas de suas propriedades.

As funções de Bessel e as funções de Bessel modificadas (funções de Bessel com argumento imaginário puro) são soluções regulares na origem das equações de Bessel e Bessel modificada, respectivamente. Tais funções são importantes em problemas envolvendo uma simetria cilíndrica.

### Definição

Seja  $x \in \mathbb{R}$  e  $\mu \in \mathbb{C}$ . Definimos a função de Bessel de primeira espécie e de ordem  $\mu$  ou somente, função de Bessel de ordem  $\mu$ , denotada por,  $J_\mu(x)$ , a partir da série de Frobenius

$$J_\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{\mu+2k}}{k! \Gamma(k + \mu + 1)}.$$

Em analogia às funções de Bessel podemos introduzir as funções de Bessel modificadas de primeira espécie e de ordem  $\mu$ , denotadas por  $I_\mu(x)$ , a partir da relação

$$I_\mu(x) = e^{-i\pi\mu/2} J_\mu(ix).$$

Para nossos propósitos, apenas mencionamos as seguintes propriedades envolvendo as funções de Bessel:

### Relações de Recorrência

$$C_{\mu-1}(x) + C_{\mu+1}(x) = \frac{2\mu}{x} C_\mu(x)$$

$$C_{\mu-1}(x) - C_{\mu+1}(x) = 2C'_\mu(x)$$

onde, nestas duas relações,  $C_\mu(x)$  denota  $J_\mu(x)$  ou  $I_\mu(x)$ .

### Simetria

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad \text{e} \quad I_{-n}(x) = I_n(x)$$

com  $n \in \mathbb{N}$ .

**Casos Particulares**

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{sen} x, \quad J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x,$$

$$I_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{senh} x, \quad I_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{cosh} x.$$

**Integral de Bessel**

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} e^{ix \operatorname{sen} \theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \operatorname{sen} \theta) d\theta$$

com  $n \in \mathbb{N}$ .

**O Par de Transformadas de Laplace de  $J_0(x)$** 

$$\mathfrak{L}[J_0(bx)] \equiv \int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right] = J_0(bx)$$

com  $\operatorname{Re}(a) > 0$ .

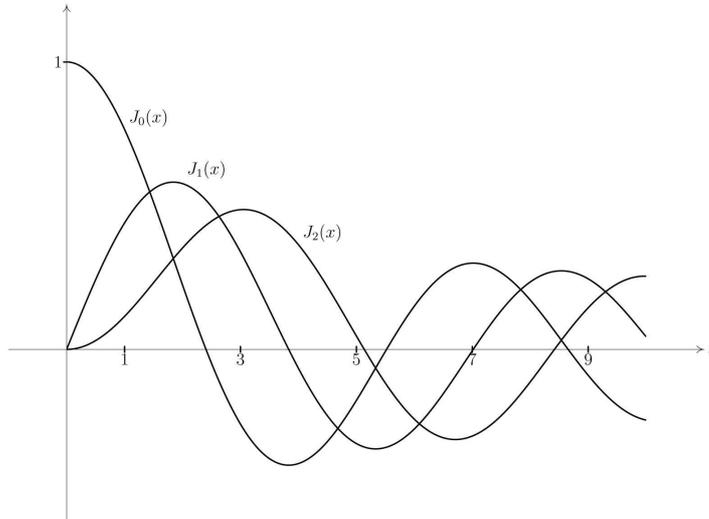


Figura B.2: Funções de Bessel de Primeira Espécie  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  e  $J_2(x)$ .

# Bibliografia

- [1] G. L. Agrawal and W. G. Gottenberg, *Response of a Semi-Infinite Elastic Solid to an Arbitrary Torque Along the Axis*, PAGEOPH., **91**, 34-39, (1971).

Calcula-se a resposta de um certo meio a um torque arbitrariamente distribuído ao longo de um eixo de simetria. Um particular caso é discutido numericamente.

- [2] R. Aleixo de Carvalho and E. Capelas de Oliveira, *Green's Function for the Lossy Wave Equation*, Aceito para a publicação: Brazilian Journal of Physics, (2008).

Neste trabalho é discutida a chamada fórmula de Basset, associada a uma integral envolvendo a função de Bessel, bem como efetuado o cálculo da função de Green, associada a uma equação de onda, através da metodologia da justaposição de transformadas integrais.

- [3] W. P. Angerer, *Some Applications of the Mellin Transform to Branching Process*, arXiv:[math.PR], 0706.2638v1, (2007).

