

Volume 31, 2012

Editores

Cassio Machiaveli Oishi

Universidade Estadual Paulista - UNESP
Presidente Prudente, SP, Brasil

Fernando Rodrigo Rafaeli

Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

Rosana Sueli da Motta Jafelice (Editor Chefe)

Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Uberlândia, MG, Brasil

Rubens de Figueiredo Camargo

Universidade Estadual Paulista - UNESP
Bauru, SP, Brasil

Sezimária de Fátima P. Saramago

Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Uberlândia, MG, Brasil

Vanessa Avansini Botta Pirani (Editor Adjunto)

Universidade Estadual Paulista - UNESP
Presidente Prudente, SP, Brasil



A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7)**, as **figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
<http://www.sbmac.org.br/notas.php>

FUNÇÕES SIMÉTRICAS E APLICAÇÕES EM COMBINATÓRIA

2ª edição

Robson da Silva
rsilva@unifei.edu.br

Departamento de Matemática e Computação
Instituto Ciências Exatas
Universidade Federal de Itajubá

José Plínio de Oliveira Santos
josepli@ime.unicamp.br

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto da Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2012

Coordenação Editorial: Elbert Einstein Nehrer Macau

Coordenação Editorial da Série: Rosana Sueli da Motta Jafelice

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2012 by Robson da Silva e José Plínio de Oliveira Santos. Direitos reservados, 2012 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

**Catálogo elaborado pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner**

Silva, Robson da
Funções Simétricas e Aplicações em Combinatória - São Carlos,
SP : SBMAC, 2012, 112 p., 20.5 cm - (Notas em Matemática
Aplicada; v. 31) - 2ª edição

e-ISBN 978-85-86883-66-8

1. Funções Simétricas 2. Combinatória 3. Partições
I. Silva, Robson da II. Santos, José Plínio de Oliveira
IV. Título. V. Série

CDD - 51

Esta edição em formato e-book é uma edição revisada do livro original do mesmo título publicado em 2007 nesta mesma série pela SBMAC.

Conteúdo

| | |
|---|-----------|
| Prefácio | 7 |
| 1 Introdução | 9 |
| 1.1 Conceitos básicos | 9 |
| 1.2 Partições de um inteiro não-negativo | 15 |
| Exercícios | 19 |
| 2 Funções Simétricas | 21 |
| 2.1 Introdução | 21 |
| 2.2 A álgebra das funções simétricas | 21 |
| 2.3 Algumas bases para Λ | 25 |
| 2.3.1 Função Simétrica Monomial | 25 |
| 2.3.2 Função Simétrica Elementar | 26 |
| 2.3.3 Função Simétrica (Homogênea) Completa | 32 |
| 2.3.4 Função Simétrica Soma de Potências | 36 |
| 2.3.5 Produto escalar e ortogonalidade | 43 |
| 2.3.6 Função de Schur | 46 |
| 2.3.7 Matrizes de Transição | 61 |
| 2.3.8 A Regra de Murnaghan-Nakayama | 64 |
| Exercícios | 70 |
| 3 Funções Simétricas em Combinatória | 71 |
| 3.1 Introdução | 71 |
| 3.2 O Algoritmo <i>RSK</i> | 71 |
| 3.3 Partições Planas e Funções Simétricas | 86 |

| | | |
|-----|---|------------|
| 3.4 | Enumeração de Permutações via Funções Simétricas | 99 |
| 3.5 | Funções Simétricas e a Enumeração Sob a Ação de Grupos Exercícios | 103 107 |
| | Bibliografia | 109 |

Prefácio

O emprego de Funções Simétricas em diversas áreas de pesquisa em matemática pura e aplicada tem crescido nos últimos anos. Encontramos aplicações desta teoria, por exemplo, na enumeração de permutações, no estudo dos caracteres do grupo simétrico, na Teoria de Pólya (enumeração sob a ação de grupos) e em física. No entanto, ainda não há no Brasil um texto introdutório que trate do assunto. Nosso objetivo ao escrever estas notas foi o de suprir esta lacuna.

Dividimos o presente trabalho em duas partes. Na primeira, apresentamos um estudo da álgebra das funções simétricas, o espaço vetorial, algumas de suas bases e matrizes de transição entre estas. Na segunda parte, mostramos algumas das muitas aplicações da teoria vista anteriormente.

São apresentadas as funções simétricas monomial, elementar, homogênea, soma de potências e de Schur. Cada conjunto de tais funções forma, como veremos, uma base para o espaço vetorial das funções simétricas sob o corpo dos racionais. Algumas das propriedades combinatórias são exibidas na medida em que estas funções são apresentadas.

Como aplicações desta teoria apresentamos um estudo das partições planas via funções simétricas, a enumeração de certas permutações e a enumeração sob a ação de grupos.

Campinas, outubro de 2011.
José Plínio de Oliveira Santos
Robson da Silva

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo vamos apresentar algumas ferramentas que serão bastante úteis ao longo do texto. Vamos definir, por exemplo, o que são anéis, grupos, partições e diagramas de uma partição.

A primeira seção deste capítulo introdutório apresenta alguns tópicos referentes a Anéis e Grupos que são empregados ao longo do texto. O leitor já familiarizado com estes conceitos pode passar diretamente à Seção 1.2.

Na Seção 1.2, introduzimos o que é partição de um inteiro não-negativo, a partição conjugada e seu diagrama de Ferrers. As partições serão empregadas ao longo do texto para facilitar a notação de algumas funções simétricas.

1.1 Conceitos básicos

Os conceitos aqui apresentados podem ser encontrados com mais detalhes nas referências [2] e [5].

Definição 1.1. *Um anel $(A, +, \cdot)$ é um conjunto A com pelo menos dois elementos, munido de uma operação denotada por $+$ (chamada adição) e de uma operação denotada por \cdot (chamada multiplicação) que satisfazem as seguintes condições:*

1. A adição é associativa, isto é,

$$(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in A.$$

2. Existe um elemento neutro com respeito à adição, isto é,

$$\exists 0 \in A \text{ tal que, } \forall x \in A, 0 + x = x \text{ e } x + 0 = x.$$

3. Todo elemento de A possui um inverso com respeito à adição, isto é,

$$\forall x \in A, \exists z \in A, \text{ tal que } x + z = z + x = 0.$$

4. A adição é comutativa, isto é,

$$x + y = y + x, \forall x, y \in A.$$

5. A multiplicação é associativa, isto é,

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x, y, z \in A.$$

6. Existe um elemento neutro com respeito à multiplicação, isto é,

$$\exists 1 \in A \text{ tal que, } \forall x \in A, 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

7. A multiplicação é comutativa, isto é,

$$x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in A.$$

8. A adição é distributiva relativamente à multiplicação, isto é,

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall x, y, z \in A.$$

Se todas as condições são satisfeitas com exceção de 7, $(A, +, \cdot)$ é chamado anel não-comutativo.

Verifiquemos que os elementos neutro e inverso (de cada elemento) com respeito à adição são únicos. De fato, se 0 e $0'$ são dois elementos neutros para a adição, então,

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

e, se y e y' dois inversos de x com respeito a adição, então

$$y = y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' = 0 + y' = y'.$$

A unicidade do elemento neutro com respeito à multiplicação pode ser provada de forma similar.

Definição 1.2. Dizemos que um anel $(K, +, \cdot)$ é corpo se para todo $x \in K, x \neq 0$, existir $y \in K$ tal que $x \cdot y = 1$.

Fornecemos a seguir alguns exemplos.

Exemplo 1.1.

1. $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$ são corpos (verifique).
2. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são duas funções, definimos

$$\begin{aligned} f + g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) + g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \cdot g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)g(x) \end{aligned}$$

Então, $(\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}, +, \cdot)$ é um anel (verifique).

3. Seja A um anel, então

$$A[x] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i : a_i \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$$

é o anel de polinômios numa variável sobre A .

Definição 1.3. Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \odot) dois anéis. Uma aplicação $f : A \rightarrow B$ é um homomorfismo se:

- i) $f(x + y) = f(x) \oplus f(y), \forall x, y \in A$.
- ii) $f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y), \forall x, y \in A$.
- iii) $f(1_A) = f(1_B)$.

Um homomorfismo é dito um isomorfismo se este for injetivo e sobrejetivo. Se, neste caso, tivermos $A = B$ dizemos que f é um automorfismo.

Passemos agora à definição do conceito de *grupo*.

Definição 1.4. Um conjunto G com uma operação

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b \end{aligned}$$

é um grupo se as seguintes condições são satisfeitas:

1. A operação é associativa, isto é,

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in G.$$

2. Existe um elemento neutro, isto é,

$$\exists e \in G \text{ tal que } e \cdot a = a \cdot e = a, \forall a \in G.$$

3. Todo elemento possui um inverso, isto é,

$$\forall a \in G, \exists b \in G \text{ tal que } a \cdot b = b \cdot a = e.$$

O grupo é abeliano (ou comutativo) se $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in G$.

A seguir apresentamos alguns exemplos sobre as definições dadas.

Exemplo 1.2. $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$ são grupos (verifique).

Exemplo 1.3. $S_n = \{f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} : f \text{ é uma bijeção}\}$ é um grupo não comutativo (verifique). Temos que o número de elementos em S_n , denotado por $|S_n|$, é igual a $n!$.

Definição 1.5. O grupo S_n do exemplo anterior é chamado Grupo de Permutações de $\{1, 2, \dots, n\}$. Representamos um elemento w de S_n por $w = i_1 \cdots i_n$ ou por $w = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$, o que significa que $i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ é a imagem de j por w , $w(j) = i_j$.

Exemplo 1.4. A permutação $w = 13245 \in S_5$ nos diz que: $w(1) = 1, w(2) = 3, w(3) = 2, w(4) = 4$ e $w(5) = 5$.

Definição 1.6. Uma permutação $w \in S_n$ é chamada de r -ciclo se existem elementos distintos $a_1, \dots, a_r \in \{1, 2, \dots, n\}$ tais que $w(a_1) = a_2$, $w(a_2) = a_3, \dots, w(a_{r-1}) = a_r$, $w(a_r) = a_1$ e tais que $w(j) = j$, para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$; denotamos esse r -ciclo por $(a_1 \cdots a_r)$. Chamamos os 2-cilco de transposições.

Exemplo 1.5. (12345) é um 5-ciclo. Observe que esse mesmo ciclo poderia ser representado de cinco maneiras diferentes por: (23451) , (34512) , (45123) , (51234) , (12345) .

A permutação $w = 42135$ é um 3-ciclo que pode ser representado por (143) .

A permutação $w = 14325$ é uma transposição denotada por (24) .

A permutação $w = 34521$ não é um r -ciclo para qualquer r (verifique).

O elemento identidade de S_n pode ser representado por qualquer 1-ciclo.

Definição 1.7. Sejam $w = (w_1 \cdots w_r) \in S_n$ um r -ciclo e $v = (v_1 \cdots v_s) \in S_n$ um s -ciclo. Os ciclos w e v são disjuntos se $w_i \neq v_j, \forall i, j$.

Exemplo 1.6. Os ciclos (14) e (25) são disjuntos enquanto que os ciclos (135) e (25) não são, pois o elemento 5 é movido por ambos.

A seguir apresentamos dois importantes resultados. Omitimos as demonstrações, que podem ser encontradas na referência [2] ou [5].

Proposição 1.1. Seja $w \in S_n, w \neq id$. Então, a permutação w é igual a um produto de ciclos disjuntos de comprimentos maiores do que ou iguais a 2; essa fatoração é única a menos da ordem dos fatores.

Proposição 1.2. Todo elemento de S_n é um produto de transposições.

Exemplo 1.7. Considere o 5-ciclo (23451) . Logo, $(23451) = (21)(25)(24)(23)$. (verifique)

Definição 1.8. Seja $n \geq 2$. Se $w \in S_n$ tem decomposição como produto de ciclos disjuntos $w = (a_{11} \cdots a_{1r_1}) \cdots (a_{t1} \cdots a_{tr_t})$, com $r_1 \leq \cdots \leq r_t$, dizemos que (r_1, \dots, r_t) é o tipo cíclico de w .

O exemplo a seguir, ilustra a definição anterior.

Exemplo 1.8. As permutações $w = (123)(45)(67)$ e $v = (15)(36)(247)$ têm o mesmo tipo cíclico $(2, 2, 3)$.

Um conceito importante e bastante utilizado é o de *ação de grupos* definido a seguir.

Definição 1.9. A *ação (à esquerda)* de um grupo G num conjunto não-vazio X é a aplicação $G \times X \rightarrow X$ que satisfaz

- $g \cdot (hx) = (g \cdot h)x, \forall g, h \in G$ e $\forall x \in X$.
- $e \cdot x = x, \forall x \in X$, sendo e o elemento neutro de G .

De maneira análoga define-se ação à direita. Verifica-se facilmente que a ação de S_n no conjunto $\{1, \dots, n\}$ é uma ação de grupos.

Definição 1.10. Seja (G, \cdot) um grupo. Um subconjunto não vazio H de G é um subgrupo de G quando, com a operação de G , o conjunto H é um grupo, ou seja, quando as condições abaixo são satisfeitas:

- i) $h_1 \cdot h_2 \in H, \forall h_1, h_2 \in H$.
- ii) $h_1 \cdot (h_2 \cdot h_3) = (h_1 \cdot h_2) \cdot h_3, \forall h_1, h_2, h_3 \in H$.
- iii) $\exists e_H \in H$ tal que $e_H \cdot h = h \cdot e_H = h, \forall h \in H$.
- iv) Para cada $h \in H$, existe $k \in H$ tal que $h \cdot k = k \cdot h = e_H$.

Definição 1.11. A ordem de um grupo G é o número de elementos em G e é denotada por $|G|$.

Sejam G um grupo e H um subgrupo de G . A seguinte relação \sim definida em G é uma relação de equivalência

$$y \sim x \Leftrightarrow \exists h \in H \text{ tal que } y = xh.$$

Definição 1.12. A classe lateral à esquerda de H em G que contém x , denotada por xH , é o conjunto $\{y \in G : y \sim x\} = \{xh : h \in H\}$.

Se tivéssemos definido a relação de equivalência por

$$y \sim x \Leftrightarrow \exists h \in H \text{ tal que } y = hx,$$

obteríamos, então, a classe lateral à direita de H em G que denotamos por $Hx = \{hx : h \in H\}$.

Definição 1.13. O índice de H em G , denotado por $(G : H)$, é o número de classes laterais à esquerda distintas de H em G .

Nos exercícios ao final deste capítulo são apresentadas duas importantes propriedades das classes laterais.

O teorema abaixo, devido a Lagrange, estabelece um importante resultado.

Teorema 1.1. Se G é um grupo finito e H é um subgrupo de G , então a ordem de H divide a ordem de G , isto é, $|G| = |H|(G : H)$.

Definição 1.14. Sejam (F, \cdot) e (G, \times) dois grupos. Uma aplicação $f : F \rightarrow G$ é um homomorfismo se

$$f(a \cdot b) = f(a) \times f(b), \forall a, b \in F.$$

1.2 Partições de um inteiro não-negativo

Definição 1.15. Uma partição λ de um inteiro não-negativo n é uma sequência de inteiros não-negativos $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ com $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$ e $\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$. Vamos assumir que as sequências $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ e $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, 0, \dots)$ representam uma mesma partição λ . Denotaremos por $Par(n)$ o conjunto de todas as partições de n , com $Par(0) = \{(0, 0, \dots)\}$. Além disso, definimos o conjunto Par de todas as partições por $Par = \bigcup_{n \geq 0} Par(n)$.

Para simplificar a notação, utilizaremos a representação $(\lambda_1 \cdots \lambda_k)$, ou simplesmente $\lambda_1 \cdots \lambda_k$, para a partição $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de um inteiro não-negativo n .

Exemplo 1.9. Abaixo temos as partições de $n = 1, 2$ e 5 .

$$Par(1) = \{1\}$$

$$Par(2) = \{2, 11\}$$

$$Par(5) = \{5, 41, 32, 311, 221, 2111, 11111\}$$

Se $\lambda \in Par(n)$, denota-se $\lambda \vdash n$ ou $|\lambda| = n$. Denotamos por $l(\lambda)$ o comprimento (tamanho) de λ , isto é, o número de λ_i não-nulos em λ .

Escrevemos $m_i = m_i(\lambda) = |\{j : \lambda_j = i\}|$ para o número de partes de λ iguais a i e, assim, denotamos $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots r^{m_r})$ para dizer que exatamente m_i partes de λ são iguais a i .

Exemplo 1.10. Temos $l(41) = 2$, $m_1(41) = 1$, $m_2(41) = 0$, $m_3(41) = 0$, $m_4(41) = 1$. Assim, $41 = (1^1 2^0 3^0 4^1)$.

O Diagrama de Ferrers de uma partição $\lambda \vdash n$ é definido como o conjunto de n pontos $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, alinhados da esquerda para a direita, colocando-se em cada linha, e em ordem decrescente, um número de pontos igual a cada uma de suas partes.

Exemplo 1.11. O diagrama de Ferrers da partição 5441 do número 14 é:

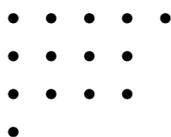


Figura 1.1: Diagrama da partição 5441 do número 14

Usaremos quadrados no lugar dos pontos nos diagramas, essa escolha ficará evidente ao longo do texto. Chamaremos o diagrama assim obtido de *Diagrama de Young da Partição*; sendo assim, para a partição 5441 obtemos o seguinte diagrama:

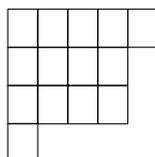


Figura 1.2: Diagrama de Young da partição 5441

A partição conjugada $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots)$ de λ é definida pela condição de que seu diagrama é o transposto do diagrama de λ , isto é, o

¹notemos que a cada partição podemos associar um único diagrama e vice-versa.

diagrama de λ' é obtido pela reflexão do diagrama de λ em torno de sua diagonal principal, como a transposta de matrizes. Ou, equivalentemente, $m_i(\lambda') = \lambda_i - \lambda_{i+1}$. Notemos que $\lambda_1' = l(\lambda)$ e $\lambda_1 = l(\lambda')$. É claro que $\lambda'' = \lambda$. Por exemplo, a partição conjugada de (5441) é (43331), pois seus respectivos diagramas são:



Figura 1.3: Diagramas de (5441) e de sua conjugada (43331)

Duas relações de ordem parciais e uma relação de ordem total no conjunto das partições serão importantes na abordagem sobre funções simétricas que desenvolvemos ao longo desse texto. Primeiramente definimos a relação de ordem parcial \subseteq .

Definição 1.16. Para quaisquer $\mu, \lambda \in \text{Par}$ dizemos que $\mu \subseteq \lambda$ se $\mu_i \leq \lambda_i, \forall i$.

Se identificamos as partições com seus diagramas, esta relação de ordem parcial é simplesmente verificar se o diagrama de μ está contido no diagrama de λ .

Exemplo 1.12. Se $\mu = (1, 1)$ e $\lambda = (2)$, então $\mu \not\subseteq \lambda$, pois $\mu_2 = 1 > 0 = \lambda_2$. Também $\lambda \not\subseteq \mu$, pois $\lambda_1 = 2 > 1 = \mu_1$. Se $\mu = (1, 1)$ e $\lambda = (2, 1)$, então $\mu \subseteq \lambda$, basta observar os diagramas de μ e λ .

O conjunto Par com a ordem parcial \subseteq é chamado *Reticulado de Young*. A figura 1.4 a seguir mostra os primeiros seis níveis do Reticulado de Young.

Nossa segunda relação de ordem parcial é definida apenas em $\text{Par}(n)$ para cada inteiro não-negativo n e é chamada *ordem de dominância* ou *ordem natural* e é denotada por \leq .

Definição 1.17. Se $\mu, \lambda \in \text{Par}(n)$, definimos $\mu \leq \lambda$ se $\sum_{j=1}^i \mu_j \leq \sum_{j=1}^i \lambda_j$, para cada $i \geq 1$.

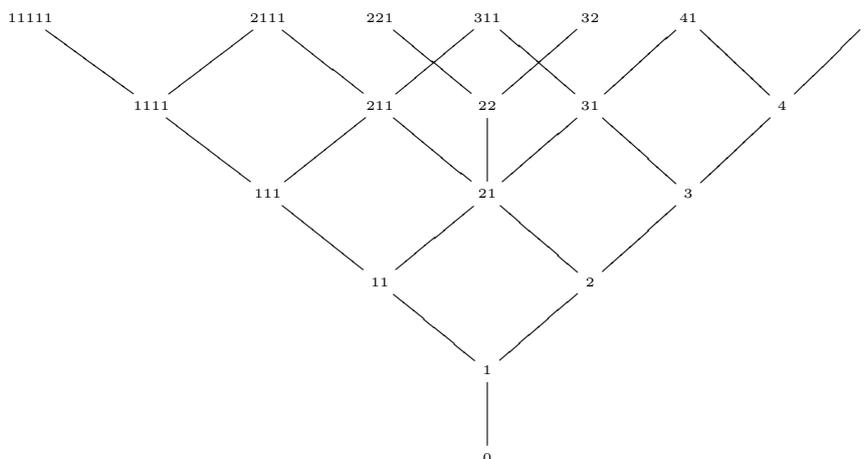


Figura 1.4: Primeiros seis níveis do Reticulado de Young

Exemplo 1.13. Temos $(111) \leq (21)$.

Essa relação de ordem não é total. De fato, (3111) e (222) não são comparáveis.

Nossa terceira relação é uma relação de ordem total, também em $Par(n)$, é chamada *ordem lexicográfica reversa* e denotada \geq^R .

Definição 1.18. Dadas $\mu, \lambda \in Par(n)$, definimos $\lambda \geq^R \mu$ se $\mu = \lambda$ ou se, para algum i , $\mu_1 = \lambda_1, \dots, \mu_{i-1} = \lambda_{i-1}$ e $\lambda_i > \mu_i$.

Exemplo 1.14. Se $n = 6$, por exemplo, temos $6 \geq^R 51 \geq^R 42 \geq^R 411 \geq^R 33 \geq^R 321 \geq^R 3111 \geq^R 222 \geq^R 2211 \geq^R 21111 \geq^R 111111$.

Na ordem de dominância, as partições 33 e 411 bem como 3111 e 222 não são comparáveis.

Lembremos que o posto de uma partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ denotado por $posto(\lambda)$ é definido como o maior inteiro i para o qual $\lambda_i \geq i$.

Exemplo 1.15. $posto(33) = 2$, $posto(411) = 1$ e $posto(3211) = 2$.

Para finalizar esta seção, vejamos como podemos construir uma matriz $(X_{\lambda\mu})$ indexada por partições por meio de um exemplo. Essa

indexação é obtida tomando-se uma ordenação de $Par(n)$ compatível com a ordem de dominância.

Para o caso $n = 4$: ordenamos $Par(4)$ fazendo $\lambda_1 = 1111, \lambda_2 = 211, \lambda_3 = 22, \lambda_4 = 31, \lambda_5 = 4$, pois $4 \geq 31 \geq 22 \geq 211 \geq 1111$, então $\lambda'_1 = 4, \lambda'_2 = 31, \lambda'_3 = 22, \lambda'_4 = 211, \lambda'_5 = 1111$ e

$$(X_{\lambda\mu}) = \begin{pmatrix} X_{1111,4} & X_{1111,31} & X_{1111,22} & X_{1111,211} & X_{1111,1111} \\ X_{211,4} & X_{211,31} & X_{211,22} & X_{211,211} & X_{211,1111} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{4,4} & X_{4,31} & X_{4,22} & X_{4,211} & X_{4,1111} \end{pmatrix}$$

Exercícios

1.1. *Mostrar que num grupo os elementos neutro e inverso são únicos.*

1.2. *Mostre que se $(A, +, \cdot)$ é um anel, então $(A, +)$ é um grupo.*

1.3. *Mostre que*

(a) $(G : H) = |\{ \text{classes laterais à direita de } H \text{ em } G \}|$,

(b) *Todas as classes laterais de H em G têm a mesma cardinalidade, igual à cardinalidade de H .*

1.4. *Verifique que \geq^R é uma relação de ordem total em $Par(n)$.*

Capítulo 2

Funções Simétricas

2.1 Introdução

Na Seção 2.2, estudamos a álgebra das funções simétricas a partir da idéia intuitiva de um polinômio simétrico em um número finito de variáveis e com coeficientes em \mathbb{Q} . Vamos, também, justificar a razão de escolher trabalhar com infinitas variáveis e, depois, apresentamos nossa definição de função simétrica.

Na Seção 2.3, apresentamos bases para o espaço vetorial das funções simétricas sobre \mathbb{Q} . Ao final, em 2.3.7, temos uma tabela que mostra as matrizes de transição entre algumas destas bases, bem como algumas propriedades das mesmas.

2.2 A álgebra das funções simétricas

Consideremos o anel $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_k]$ dos polinômios em k variáveis e coeficientes em \mathbb{Q} . O grupo simétrico S_k age neste anel permutando as variáveis. Um polinômio é dito simétrico se é invariante sob esta ação, ou seja, se é invariante sob qualquer permutação de suas k variáveis. O anel dos polinômios simétricos em k variáveis é representado por $\Lambda_k = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda_k^n$, onde Λ_k^n é o conjunto dos *polinômios simétricos homogêneos de grau n* juntamente com o polinômio nulo. A palavra *homogêneo* significa que cada monômio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$ tem o mesmo grau

$\alpha_1 + \dots + \alpha_k = n$.

Se $f, g \in \Lambda_k^n$ e $a, b \in \mathbb{Q}$, claramente $af + bg \in \Lambda_k^n$. Logo, Λ_k^n é um espaço vetorial sobre \mathbb{Q} , bem como Λ_k .

Para cada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, sendo α_i um inteiro não-negativo, denotamos por x^α o monômio $x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k}$. Seja $\lambda \in Par$ uma partição tal que $l(\lambda) \leq k$. O polinômio $m_\lambda(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\alpha} x^\alpha$ cuja soma é feita sobre todas as permutações α (das entradas) de $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, nem todos $\lambda_j \neq 0$, é claramente simétrico.

Exemplo 2.1. Se $\lambda = 41$ e $k = 2$, então $m_{41}(x_1, x_2) = x_1^4 x_2^1 + x_1^1 x_2^4$.

O exemplo a seguir ilustra como podemos expressar um polinômio simétrico em função dos polinômios m_λ .

Exemplo 2.2. Seja $f(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda_3$ dado por $f(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_1)(1 + x_1 x_2)(1 + x_1 x_3)(1 + x_2)(1 + x_2 x_3)(1 + x_3) = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + 4x_1 x_2 x_3 + 3x_1^2 x_2 x_3 + 3x_1 x_2^2 x_3 + 3x_1 x_2 x_3^2 + x_1^3 x_2 x_3 + x_1 x_2^3 x_3 + x_1 x_2 x_3^3 + 3x_1^2 x_2^2 x_3 + 3x_1^2 x_2 x_3^2 + 3x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1^3 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2^3 x_3 + x_1 x_2^3 x_3^2 + x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1 x_2^2 x_3^3 + 4x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 2x_1^3 x_2^2 x_3^2 + 2x_1^2 x_2^3 x_3^2 + x_1^3 x_2^3 x_3^2 + x_1^3 x_2^2 x_3^3 + x_1^2 x_2^3 x_3^3 + x_1^3 x_2^3 x_3^3$. Temos que $f(x_1, x_2, x_3) = m_0 + m_1 + 2m_{11} + m_{21} + m_{22} + m_{111} + 3m_{211} + m_{311} + 3m_{221} + m_{321} + m_{311} + 4m_{222} + 2m_{322} + m_{332} + m_{333}$. (verifique)

Proposição 2.1. $\{m_\lambda : \lambda \in Par(n), l(\lambda) \leq k\}$ é uma base para Λ_k^n .

Demonstração: Seja $f = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \in \Lambda_k^n$ um polinômio simétrico homogêneo de grau n . Seja λ a única partição de n associada a α (como $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ é tal que $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = n$, podemos formar uma partição de n colocando em ordem não-crescente os α_i). É claro que o termo $c_{\lambda} x^{\lambda}$ aparece no somatório $\sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}$. Como f é um polinômio simétrico, $c_{\beta} = c_{\lambda}$ para qualquer permutação β de $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ e, além disso, $c_{\lambda} x^{\beta}$ aparece em $\sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}$ para toda permutação β de λ .

Agora, agrupando os monômios cujos coeficientes são c_{λ} , obtemos $f = \sum_{\lambda \vdash n} c_{\lambda} m_{\lambda}$. Daí, $\{m_{\lambda} : \lambda \vdash n, l(\lambda) \leq k\}$ gera Λ_k^n .

Se $\{\lambda \in Par(n) : l(\lambda) \leq k\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$, e $a_1 m_{\lambda_1} + \dots + a_l m_{\lambda_l} = 0$, então $a_1 = \dots = a_l = 0$, pois cada monômio $a_i x^{\alpha_i}$, onde α_i é uma

permutação de λ_i , aparece em apenas um termo da soma $a_1 m_{\lambda_1} + \dots + a_l m_{\lambda_l}$ e, quando fazemos a igualdade polinomial $a_1 m_{\lambda_1} + \dots + a_l m_{\lambda_l} = 0$, devemos ter $a_i = 0, \forall i$. Logo, $\{m_\lambda : \lambda \in \text{Par}(n), l(\lambda) \leq k\}$ é linearmente independente.

Portanto, $\{m_\lambda : \lambda \in \text{Par}(n), l(\lambda) \leq k\}$ é uma base para Λ_k^n . ■

Se $k < n$, o monômio x^λ não está definido para a partição $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$ de n . Podemos remover esta restrição tornando infinito o número de variáveis, conforme detalhado abaixo.

Seja $m \geq k$ e consideremos o homomorfismo $\rho : \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m] \longrightarrow \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_k]$ tal que

$$\rho(x_i) = \begin{cases} x_i, & \text{se } 1 \leq i \leq k \\ 0, & \text{se } k+1 \leq i \leq m \end{cases} .$$

Restringindo ρ a Λ_m ganhamos o homomorfismo $\rho_{m,k} : \Lambda_m \longrightarrow \Lambda_k$, cujo efeito na base $\{m_\lambda\}$ é:

$$\rho_{m,k}(m_\lambda(x_1, \dots, x_m)) = \begin{cases} m_\lambda(x_1, \dots, x_k), & \text{se } l(\lambda) \leq k \\ 0, & \text{se } l(\lambda) > k \end{cases} .$$

Logo, $\rho_{m,k}$ é sobrejetivo. Restringindo $\rho_{m,k}$ a Λ_m^n temos o homomorfismo $\rho_{m,k}^n : \Lambda_m^n \longrightarrow \Lambda_k^n, \forall n \geq 0$ e $m \geq k$, os quais são sempre sobrejetivos e são bijetivos se $m \geq k \geq n$. De fato, sendo f uma combinação linear dos $m_\lambda(x_1, \dots, x_k)$, tal que $\rho_{m,k}^n(f) = 0$ então $f = 0$, pois $\rho_{m,k}^n(m_\lambda(x_1, \dots, x_k)) = 0$ se $l(\lambda) > k$, o que não é possível porque $l(\lambda) \leq n \leq k$.

Seja Λ^n o espaço de todas as sequências $f = (f_k)_{k \geq 0}$, onde $f_k = f_k(x_1, \dots, x_k)$ é um polinômio simétrico homogêneo de grau n nas variáveis x_1, \dots, x_k e

$$f_m(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = f_k(x_1, \dots, x_k)$$

se $m \geq k$. Como $\rho_{m,k}^n$ é um isomorfismo para $m \geq k \geq n$, então a projeção $\rho_k^n : \Lambda^n \longrightarrow \Lambda_k^n$, definida por $\rho_k^n(f) = f_k$, é um isomorfismo para todo $k \geq n$ (a idéia é fazer $m \rightarrow \infty$ e identificar Λ^n com Λ_m^n) e, portanto, Λ^n tem uma base que consiste dos polinômios simétricos $m_\lambda, \forall \lambda \vdash n$, tais que $\rho_k^n(m_\lambda) = m_\lambda(x_1, \dots, x_k)$, para $k \geq n$. Logo,

Λ^n é um espaço vetorial sobre \mathbb{Q} cuja dimensão é $p(n)$, o número de partições de n .

Seja $\Lambda = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n$. Logo, Λ é um espaço vetorial sobre \mathbb{Q} com base $\{m_\lambda : \lambda \in Par\}$. Para cada $k \geq 0$, $\rho_k = \bigoplus_{n \geq 0} \rho_k^n : \Lambda \rightarrow \Lambda_k$ é um homomorfismo sobrejetivo e ρ_k é um isomorfismo se $n \leq k$. Assim, ao invés de trabalharmos com k variáveis, o homomorfismo sobrejetor ρ_k nos garante que podemos trabalhar com infinitas variáveis.⁽¹⁾

De agora em diante trabalharemos com infinitas variáveis identificando $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ com $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots)$.

Feitas estas considerações, finalizamos esta seção com as duas seguintes definições.

Definição 2.1. *Seja $x = \{x_1, x_2, \dots\}$ um conjunto de variáveis e $n \in \mathbb{N}$. Uma função simétrica homogênea de grau n sobre \mathbb{Q} é uma série de potências*

$$f(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}$$

sendo: (a) $\alpha \in \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots) : \alpha_i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = n\}$ ⁽²⁾; (b) $c_{\alpha} \in \mathbb{Q}$; (c) x^{α} representa o monômio $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$; (d) $f(x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, \dots) = f(x_1, x_2, \dots)$, para qualquer bijeção $\omega : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Exemplo 2.3. *A função*

$$f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\alpha \in Comp(2)} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 + \sum_{i < j} x_i x_j$$

é claramente simétrica segundo a definição acima.

Definição 2.2. $\Lambda = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \Lambda^n$ é o espaço vetorial das funções simétricas sobre \mathbb{Q} , onde Λ^n é o espaço vetorial, sobre \mathbb{Q} , de todas as funções simétricas de grau n .

¹e assim, funções simétricas em finitas variáveis tornam-se um caso particular do estudo que apresentamos neste texto.

²este conjunto é chamado de *conjunto das composições de n* e representado por $Comp(n)$.

A partir dessas definições, o que antes chamávamos polinômios simétricos recebem o nome de *funções simétricas* (embora na verdade sejam séries de potências), pois historicamente é essa a denominação que recebem.

2.3 Algumas bases para Λ

Nesta seção exibimos algumas bases para o espaço vetorial Λ das funções simétricas sobre o corpo \mathbb{Q} e matrizes de transição entre estas. Iniciamos redefinindo a base de Λ da seção anterior, agora em infinitas variáveis.

2.3.1 Função Simétrica Monomial

Definição 2.3. *Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \vdash n$. A função simétrica monomial $m_\lambda(x) \in \Lambda^n$ é definida por*

$$m_\lambda(x) = \sum_{\alpha} x^\alpha$$

onde α percorre o conjunto de todas as permutações $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ das entradas de $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ e $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$.

Exemplo 2.4. *Algumas funções simétricas monomiais são*

$$\begin{aligned} m_0 &= 1 \\ m_1 &= \sum x_i \\ m_2 &= \sum_i x_i^2 \\ m_{11} &= \sum_{i < j} x_i x_j. \end{aligned}$$

A Proposição 2.1 da seção anterior estabelece que $\{m_\lambda : \lambda \vdash n, l(\lambda) \leq k\}$ é uma base para Λ_k^n . Agora, pelas considerações que fizemos sobre trabalhar com infinitas variáveis, temos que $\{m_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma base para Λ^n e $\dim(\Lambda^n) = p(n)$ (o número de partições de n); consequentemente, $\{m_\lambda : \lambda \in Par\}$ é uma base para $\Lambda = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n$. Esta é nossa primeira base para Λ . No que segue apresentamos outras.

2.3.2 Função Simétrica Elementar

Definição 2.4. *Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \text{Par}$. A função simétrica elementar e_λ é definida pelas fórmulas:*

$$\begin{aligned} e_0 &= 1 \\ e_n &= \sum_{i_1 < \dots < i_n} x_{i_1} \dots x_{i_n}, n \geq 1 \\ e_\lambda &= e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots \end{aligned}$$

Exemplo 2.5. *Se $\lambda = (2, 1, 0, 0, \dots)$ então,*

$$e_{21} = e_2 e_1 = \sum_{i < j} x_i x_j \sum_k x_k = 3m_{111} + m_{21}.$$

As funções simétricas elementares possuem uma função geradora bastante conhecida, a saber

$$E(t) = \sum_{n \geq 0} e_n t^n = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t).$$

Exemplo 2.6. $\prod_{i=1}^3 (1 + x_i t) = (1 + x_1 t)(1 + x_2 t)(1 + x_3 t) = 1 + x_1 t + x_2 t + x_3 t + x_1 x_2 t^2 + x_1 x_3 t^2 + x_2 x_3 t^2 + x_1 x_2 x_3 t^3 = e_0 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3.$

O teorema a seguir estabelece que o \mathbb{Q} -espaço vetorial Λ é gerada por $\{e_1, e_2, \dots\}$. De fato, este conjunto é uma base para Λ .

Teorema 2.1. $\Lambda = \mathbb{Q}[e_1, e_2, \dots]$ e e_1, e_2, \dots são linearmente independentes.

Demonstração: Como $\Lambda = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n$, cada elemento de Λ pode ser escrito como uma soma de funções simétricas homogêneas de diferentes graus. Então, para mostrar que $\Lambda = \mathbb{Q}[e_1, e_2, \dots]$, é suficiente provar que qualquer função simétrica homogênea pode ser expressa como um polinômio nas funções simétricas elementares com coeficientes em \mathbb{Q} .

Seja $f(x_1, x_2, \dots) \in \Lambda^m$ uma função simétrica homogênea de grau m . Utilizando a ordem lexicográfica inversa no conjunto das partições de m , dizemos que o monômio $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots$ é maior do que $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots$ se existir $s \geq 1$ tal que $k_1 = l_1, \dots, k_s = l_s$ e $k_{s+1} > l_{s+1}$. Seja $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots$ o

maior monômio em f com coeficiente não-nulo. Como f é simétrica, essa função contém todos os monômios obtidos de $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots$ pela permutação de k_1, k_2, \dots

Consideremos agora o maior monômio na função simétrica $e_1^{d_1} e_2^{d_2} \cdots$, $d_i \geq 0$, com apenas uma quantidade finita de d_i não-nulos. Observe-mos que se M_1 e M_2 são monômios ambos de grau n , $M_1 > M_2$ e N é um monômio de grau r , então $NM_1 > NM_2$. Logo, se $N_1 > N_2$ então $M_1 N_1 > M_2 N_2$. É claro que o maior monômio em e_n é $x_1 x_2 \cdots x_n$. Daí, segue que o maior monômio em $e_1^{d_1} e_2^{d_2} \cdots$ é $x_1^{d_1+d_2+\cdots} x_2^{d_2+d_3+\cdots} \cdots$.

Assim, o maior monômio em $e_1^{k_1-k_2} e_2^{k_2-k_3} \cdots$ é $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots$ que é o mesmo que em f . Então, se a é o coeficiente de $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots$ em f , o maior monômio em $f_1 = f - a e_1^{k_1-k_2} e_2^{k_2-k_3} \cdots$ é menor do que aquele de f . Podemos repetir esse processo com f_1 . Como existe um número finito de composições de m (os possíveis $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, com $\alpha_i \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$), tais que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = m$), então um número finito de aplicações desse processo produz uma representação de f como um polinômio em e_1, e_2, \dots

Verifiquemos que e_1, e_2, \dots são linearmente independentes. Suponhamos que $\sum_d a_{d_1 d_2 \dots} e_1^{d_1} e_2^{d_2} \cdots = 0$, onde a soma é feita sobre um conjunto finito de sequências $d = (d_1, d_2, \dots)$, $d_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$, com apenas uma quantidade finita de d_i não-nulos. Se esta relação não é trivial, temos $a_{d_1 d_2 \dots} \neq 0$ para algum d . Para qualquer d definimos $k = (k_1, k_2, \dots)$ por $k_i = d_i + d_{i+1} + \cdots$. Então, o grau de $e_1^{d_1} e_2^{d_2} \cdots$ nas variáveis x_1, x_2, \dots é $m = \sum_{i=1}^{\infty} k_i = \sum_{i=1}^{\infty} i d_i$ e o maior monômio deste grau que ocorre em $e_1^{d_1} e_2^{d_2} \cdots$ é $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots$. Se $d' = (d'_1, d'_2, \dots)$ e $k'_i = d'_i + d'_{i+1} + \cdots = k_i$, então $d'_i = d_i$. Logo, monômios distintos $e_1^{d_1} e_2^{d_2} \cdots$ nas variáveis e_1, e_2, \dots têm maiores monômios distintos nas variáveis x_i que ocorrem neles.