É um artigo onde os autores introduzem a transformada de Mellin no estudo de distribuições limitantes e mostram como derivar a clássica transformada de Mellin de uma certa distribuição de probabilidade estável a partir da sua transformada de Fourier.

- [4] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Fourth Edition, Academic Press, San Diego, (1995).

Este livro apresenta vários métodos matemáticos para a resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais, estão-se várias funções especiais bem como as transformadas de Laplace e Fourier.

- [5] E. Butkov, *Física Matemática*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro, (1968).  
A partir de problemas advindos da Física, o autor apresenta um estudo sistemático das funções de Bessel e Legendre, explorando as simetrias cilíndrica e esférica, respectivamente. As transformadas de Fourier, em particular, aquelas em seno e co-seno, têm uma série de aplicações apresentadas e discutidas
- [6] E. Capelas de Oliveira, *Funções Especiais com Aplicações*, Livraria da Física, São Paulo, (2005).  
Apresentamos um estudo sistemático das funções hipergeométricas e hipergeométricas confluentes e de seus casos particulares, dentre eles as funções de Bessel e os polinômios de Legendre.
- [7] E. Capelas de Oliveira e M. Tygel, *Métodos Matemáticos para Engenharia*, Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, (2005).  
Apresentamos um estudo sistemático de resolver equações diferenciais parciais, em particular, nas aplicações discutimos vários exemplos onde a metodologia das transformadas integrais desempenha um papel importante.
- [8] E. Capelas de Oliveira e W. A. Rodrigues Jr., *Funções Analíticas com Aplicações*, Livraria da Física, São Paulo, (2006).  
Apresentamos um estudo sistemático envolvendo as funções analítica, destacando o teorema dos resíduos no cálculo de integrais reais via funções analíticas, bem como a inversão das transformadas de Laplace e Fourier.
- [9] E. Capelas de Oliveira e J. Emílio Maiorino, *Introdução aos Métodos de Matemática Aplicada*, Editora da Unicamp, Campinas, (2003).  
Estudam-se as equações diferenciais ordinárias através do método de Frobenius, e as equações diferenciais parciais através do método de separação de variáveis bem como das transformadas de Laplace e Fourier. As funções hipergeométricas e seus particulares casos são discutidos.
- [10] R. E. Collins, *Mathematical Methods for Physicists and Engineers*, Second Correction Edition, Dover Publications, Inc., Mineola, (1999).  
O autor apresenta vários métodos matemáticos para resolver problemas simples advindos da Física e da Engenharia. Problemas simples envolvendo o cálculo das transformadas de Laplace direta e inversa são discutidos.

- [11] L. Debnath and D. Bhatta, *Integral Transform and Their Applications*, Second Edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, (2007).  
Este recente livro apresenta a metodologia das transformadas integrais, não apenas aquelas que aqui apresentamos, senão várias outras. Todos os capítulos apresentam problemas resolvidos e propostos.
- [12] D. G. Duffy, *Transform Methods for Solving Partial Differential Equations*, CRC Press, Boca Raton, (1991).  
A metodologia das transformadas integrais, em particular, Laplace, Fourier, Mellin e Hankel, é utilizada para discutir equações diferenciais parciais. São vários os problemas discutidos e resolvidos, além de vários outros deixados para o leitor.
- [13] EARTH661, Analytical Solutions in Hydrogeology, University of Waterloo, Department of Earth Sciences, (2008).  
Uma recente escola onde são estudadas soluções analíticas de equações diferenciais parciais, ordinárias e parciais, através da metodologia das transformadas integrais, associadas aos problemas advindos da hidrogeologia.
- [14] P. R. Garabedian, *Partial Differential Equation*, AMS Chelsea Publishing, Rhode Island, (1998).  
Esta é uma reedição do clássico livro da década de sessenta onde encontramos um tratamento rigoroso das equações diferenciais parciais, bem como das equações integrais. O estudo das equações diferenciais no domínio dos complexos conclui este belo livro.
- [15] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Integral, Series and Products*, Academic Press, New York, (1980).  
Apesar de antiga, esta tabela tem muita popularidade visto ser de fácil acesso.
- [16] F. N. Kong, *Hankel Transform Filters for Dipole Antenna Radiation in a Conductive Medium*, Geophys. Prospect., **55**, 83-89, (2007).  
É discutida a transformada de Hankel associada a uma particular aplicação, i.e., estuda-se a radiação de uma antena de dipolo em um meio condutor, como a radiação de antena em aplicações eletromagnéticas no fundo mar.
- [17] ★ H. Margenau and G. M. Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry*, Second Edition, D. Van Nostrand Company, Inc., New Jersey, (1956).