Escolhemos entre os d tais que $a_{d_1 d_2 \dots} \neq 0$ algum tal que $m = \sum_{i=1}^{\infty} k_i$ é maximal e o maior monômio $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots$ é maximal. Então, expressando nossa relação nos e_i em termos de x_i , temos o termo $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots$ apenas uma vez e com coeficiente não-nulo $a_{d_1 d_2 \dots}$, o que contraria a independência linear de x_1, x_2, \dots . Portanto, e_1, e_2, \dots são linearmente independentes. ■

Dada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ uma composição de n , isto é, $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = n$, estamos interessados em encontrar o coeficiente de x^α em e_λ , onde $\lambda \vdash n$. A proposição seguinte nos dá esse coeficiente. Antes, no entanto, uma definição.

Definição 2.5. *Seja $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ uma matriz com $a_{ij} \in \mathbb{Z}, \forall i, j$. Definimos $r_i = \sum_j a_{ij}$ e $c_j = \sum_i a_{ij}$ e também as seguintes sequências*

$$r(A) = (r_1, r_2, \dots)$$

$$c(A) = (c_1, c_2, \dots).$$

Definimos também uma $(0,1)$ -matriz como sendo uma matriz cujas entradas são 0 ou 1.

Proposição 2.2. *Sejam $\lambda \vdash n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots), \alpha_i \geq 0$, com $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = n$. O coeficiente $M_{\lambda\alpha}$ de x^α em e_λ , isto é, $e_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} M_{\lambda\mu} m_\mu$, é igual ao número de $(0,1)$ -matrizes $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ satisfazendo $r(A) = \lambda$ e $c(A) = \alpha$.*

Demonstração: Consideremos a matriz

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Para se obter o monômio x^α de e_λ , da primeira linha escolhemos λ_1 entradas, da segunda, λ_2 , e assim por diante, de modo que o produto das entradas escolhidas seja $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots$. Se trocarmos as entradas escolhidas por 1 e as demais por 0, obtemos uma matriz A com $r(A) = \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ e $c(A) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$. O número de possibilidades de escolher as entradas é $M_{\lambda\alpha}$, que é a quantidade de vezes que o monômio x^α aparece em e_λ . Reciprocamente, qualquer tal matriz A corresponde a um monômio x^α de e_λ . ■

Para ilustrar a demonstração anterior, vejamos alguns casos. Tome-mos $n = 5, \lambda = (1, 1, 1, 1, 1)$ e $\alpha = (4, 1)$. Nesse caso, uma possibilidade

para A é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Consideremos agora o caso $n = 5$, $\lambda = (2, 2, 1)$ e $\alpha = (4, 1)$. Nesse caso, $x^\alpha = x_1^4 x_2$, porém, escolhendo as entradas de X de acordo com $\lambda = (2, 2, 1)$ não vamos obter $x_1^4 x_2$, donde $M_{(2,2,1)(4,1)} = 0$.

A tabela 2.1 a seguir apresenta alguns $M_{\lambda\alpha}$. Como e_λ é uma função simétrica, basta considerarmos α como uma partição de n , pois se $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots$ é um termo de e_λ , então x^γ também o é, onde γ é a partição de n obtida a partir de α colocando-se $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ em ordem não-crescente e, além disso, x^α e x^γ devem ter o mesmo coeficiente $M_{\lambda\alpha}$.

| | | |
|-------------|---|--|
| e_1 | = | m_1 |
| e_{11} | = | $m_2 + 2m_{11}$ |
| e_2 | = | m_{11} |
| e_{111} | = | $m_3 + 3m_{21} + 6m_{111}$ |
| e_{21} | = | $m_{21} + 3m_{111}$ |
| e_3 | = | m_{111} |
| e_{1111} | = | $m_4 + 4m_{31} + 6m_{22} + 12m_{211} + 24m_{1111}$ |
| e_{211} | = | $m_{31} + 2m_{22} + 5m_{211} + 12m_{1111}$ |
| e_{22} | = | $m_{22} + 2m_{211} + 6m_{1111}$ |
| e_{31} | = | $m_{211} + 4m_{1111}$ |
| e_4 | = | m_{1111} |
| e_{11111} | = | $m_5 + 5m_{41} + 10m_{32} + 20m_{311} + 30m_{221} + 60m_{2111} + 120m_{11111}$ |
| e_{2111} | = | $m_{41} + 3m_{32} + 7m_{311} + 12m_{221} + 27m_{2111} + 60m_{11111}$ |
| e_{221} | = | $m_{32} + 2m_{311} + 5m_{221} + 12m_{2111} + 30m_{11111}$ |
| e_{311} | = | $m_{311} + 2m_{221} + 7m_{2111} + 20m_{11111}$ |
| e_{32} | = | $m_{221} + 3m_{2111} + 10m_{11111}$ |
| e_{41} | = | $m_{2111} + 5m_{11111}$ |
| e_5 | = | m_{11111} |

Tabela 2.1: Alguns coeficientes $M_{\lambda\alpha}$

O coeficiente $M_{\lambda\alpha}$ tem a seguinte interpretação combinatória. Temos n bolas ao todo, com λ_i destas marcadas com i e também caixas numeradas $1, 2, 3, \dots$. Então $M_{\lambda\alpha}$ é o número de possibilidades de se colocar as bolas nas caixas observando: (a) nenhuma caixa contém mais

do que uma bola marcada com i e (b) a caixa i contém exatamente α_i bolas.

Estas simples interpretações combinatórias de $M_{\lambda\alpha}$ são exemplos de como se pode aplicar funções simétricas na resolução de problemas em combinatória. Ao longo do texto veremos outras aplicações. A seguir apresentamos um corolário da Proposição 2.2.

Corolário 2.1. *Sejam λ e $\mu \vdash n$. Então $M_{\lambda\mu} = M_{\mu\lambda}$, isto é, a matriz $(M_{\lambda\mu})$ é simétrica.*

Demonstração: Seja A uma $(0, 1)$ -matriz associada a $M_{\lambda\mu}$. Então, $r(A) = \lambda$ e $c(A) = \mu$ se, e somente se, A^t satisfaz $r(A^t) = \mu$ e $c(A^t) = \lambda$. Logo, o número de $(0, 1)$ -matrizes associadas a $M_{\lambda\mu}$ é igual ao obtido a partir de $M_{\mu\lambda}$, donde $M_{\lambda\mu} = M_{\mu\lambda}$. ■

O resultado a seguir é uma formulação equivalente à Proposição 2.2 em termos de funções geradoras.

Proposição 2.3. *Temos*

$$\prod_{i,j} (1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda, \mu \in Par} M_{\lambda\mu} m_\lambda(x) m_\mu(y) = \sum_{\lambda \in Par} m_\lambda(x) e_\lambda(y).$$

Demonstração: É suficiente considerar λ e μ partições de um mesmo inteiro não-negativo, caso contrário $M_{\lambda\mu} = 0$, pois se $\lambda \vdash m$ e $\mu \vdash n$, com $m \neq n$, então como a caixa i deve conter exatamente μ_i bolas, o total de bolas nestas caixas será n , mas faltarão bolas quando $m < n$ e sobrarão bolas quando $m > n$.

Um monômio $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \cdots = x^\alpha y^\beta$ que aparece em $\prod_{i,j} (1 + x_i y_j)$ é obtido pela escolha de uma $(0, 1)$ -matriz $A = (a_{ij})$ com finitas entradas iguais a 1 satisfazendo

$$\begin{aligned} \prod_{i,j} (x_i y_j)^{a_{ij}} &= \prod_j x_1^{a_{1j}} y_j^{a_{1j}} x_2^{a_{2j}} y_j^{a_{2j}} \cdots \\ &= x_1^{a_{11}+a_{12}+\cdots} y_1^{a_{11}+a_{21}+\cdots} x_2^{a_{21}+a_{22}+\cdots} y_2^{a_{12}+a_{22}+\cdots} \cdots = x^\alpha y^\beta. \end{aligned}$$

Por exemplo: para obtermos o termo $x_1 x_2 \cdots x_n y_1 y_2 \cdots y_n$, tomamos $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$ e $a_{ij} = 0$ nos demais casos. Já para

obter $x_1^2 x_2^2 x_3 \cdots x_n y_1 y_2^3 y_3 \cdots y_n$ podemos tomar $a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{32} = a_{23} = 1, a_{ii} = 1, 4 \leq i \leq n$ e $a_{ij} = 0$ nos outros casos.

Mas, $\prod_{i,j} (x_i y_j)^{a_{ij}} = x^{r(A)} y^{c(A)}$, donde o coeficiente de $x^\alpha y^\beta$ no produto $\prod (1 + x_i y_j)$ é o número de $(0, 1)$ -matrizes A que satisfazem $r(A) = \alpha$ e $c(A) = \beta$. Logo,

$$\begin{aligned} \prod_{i,j} (1 + x_i y_j) &= \sum_{\lambda, \mu \in \text{Par}} M_{\lambda\mu} m_\lambda(x) m_\mu(y) = \\ &= \sum_{\lambda \in \text{Par}} m_\lambda(x) \sum_{\mu \in \text{Par}} M_{\lambda\mu} m_\mu(y) = \sum_{\lambda \in \text{Par}} m_\lambda(x) e_\lambda(y). \end{aligned}$$

■

Notemos que o Corolário 2.1 segue imediatamente da Proposição 2.3: o produto $\prod (1 + x_i y_j)$ é invariante quando trocamos x_i por y_j .

O teorema seguinte é conhecido como o *Teorema Fundamental das Funções Simétricas*.

Teorema 2.2. *Sejam $\lambda, \mu \in \text{Par}(n)$. Então, $M_{\lambda\mu} = 0$ a menos que $\mu \leq \lambda'$, enquanto que $M_{\lambda\lambda'} = 1$ e o conjunto $\{e_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma base para Λ^n (donde $\{e_\lambda : \lambda \in \text{Par}\}$ é uma base para Λ).*

Demonstração: Suponhamos que $M_{\lambda\mu} \neq 0$, então pela Proposição 2.2, existe uma $(0, 1)$ -matriz $A = (a_{ij})$ com $r(A) = \lambda$ e $c(A) = \mu$. Seja $A' = (a'_{ij})$ a matriz tal que $r(A') = \lambda$ e com $a'_{ij} = 1$ apenas para $1 \leq j \leq \lambda_i$.

Um exemplo para ilustrar A' : se $\lambda = 211$ e $\mu = 22$, então uma possibilidade para A é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \text{ donde } A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Voltemos à demonstração. Para cada i , o número de entradas iguais a 1 nas primeiras i colunas de A' não é menor do que o número de

entradas iguais a 1 nas primeiras i colunas de A . Logo, pela definição de ordem de dominância da Seção 1.2, temos $c(A') \geq c(A) = \mu$. Mas $c(A') = \lambda'$, donde $\lambda' \geq \mu$ como queríamos.

Pela construção de A' , temos que as entradas que recebem 1 situam-se “a esquerda”, ou seja, em cada linha iniciam a partir da primeira coluna e a soma das entradas da linha i tem que ser λ_i . Decorre disso que há somente uma possibilidade para A' , donde $M_{\lambda\lambda'} = 1$.

Seja $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{p(n)}$ uma ordenação de $Par(n)$, compatível com a ordem de dominância. Então, a matriz $(M_{\lambda\mu})$ cujas linhas satisfazem a ordem $\lambda^1, \lambda^2, \dots$ e as colunas a ordem $\lambda^1, \lambda^2, \dots$, isto é, $(M_{\lambda\mu}) = (M_{\lambda^i(\lambda^j)})_{ij}$, é triangular superior com 1 em todas as entradas da diagonal principal.

Então, $(M_{\lambda\mu})$ é invertível e, portanto, $\{e_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma base para Λ^n , pois $\{m_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma base para Λ^n . ■

Notemos que este teorema nos auxilia na construção da tabela anterior com os coeficientes $M_{\lambda\mu}$, pois diminui a quantidade de contas.

Passamos agora a um outro conjunto de funções simétricas que, como veremos, resulta numa outra base para Λ . Iniciamos com uma definição.

2.3.3 Função Simétrica (Homogênea) Completa

Definição 2.6. *As funções simétricas homogêneas completas⁽³⁾ h_λ , $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in Par$, são definidas pelas fórmulas*

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ h_n &= \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}, n \geq 1 \\ h_\lambda &= h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots \end{aligned}$$

Exemplo 2.7. *Se $\lambda = (2, 1, 0, 0, \dots)$ então,*

$$h_{21} = h_2 h_1 = \sum_{i \leq j} x_i x_j \sum_k x_k = 3m_{111} + 2m_{21} + m_3.$$

³ou simplesmente, como preferem alguns autores, a exemplo da referência [6], funções simétricas completas.

Obersevemos que h_n é uma soma de monômios de mesmo grau n , daí o termo *homogêneo*. As funções simétricas h_λ são, em certo sentido, duais às funções simétricas elementares e_μ . Isso ficará evidente mais adiante. A seguir temos o análogo à Proposição 2.2 para h_λ .

Proposição 2.4. *Sejam $\lambda \vdash n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, $\alpha_i \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$, $\alpha_i \geq 0$, com $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = n$. Então, o coeficiente $N_{\lambda\alpha}$ de x^α em h_λ , ou seja, $h_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} N_{\lambda\mu} m_\mu$, é igual ao número de $(\mathbb{N} \cup \{0\})$ -matrizes (matrizes cujas entradas são números inteiros não-negativos) $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ que satisfazem $r(A) = \lambda$ e $c(A) = \alpha$.*

Demonstração: Um termo x^α de $h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots$ é obtido escolhendo um monômio $x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \dots$ de cada h_{λ_i} tal que $\prod_i (x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \dots) = x^\alpha$.

Um exemplo para ilustrar: $n = 3$, $\lambda = (21)$ e $\alpha = (12)$; neste caso, $x^\alpha = x_1 x_2^2$ e há duas possibilidades de escolha, lembrando que $h_{21} = h_2 h_1$: (a) $x_1 x_2$ em h_2 e x_2 em h_1 ou (b) x_2^2 em h_2 e x_1 em h_1 . Logo, $N_{(21)(12)} = 2$. Voltemos à demonstração.

Isso é o mesmo que escolher $A = (a_{ij})$ como uma $(\mathbb{N} \cup \{0\})$ -matriz satisfazendo $r(A) = \lambda$ e $c(A) = \alpha$, analogamente à demonstração da Proposição 2.2. ■

Exemplo 2.8. *Um exemplo para clarificar o último parágrafo da demonstração acima: $n = 3$, $\lambda = (21)$ e $\alpha = (12)$; aqui as possibilidades para A são $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donde $N_{(21)(12)} = 2$.*

Assim como $M_{\lambda\mu}$, $N_{\lambda\mu}$ tem uma interpretação combinatória. Suponhamos que temos n bolas no total, sendo λ_i destas marcadas com i . Também dispomos de caixas numeradas $1, 2, 3, \dots$. Então, $N_{\lambda\mu}$ é o número de possibilidades de se colocar as bolas nas caixas de modo que a caixa i tenha exatamente μ_i bolas.⁽⁴⁾

No exemplo acima, $n = 3$, $\lambda = (21)$ e $\alpha = (12)$, temos duas caixas e três bolas (duas com número 2 e uma com número 1). Temos duas possibilidades de configuração: (a) uma bola 2 na caixa 1 e, na caixa

⁴Notemos que na interpretação combinatória de $M_{\lambda\mu}$ não permitíamos repetições de bolas com mesmo número numa caixa, restrição esta ausente na interpretação de $N_{\lambda\mu}$.

2, uma bola 1 e uma bola 2; (b) uma bola 1 na caixa 1 e duas bolas 2 na caixa 2.

| | |
|-------------|--|
| h_1 | $= m_1$ |
| h_{11} | $= 2m_{11} + m_2$ |
| h_2 | $= m_{11} + m_2$ |
| h_{111} | $= 6m_{111} + 3m_{21} + m_3$ |
| h_{21} | $= 3m_{111} + 2m_{21} + m_3$ |
| h_3 | $= m_{111} + m_{21} + m_3$ |
| h_{1111} | $= 24m_{1111} + 12m_{211} + 6m_{22} + 4m_{31} + m_4$ |
| h_{211} | $= 12m_{1111} + 7m_{211} + 4m_{22} + 3m_{31} + m_4$ |
| h_{22} | $= 6m_{1111} + 4m_{211} + 3m_{22} + 2m_{31} + m_4$ |
| h_{31} | $= 4m_{1111} + 3m_{211} + 2m_{22} + 2m_{31} + m_4$ |
| h_4 | $= m_{1111} + m_{211} + m_{22} + m_{31} + m_4$ |
| h_{11111} | $= 120m_{11111} + 60m_{2111} + 30m_{221} + 20m_{311} + 10m_{32} + 5m_{41} + m_5$ |
| h_{2111} | $= 60m_{11111} + 33m_{2111} + 18m_{221} + 13m_{311} + 7m_{32} + 4m_{41} + m_5$ |
| h_{221} | $= 30m_{11111} + 18m_{2111} + 11m_{221} + 8m_{311} + 5m_{32} + 3m_{41} + m_5$ |
| h_{311} | $= 20m_{11111} + 13m_{2111} + 8m_{221} + 7m_{311} + 4m_{32} + 3m_{41} + m_5$ |
| h_{32} | $= 10m_{11111} + 7m_{2111} + 5m_{221} + 4m_{311} + 3m_{32} + 2m_{41} + m_5$ |
| h_{41} | $= 5m_{11111} + 4m_{2111} + 3m_{221} + 3m_{311} + 2m_{32} + 2m_{41} + m_5$ |
| h_5 | $= m_{11111} + m_{2111} + m_{221} + m_{311} + m_{32} + m_{41} + m_5$ |

Tabela 2.2: Alguns coeficientes $N_{\lambda\mu}$

Na demonstração do Teorema 2.2 afirmamos que $\{e_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma base de Λ^n partindo do fato de que a matriz $(M_{\lambda\mu})$ é triangular superior com 1 nas entradas da diagonal principal e, portanto, invertível. O conjunto $\{h_\lambda : \lambda \in n\}$ é uma base de Λ^n , como veremos, mas o fato de ser a matriz $(N_{\lambda\mu})$ ⁽⁵⁾ invertível não é uma propriedade de fácil verificação. No entanto, a independência linear de $\{h_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma consequência imediata do próximo teorema.

Antes de enunciar o teorema seguinte, é importante observar o que segue. Como $\Lambda = \mathbb{Q}[e_1, e_2, \dots]$, analogamente aos operadores lineares da álgebra linear, um endomorfismo $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$ é unicamente determinado pelos seus valores $f(e_n), n \geq 1$ e, inversamente, qualquer escolha de $f(e_n) \in \Lambda, n \geq 1$, determina um endomorfismo. Definimos o endomorfismo $\omega : \Lambda \rightarrow \Lambda$ por $\omega(e_n) = h_n, n \geq 1$. É claro que $\omega(e_\lambda) = h_\lambda$, pois todo homomorfismo preserva a multiplicação.⁽⁶⁾

⁵essa matriz é construída da mesma forma que $(M_{\lambda\mu})$.

⁶Poderíamos ter neste parágrafo trabalhado diretamente com operadores lineares sobre o espaço vetorial Λ , consideram-se, no entanto, endomorfismos porque, em geral, ao invés de escolher o anel \mathbb{Q} , escolhe-se um anel qualquer R comutativo, com unidade que não necessariamente é corpo e, nesse caso, teríamos o R -módulo Λ . O leitor não familiarizado com estes conceitos pode pensar em $\omega : \Lambda \rightarrow \Lambda$ como um operador linear.

Teorema 2.3. *O endomorfismo ω é uma involução, isto é, $\omega^2 = id$ (o endomorfismo identidade), ou, equivalentemente, $\omega(h_n) = e_n$ (donde $\omega(h_\lambda) = e_\lambda, \forall \lambda \vdash n$).*

Demonstração: Consideremos as séries de potências $H(t) = \sum_{n \geq 0} h_n t^n$

e $E(t) = \sum_{n \geq 0} e_n t^n$. Desenvolvendo o produto $\prod_{n \geq 1} (1 + x_n t)$ obtemos

$E(t) = \sum_{n \geq 0} e_n t^n = \prod_{n \geq 1} (1 + x_n t)$ e, como $(1 - x_n t)^{-1} = \sum_{i \geq 0} x_n^i t^i$, então

$\prod_{n \geq 1} (1 - x_n t)^{-1} = \sum_{n \geq 0} h_n t^n = H(t)$.

Daí, $H(t)E(-t) = 1$. Igualando os coeficientes de t^n nesta igualdade obtemos $0 = \sum_{i=0}^n (-1)^i e_i h_{n-i} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} h_i e_{n-i} =$

$(-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^i h_i e_{n-i}, \forall n \geq 1$. Inversamente, se $\sum_{i=0}^n (-1)^i u_i h_{n-i} = 0, \forall n \geq 1$, para certos $u_i \in \Lambda$, com $u_0 = 1$, então $u_i = e_i$, pois

$0 = \sum_{i=0}^n (-1)^i (u_i - e_i) h_{n-i}$. Agora, aplicando ω à igualdade $0 =$

$\sum_{i=0}^n (-1)^i e_i h_{n-i} = (-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^i h_i e_{n-i}$ obtemos $0 = \sum_{i=0}^n (-1)^i h_i \omega(h_{n-i})$

$= (-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^i \omega(h_i) h_{n-i}$ e, portanto, $\omega(h_i) = e_i$. ■

O fato de $\{h_\lambda : \lambda \vdash n\}$ ser uma base de Λ^n é consequência do teorema a seguir.

Corolário 2.2. *O conjunto $\{h_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma base para Λ^n (daí $\{h_\lambda : \lambda \in Par\}$ é uma base para Λ). Equivalentemente, h_1, h_2, \dots são linearmente independentes e geram Λ como \mathbb{Q} -álgebra, isto é, $\Lambda = \mathbb{Q}[h_1, h_2, \dots]$.*

Demonstração: O Teorema 2.3 mostrou que o endomorfismo $\omega : \Lambda \rightarrow \Lambda$ definido por $\omega(e_n) = h_n$ e, portanto, $\omega(e_\lambda) = h_\lambda$, é invertível, pois

$\omega^{-1} = \omega$. Logo, é um automorfismo de Λ e, como $\{e_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma base de Λ^n , segue que $\{h_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é, também, uma base para Λ^n . ■

Corolário 2.3. *Seja $N_{\lambda\mu}$ como definido na Proposição 2.4. Então, $N_{\mu\lambda} = N_{\lambda\mu}$, ou seja, a matriz de mudança da base $\{m_\lambda : \lambda \vdash n\}$ para $\{h_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é simétrica.*

Demonstração: A demonstração é análoga àquela do Corolário 2.1. ■

Antes de partir para o estudo de um outro conjunto de funções simétricas, apresentamos um resultado que será útil mais adiante e cuja demonstração também omitimos por ser análoga àquela da Proposição 2.3.

Proposição 2.5. *Valem as igualdades:*

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda, \mu} N_{\lambda\mu} m_\lambda(x) m_\mu(y) = \sum_{\lambda} m_\lambda(x) h_\lambda(y), \quad \lambda, \mu \in Par.$$

2.3.4 Função Simétrica Soma de Potências

Definição 2.7. *As funções simétricas soma de potências são definidas por:*

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 \\ p_n &= \sum_i x_i^n, \quad n \geq 1 \\ p_\lambda &= p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in Par. \end{aligned}$$

Exemplo 2.9. *Se $\lambda = (2, 1, 0, 0, \dots)$ então $p_{21} = p_2 p_1 = \sum_i x_i^2 \sum_j x_j$.*

Proposição 2.6. *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$, onde $l = l(\lambda)$, e $p_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} R_{\lambda\mu} m_\mu$. Sejam $\mu \vdash n$ e $k = l(\mu)$. Então, $R_{\lambda\mu}$ é igual ao número de partições ordenadas $\pi = (B_1, \dots, B_k)$ do conjunto $[l] = \{1, 2, \dots, l\}$ tais que $\mu_j = \sum_{i \in B_j} \lambda_i$, $1 \leq j \leq k$.*

Demonstração: O coeficiente $R_{\lambda\mu}$ é o número de $x^\mu = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots$ em

$$p_\lambda = \left(\sum_i x_i^{\lambda_1} \right) \left(\sum_i x_i^{\lambda_2} \right) \cdots .$$

Para obter o monômio x^μ na expressão deste produto, escolhamos um termo $x_{i_j}^{\lambda_j}$ em cada fator $\sum_i x_i^{\lambda_j}$ tal que $\prod_j x_{i_j}^{\lambda_j} = x^\mu$. Seja $B_r = \{j : i_j = r\}$. Então, (B_1, \dots, B_k) é uma partição ordenada de $[l]$ que satisfaz $\mu_j = \sum_{i \in B_j} \lambda_i$. De fato, como $\prod_j x_{i_j}^{\lambda_j} = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots$, para obter $x_l^{\mu_l}$ tomamos os j tais que $i_j = l$ e $\mu_l = \sum_j \lambda_j$. Além disso, $B_m \cap B_n = \emptyset$ se $m \neq n$, pois se tivéssemos $j \in B_m \cap B_n$, então $i_j = m = n$, contradição.

Portanto, B_1, \dots, B_k é uma partição ordenada de $[l]$ e, inversamente, qualquer tal partição nos dá um termo de x^μ . ■

O corolário a seguir, análogo ao Teorema 2.2, mostra que $\{p_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma base para Λ^n .

Corolário 2.4. $R_{\lambda\mu} = 0$ a menos que $\lambda \leq \mu$, enquanto $R_{\lambda\lambda} = \prod_i m_i(\lambda)!$, onde $m_i(\lambda) = |\{j : \lambda_j = i\}|$ e $\lambda = (1^{m_1(\lambda)} 2^{m_2(\lambda)} \cdots)$. O conjunto $\{p_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma base para Λ^n (logo, $\{p_\lambda : \lambda \in \text{Par}\}$ é uma base para Λ). Equivalentemente, p_1, p_2, \dots são linearmente independentes e geram Λ como \mathbb{Q} -álgebra, isto é, $\Lambda = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$.

Demonstração: Se $R_{\lambda\mu} \neq 0$, pela proposição anterior, existe partição ordenada $\pi = (B_1, \dots, B_k)$ do conjunto $[l] = [l(\lambda)]$ que satisfaz $\mu_j = \sum_{i \in B_j} \lambda_i$, $1 \leq j \leq k$. Dado $1 \leq r \leq l$, sejam B_{i_1}, \dots, B_{i_s} blocos distintos de π contendo ao menos um dos números $1, 2, \dots, r$ cada. De $\mu_j = \sum_{i \in B_j} \lambda_i$, $1 \leq j \leq k$, temos $\mu_{i_1} + \cdots + \mu_{i_s} \geq \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$. Mas $\mu_1 + \cdots + \mu_r \geq \mu_{i_1} + \cdots + \mu_{i_s}$, pois $r \geq s$ e $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots$, donde $\mu \geq \lambda$, como queríamos.

Se $\lambda = \mu$, cada bloco B_i contém um único elemento $\{j\}$, ou simplesmente, j . Então, $B_1, \dots, B_{m_1(\lambda)}$ pode ser qualquer ordenação de $1, \dots, m_1(\lambda)$. Logo, $B_{m_1(\lambda)+1}, \dots, B_{m_1(\lambda)+m_2(\lambda)}$ pode ser qualquer ordenação de $m_1(\lambda) + 1, \dots, m_1(\lambda) + m_2(\lambda)$ e assim por diante. Isso nos dá um total de $R_{\lambda\lambda} = m_1(\lambda)! m_2(\lambda)! \cdots$ possibilidades para π .

O fato de $\{p_\lambda : \lambda \vdash n\}$ ser uma base para Λ^n ($\Lambda = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$) segue pelas mesmas razões da demonstração do Teorema 2.2. ■

Vamos investigar o efeito de aplicar a involução $\omega : \Lambda \rightarrow \Lambda$ em p_λ . Para tanto, uma abordagem por meio de função geradora é apresentada.

Para uma partição $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots) \vdash n$, definimos

$$z_\lambda = 1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2! \dots$$

Exemplo 2.10. $z_{442111} = 1^3 3! 2^1 1! 4^2 2! = 384$.

Se $w \in S_n$, seu *tipo cíclico* é a partição $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots) \vdash n$ tal que os comprimentos dos ciclos de w em sua decomposição em ciclos disjuntos são ρ_1, ρ_2, \dots . A seguir temos um lema que nos dá o número de permutações $\omega \in S_n$ do tipo $\rho = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots)$.

Lema 2.1. *O número de permutações $w \in S_n$ de tipo (c_1, \dots, c_n) é igual a*

$$\frac{n!}{1^{c_1} c_1! 2^{c_2} c_2! \dots n^{c_n} c_n!}.$$

Demonstração: Seja $\pi \in S_n$. Podemos obter a partir de π uma representação em ciclos disjuntos tal que os primeiros c_1 ciclos tenham comprimento 1, os c_2 ciclos seguintes tenham comprimento 2, e assim por diante, colocando, da esquerda para a direita, parênteses nas entradas de π de modo a obter c_i ciclos de comprimento i . Isso produz a decomposição em ciclos disjuntos de uma permutação π' de tipo (c_1, \dots, c_n) e define uma aplicação $\Phi : S_n \rightarrow S_n^c$, onde S_n^c é o conjunto de todas $\sigma \in S_n$ de tipo $c = (c_1, \dots, c_n)$. Dada $\sigma \in S_n^c$, existem $1^{c_1} c_1! 2^{c_2} c_2! \dots n^{c_n} c_n!$ possibilidades de escrever σ na notação de ciclos disjuntos tais que os comprimentos dos ciclos são não-decrescentes da esquerda para a direita. De fato, ordenamos os ciclos de comprimento i em $c_i!$ maneiras e escolhemos o primeiro elemento de cada um destes ciclos de i maneiras. Estas escolhas são todas independentes, o que estabelece nossa afirmação.

Logo, para cada $\sigma \in S_n^c$ temos $|\Phi^{-1}(\sigma)| = 1^{c_1} c_1! 2^{c_2} c_2! \dots n^{c_n} c_n!$ e,

como $|S_n| = n!$, o número de $\pi \in S_n$ do tipo (c_1, \dots, c_n) é igual a

$$\frac{n!}{1^{c_1}c_1!2^{c_2}c_2!\dots n^{c_n}c_n!}.$$

■

Pelo lema acima, se $\rho = (1^{m_1}2^{m_2} \dots)$, então

$$|\{w \in S_n : \rho(w) = \rho\}| = \frac{n!}{1^{m_1}m_1!2^{m_2}m_2!\dots} = \frac{n!}{z_\rho} = n!z_\rho^{-1}. \quad (2.3.1)$$

O conjunto $\{v \in S_n : \rho(v) = \rho\}$ é a classe de conjugação K_w que contém w de tipo cíclico ρ . Para qualquer grupo finito G , a ordem $|K_w|$ é igual a $[G : C(w)]$, o índice do centralizador $C(w)$ em G . Assim, temos estabelecido a proposição seguinte.

Proposição 2.7. *Seja $\lambda \vdash n$. Então z_λ é igual ao número de permutações $v \in S_n$ que comutam com um permutação w_λ de tipo cíclico λ .*

Para uma partição $\lambda = (1^{m_1}2^{m_2} \dots) \vdash n$, observemos o que segue. Se n é um inteiro ímpar, então λ tem uma quantidade ímpar de partes ímpares, donde $m_1 + m_3 + \dots$ é ímpar. Então:

(i) se $m_2 + m_4 + \dots$ for par, segue que $l(\lambda) = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$ é ímpar. Logo, $n - l(\lambda)$ é par.

(ii) se $m_2 + m_4 + \dots$ for ímpar, então $l(\lambda) = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$ é par, donde $n - l(\lambda)$ é ímpar.

Analogamente, se n é par, $m_1 + m_3 + \dots$ é par. Logo,

(iii) se $m_2 + m_4 + \dots$ for par, segue que $l(\lambda) = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$ é par e, então, $n - l(\lambda)$ é par.

(iv) se $m_2 + m_4 + \dots$ for ímpar, então $l(\lambda) = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$ é ímpar, donde $n - l(\lambda)$ é ímpar.

Logo, $(-1)^{m_2+m_4+\dots} = (-1)^{n-l(\lambda)}$. Definimos

$$\epsilon_\lambda = (-1)^{m_2+m_4+\dots} = (-1)^{n-l(\lambda)}.$$

Assim, para $w \in S_n$, $\epsilon_{\rho(w)}$ é $+1$ se w for uma permutação par, isto é, se w for o produto de um número par de transposições, e -1 caso

contrário. Então, a aplicação $\Psi : S_n \longrightarrow \{\pm 1\}$ tal que $\Psi(w) = \epsilon_{\rho(w)}$ é o homomorfismo “sinal”.

Feitas essas considerações, temos a proposição seguinte que expressa

$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}$ e $\prod_{i,j} (1 + x_i y_j)$ em função de $p_\lambda(x)$ e $p_\lambda(y)$.

Proposição 2.8. *Valem as igualdades*

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} p_n(x) p_n(y) \right) = \sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda}(x) p_{\lambda}(y). \quad (2.3.2)$$

$$\prod_{i,j} (1 + x_i y_j) = \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (-1)^{n-1} p_n(x) p_n(y) \right) = \sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} \epsilon_{\lambda} p_{\lambda}(x) p_{\lambda}(y). \quad (2.3.3)$$

Demonstração: Lembrando que a integração de $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ re-

sulta em $\log((1-x)^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$, segue que $\log \left(\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} \right) =$

$$\sum_{i,j} \log((1 - x_i y_j)^{-1}) = \sum_{i,j} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} x_i^n y_j^n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\sum_i x_i^n \right) \left(\sum_j y_j^n \right) =$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} p_n(x) p_n(y). \text{ Isso estabelece a primeira igualdade em (2.3.2). A}$$

segunda igualdade decorre dos resultados que constam na Seção 5.1 da referência [8].

A demonstração de (2.3.3) é análoga. ■

Agora é imediata a verificação do efeito de se aplicar ω em p_{λ} e é disso que trata a proposição seguinte.

Proposição 2.9. *Seja $\lambda \vdash n$. Então,*

$$\omega p_{\lambda} = \epsilon_{\lambda} p_{\lambda}.$$

Em outras palavras, p_{λ} é um autovetor de ω associado ao autovalor ϵ_{λ} .

Demonstração: Vamos olhar para ω agindo nas funções simétricas nas variáveis y_1, y_2, \dots , enquanto x_1, x_2, \dots serão consideradas escalares. Então

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda}(x) \omega p_{\lambda}(y) &= \omega \left(\sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda}(x) p_{\lambda}(y) \right) = \omega \left(\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} \right) \\ &=^a \sum m_{\nu}(x) \omega(h_{\nu}(y)) =^b \sum m_{\nu}(x) e_{\nu}(y) \\ &=^c \prod_{i,j}^{\nu} (1 + x_i y_j) =^d \sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} \epsilon_{\lambda} p_{\lambda}(x) p_{\lambda}(y), \end{aligned}$$

onde as igualdades decorrem de: (a) Proposição 2.5; (b) Teorema 2.3; (c) Proposição 2.3; (d) Proposição 2.8.

Como $\{p_{\lambda}(x) : \lambda \in Par\}$ é linearmente independente, os coeficientes de $p_{\lambda}(x)$ na primeira e na última somas são iguais, isto é, $\omega(p_{\lambda}(y)) = \epsilon_{\lambda} p_{\lambda}(y)$. ■

Notemos em particular que $\omega p_n = (-1)^{n-1} p_n$, ou $\omega p_n(x) = -p_n(-x)$. Além disso, restringindo ω ao espaço vetorial Λ^n cuja dimensão é $p(n)$, como $\{p_{\lambda} : \lambda \vdash n\}$ é um conjunto linearmente independente, pela proposição acima, o polinômio característico (normalizado para ser mônico) da transformação linear $\omega : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^n$ é dado por $(x-1)^{\alpha(n)}(x+1)^{\beta(n)}$, onde $\alpha(n)$ e $\beta(n)$ são, respectivamente, os números de partições de n em um número par e ímpar de partes pares.

Concluimos esta seção apresentando um resultado que expressa h_n e e_n em termos de p_{λ} .

Proposição 2.10. *Temos*

$$\begin{aligned} h_n &= \sum_{\lambda \vdash n} z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda} \\ e_n &= \sum_{\lambda \vdash n} \epsilon_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda}. \end{aligned}$$

Demonstração: Substituindo $y = (t, 0, 0, \dots)$ em

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda}(x) p_{\lambda}(y),$$

e observando que

$$\begin{aligned}
\sum_{r \geq 1} p_r t^{r-1} &= \sum_{i \geq 1} \sum_{r \geq 1} x_i^r t^{r-1} \\
&= \sum_{i \geq 1} \frac{x_i}{1 - x_i t} \\
&= \sum_{i \geq 1} \frac{d}{dt} \log \left(\frac{1}{1 - x_i t} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \log \left(\prod_{i \geq 1} (1 - x_i t)^{-1} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \log(H(t)) \\
&= H'(t)/H(t),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
H(t) &= \exp \left(\sum_{r \geq 1} p_r \frac{t^r}{r} \right) \\
&= \prod_{r \geq 1} \exp \left(p_r \frac{t^r}{r} \right) \\
&= \prod_{r \geq 1} \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(p_r t^r)^{m_r}}{r^{m_r} m_r!} \\
&= \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ n \geq 1}} z_\lambda^{-1} p_\lambda t^n,
\end{aligned}$$

segue que $\prod_i (1 - x_i t)^{-1} = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ n \geq 1}} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) t^n$, mas $\prod_i (1 - x_i t)^{-1} =$

$\sum_{k \geq 0} h_k t^k$, conforme demonstração do Teorema 2.3. Logo, $h_n = \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} p_\lambda$.

$$\begin{aligned}
&\text{Aplicando } \omega \text{ em } h_n, \text{ temos } e_n = \omega(h_n) = \omega \left(\sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} p_\lambda \right) \\
&= \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} \omega(p_\lambda) = \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} \epsilon_\lambda p_\lambda. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.3.5 Produto escalar e ortogonalidade

Nesta seção, introduzimos um produto escalar em Λ , ou seja, uma forma bilinear $\Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{Q}$, que denotamos \langle, \rangle . Lembremos que se $\{u_i\}$ e $\{v_j\}$ são bases de um espaço vetorial V , um produto escalar em V fica completamente determinado pelos valores $\langle u_i, v_j \rangle$. Dizemos que as bases $\{u_i\}$ e $\{v_j\}$ são duais (ou ortogonais) se $\langle u_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ (o delta de Kronecker).

Definimos um produto escalar em Λ exigindo que $\{m_\lambda\}$ e $\{h_\mu\}$ sejam bases duais, ou seja,

$$\langle m_\lambda, h_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}, \forall \lambda, \mu \in Par.$$

Essa escolha para a definição do produto escalar ficará clara ao longo desta seção nos resultados que apresentamos a seguir.

Proposição 2.11. *O produto escalar $\langle, \rangle : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{Q}$ é simétrico.*

Demonstração: Pela bilinearidade, é suficiente provar que $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ para bases $\{f\}$ e $\{g\}$ de Λ .

Tomemos $\{f\} = \{g\} = \{h_\lambda\}$, então $\langle h_\lambda, h_\mu \rangle = \left\langle \sum_v N_{\lambda v} m_v, h_\mu \right\rangle = N_{\lambda\mu} = N_{\mu\lambda} = \langle h_\mu, h_\lambda \rangle$. ■

O lema seguinte é uma ferramenta importante para a verificação de ortogonalidade em certas classes de funções simétricas.