Apesar de antigo, é um excelente livro para o estudo de equações diferenciais, sejam elas ordinárias ou parciais. Um particular capítulo é dedicado ao estudo das coordenadas curvilíneas, com ênfase nos chamados sistemas de Stäckel, isto é, nos sistemas de coordenadas onde a equação de Helmholtz tridimensional é completamente separável.

- [18] J. Menkes, *The Propagation of Sound in the Ionosphere*, J. Sound Vib., **20**, 311-319, (1972).

O autor apresenta um estudo envolvendo a propagação do som na Ionosfera, utilizando a metodologia da transformada de Fourier. O cálculo da respectiva inversa faz uso do teorema dos resíduos cujo integrando apresenta dois pontos de ramificação.

- [19] D. W. Moore, R. C. Kloosterziel and W. S. Kessler, *Evolution of Mixed Rossby Gravity Waves*, J. Geophys. Res., **103**, 5331-5346, (1998).

Discute-se o cálculo da função de Green bidimensional visando o estudo da evolução de um certo tipo de ondas gravitacionais. Vários exemplos analíticos são apresentados.

- [20] A. P. Prudnikov, Y. A. Brychkov and O. I. Marichev, *Direct Laplace Transform*, em *Integral and Series*, vol.4, Gordon and Breach Science Publishers, New York, (1992).

Os autores, nesta tabela, apresentam uma série bastante grande de cálculo envolvendo a transformada de Laplace. Algumas aplicações, envolvendo as equações integrais, também são discutidas.

- [21] ★ E. Romão Martins e E. Capelas de Oliveira, *Equações Diferenciais, Método de Separação de Variáveis e os Sistemas de Stäckel*, Coleção Imecc, Textos Didáticos, Volume 4, Campinas, (2006).

O livro apresenta um estudo dos chamados sistemas de Stäckel. São apresentados os onze sistemas de coordenadas em que a equação de Helmholtz tridimensional é completamente separável. A chamada  $R$ -separabilidade é apresentada unicamente no sentido de que existem outras maneiras de se abordar a separabilidade. Para todos os onze sistemas são apresentadas as respectivas equações diferenciais ordinárias advindas da separabilidade, bem como as suas respectivas soluções.

- [22] G. Schroeter, *The Application of the Hankel Transformation to Spherically Symmetric Coverage Problems*, J. Appl. Prob., **17**, 1121-1126, (1980).

Apesar de fugir de nosso escopo, este trabalho apresenta uma aplicação da transformada de Hankel no estudo de probabilidades.

- [23] A. Sezginer and W. C. Chew, *Closed form Expression of the Green's Function for the Time-Domain Wave Equation for a Lossy Two-dimensional Medium*, IEEE Trans. Antennas Propagat., **32**, 527-528, (1984).

Utilizando a metodologia da justaposição das transformadas de Laplace e Hankel, é discutido o problema do cálculo da função de Green para uma equação diferencial parcial que apresenta duas variáveis independentes.

- [24] I. N. Sneddon, *Fourier Transform*, Dover Publications, Inc., New York, (1995).

É uma reedição do clássico livro onde é apresentada a transformada de Fourier bem como, a partir dela, são introduzidas as transformadas de Laplace, Mellin e Hankel, dentre outras.

- [25] V. K. Tuan and M. Saigo, *Convolution of Hankel Transform and its Application to an Integral Involving Bessel Functions of First Kind*, Int. J. Math. Math. Sci., **18**, 545-549, (1995).

Utiliza-se o produto de convolução associado às transformadas de Hankel de modo a calcular outras integrais envolvendo a função de Bessel de primeira espécie.

- [26] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, (1966).

Apesar de antigo, este livro é um clássico da literatura sobre funções de Bessel. Os vários tipos de funções de Bessel são apresentadas e discutidas, em geral, na forma de teoremas e lemas. Além de várias tabelas encontramos uma vasta bibliografia onde, nas aplicações, os diversos tipos de funções de Bessel são encontrados.

- [27] H. F. Weinberger, *A First Course in Partial Differential Equations With Complex Variables and Transform Methods*, Dover Publications, Inc., New York, (1995).

Apresentam-se vários problemas envolvendo uma equação diferencial, ordinária ou parcial, onde a metodologia das transformadas e o cálculo de sua inversa, via funções analíticas, desempenham papel importante.

- [28] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Fourth Edition, Cambridge Mathematical Library, Cambridge, (1996).