Lema 2.2. *Sejam $\{u_\lambda\}$ e $\{v_\lambda\}$ bases de Λ tais que $u_\lambda, v_\lambda \in \Lambda^n, \forall \lambda \vdash n$. Então, $\{u_\lambda\}$ e $\{v_\lambda\}$ são bases duais se, e somente se,*

$$\sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(x) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}.$$

Demonstração: Sejam $m_\lambda = \sum_\rho \zeta_{\lambda\rho} u_\rho$ e $h_\mu = \sum_v \eta_{\mu v} v_v$. Então, $\delta_{\lambda\mu} =$

$$\langle m_\lambda, h_\mu \rangle = \sum_{\rho,v} \zeta_{\lambda\rho} \eta_{\mu v} \langle u_\rho, v_v \rangle.$$

Para cada $n \geq 0$ fixo, pensamos em $\zeta = (\zeta_{\lambda\rho})$ e $\eta = (\eta_{\mu\nu})$ como matrizes indexadas por $Par(n)$ e seja A a matriz dada por $A_{\rho\nu} = \langle u_\rho, v_\nu \rangle$. Então, a igualdade anterior resulta em $I = \zeta A \eta^t$. Logo,

$$\begin{aligned} \{u_\lambda\} \text{ e } \{v_\lambda\} \text{ são bases duais} &\iff A = I \\ &\iff I = \zeta \eta^t \\ &\iff I = \zeta^t \eta \\ &\iff \delta_{\rho\nu} = \sum_\lambda \zeta_{\lambda\rho} \eta_{\lambda\nu}. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.5, temos

$$\begin{aligned} \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} &= \sum_\lambda m_\lambda(x) h_\lambda(y) = \\ \sum_\lambda \left(\sum_\rho \zeta_{\lambda\rho} u_\rho(x) \right) \left(\sum_\nu \eta_{\lambda\nu} v_\nu(y) \right) &= \sum_{\rho,\nu} \left(\sum_\lambda \zeta_{\lambda\rho} \eta_{\lambda\nu} \right) u_\rho(x) v_\nu(y). \end{aligned}$$

Se $\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y)$, então $\sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y) = \sum_{\rho,\nu} \left(\sum_\lambda \zeta_{\lambda\rho} \eta_{\lambda\nu} \right) u_\rho(x) v_\nu(y)$, donde $\delta_{\rho\nu} = \sum_\lambda \zeta_{\lambda\rho} \eta_{\lambda\nu}$ e, então, $\{u_\lambda\}$ e $\{v_\lambda\}$ são bases duais de Λ .

Se $\{u_\lambda\}$ e $\{v_\lambda\}$ são bases duais, então $\delta_{\rho\nu} = \sum_\lambda \zeta_{\lambda\rho} \eta_{\lambda\nu}$. Logo,

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\rho,\nu} \left(\sum_\lambda \zeta_{\lambda\rho} \eta_{\lambda\nu} \right) u_\rho(x) v_\nu(y) = \sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y). \quad \blacksquare$$

A proposição seguinte estabelece que $\{p_\lambda : \lambda \in Par\}$ é uma base ortogonal de Λ .

Proposição 2.12. *Temos $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda\mu}$ (e, portanto, $\{p_\lambda : \lambda \in Par\}$ é uma base ortogonal de Λ).*

Demonstração: Pelo lema anterior e pela Proposição 2.8, temos que

$\overline{\{p_\lambda\}}$ e $\left\{ \frac{p_\mu}{z_\mu} \right\}$ são bases duais de Λ . Logo, $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda\mu}$. \blacksquare

Notemos que $\langle p_\lambda, p_\lambda \rangle = z_\lambda \neq 1$. Logo, a base $\{p_\lambda\}$ não é ortonormal. A norma $\|p_\lambda\| = \sqrt{\langle p_\lambda, p_\lambda \rangle} = \sqrt{z_\lambda}$ não é, em geral, um número racional. Daí, $\left\{ \frac{p_\lambda}{\|p_\lambda\|} \right\}$ forma uma base ortonormal de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ (o espaço vetorial das funções simétricas sobre \mathbb{R}).

Na próxima seção veremos uma base de Λ que é ortonormal e, mais do que isso, cada elemento desta base expresso como combinação linear dos elementos de $\{m_\lambda : \lambda \in Par\}$ tem coeficientes inteiros.

Para finalizar esta seção, temos um corolário da última proposição e mais uma proposição.

Corolário 2.5. $\langle f, f \rangle \geq 0, \forall f \in \Lambda$ e $\langle f, f \rangle = 0$ se, e somente se, $f = 0$.

Demonstração: Escrevendo $f = \sum_{\lambda} c_{\lambda} p_{\lambda}$, então

$$\langle f, f \rangle = \sum_{\lambda} c_{\lambda}^2 z_{\lambda}.$$

Como $z_{\lambda} > 0$, o resultado segue. ■

Proposição 2.13. A involução $\omega : \Lambda \rightarrow \Lambda$ é uma isometria, isto é,

$$\langle \omega f, \omega g \rangle = \langle f, g \rangle, \forall f, g \in \Lambda.$$

Demonstração: Como o produto escalar é bilinear, basta considerar $f = p_{\lambda}$ e $g = p_{\lambda}$. Então, pela proposição anterior, $\langle p_{\lambda}, p_{\lambda} \rangle = z_{\lambda} \delta_{\lambda\lambda} = z_{\lambda}$ e, pela Proposição 2.9, $\langle \omega p_{\lambda}, \omega p_{\lambda} \rangle = \langle \epsilon_{\lambda} p_{\lambda}, \epsilon_{\lambda} p_{\lambda} \rangle = \epsilon_{\lambda} \epsilon_{\lambda} \langle p_{\lambda}, p_{\lambda} \rangle = \epsilon_{\lambda} \epsilon_{\lambda} z_{\lambda} \delta_{\lambda\lambda} = \epsilon_{\lambda}^2 z_{\lambda} = z_{\lambda}$, pois $\epsilon_{\lambda} = \pm 1$. ■

A seção seguinte define a função simétrica chamada *Função de Schur*. Faremos duas abordagens dessas funções: uma combinatória e outra clássica.

2.3.6 Função de Schur

A Função de Schur, denotada por s_λ , para uma partição λ , não tem uma definição tão simples quanto m_λ , e_λ , h_λ ou p_λ . Encontra-se s_λ definida de muitas maneiras (equivalentes). Primeiramente apresentamos s_λ em termos de m_λ (definição combinatória) e, depois, via sua definição clássica, isto é, aquela que envolve o quociente de determinantes. Mostramos também que esta última definição implica na primeira.

A seguir, apresentamos alguns fatos sobre *Tabela de Young Semi-Simples*, pois estes são os principais objetos combinatórios associados às funções de Schur e serão bastante utilizadas ao longo deste texto.

Definição 2.8. *Seja $\lambda \vdash n$. Uma Tabela de Young Semi-Simples (TYSS) de forma λ é uma matriz $T = (T_{ij})$ de inteiros positivos de forma λ , isto é, $1 \leq i \leq l(\lambda)$ e $1 \leq j \leq \lambda_i$, cujas entradas em cada linha são não-decrescentes e em cada coluna são estritamente crescentes. O comprimento de uma TYSS é seu número de entradas.*

Exemplo 2.11. *Uma TYSS de forma $(6, 5, 3, 3)$ é:*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 3 | 4 | 4 |
| 2 | 4 | 4 | 5 | 5 | |
| 5 | 5 | 7 | | | |
| 6 | 9 | 9 | | | |

Denotamos $sh(T) = \lambda$ para indicar que T é uma TYSS de forma λ . Logo, o comprimento de T é igual a $|sh(T)|$.

Podemos pensar numa TYSS de forma λ como sendo um diagrama de Young de λ no qual os quadrados são preenchidos com os inteiros positivos.

Exemplo 2.12. *A TYSS do exemplo acima resulta em*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 3 | 4 | 4 |
| 2 | 4 | 4 | 5 | 5 | |
| 5 | 5 | 7 | | | |
| 6 | 9 | 9 | | | |

Dizemos que T tem tipo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, denotando $\alpha = \text{tipo}(T)$, se T tem $\alpha_i = \alpha_i(T)$ entradas (ou partes) iguais a i . Para cada TYSS T de tipo α escrevemos $x^T = x_1^{\alpha_1(T)} x_2^{\alpha_2(T)} \dots$.

Exemplo 2.13. A nossa TYSS acima tem tipo $(3, 1, 1, 4, 4, 1, 1, 0, 2)$ e $x^T = x_1^3 x_2 x_3 x_4^4 x_5^4 x_6 x_7 x_9^2$.

Definição 2.9. Se λ e μ são partições tais que $\mu \subseteq \lambda$ (ou seja, $\mu_i \leq \lambda_i, \forall i$), definimos uma Tabela de Young Semi-Simples de forma diagonal λ/μ (ou simplesmente forma diagonal λ/μ) como um diagrama diagonal $T = (T_{ij})$ de inteiros positivos tais que $1 \leq i \leq l(\lambda)$ e $\mu_i < j \leq \lambda_i$, que é não-decrescente em cada linha e estritamente crescente em cada coluna.

Exemplo 2.14. Uma TYSS de forma $(6, 5, 3, 3)/(3, 1)$ é:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | 3 | 4 | 4 |
| | 1 | 4 | 7 | 7 | |
| 2 | 2 | 6 | | | |
| 3 | 8 | 8 | | | |

O peso de uma TYSS é a sequência $\pi = (\theta^1, \dots, \theta^r)$, onde $\theta^i = \lambda_i - \mu_i$.

Definimos um Diagrama de Young de forma $\lambda/\mu, \mu \subset \lambda$, retirando-se do diagrama de λ os quadrados referentes ao diagrama de μ . Então uma TYSS de forma λ/μ pode ser vista como um Diagrama de Young de forma λ/μ cujos quadrados são preenchidos com inteiros positivos de modo que cada linha seja não-decrescente e cada coluna seja crescente.

Exemplo 2.15. No exemplo anterior, a TYSS de forma $(6, 5, 3, 3)/(3, 1)$ pode ser representada por:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | 3 | 4 | 4 |
| | 1 | 4 | 7 | 7 | |
| 2 | 2 | 6 | | | |
| 3 | 8 | 8 | | | |

As definições de $tipo(T)$ e x^T são idênticas àquelas de uma TYSS dadas anteriormente. A seguir temos a definição de $s_{\lambda/\mu}$ e s_λ (Função de Schur).

Definição 2.10. *Sejam $\lambda, \mu \in Par$ tais que $\mu \subseteq \lambda$. A Função de Schur diagonal $s_{\lambda/\mu} = s_{\lambda/\mu}(x)$ de forma λ/μ nas variáveis $x = (x_1, x_2, \dots)$ é a série de potências*

$$s_{\lambda/\mu}(x) = \sum_T x^T$$

onde T percorre todos as TYSS de forma λ/μ . Se $\mu = \emptyset$, chamamos $s_\lambda(x)$ de Função de Schur de forma λ .

Exemplo 2.16. *As TYSS de forma $(2,1)$ com maior entrada no máximo 3 são:*

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & & 2 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 2 & \end{array}$$

Então, $s_{21}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + 2x_1x_2x_3 = m_{21}(x_1, x_2, x_3) + 2m_{111}(x_1, x_2, x_3)$. Logo, como o maior número de variáveis distintas que aparece em s_{21} é 3, temos $s_{21} = m_{21} + 2m_{111}$.

A partir da definição, não sabemos se, em geral, $s_{\lambda/\mu}$ é de fato uma função simétrica. É disto que se ocupa o teorema seguinte.

Teorema 2.4. *Sejam $\lambda, \mu \in Par$ tais que $\mu \subseteq \lambda$. Então, a Função de Schur diagonal $s_{\lambda/\mu}$ é simétrica.*

Demonstração: É suficiente mostrar que $s_{\lambda/\mu}$ é invariante sob a mudança de x_i por x_{i+1} . De fato, toda permutação w é o produto de transposições e usando a identidade $(ij) = (j, i+1)(i, i+1)(j, i+1)$ podemos escrever w como o produto de transposições do tipo $(k, k+1)$.

Sejam $|\lambda/\mu| = n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ uma composição de n , neste caso, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = n$. Seja $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \alpha_{i+2}, \dots)$. Se $\mathcal{I}_{\lambda/\mu, \alpha}$ é o conjunto de todas as TYSS de forma λ/μ e tipo α , então procuremos uma bijeção $\varphi : \mathcal{I}_{\lambda/\mu, \alpha} \rightarrow \mathcal{I}_{\lambda/\mu, \tilde{\alpha}}$.

Seja $T \in \mathcal{I}_{\lambda/\mu, \alpha}$. Consideremos as partes de T iguais a i ou $i + 1$. Estas partes podem não ocorrer em algumas colunas de T , enquanto outras colunas poderão conter ambas. Estas colunas vamos ignorar, pois a troca de i por $i + 1$ não altera a função neste caso. As demais partes iguais a i ou $i + 1$ ocorrem sozinhas em cada coluna e consistem de linhas com um certo número r de i 's seguido de s $i + 1$'s.

Por exemplo, em T pode aparecer:

$$\begin{array}{cccccccc} i & & i & & \underbrace{i & i}_{r=2} & \underbrace{i+1 & i+1 & i+1 & i+1}_{s=4} & & i \\ i+1 & & i+1 & & & & & & & & & i+1 \end{array}$$

Neste exemplo, $r = 2$ e $s = 4$. Em cada tal linha trocamos os r i 's e s $i + 1$'s por s i 's e r $i + 1$'s para obter:

$$\begin{array}{cccccccc} i & & i & & \underbrace{i & i & i & i}_{s=4} & \underbrace{i+1 & i+1}_{r=2} & & i \\ i+1 & & i+1 & & & & & & & & & i+1 \end{array}$$

Logo, o resultado desta troca, que denotamos $\varphi(T)$, está em $\mathcal{I}_{\lambda/\mu, \bar{\alpha}}$ e, portanto, φ estabelece a bijeção desejada. ■

Definição 2.11. Se $\lambda \vdash n$ e α é uma composição de n , então $K_{\lambda\alpha}$ denota o número de TYSS de forma λ e tipo α . $K_{\lambda\alpha}$ é chamado de Número de Kostka. Mais geralmente, definimos o Número de Kostka diagonal $K_{\lambda/v, \alpha}$ como o número de TYSS de forma diagonal λ/v e tipo α .

Exemplo 2.17. Temos $K_{21/1, (1,1)} = 2$, pois nos quadrados da primeira e segunda linhas podemos ter 1 ou 2 e $K_{21/1, (1,2)} = 0$ porque o diagrama de $21/1$ possui apenas 2 quadrados e, então, não comporta um 1 e dois 2.

O número $K_{\lambda\alpha}$ tem um papel importante na teoria das funções simétricas. C. Kostka foi quem primeiro considerou a expansão de s_λ em termos de m_μ e por isso $K_{\lambda\alpha}$ recebe seu nome. Pela Definição 2.10, temos

$$s_\lambda = \sum_{\alpha} K_{\lambda\alpha} x^\alpha,$$

soma feita sobre todas as composições α de n . Além disso, pela definição de m_μ , segue que:

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} K_{\lambda\mu} m_\mu \quad \text{e}$$

$$s_{\lambda/v} = \sum_{\mu \vdash n} K_{\lambda/v, \mu} m_\mu.$$

Não se conhece uma fórmula para $K_{\lambda/v, \mu}$ ou $K_{\lambda\mu}$ em geral. Para certos λ, v e μ , uma fórmula pode ser dada. No próximo capítulo, vamos dar uma fórmula para $K_{\lambda(1^n)}$. Agora, vamos considerar o significado combinatório do número $K_{\lambda(1^n)}$, também denotado por f^λ .

Por definição, f^λ é o número de maneiras de se inserir os inteiros $1, 2, \dots, n$ na TYSS de forma $\lambda \vdash n$, cada número aparecendo sozinho, tal que cada linha e coluna são crescentes. O diagrama assim obtido é chamada de *Tabela de Young Simples* (TYS).

Exemplo 2.18. As *TYS* de forma $(3, 2)$, para $n = 5$, são:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 5 & 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & & 3 & 5 & & 3 & 4 & & 2 & 5 & & 2 & 4 & \end{array}$$

então $f^{(3,2)} = 5$.

A proposição seguinte nos dá uma outra interpretação combinatória de f^λ .

Proposição 2.14. *Seja $\lambda \in \text{Par}$. Então, o número f^λ conta a quantidade de sequências $\emptyset = \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^n = \lambda$ de partições (identificadas com seus respectivos diagramas) tais que λ^i é obtida de λ^{i-1} pela adição de um quadrado no diagrama de λ^{i-1} .*

Demonstração: Inserimos i no quadrado adicionado ao diagrama de λ^{i-1} para obter λ^i e, assim, uma TYS de forma λ^i . ■

Para ilustrar esse resultado e sua demonstração, vejamos o caso $\lambda = (3, 2)$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \emptyset & \subset & 1 & \subset & 2 & \subset & 3 & \subset & 31 & \subset & 32 \\ \emptyset & \subset & 1 & \subset & 2 & \subset & 21 & \subset & 31 & \subset & 32 \\ \emptyset & \subset & 1 & \subset & 2 & \subset & 21 & \subset & 22 & \subset & 32 \\ \emptyset & \subset & 1 & \subset & 11 & \subset & 21 & \subset & 31 & \subset & 32 \\ \emptyset & \subset & 1 & \subset & 11 & \subset & 21 & \subset & 22 & \subset & 32 \end{array}$$

Em alguns casos, quando trabalhamos com Funções de Schur e números de Kostka $K_{\lambda\alpha}$, é conveniente utilizar uma *TYSS reversa de forma diagonal* λ/μ que é um diagrama de inteiros positivos de forma λ/μ que é não-crescente em cada linha e decrescente em cada coluna. O tipo de uma TYSS reversa é definido exatamente como aquele de uma TYSS regular.

Exemplo 2.19. *O diagrama abaixo é uma TYSS reversa de forma $(6, 5, 3, 3)/(3, 1)$ e tipo $(2, 2, 1, 0, 3, 2, 2, 1)$.*

$$\begin{array}{cccc} & & 6 & 5 & 5 \\ & & 8 & 5 & 2 & 2 \\ & 7 & 7 & 3 & & \\ 6 & 1 & 1 & & & \end{array}$$

Definimos $\widehat{K}_{\lambda/\mu, \alpha}$ como o número de TYSS reversas de forma λ/μ e tipo α . A proposição seguinte mostra que em alguns casos não há diferença em considerar TYSS ou TYSS reversa.

Proposição 2.15. *Sejam $\lambda, \mu \in Par, \mu \subseteq \lambda, |\lambda/\mu| = n$ e α uma composição de n . Então, $\widehat{K}_{\lambda/\mu, \alpha} = K_{\lambda/\mu, \alpha}$.*

Demonstração: Seja T uma TYSS reversa de forma λ/μ e tipo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$. Seja k a maior parte (entrada) de T . Consideremos a transformação $T_{ij} \xrightarrow{\sigma} k + 1 - T_{ij}$. Então $\widehat{K}_{\lambda/\mu, \alpha} = K_{\lambda/\mu, \bar{\alpha}}$, onde $\bar{\alpha} =$

$(\alpha_k, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_1, 0, \dots)$. De fato, como T tem tipo $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, 0, \dots)$, o inteiro j aparece α_j vezes em T , donde o número de vezes que j aparece em $\sigma(T)$ é igual ao número de vezes que $k+1-j$ aparece em T . Pela demonstração do Teorema 2.4, temos $K_{\lambda/\mu, \bar{\alpha}} = K_{\lambda/\mu, \alpha}$. ■

Vamos agora estabelecer, como consequência da proposição a seguir, que $\{s_\lambda : \lambda \in Par\}$ forma uma \mathbb{Q} -base para Λ .

Proposição 2.16. *Suponhamos $\lambda, \mu \in Par(n)$ tais que $K_{\lambda\mu} \neq 0$. Então $\mu \leq \lambda$ (ordem de dominância) e $K_{\lambda\lambda} = 1$.*

Demonstração: Como $K_{\lambda\mu} \neq 0$, existe alguma TYSS T de forma λ e tipo μ . Suponhamos que uma entrada $T_{ij} = k$ apareça abaixo da k -ésima linha (ou seja, $i > k$). Então, $1 \leq T_{1j} < T_{2j} < \dots < T_{ij} = k$ para $i > k$, o que é impossível porque $i = |\{T_{1j}, T_{2j}, \dots, T_{ij}\}| \leq k$, isto é, $i \leq k$, o que seria uma contradição. Logo, $1, 2, \dots, k$ aparecem nas primeiras k linhas, donde $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$, como queríamos. Além disso, se $\mu = \lambda$, então $T_{ij} = i, \forall (i, j)$. Logo, $K_{\lambda\lambda} = 1$. ■

| | |
|-------------|--|
| s_1 | $= m_1$ |
| s_{11} | $= m_{11}$ |
| s_2 | $= m_{11} + m_2$ |
| s_{111} | $= m_{111}$ |
| s_{21} | $= 2m_{111} + m_{21}$ |
| s_3 | $= m_{111} + m_{21} + m_3$ |
| s_{1111} | $= m_{1111}$ |
| s_{211} | $= 3m_{1111} + m_{211}$ |
| s_{22} | $= 2m_{1111} + m_{211} + m_{22}$ |
| s_{31} | $= 3m_{1111} + 2m_{211} + m_{22} + m_{31}$ |
| s_4 | $= m_{1111} + m_{211} + m_{22} + m_{31} + m_4$ |
| s_{11111} | $= m_{11111}$ |
| s_{2111} | $= 4m_{11111} + m_{2111}$ |
| s_{221} | $= 5m_{11111} + 2m_{2111} + m_{221}$ |
| s_{311} | $= 6m_{11111} + 3m_{2111} + m_{221} + m_{311}$ |
| s_{32} | $= 5m_{11111} + 3m_{2111} + 2m_{221} + m_{311} + m_{32}$ |
| s_{41} | $= 4m_{11111} + 3m_{2111} + 2m_{221} + 2m_{311} + m_{32} + m_{41}$ |
| s_5 | $= m_{11111} + m_{2111} + m_{221} + m_{311} + m_{32} + m_{41} + m_5$ |

Tabela 2.3: Alguns números de Kostka $K_{\lambda\mu}$

Corolário 2.6. $\{s_\lambda : \lambda \in Par(n)\}$ é uma base para Λ^n (consequentemente $\{s_\lambda : \lambda \in Par\}$ é uma base para Λ).

Demonstração: Pela proposição anterior, $(K_{\lambda\mu})$ (que é a matriz que expressa s_λ 's em termos de m_μ 's) é uma matriz triangular inferior cujas entradas na diagonal principal são todas iguais a 1. Logo, $(K_{\lambda\mu})$ é invertível. Portanto, $\{s_\lambda : \lambda \in Par(n)\}$ é uma base para Λ^n , pois $\{m_\lambda : \lambda \in Par(n)\}$ é uma base para Λ^n . ■

A seguir, apresentamos a definição clássica da Função de Schur s_λ e algumas consequências. Veremos, por exemplo, que a partir dessa definição pode-se obter a definição combinatória de $s_{\lambda/\mu}$ já mencionada.

Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ um conjunto finito de variáveis e $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ um monômio e consideremos o polinômio a_α dado por:

$$a_\alpha = a_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \sum_{w \in S_n} \epsilon(w) w(x^\alpha), \text{ onde } w(x^\alpha) = x_1^{\alpha_{w(1)}} \dots x_n^{\alpha_{w(n)}}$$

e $\epsilon(w) = \pm 1$, dependendo do sinal da permutação w (é 1 se w for uma permutação par e -1 se for ímpar). Este polinômio satisfaz $w(a_\alpha) = \epsilon(w)a_\alpha, \forall w \in S_n$. Além disso, $a_\alpha = 0$ se $\alpha_i = \alpha_j$ para algum $i \neq j$. Logo, vamos assumir que $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n \geq 0$ e vamos escrever $\alpha = \lambda + \delta$, sendo $\lambda \in Par$ tal que $l(\lambda) \leq n$ e $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$. Então:

$$a_\alpha = a_{\lambda+\delta} = \sum_{w \in S_n} \epsilon(w) w(x^{\lambda+\delta}),$$

que podemos escrever como

$$a_{\lambda+\delta} = \det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_1^{\lambda_2+n-2} & \dots & x_1^{\lambda_n} \\ x_2^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_2+n-2} & \dots & x_2^{\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_n^{\lambda_1+n-1} & x_n^{\lambda_2+n-2} & \dots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix}.$$

Podemos mostrar por indução, ou cálculo, que $x_i - x_j, 1 \leq i < j \leq n$, divide $a_{\lambda+\delta}$ em $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ e, portanto, $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) = \det(x_i^{n-j})_{1 \leq i, j \leq n} = a_\delta$ também divide $a_{\lambda+\delta}$. Além disso, $a_{\lambda+\delta}/a_\delta$ é

simétrico. De fato, seja $w \in S_n$, então $w = w_1 \cdots w_k$, onde w_i são transposições e quando aplicamos w_i no determinante $a_{\lambda+\delta}$, trocamos duas linhas e ganhamos um sinal negativo, mas $w_i(a_\delta) = -a_\delta$, donde $w(a_{\lambda+\delta}/a_\delta) = a_{\lambda+\delta}/a_\delta \in \Lambda_n$.

Definição 2.12. A Função de Schur s_λ nas variáveis x_1, \dots, x_n correspondente à partição λ , $l(\lambda) \leq n$, é dada por

$$s_\lambda = a_{\lambda+\delta}/a_\delta.$$

Os polinômios $a_{\lambda+\delta}$ tais que $\lambda \in Par$ e $l(\lambda) \leq n$, formam uma base do espaço vetorial \mathcal{A}_n dos polinômios anti-simétricos nas variáveis x_1, \dots, x_n sobre \mathbb{Q} . A multiplicação por a_δ é um isomorfismo de Λ_n para \mathcal{A}_n . Segue que $\{s_\lambda : l(\lambda) \leq n\}$ forma uma \mathbb{Q} -base para Λ_n .

Verifiquemos o efeito de aumentar o número de variáveis. Se $m \geq n$, então $a_\alpha(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = a_\alpha(x_1, \dots, x_n)$.⁽⁷⁾ Logo, $\rho_{m,n}(s_\lambda(x_1, \dots, x_m)) = s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$.⁽⁸⁾ Logo, para cada partição λ , os polinômios $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ com $n \rightarrow \infty$, definem um único elemento $s_\lambda \in \Lambda^{|\lambda|}$. Daí, $\{s_\lambda : \lambda \in Par\}$ forma uma base para Λ .

O corolário da proposição a seguir expressa s_λ como polinômio em e_r e h_r . Para $1 \leq k \leq n$, seja $e_n^{(k)}$ a função simétrica elementar nas variáveis

$x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ e M a matriz $n \times n$ dada por

$$M = \left((-1)^{n-i} e_{n-i}^{(k)} \right)_{1 \leq i, k \leq n}.$$

Proposição 2.17. Sejam $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $A_\alpha = (x_j^{\alpha_i})$ e $H_\alpha = (h_{\alpha_i - n + j})$ $n \times n$ matrizes. Então, $A_\alpha = H_\alpha M$.

Demonstração: Seja $E^{(k)}(t) = \sum_{r=0}^{n-1} e_r^{(k)} t^r = \prod_{i \neq k} (1 + x_i t)$. Logo,

$$H(t)E^{(k)}(-t) = (1 - x_k t)^{-1}.$$

Extraindo o coeficiente de t^{α_i} obtemos $\sum_{j=1}^n h_{\alpha_i - n + j} (-1)^{n-j} e_{n-j}^{(k)} =$

⁷identificamos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, \dots, 0)$

⁸ $\rho_{m,n}$ foi definido em 2.2

$x_k^{\alpha_i}$. Portanto, $H_\alpha M = A_\alpha$. ■

Corolário 2.7. *Valem as igualdades*

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i-i+j})_{1 \leq i, j \leq n}, n \geq l(\lambda) \text{ e}$$

$$s_\lambda = \det(e_{\lambda'_i-i+j})_{1 \leq i, j \leq m}, m \geq l(\lambda').$$

Demonstração: Pela proposição anterior segue que $a_\alpha = \det(A_\alpha) = \det(H_\alpha)\det(M)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$. Em particular, $\det(M) = a_\delta$, pois $\det(H_\delta) = 1$. Logo, $a_\alpha = a_\delta \det(H_\alpha)$ ou, de maneira equivalente, $a_\alpha = a_\delta \sum_{w \in S_n} \epsilon(w) h_{\alpha-w(\delta)}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$. Tomando $\alpha = \lambda + \delta$ obtemos $a_\alpha/a_\delta =$

$$a_{\lambda+\delta}/a_\delta = s_\lambda = \det(H_\alpha) = \det(h_{\lambda_i-i+j})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Por um resultado devido a Aitken [1], temos $\det(h_{\lambda_i-\mu_i-i+j})_{1 \leq i, j \leq n} = \det(e_{\lambda'_i-\mu'_i-i+j})_{1 \leq i, j \leq m}$, onde $l(\lambda), l(\mu) \leq n$ e $l(\lambda'), l(\mu') \leq m$. Então, tomando $\mu = \emptyset$, $\det(e_{\lambda'_i-i+j})_{1 \leq i, j \leq m} = \det(h_{\lambda_i-i+j})_{1 \leq i, j \leq n} = s_\lambda$. ■

Como consequência deste corolário, obtemos $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}, \forall \lambda \in Par$ e $s_{(n)} = h_n$, donde $s_{(1^n)} = \omega(s_{(n)}) = \omega(h_n) = e_n$.

Já temos duas expansões do produto $\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}$, a saber:

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y) \text{ e}$$

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} h_\lambda(x) m_\lambda(y) = \sum_{\lambda} h_\lambda(y) m_\lambda(x).$$

A seguir temos uma terceira expansão, desta vez em termos de s_λ .

Proposição 2.18. *Temos*

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda \in Par} s_\lambda(x) s_\lambda(y).$$

Demonstração: Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$. Como $\prod_{i,j}^n (1-x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} h_{\lambda}(x) m_{\lambda}(y) = \sum_{\alpha} h_{\alpha}(x) y^{\alpha}$ (admitindo $h_r = 0$ se $r < 0$), onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ com α_i inteiro positivo e $\sum \alpha_i < \infty$, então, multiplicando por $a_{\delta}(y) = \sum_{w \in S_n} \epsilon(w) w(y^{\delta})$, temos

$$a_{\delta}(y) \prod_{i,j}^n (1-x_i y_j)^{-1} = \sum_{w, \alpha} \epsilon(w) h_{\alpha}(x) y^{\alpha+w(\delta)}.$$

Agora, multiplicando por $a_{\delta}(x)$ e usando o fato $a_{\delta}(x) \sum_{w \in S_n} \epsilon(w) h_{\beta-w(\delta)}(x) = a_{\beta}(x)$ (demonstração do corolário anterior), obtemos

$$\begin{aligned} a_{\delta}(x) a_{\delta}(y) \prod_{i,j}^n (1-x_i y_j)^{-1} &= a_{\delta}(x) \sum_{w, \alpha} \epsilon(w) h_{\alpha}(x) y^{\alpha+w(\delta)} \\ &= a_{\delta}(x) \sum_{w, \beta} \epsilon(w) h_{\beta-w(\delta)}(x) y^{\beta} = \sum_{\beta} a_{\beta}(x) y^{\beta}, \end{aligned}$$

onde β percorre todas as n -uplas de inteiros positivos.

Como $a_{w(\beta)} = \epsilon(w) a_{\beta}$, podemos reescrever esta última soma como $\sum_{\beta} a_{\beta}(x) y^{\beta} = \sum_{\gamma} \sum_w a_{\gamma}(x) \epsilon(w) w(y^{\gamma}) = \sum_{\gamma} a_{\gamma}(x) \sum_{w \in S_n} \epsilon(w) w(y^{\gamma}) = \sum_{\gamma} a_{\gamma}(x) a_{\gamma}(y)$, onde $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_n \geq 0$.

$$\text{Logo, } a_{\delta}(x) a_{\delta}(y) \prod_{i,j}^n (1-x_i y_j)^{-1} = \sum_{\gamma} a_{\gamma}(x) a_{\gamma}(y) = \sum_{\lambda} a_{\lambda+\delta}(x) a_{\lambda+\delta}(y).$$

Agora, como $a_{\delta} \neq 0$ e $a_{\delta}(y) \neq 0$, segue que

$$\prod_{i,j}^n (1-x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y).$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ temos o resultado:

$$\prod_{i,j} (1-x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y).$$



Observações:

1. Na seção anterior, estabelecemos que duas bases $\{u_\lambda\}$ e $\{v_\lambda\}$ de Λ são duais (ortonormais) se $\sum_\lambda u_\lambda(x)v_\lambda(x) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}$. Então,

pela proposição que acabamos de demonstrar, $\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$, ou seja, $\{s_\lambda : \lambda \in Par\}$ é uma base ortonormal para Λ .

2. Da demonstração da Proposição 2.9, sabemos que

$$\omega \left(\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} \right) = \prod_{i,j} (1 + x_i y_j). \quad \text{Então, } \prod_{i,j} (1 + x_i y_j) =$$

$$\omega \left(\sum_\lambda s_\lambda(x) s_\lambda(y) \right) = \sum_\lambda s_\lambda(x) s_{\lambda'}(y), \text{ onde } \omega \text{ age apenas sobre } y = (y_1, y_2, \dots).$$

O resultado a seguir é obtido tomando-se o coeficiente de $x^\mu y^v$ em ambos os lados de $\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda \in Par} s_\lambda(x) s_\lambda(y)$.

Corolário 2.8. *Sejam $\mu, v \vdash n$. Então,*

$$\sum_{\lambda \vdash n} K_{\lambda\mu} K_{\lambda v} = N_{\mu v} = \langle h_\mu, h_v \rangle,$$

onde $K_{\lambda\mu}$ e $K_{\lambda v}$ denotam Números de Kotska e $N_{\mu v}$ é o número de \mathbb{N} -matrizes A tais que $r(A) = \mu$ e $c(A) = v$.

A seguir apresentamos a definição clássica da Função de Schur diagonal $s_{\lambda/\mu}$. Essa definição é consequência natural de algo bem conhecido em álgebra linear: $f \in \Lambda$ é unicamente determinada pelo produto escalar com s_λ , ou seja,

$$f = \sum_\lambda \langle f, s_\lambda \rangle s_\lambda,$$

pois $\{s_\lambda : \lambda \in Par\}$ é uma base ortonormal de Λ .

Definição 2.13. *Sejam $\lambda, \mu \in Par$. Definimos a função simétrica $s_{\lambda/\mu}$ por*

$$\langle s_{\lambda/\mu}, s_\nu \rangle = \langle s_\lambda, s_\mu s_\nu \rangle, \forall \nu \in Par.$$

$s_{\lambda/\mu}$ é chamada de *Função de Schur Diagonal*.

Uma definição equivalente de $s_{\lambda/\mu}$ é a seguinte. Se $c_{\mu\nu}^\lambda$ são inteiros que satisfazem

$$s_\mu s_\nu = \sum_{\lambda} c_{\mu\nu}^\lambda s_\lambda,$$

então definimos

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu} c_{\mu\nu}^\lambda s_\nu.$$

Os inteiros $c_{\mu\nu}^\lambda$ são chamados *Coefficientes de Littlewood-Richardson*.⁽⁹⁾ A proposição a seguir generaliza o Corolário 2.7.

Proposição 2.19. *Valem as igualdades*

$$s_{\lambda/\mu} = \det(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j})_{1 \leq i, j \leq n}, n \geq l(\lambda),^{(10)}$$

$$s_{\lambda/\mu} = \det(e_{\lambda'_i - \mu'_j - i + j})_{1 \leq i, j \leq m}, m \geq l(\lambda').$$

Demonstração: Vamos mostrar a primeira igualdade, pois a segunda se obtém da primeira analogamente ao que fizemos na demonstração do Corolário 2.7.

Sejam $x = (x_1, x_2, \dots)$ e $y = (y_1, y_2, \dots)$. Logo, se $c_{\mu\nu}^\lambda = \langle s_\lambda, s_\mu s_\nu \rangle$, então $s_\mu s_\nu = \sum_{\lambda} c_{\mu\nu}^\lambda s_\lambda$, $s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu} c_{\mu\nu}^\lambda s_\nu$ e

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda/\mu}(x) s_\lambda(y) = \sum_{\lambda, \nu} c_{\mu\nu}^\lambda s_\nu(x) s_\lambda(y) = \sum_{\nu} s_\nu(x) s_\mu(y) s_\nu(y)$$

e, então,

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda/\mu}(x) s_\lambda(y) = s_\mu(y) \sum_{\nu} h_\nu(x) m_\nu(y),$$

pois $\sum_{\nu} h_\nu(x) m_\nu(y) = \prod_{i, j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\nu} s_\nu(x) s_\nu(y)$.

⁹A referência [12] em seu apêndice traz uma abordagem mais profunda de $c_{\mu\nu}^\lambda$ e da regra de Littlewood-Richardson para determiná-los.

¹⁰Esta igualdade é conhecida como a *Identidade de Jacobi-Trudi*

Suponhamos agora $y = (y_1, \dots, y_n)$. Então, restringimos as somas acima às partições λ e ν tais que $l(\lambda), l(\nu) \leq n$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} s_{\lambda/\mu}(x) a_{\lambda+\delta}(y) &= \sum_{\nu} h_{\nu}(x) m_{\nu}(y) a_{\mu+\delta}(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} h_{\alpha}(x) y^{\alpha} a_{\mu+\delta}(y) = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} h_{\alpha}(x) \sum_{w \in S_n} y^{\alpha+w(\mu+\delta)} \quad (\text{sendo } h_{\alpha}(x) = 0 \text{ se } \alpha \text{ possui algum } \alpha_i < 0). \end{aligned}$$

Extraindo o coeficiente de $y^{\lambda+\delta}$, nesta última soma obtemos:

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{w \in S_n} \epsilon(w) h_{\lambda+\delta-w(\lambda+\delta)} = \det (h_{\lambda_i-\mu_j-i+j})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad n \geq l(\lambda).$$

■

Corolário 2.9. $\omega(s_{\lambda/\mu}) = s_{\lambda'/\mu'}$.

Muito do que foi abordado até aqui pode ser obtido a partir do *Algoritmo RSK* (que veremos no capítulo seguinte) a exemplo do que é feito na Seção 7.12 da referência [12]. Para finalizar esta Seção, vamos mostrar que a definição clássica das Funções de Schur implica na definição combinatória como havíamos prometido.

Sejam $x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots)$ e $z = (z_1, z_2, \dots)$ três conjuntos de variáveis independentes. Como $s_{\mu} s_{\nu} = \sum_{\lambda} c_{\mu\nu}^{\lambda} s_{\lambda}$ e $s_{\lambda/\mu} =$

$\sum_{\nu} c_{\mu\nu}^{\lambda} s_{\nu}$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \sum_{\lambda} s_{\lambda/\mu}(x) s_{\lambda}(z) s_{\mu}(y) &= \sum_{\mu} \sum_{\lambda, \nu} c_{\mu\nu}^{\lambda} s_{\nu}(x) s_{\lambda}(z) s_{\mu}(y) = \\ &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} s_{\nu}(x) s_{\mu}(z) s_{\nu}(z) s_{\mu}(y) = \sum_{\mu} s_{\mu}(y) s_{\mu}(z) \sum_{\nu} s_{\nu}(x) s_{\nu}(z) = \\ &= \prod_{j,k} (1 - y_j z_k)^{-1} \prod_{i,k} (1 - x_i z_k)^{-1} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x, y) s_{\lambda}(z), \end{aligned}$$

onde $(x, y) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$. Segue que

$$s_{\lambda}(x, y) = \sum_{\mu} s_{\lambda/\mu}(x) s_{\mu}(y) = \sum_{\mu, \nu} c_{\mu\nu}^{\lambda} s_{\mu}(y) s_{\nu}(x).$$

De forma mais geral, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.20. *Temos*

$$s_{\lambda/\mu}(x, y) = \sum_v s_{\lambda/v}(x) s_{v/\mu}(y),$$

onde a soma é feita sob todas as partições v tais que $\lambda \supseteq v \supseteq \mu$.

Demonstração: Temos $\sum_{\mu} s_{\lambda/\mu}(x, y) s_{\mu}(z) = s_{\lambda}(x, y, z) = \sum_v s_{\lambda/v}(x) s_v(y, z) = \sum_{\mu} \sum_v s_{\lambda/v}(x) s_{v/\mu}(y) s_{\mu}(z)$. Logo, comparando o coeficiente de $s_{\mu}(z)$ na igualdade, temos

$$s_{\lambda/\mu}(x, y) = \sum_v s_{\lambda/v}(x) s_{v/\mu}(y).$$

■

A fórmula da proposição anterior pode ser generalizada: sejam $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ n conjuntos de variáveis independentes e λ, μ partições, então

$$s_{\lambda/\mu}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = \sum_{(v)} \prod_{i=1}^n s_{v^{(i)}/v^{(i-1)}}(x^{(i)}), \quad (2.3.4)$$

cuja soma é feita sob todas as sequências $(v) = (v^{(0)}, v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$ de partições tais que $v^{(0)} = \mu, v^{(n)} = \lambda$ e $v^{(0)} \subseteq v^{(1)} \subseteq \dots \subseteq v^{(n)}$.