Esta é uma reedição do clássico livro da década de trinta, em sua quarta edição à época. Livro que apresenta de forma rigorosa todos

os resultados ali apresentados. É de se notar que os vários exercícios cobrem, quase que absolutamente, todos os tópicos da análise e vão desde o mais simples ao mais difícil.

- [29] ★ D. Zwillinger, *Handbook of Differential Equations*, Second Edition, Academic Press, Inc., London, (1992).

Um excelente manual que apresenta várias técnicas e vários métodos de se abordar uma equação diferencial, seja ela ordinária ou parcial. São discutidos, através de exemplos, métodos analíticos e numéricos para a resolução das equações diferenciais. Ressaltamos o título: **Como Utilizar Este Livro** onde o leitor, ao se deparar com o particular problema, associado a um específico tipo de equação, é enviado à seção e/ou capítulo correspondente. Completa o livro uma vasta bibliografia.

# Índice

- Átomo de Hidrogênio, 32
- Caminho Fechado, 51
- Caminho Fechado Simples, 49, 52, 66
- Caminhos de Integração, 64
- Circuito RLC, 62
- Condições de Contorno, 1
- Condições Iniciais, 1
- Contorno, 57
- Contorno de Bromwich, 74
- Convolução, 20, 23, 30, 35
- Coordenadas Cilíndricas, 40, 85
- Curvas Características, 5
- Deslocamento, 16
- Discriminante, 2
- Domínio Multiplamente Conexa, 53
- Equação Característica, 5
- Equação de Difusão, 40
- Equação de Helmholtz, 74
- Equação de Laplace, 6
- Equação de Onda, 5
- Equação de Tricomi, 11
- Equação Diferencial Ordinária, 62, 82
- Equação Diferencial Parcial, 1, 73, 74, 81, 85
- Equação do Tipo Misto, 2
- Equação Elíptica, 2, 6
- Equação Hiperbólica, 2, 5
- Equação Integrodiferencial, 72
- Equação Parabólica, 2, 5
- Equação Separável, 27
- Escala, 16
- Fatorial, 95
- Forma Canônica, 2, 4, 5
- Forma Polar, 59
- Frações Parciais, 19, 25
- Fronteira, 48
- Função de Bessel, 76, 89, 95
- Função de Bessel Modificada, 83, 95
- Função de Green, 31, 76, 87, 89
- Função de Heaviside, 83, 92
- Função de Ordem Exponencial, 15
- Função Degrau, 16
- Função Delta de Dirac, 91
- Função Gama, 80, 93
- Função Imagem, 15
- Função Impulso, 91
- Função Objeto, 15
- Função Zeta de Riemann, 80
- Funções Admissíveis, 15
- Identidade de Parseval, 35
- Integração no Plano Complexo, 48
- Integrais Reais, 57
- Jacobiano, 2
- Justaposição de Transformadas, 87
- Lema de Jordan, 48, 55, 56, 61
- Linearidade da Transformada, 16, 28, 33, 39
- Método das Características, 2

- Movimento Harmônico Simples, 30  
 O Problema da Inversão, 19  
 Ordem do Pólo, 48  
 Oscilador Harmônico, 64  
 Oscilador Harmônico Amortecido, 62
- Pólo de Ordem Dois, 51  
 Pólo Duplo, 51  
 Pólo Simples, 50, 60, 63  
 Pólos, 48, 49  
 Pólos do Integrand, 63  
 Ponto de Ramificação, 60, 77  
 Ponto Singular, 66  
 Produto de Convolução, 25
- Ramificação, ponto de, 60  
 Região, 51  
 Relação de Recorrência, 95  
 Representação Integral, 96  
 Resíduo, 48, 51
- Sentido Anti-horário, 51, 59, 66  
 Série de Laurent, 48, 55  
 Série Uniformemente Convergente, 49  
 Simetria Axial, 40, 89  
 Singularidade, 48  
 Singularidade Essencial, 54  
 Singularidade Removível, 57, 79  
 Singularidades, 63  
 Soma Infinita, 79
- Teorema de Taylor, 51  
 Teorema dos Resíduos, 47, 52, 63, 78  
 Teorema Integral de Cauchy, 48, 53  
 Transformação de Coordenadas, 3  
 Transformada de Fourier, 13, 28, 57,  
 63, 74, 87  
 Transformada de Hankel, 13, 37, 83,  
 89  
 Transformada de Laplace, 13, 15, 57,  
 71, 87, 89, 91, 96
- Transformada de Mellin, 13, 32, 79  
 Transformada Inversa, 19, 89  
 Zeros, 63

## NOTAS EM MATEMÁTICA APLICADA

1. Restauração de Imagens com Aplicações em Biologia e Engenharia  
Geraldo Cidade, Antônio Silva Neto e Nilson Costa Roberty
2. Fundamentos, Potencialidades e Aplicações de Algoritmos Evolutivos  
Leandro dos Santos Coelho
3. Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Águas Subterrâneas  
Edson Wendlander
4. Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais  
Maria Cristina de Castro Cunha e Maria Amélia Novais Schleicher
5. Modelagem em Biomatemática  
Joyce da Silva Bevilacqua, Marat Rafikov e Cláudia de Lello  
Courtouke Guedes
6. Métodos de Otimização Randômica: algoritmos genéticos e “simulated annealing”  
Sezimária F. Pereira Saramago
7. “Matemática Aplicada à Fisiologia e Epidemiologia”  
H.M. Yang, R. Sampaio e A. Sri Ranga
8. Uma Introdução à Computação Quântica  
Renato Portugal, Carlile Campos Lavor, Luiz Mariano Carvalho  
e Nelson Maculan
9. Aplicações de Análise Fatorial de Correspondências para Análise de Dados  
Homero Chaib Filho

10. Modelos Matemáticos baseados em autômatos celulares para Geoprocessamento  
Marilton Sanchotene de Aguiar, Fábria Amorim da Costa,  
Graçaliz Pereira Dimuro e Antônio Carlos da Rocha Costa
11. Computabilidade: os limites da Computação  
Regivan H. N. Santiago e Benjamín R. C. Bedregal
12. Modelagem Multiescala em Materiais e Estruturas  
Fernando Rochinha e Alexandre Madureira
13. Modelagem em Biomatemática (Coraci Malta ed.)
  - 1 - “Modelagem matemática do comportamento elétrico de neurônios e algumas aplicações”  
Reynaldo D. Pinto
  - 2 - “Redes complexas e aplicações nas Ciências”  
José Carlos M. Mombach
  - 3 - “Possíveis níveis de complexidade na modelagem de sistemas biológicos”  
Henrique L. Lenzi, Waldemiro de Souza Romanha e Marcelo Pelajo- Machado
14. A lógica na construção dos argumentos  
Angela Cruz e José Eduardo de Almeida Moura
15. Modelagem Matemática e Simulação Numérica em Dinâmica dos Fluidos  
Valdemir G. Ferreira, Hélio A. Navarro, Magda K. Kaibara
16. Introdução ao Tratamento da Informação nos Ensinos Fundamental e Médio  
Marcilia Andrade Campos, Paulo Figueiredo Lima
17. Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações  
Rosana Sueli da Motta Jafelice, Laércio Carvalho de Barros,  
Rodney Carlos Bassanezi
18. Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira  
Socorro Rangel

19. Observar e Pensar, antes de Modelar  
Flavio Shigeo Yamamoto, Sérgio Alves, Edson P. Marques Filho,  
Amauri P. de Oliveira
20. Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações  
Eliana Xavier Linhares de Andrade, Cleonice Fátima Bracciali
21. Uma Introdução à Teoria de Códigos  
Carlile Campos Lavor, Marcelo Muniz Silva Alves, Rogério  
Monteiro de Siqueira, Sueli Irene Rodrigues Costa
22. Análise e Processamento de Sinais  
Rubens Sampaio, Edson Cataldo, Alexandre de Souza Brandão
23. Introdução aos Métodos Discretos de Análise Numérica de EDO e  
EDP  
David Soares Pinto Júnior
24. Representações Computacionais de Grafos  
Lílian Markenzon, Oswaldo Vernet
25. Ondas Oceânicas de Superfície  
Leandro Farina
26. Técnicas de Modelagem de Processos Epidêmicos e Evolucionários  
Domingos Alves, Henrique Fabrício Gagliardi
27. Introdução à teoria espectral de grafos com aplicações  
Nair Maria Maia de Abreu, Renata Raposo Del-Vecchio, Cybele  
Tavares Maia Vinagre e Dragan Stevanović
28. Modelagem e convexidade  
Eduardo Cursi e Rubens Sampaio
29. Modelagem matemática em finanças quantitativas em tempo discreto  
Max Oliveira de Souza e Jorge Zubelli
30. Programação não linear em dois níveis: aplicação em Engenharia  
Mecânica  
Ana Friedlander e Eduardo Fancello

31. Funções simétricas e aplicações em Combinatória  
José Plínio de Oliveira Santos e Robson da Silva
32. Semigrupos aplicados a sistemas dissipativos em EDP  
Carlos Raposo da Cunha