A Proposição 2.19 nos diz que $s_{\lambda/\mu}(x) = 0$ a menos que $\lambda_i \geq \mu_i$, isto é, a menos que $\lambda \supseteq \mu$, pois se $\lambda_r < \mu_r$, para algum r , temos $\lambda_i \leq \lambda_r < \mu_r \leq \mu_j, 1 \leq j \leq r \leq i \leq n$ e $\lambda_i - \mu_j - i + j < 0$ e, conseqüentemente, a matriz $(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j})$ tem um bloco $(n - r + 1) \times r$ cujas entradas são todas 0 e, portanto, seu determinante é nulo.

Vejamos no que resulta a igualdade (2.3.4) quando cada $x^{(i)}$ consiste de uma única variável x_i . Pela discussão do parágrafo acima, para uma única variável x , $s_{\lambda/\mu}(x) = 0$ a menos que o diagrama de λ/μ seja uma linha horizontal e, neste caso, $s_{\lambda/\mu}(x) = x^{|\lambda/\mu|}$. Assim, cada

produto no somatório de (2.3.4) é um monômio $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, onde $\alpha_i = |v^{(i)}/v^{(i-1)}|$ e, portanto, temos $s_{\lambda/\mu}(x_1, \dots, x_n)$ expresso como uma soma de monômios x^α , um monômio para cada TYSS T de forma λ/μ . Daí, obtemos

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_T x^T,$$

como queríamos.

2.3.7 Matrizes de Transição

Nesta seção, vamos obter as matrizes de transição entre as bases $m = \{m_\lambda : \lambda \in Par\}$, $e = \{e_\lambda : \lambda \in Par\}$, $h = \{h_\lambda : \lambda \in Par\}$ e $s = \{s_\lambda : \lambda \in Par\}$ a partir de duas matrizes que veremos a seguir, a saber, a matriz de transição entre as bases m e s e a matriz J que descrevemos mais a frente.

As matrizes aqui são indexadas nas linhas e colunas por partições de um inteiro não-negativo n . Para tanto, vamos usar a ordem lexicográfica reversa no conjunto $Par(n)$.

Exemplo 2.20. Para $n = 4$, $Par(4) = \{4, 31, 22, 211, 1111\}$ e uma matriz $(M_{\lambda\mu})$ indexada por $\lambda, \mu \in Par(4)$, é da forma:

$$\begin{pmatrix} M_{1111,1111} & M_{1111,211} & M_{1111,22} & M_{1111,31} & M_{1111,4} \\ M_{211,1111} & M_{211,211} & M_{211,22} & M_{211,31} & M_{211,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{4,1111} & M_{4,211} & M_{4,22} & M_{4,31} & M_{4,4} \end{pmatrix},$$

pois $4 \geq^R 31 \geq^R 22 \geq^R 211 \geq^R 1111$.

Lembremos que uma matriz $(M_{\lambda\mu}) \in M_{p(n)}(\mathbb{Z})$ indexada por partições de n é dita triangular superior se $M_{\lambda\mu} = 0$ a menos que $\lambda \leq^R \mu$, e estritamente unitriangular se, além disso, $M_{\lambda\lambda} = 1$. Da mesma forma, define-se matriz estritamente triangular inferior e estritamente unitriangular inferior.

Seja U_n o conjunto das matrizes triangulares (superiores e inferiores) e U'_n o das estritamente unitriangulares (superiores e inferiores).

Proposição 2.21. U_n e U'_n são grupos com respeito a multiplicação matricial.

Demonstração: Sejam $M, N \in U_n$. Então $(MN)_{\lambda\mu} = \sum_v M_{\lambda v} N_{v\mu}$ é zero a menos que exista uma partição v tal que $\mu \geq^R v \geq^R \lambda$, isto é, a menos que $\mu \geq^R \lambda$. Pela mesma razão, $(MN)_{\lambda\lambda} = M_{\lambda\lambda} N_{\lambda\lambda} = 1$. Logo, $MN \in U_n$.

Seja $M \in U_n$. A igualdade $\sum_\mu M_{\lambda\mu} x_\mu = y_\lambda$ é equivalente a $\sum_\mu (M^{-1})_{\lambda\mu} y_\mu = x_\lambda$. Para um λ fixo, a primeira igualdade para y_ν , onde $\nu \geq \lambda$, envolve apenas x_μ para $\nu \leq \mu$, logo, para $\mu \geq \lambda$. Então, o mesmo é válido para a segunda igualdade, donde $(M^{-1})_{\lambda\mu} = 0$ a menos que $\mu \leq \lambda$. Daí, $M^{-1} \in U_n$.

A demonstração para U'_n é análoga. ■

Vamos denotar por J a matriz transposição dada por

$$J_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1, & \text{se } \lambda' = \mu \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 2.21. Se $n = 3$, então $Par(3) = \{3, 21, 111\}$, $3 \geq^R 21 \geq^R 111$ e

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que a matriz J é sempre simétrica, pois $\lambda' = \mu$ se, e somente se, $\lambda = \mu'$.

Proposição 2.22. M é triangular superior (respectivamente unitriangular superior) se, e somente se, JMJ é triangular inferior (respectivamente unitriangular inferior).

Demonstração: Se $N = MJM$, então $N_{\lambda\mu} = M_{\lambda'\mu'}$. Como $\mu' \geq^R \lambda'$ se, e somente se, $\lambda \geq^R \mu$, então o resultado segue. ■

Se $u = \{u_\lambda\}$ e $v = \{v_\lambda\}$ são bases de Λ^n , cada qual indexada por partições de n , denotamos por $M(u, v)$ a matriz $(M_{\lambda\mu})$ dos coeficientes de:

$$u_\lambda = \sum_{\mu} M_{\lambda\mu} v_\mu;$$

Essa é uma matriz não-singular com entradas inteiras.

Definição 2.14. $M(u, v)$ é chamada de matriz de transição da base u para a base v .

A seguir, temos quatro propriedades de $M(u, v)$ que nos serão úteis. Sejam $u = \{u_\lambda\}$, $v = \{v_\lambda\}$ e $w = \{w_\lambda\}$ bases de Λ^n . Então,

(a) $M(u, v)M(v, w) = M(u, w);$

(b) $M(u, v) = M(v, u)^{-1}.$

Se $u' = \{u'_\lambda\}$ e $v' = \{v'_\lambda\}$ são bases duais a u e v , respectivamente, então:

(c) $M(u', v') = M(v, u)^t = M(u, v)^*$, onde $*$ denota a transposta inversa;

(d) $M(\omega u, \omega v) = M(u, v)$, $\omega : \Lambda \rightarrow \Lambda$ é a involução definida em 2.3.3.

As igualdades (a) e (b) e em (c) decorrem da álgebra linear enquanto que (d) é uma consequência de: $\omega(u_\lambda) = \omega\left(\sum_{\mu} M_{\lambda\mu} v_\mu\right) = \sum_{\mu} M_{\lambda\mu} \omega(v_\mu)$.

Seja $K = M(s, m)$. Consideremos as bases de Λ : $m = \{m_\lambda\}$, $e = \{e_\lambda\}$, $h = \{h_\lambda\}$ e $s = \{s_\lambda\}$. Vamos mostrar que todas as matrizes de transição entre qualquer par destas bases é obtida a partir de J e K .

Como $\langle m_\lambda, h_\lambda \rangle = \delta_{\lambda\mu}$ e $\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$, m e h são duais e s é auto-dual. Logo, $M(s, h) = K^*$, pela parte (c) da observação.

Em vista da propriedade (d) da observação acima, temos

$$M(s, e) = M(\omega(s), \omega(e)) = M(\omega(s), h) = M(\omega(s), s)M(s, h) = JK^*,$$

pois em vista do Corolário 2.9 temos que $J = M(\omega(s), s)$.

Observemos que $\sum_{\nu} J_{\lambda\mu} J_{\nu\mu} = 1$ se, e somente se, $\lambda' = \mu$.

Utilizando (a) e (b) da observação obtemos as demais matrizes. A tabela a seguir nos dá as respectivas matrizes de transição:

| | e | h | m | s |
|---|---------------|--------------|----------|----------|
| e | I | $K^t JK^*$ | $K^t JK$ | $K^t J$ |
| h | $K^t JK^*$ | I | $K^t K$ | K^t |
| m | $K^{-1} JK^*$ | $K^{-1} K^*$ | I | K^{-1} |
| s | JK^* | K^* | K | I |

Tabela 2.4: Matrizes de transição

Lembremos que $K = (K_{\lambda\mu})$ é uma matriz triangular superior, onde $K_{\lambda\mu}$ é o Número de Kostka, conforme Definição 2.10. Assim, considerando a tabela acima, finalizamos esta seção com as seguintes observações:

1. $M(s, h)$ e $M(h, s)$ são do tipo unitriangular inferior;
2. $M(s, m)$ e $M(m, s)$ são do tipo unitriangular superior;
3. $M(e, m)$ é simétrica;
4. $M(h, m)$ é simétrica;
5. $M(e, h) = M(h, e)$;
6. $M(h, s) = M(s, m)^t$.

2.3.8 A Regra de Murnaghan-Nakayama

Até agora, temos expressado as Funções de Schur em termos de m_λ , h_λ e e_λ . Nesta seção, vamos considerar p_λ . Começamos com algumas definições.

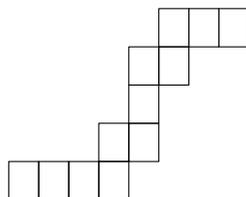
Definição 2.15. *Sejam $\lambda, \mu \in \text{Par}$ com $\mu \subset \lambda$. Dizemos que o diagrama de Young de λ/μ é conexo se seu interior, visto como a união dos quadrados sólidos que o constituem, for conexo.*

Exemplo 2.22. $\lambda/\mu = 21/1$ não é conexo, pois seu diagrama é:



Definição 2.16. *Uma faixa com fronteira é um diagrama de Young conexo no qual não aparecem quatro quadrados com um vértice em comum.*

Exemplo 2.23. $\lambda/\mu = 86554/5443$ é uma faixa com fronteira, pois:



Notemos que dados inteiros a_1, \dots, a_k , existe uma única faixa com fronteira λ/μ (a menos de transformações) com a_i quadrados na linha i , isto é, $a_i = \lambda_i - \mu_i$. Logo, o número de faixas com fronteira de tamanho n (a menos de transformações) é 2^{n-1} , que é o número de composições de n . De fato: se k inteiros aparecem na composição de α , chamamos α uma k -composição. Se $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ é uma k -composição α de n definimos um subconjunto $\theta(\alpha)$ de $[n-1] = \{1, 2, \dots, n-1\}$ com $k-1$ elementos por $\theta(\alpha) = \{a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}\}$. Isso nos dá uma bijeção entre todas as k -composições de n e os subconjuntos de $[n-1]$ com $k-1$ elementos. Logo, existem $\binom{n-1}{k-1}$ k -composições de n . Daí,

$$|Comp(n)| = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

Dada uma faixa com fronteira B , chamamos o número de linhas de B menos 1 de altura de B e denotamos por $alt(B)$.

De posse dessas definições e observações, temos um teorema que relaciona faixas com fronteira e funções simétricas.

Teorema 2.5. *Para qualquer $\mu \in Par$ e $r \in \mathbb{N}$ temos*

$$s_\mu p_r = \sum_{\lambda} (-1)^{alt(\lambda/\mu)} s_\lambda, \tag{2.3.5}$$

onde λ percorre o conjunto de todas as partições $\lambda \supseteq \mu$ para as quais λ/μ é uma faixa com fronteira de tamanho r .

Demonstração: Sejam $n \geq l(\mu)$ e $\delta = (n-1, n-2, \dots, 0)$ e consideremos todas as funções desta demonstração nas variáveis x_1, \dots, x_n . Na igualdade $a_\alpha = a_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \sum_{w \in S_n} \epsilon(w)w(x^\alpha)$ coloquemos $\alpha = \mu + \delta$

e multiplicamos por $p_r = \sum_{j=1}^n x_j^r$. Obtemos com isso,

$$\begin{aligned} a_{\mu+\delta}p_r &= \sum_{w \in S_n} \epsilon(w)w(x^{\mu+\delta}) \sum_{j=1}^n x_j^r \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{w \in S_n} \epsilon(w)w(x^{\mu+\delta})x_j^r = \sum_{j=1}^n a_{\mu+\delta+r\gamma_j}, \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

onde γ_j é a sequência com 1 na j -ésima posição e 0 nas demais.

Colocamos a sequência $\mu + \delta + r\gamma_j$ em ordem não-crescente. Se a sequência resultante tem dois termos iguais, então estes termos contribuirão com 0 para a igualdade (2.3.6). Caso não possua dois termos iguais, existirão $p \leq q$ para os quais:

$$\mu_{p-1} + n - p + 1 > \mu_q + n - q + r > \mu_p + n - p,$$

e neste caso, $a_{\mu+\delta+r\gamma_j} = (-1)^{q-p}a_{\lambda+\delta}$, onde λ é a partição $\lambda = (\mu_1, \dots, \mu_{p-1}, \mu_q + p - q + r, \mu_p + 1, \dots, \mu_{q-1} + 1, \mu_{q+1}, \dots, \mu_n)$.

Tal partição é exatamente aquela para a qual λ/μ é uma faixa com fronteira B de tamanho r e $alt(B) = q - p$. Logo,

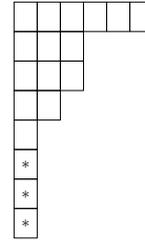
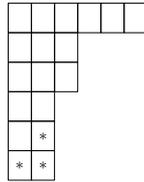
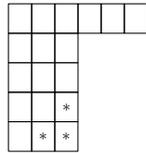
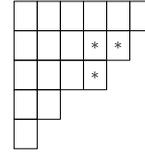
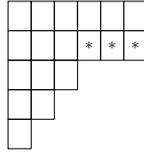
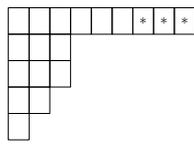
$$a_{\mu+\delta}p_r = \sum_r (-1)^{alt(\lambda/\mu)} a_{\lambda+\delta}.$$

Agora, dividindo por a_δ e fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos (2.3.5). ■

A seguir, temos dois exemplos de como adicionar faixas com fronteira a alguma partição dada.

Exemplo 2.24. *Seja $\mu = 63321$. Uma faixa com fronteira de tamanho 3 pode ser adicionada a μ das seguintes maneiras:*

Logo, $s_{63321}p_3 = s_{93321} + s_{66321} - s_{65421} - s_{63333} - s_{633222} + s_{63321111}$.



Exemplo 2.25. Seja $\delta = (n - 1, n - 2, \dots, 0)$. Existem apenas duas faixas com fronteira de tamanho 2 que podem ser adicionadas a δ e, então:

$$s_{\delta}p_2 = s_{(n+1, n-2, n-3, \dots, 1)} - s_{(n-1, n-2, \dots, 2, 1, 1, 1)}.$$

A seguir, temos uma definição que relacionando tabelas (TYSS) e faixas com fronteira.

Definição 2.17. Sejam $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ uma composição de n e $\lambda, \mu \in \text{Par}$, $\mu \subset \lambda$. Definimos uma TYSS faixa com fronteira de forma λ/μ (sendo $|\lambda/\mu| = n$) e tipo α como o resultado da inserção de inteiros positivos no diagrama de λ/μ de modo que:

- (a) cada linha e coluna é não-decrescente;
- (b) o inteiro i aparece α_i vezes;
- (c) o conjunto dos quadrados ocupados por i forma uma faixa com fronteira.

Exemplo 2.26. O diagrama abaixo é uma tabela faixa com fronteira de forma 7555 e tipo $(5, 2, 3, 0, 5, 7)$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 6 | 6 |
| 1 | 2 | 2 | 5 | 6 | | |
| 3 | 3 | 5 | 5 | 6 | | |
| 3 | 5 | 5 | 6 | 6 | | |

Definimos também a altura da TYSS faixa com fronteira T como

$$\text{alt}(T) = \text{alt}(B_1) + \cdots + \text{alt}(B_k),$$

onde B_1, \dots, B_k são as faixas com fronteira que aparecem em T .

Exemplo 2.27. *A tabela faixa com fronteira do exemplo anterior tem $\text{alt}(T) = 1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 7$.*

Se, no Teorema 2.5, multiplicarmos s_μ por $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \dots$, então vamos obter o seguinte resultado.

Teorema 2.6. *Temos*

$$s_\mu p_\alpha = \sum_{\lambda} \mathcal{X}^{\lambda/\mu}(\alpha) s_\lambda,$$

onde $\mathcal{X}^{\lambda/\mu}(\alpha) = \sum_T (-1)^{\text{alt}(T)}$, soma feita sobre todas as TYSS faixa com fronteira de forma λ/μ e tipo α .

Agora, podemos expressar $s_{\lambda/\mu}$ em termos das funções simétricas soma de potências. É disso que se ocupa o corolário abaixo cujo resultado é conhecido como a *Regra de Murnaghan-Nakayama*.

Corolário 2.10. *Temos*

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_v z_v^{-1} \mathcal{X}^{\lambda/\mu}(v) p_v.$$

Demonstração: Do Teorema 2.6, temos que $\mathcal{X}^{\lambda/\mu}(v) = \langle s_\mu p_v, s_\lambda \rangle = \langle p_v, s_{\lambda/\mu} \rangle$ e, pela Proposição 2.12, $\langle p_v, p_\mu \rangle = z_v \delta_{v\mu}$. Logo, como

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{\gamma} z_{\gamma}^{-1} \mathcal{X}^{\lambda/\mu}(\gamma) p_{\gamma}, p_v \right\rangle &= \sum_{\gamma} z_{\gamma}^{-1} \mathcal{X}^{\lambda/\mu}(\gamma) \langle p_{\gamma}, p_v \rangle = \mathcal{X}^{\lambda/\mu}(v) \\ &= \langle s_{\lambda/\mu}, p_v \rangle, \text{ o resultado segue. } \blacksquare \end{aligned}$$

A seguir temos um outro corolário do Teorema 2.6 obtido tomando $\mu = \emptyset$ no Teorema 2.5.

Corolário 2.11. *Temos:*

$$p_\alpha = \sum_{\lambda} \mathcal{X}^\lambda(\alpha) s_\lambda.$$

A proposição seguinte nos mostra que as propriedades de ortogonalidade das bases $\{s_\lambda\}$ e $\{p_\lambda\}$ implicam em relações de ortogonalidade para os coeficientes $\mathcal{X}^\lambda(\mu)$.

Proposição 2.23. *Para μ e λ fixos, temos:*

$$(a) \sum_{\lambda} \mathcal{X}^\lambda(\mu) \mathcal{X}^\lambda(\nu) = z_\mu \delta_{\mu\nu};$$

$$(b) \sum_{\nu} z_\nu^{-1} \mathcal{X}^\lambda(\nu) \mathcal{X}^\mu(\nu) = \delta_{\lambda\mu}.$$

Demonstração:

$$(a) \text{ Pelo Corolário 2.11, } p_\mu = \sum_{\lambda} \mathcal{X}^\lambda(\mu) s_\lambda \text{ e } p_\nu = \sum_{\gamma} \mathcal{X}^\gamma(\nu) s_\gamma.$$

Logo,

$$z_\mu \delta_{\mu\nu} = \langle p_\mu, p_\nu \rangle = \left\langle \sum_{\lambda} \mathcal{X}^\lambda(\mu) s_\lambda, \sum_{\gamma} \mathcal{X}^\gamma(\nu) s_\gamma \right\rangle =$$

$$\sum_{\lambda, \gamma} \mathcal{X}^\lambda(\mu) \mathcal{X}^\gamma(\nu) \langle s_\lambda, s_\gamma \rangle = \sum_{\lambda} \mathcal{X}^\lambda(\mu) \mathcal{X}^\lambda(\nu).$$

$$(b) \text{ Pelo Corolário 2.10, } s_\lambda = \sum_{\nu} z_\nu^{-1} \mathcal{X}^\lambda(\nu) p_\nu \text{ e } s_\mu = \sum_{\gamma} z_\gamma^{-1} \mathcal{X}^\mu(\gamma) p_\gamma.$$

Logo,

$$\delta_{\lambda\mu} = \langle s_\mu, s_\lambda \rangle = \sum_{\nu, \gamma} z_\nu^{-1} z_\gamma^{-1} \mathcal{X}^\lambda(\nu) \mathcal{X}^\mu(\gamma) \langle p_\gamma, p_\nu \rangle =$$

$$\sum_{\nu, \gamma} z_\nu^{-1} z_\gamma^{-1} \mathcal{X}^\lambda(\nu) \mathcal{X}^\mu(\gamma) z_\gamma \delta_{\gamma\nu} = \sum_{\nu} z_\nu^{-1} \mathcal{X}^\lambda(\nu) \mathcal{X}^\mu(\nu).$$

■

Finalizamos esta seção com uma consideração sobre $\mathcal{X}^\lambda(v)$. Os coeficientes $\mathcal{X}^\lambda(v)$ para $\lambda, v \vdash n$ tem uma interpretação algébrica importante. A Seção 7.18 da referência [12] mostra que eles são os caracteres irreduzíveis do grupo simétrico S_n , ou seja, os caracteres irreduzíveis \mathcal{X}^λ de S_n são indexados de uma maneira natural por partições $\lambda \vdash n$ e $\mathcal{X}^\lambda(v)$ é o valor de \mathcal{X}^λ num elemento $w \in S_n$ de tipo cíclico v .⁽¹¹⁾

Assim, a Proposição 2.23 estabelece as relações de ortogonalidade satisfeitas pelos caracteres irreduzíveis de S_n .

Exercícios

2.1. Verifique que Λ_k é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{Q} .

2.2. Demonstre o Corolário 2.3.

2.3. Mostre que $p_{21} = m_3 + m_{21}$.

2.4. Mostre que o coeficiente de $x^\alpha y^\beta$ em $\sum_{\lambda \in Par} s_\lambda(x) s_\lambda(y)$ é igual ao número de pares de TYSS (P, Q) de mesma forma tais que $\text{tipo}(P) = \alpha$ e $\text{tipo}(Q) = \beta$.

¹¹as demonstrações formais destas afirmações podem ser encontradas nas referências [10] e [12].

Capítulo 3

Funções Simétricas em Combinatória

3.1 Introdução

Neste capítulo, como sugere seu título, abordamos algumas das aplicações de funções simétricas em combinatória (enumerativa).

Na seção 3.2, apresentamos o algoritmo RSK que será fundamental em quase tudo o que será feito nas demais seções. Também nesta seção, vamos rerepresentar alguns resultados, já estabelecidos no capítulo anterior, por meio do referido algoritmo.

Na Seção 3.3, abordamos as partições planas a partir do que fizemos até o momento; enquanto que na Seção 3.4, estaremos interessados em enumerar, via funções simétricas, certos tipos de permutações.

A última seção deste capítulo traz uma reformulação de alguns resultados básicos da, assim chamada, Teoria de Pólya (enumeração sob a ação de grupos) via funções simétricas.

3.2 O Algoritmo *RSK*

Nesta seção, desenvolvemos apenas as propriedades mais importantes do algoritmo *RSK* que nos permitam apresentar provas combinatoriais de alguns resultados fundamentais das Funções de Schur.

A operação básica do algoritmo *RSK* consiste em inserir um inteiro positivo k numa linha de uma TYSS não-diagonal (de forma λ , para alguma $\lambda \in Par$) $P = (P_{ij})$ da seguinte maneira: seja r o maior inteiro tal que $P_{1,r-1} \leq k$ (se $P_{11} > k$, tomamos $r = 1$). Se P_{1r} não existe, (ou seja, se P tem $r - 1$ colunas), então simplesmente inserimos k ao final de primeira linha. O algoritmo pára e a TYSS resultante é denotada por $P \leftarrow k$. Se P tem ao menos r colunas, P_{1r} existe, então trocamos P_{1r} por k . O elemento $k' = P_{1r}$ deverá ser inserido na segunda linha usando o mesmo procedimento. Continuamos até que um elemento seja inserido ao final de uma linha (talvez o primeiro elemento de uma nova linha). O resultado denotamos por $P \leftarrow k$. O conjunto das posições dos elementos inseridos é chamado *caminho de inserção* e é denotado por $\mathcal{I}(P \leftarrow k)$.

Exemplo 3.1. *Seja*

$$P = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 5 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 6 & 6 & 8 & \\ 4 & 4 & 6 & 8 & & & \\ 6 & 7 & & & & & \\ 8 & 9 & & & & & \end{array}$$

O diagrama abaixo é $P \leftarrow 4$. Os elementos inseridos estão em *negrito*. No nosso exemplo, $\mathcal{I}(P \leftarrow 4) = \{(1, 5), (2, 4), (3, 4), (4, 3)\}$:

$$P \leftarrow 4 = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 4 & \mathbf{4} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & \mathbf{5} & 6 & 8 & \\ 4 & 4 & 6 & \mathbf{6} & & & \\ 6 & 7 & \mathbf{8} & & & & \\ 8 & 9 & & & & & \end{array}$$

O lema a seguir apresenta duas propriedades dos caminhos de inserção que são úteis na demonstração de algumas propriedades do algoritmo *RSK*.

Lema 3.1. *Temos*

(a) *quando inserimos k em uma TYSS P , se $(r, s), (r + 1, t) \in \mathcal{I}(P \leftarrow k)$, então $t \leq s$;*

(b) sejam P uma TYSS e $j \leq k$. Se $(r, s) \in \mathcal{I}(P \leftarrow j)$ e $(r, t) \in \mathcal{I}((P \leftarrow j) \leftarrow k)$, então $s < t$. Além disso, $|\mathcal{I}((P \leftarrow j) \leftarrow k)| \leq |\mathcal{I}(P \leftarrow j)|$.

Demonstração: (a) Seja $(r, s) \in \mathcal{I}(P \leftarrow k)$. Temos duas possibilidades: $P_{r+1,s} > P_{rs}$ (pois P é estritamente crescente nas colunas) ou não existe a entrada $(r+1, s)$ de P . No primeiro caso, P_{rs} não pode ser inserido na linha $r+1$ à direita da coluna s sem violar o fato de que as linhas de $P \leftarrow k$ são não-decrescentes, pois P_{rs} estaria à direita de $P_{r+1,s}$ na mesma linha. O segundo caso é trivial: se $(r+1, t) \in \mathcal{I}(P \leftarrow k)$, então $t \leq s$.

(b) Como uma TYSS tem suas linhas não-decrescentes, então k deve ser inserido à direita de onde j foi inserido. Pode ocorrer de j ser inserido ao final da primeira linha de P caso em que k também é inserido ao final de $P \leftarrow j$, donde $|\mathcal{I}((P \leftarrow j) \leftarrow k)| = |\mathcal{I}(P \leftarrow j)|$. Além disso, o elemento que j tira do lugar na primeira linha deve ser menor do que ou igual a aquele que k retira do lugar nesta linha. Indutivamente, verifica-se que $\mathcal{I}(P \leftarrow j)$ está à esquerda de $\mathcal{I}((P \leftarrow j) \leftarrow k)$, ou seja, se $(r, s) \in \mathcal{I}(P \leftarrow j)$ e $(r, t) \in \mathcal{I}((P \leftarrow j) \leftarrow k)$, então $s < t$.

A entrada de b de $P \leftarrow j$ correspondente ao elemento de $\mathcal{I}(P \leftarrow j)$ de maior coordenada nas linhas, é inserido ao final de sua linha. Pelo que acabamos de provar, se $\mathcal{I}((P \leftarrow j) \leftarrow k)$ tem um elemento c que corresponde a essa entrada nesta linha, então ele está à direita de b em $(P \leftarrow j) \leftarrow k$. Então, c é inserido no final da linha, o que termina o processo de inserção. Daí, $\mathcal{I}((P \leftarrow j) \leftarrow k)$ não tem elemento abaixo dos elementos de $\mathcal{I}(P \leftarrow j)$. Logo, $|\mathcal{I}((P \leftarrow j) \leftarrow k)| \leq |\mathcal{I}(P \leftarrow j)|$. ■

Corolário 3.1. Se P é uma TYSS e $k \geq 0$, então $P \leftarrow k$ é uma TYSS.

Demonstração: É claro que as linhas de $P \leftarrow k$ são não-decrescentes. Um inteiro a pode tirar do lugar apenas um b tal que $a < b$. Pelo lema anterior, b não se move para a direita da coluna na qual estava quando inserido na linha de baixo. Logo, b é inserido abaixo de um inteiro estritamente menor do que b . Portanto, $P \leftarrow k$ é uma TYSS. ■

Antes de enunciar o próximo resultado, vamos estabelecer algumas definições.

Seja $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ uma matriz com $a_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e tal que apenas uma quantidade finita de suas entradas são não-nulas. Essa matriz A é chamada uma $(\mathbb{N} \cup \{0\})$ -matriz de suporte finito. Podemos pensar em A como uma $(m \times n)$ -matriz finita ou uma matriz infinita fazendo $a_{ij} = 0$ para $i > m$ e $j > n$.

Associamos com A uma matriz de duas linhas W_A , denominada *permutação generalizada*, definida por:

$$W_A = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_m \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_m \end{pmatrix},$$

onde

- (a) $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m$;
- (b) se $i_r = i_s$ e $r \leq s$, então $j_r \leq j_s$;
- (c) para cada (i, j) , existem exatamente a_{ij} inteiros não-negativos r para os quais $(i_r, j_r) = (i, j)$.

Exemplo 3.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ corresponde a } W_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notemos que A determina uma única matriz W_A e, inversamente, cada tal matriz W_A corresponde a uma única matriz A .

Associamos com A (ou W_A) um par de TYSS de mesma forma da seguinte maneira. Seja W_A a matriz permutação generalizada associada a A . Começamos com $(P(0), Q(0)) = (\emptyset, \emptyset)$. Se $t < m = \sum_{i,j} a_{ij}$ e $(P(t), Q(t))$ estão definidas, fazemos

- (a) $P(t+1) = P(t) \leftarrow j_{t+1}$;
- (b) $Q(t+1)$ é obtida de $Q(t)$ pela inserção de i_{t+1} (deixando todas as partes de $Q(t)$ inalteradas) tal que $P(t+1)$ e $Q(t+1)$ tenham a mesma forma.

O processo acaba em $(P(m), Q(m))$ e definimos $(P, Q) = (P(m), Q(m))^{(1)}$. Denotamos esta correspondência por $A \xrightarrow{RSK} (P, Q)$ e a denominamos *Algoritmo RSK*.

Exemplo 3.3. *Sejam A e W_A dadas pelo exemplo anterior. As TYSS $(P(1), Q(1)), \dots, (P(7), Q(7)) = (P, Q)$ são apresentadas na tabela a seguir.*

| i | P(i) | Q(i) |
|---|---------------------|---------------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 3 | 1 1 |
| 3 | 1 3 3 | 1 1 1 |
| 4 | 1 2 3 3 | 1 1 1 2 |
| 5 | 1 2 2 3 3 | 1 1 1 2 2 |
| 6 | 1 1 2 2 3 3 | 1 1 1 2 2 3 |
| 7 | 1 1 2 2 2 3 3 | 1 1 1 3 2 2 3 |

Tabela 3.1: Obtenção de $(P(1), Q(1)), \dots, (P(7), Q(7)) = (P, Q)$

O teorema a seguir estabelece o principal resultado sobre o algoritmo RSK.

Teorema 3.1. *O algoritmo RSK é uma bijeção entre as $(\mathbb{N} \cup \{0\})$ -matrizes $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ de suporte finito e o conjunto dos pares ordenados (P, Q) de TYSS de mesma forma. Nesta correspondência:*

$$j \text{ ocorre em } P \text{ exatamente } \sum_i a_{ij} \text{ vezes} \quad (3.2.1)$$

$$i \text{ ocorre em } Q \text{ exatamente } \sum_j a_{ij} \text{ vezes} \quad (3.2.2)$$

Demonstração: Seja $A \xrightarrow{RSK} (P, Q)$. Pelo Corolário 3.1, P é uma TYSS. Pela definição do algoritmo RSK, P e Q têm a mesma forma e (3.2.1) e (3.2.2) valem. Então, precisamos provar que (a) Q é uma

¹Pelo Corolário 3.1, P é uma TYSS e, como veremos na demonstração a seguir, Q também o é.

TYSS e que (b) o algoritmo RSK é uma bijeção, isto é, dado (P, Q) podemos recuperar A .

(a) Primeiramente notemos que como os elementos de Q são inseridos em ordem não-decrescente, segue que as linhas e colunas de Q são não-decrescentes. Resta verificar que as colunas de Q são estritamente crescentes, ou seja, dois elementos iguais da primeira linha de W_A não podem estar numa mesma coluna de Q . Se $i_k = i_{k+1}$ na primeira linha de W_A , sabemos que $j_k \leq j_{k+1}$. Logo, pelo Lema 3.1 (b), o caminho de inserção de j_{k+1} está estritamente à direita do caminho de j_k e nunca estará abaixo do maior elemento do caminho de inserção de j_k . Assim, os maiores elementos de dois caminhos de inserção distintos estão em colunas diferentes. Portanto, as colunas de Q são estritamente crescentes.⁽²⁾

(b) Sejam $(P, Q) = (P(m), Q(m))$ e Q_{rs} a ocorrência mais à direita da maior entrada de Q (onde Q_{rs} é um elemento da linha r e coluna s). Como elementos iguais de Q são inseridos da esquerda para a direita, temos $Q_{rs} = i_m, Q(m-1) = Q(m) \setminus Q_{rs}$ ($Q(m)$ sem o elemento Q_{rs}), e que P_{rs} foi o último elemento de P a ser colocado no lugar após a inserção de j_m em $P(m-1)$. Assim, podemos facilmente inverter o processo de inserção $P(m-1) \leftarrow j_m$. O elemento P_{rs} foi substituído pelo elemento $P_{r-1,t}$ mais à direita da linha $r-1$ de P que é menor do que P_{rs} . Logo, removemos P_{rs} de P , trocamos $P_{r-1,t}$ com P_{rs} e continuamos trocando o elemento mais à direita da linha $r-2$ de P que é menor do que $P_{r-1,t}$ com $P_{r-1,t}$ e assim por diante. Eventualmente algum elemento j_m é removido da primeira linha de P .

Temos, com este processo, reencontrado (i_m, j_m) e $(P(m-1), Q(m-1))$ unicamente. Agora, iterando esse processo, podemos redescobrir W_A . Logo, o algoritmo RSK é injetivo.

Para provar a sobrejetividade, precisamos mostrar que aplicando o processo descrito acima a um par arbitrário (P, Q) de TYSS de mesma forma, sempre resulta numa matriz W_A válida (permutação generalizada)

²Esta argumentação estabelece uma importante propriedade do algoritmo RSK: elementos iguais de Q são inseridos da esquerda para a direita.

$$W_A = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ j_1 & \cdots & j_m \end{pmatrix}.$$

É claro que $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m$. Resta mostrar que se $i_k = i_{k+1}$, então $j_k \leq j_{k+1}$. Sejam $i_k = Q_{rs}$ e $i_{k+1} = Q_{uv}$, donde $r \geq u$ e $s < v$. Quando iniciamos a aplicação do processo descrito acima a P_{uv} , este ocupa o final da linha u . Logo, seu *caminho de inserção inverso* passa pela linha u estritamente à esquerda da coluna v . Assim, na linha u o caminho de inserção inverso de P_{rs} está estritamente à esquerda daquele de P_{uv} . Indutivamente, argumentando inversamente ao Lema 3.1 (b), mostra-se que todo o caminho de inserção inverso de P_{rs} está estritamente à esquerda daquele de P_{uv} . Em particular, antes de remover i_{k+1} , os dois elementos j_k e j_{k+1} aparecem na primeira linha com j_k à esquerda de j_{k+1} . Logo, $j_k \leq j_{k+1}$ como queríamos. ■

Notemos que quando A é uma *matriz permutação*, isto é, uma $n \times n$ $(0, 1)$ -matriz com exatamente uma entrada 1 em cada linha e coluna, então W_A tem em sua primeira linha as entradas $1, 2, \dots, n$ e na segunda linha uma permutação w dos números $1, 2, \dots, n$; permutação esta que identificamos com A . Logo, aplicando o algoritmo RSK em A obtemos um par (P, Q) de TYS de mesma forma. Inversamente, se P e Q são TYS de mesma forma, então a matriz A que satisfaz $A \xrightarrow{RSK} (P, Q)$ é uma matriz permutação.

Temos estabelecido, pois, que o algoritmo RSK é uma bijeção entre o grupo simétrico S_n e $\{(P, Q) : P, Q \text{ são TYS de mesma forma } \lambda \vdash n\}$. Em particular, temos

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$$

Dada a matriz W_A , cujas linhas têm comprimento n , podemos obter uma permutação \tilde{W}_A como segue. Trocamos a primeira linha i_1, \dots, i_n de W_A por $1, 2, \dots, n$. Suponhamos que a segunda linha de W_A tem c_i i 's, da esquerda para a direita. Então trocamos os 1's na segunda linha, da esquerda para a direita, por $1, 2, \dots, c_1$; os 2's, da esquerda para a direita, por $c_1 + 1, c_1 + 2, \dots, c_1 + c_2$ e assim por diante até a

segunda linha tornar-se uma permutação de $1, 2, \dots, n$. Denotamos o resultado por \tilde{W}_A .

Exemplo 3.4.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \implies W_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \tilde{W}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 9 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

O Exercício 1 ao final deste capítulo traz um resultado que será muito útil.

Lema 3.2. *Sejam*

$$W_A = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \text{ e } \tilde{W}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tilde{j}_1 & \tilde{j}_2 & \cdots & \tilde{j}_n \end{pmatrix}.$$

Suponhamos que $\tilde{W}_A \xrightarrow{RSK} (\tilde{P}, \tilde{Q})$. Seja (P, Q) o par de TYSS obtidas de \tilde{P} e \tilde{Q} pela substituição de k por i_k em \tilde{Q} e \tilde{j}_k por j_k em \tilde{P} . Então, $W_A \xrightarrow{RSK} (P, Q)$.

Demonstração: Suponhamos que j é inserido em algum estágio do algoritmo RSK na posição k de uma linha. Se j foi substituído por um número maior $j + \epsilon$, menor do que qualquer elemento da linha que é maior do que j , então $j + \epsilon$ deve ter sido inserido também na k -ésima posição. Daí, temos que o processo de inserção dos elementos j_1, j_2, \dots, j_n imita aquele de $\tilde{j}_1, \tilde{j}_2, \dots, \tilde{j}_n$, o que conclui a demonstração. ■

Vamos reapresentar o resultado da Proposição 2.18, mas como consequência do algoritmo RSK. Esse resultado é conhecido como *Identidade de Cauchy*.

Proposição 3.1. *Temos*

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda \in \text{Par}} s_\lambda(x) s_\lambda(y). \quad (3.2.3)$$

Demonstração: Escrevemos

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \prod_{i,j} \left(\sum_{a_{ij} \geq 0} (x_i y_j)^{a_{ij}} \right). \quad (3.2.4)$$

Um termo $x^\alpha y^\beta$ nesta expressão é obtido escolhendo uma $(\mathbb{N} \cup \{0\})$ -matriz $A = (a_{ij})$ de suporte finito com $r(A) = \alpha$ e $c(A) = \beta$. Logo, o coeficiente de $x^\alpha y^\beta$ em (3.2.3) é o número $N_{\alpha\beta}$ de $\mathbb{N} \cup \{0\}$ -matrizes A com $r(A) = \alpha$ e $c(A) = \beta$.

Por outro lado, o coeficiente de $x^\alpha y^\beta$ em $\sum_{\lambda \in Par} s_\lambda(x) s_\lambda(y)$ é o número de pares (P, Q) de TYSS de mesma forma tais que $tipo(P) = \alpha$ e $tipo(Q) = \beta$.

Portanto, como o algoritmo RSK estabelece uma bijeção entre as matrizes A e os pares de tabelas (P, Q) (Teorema 3.1), o resultado segue. ■

Corolário 3.2. *Temos*

$$(h_1(y))^n = \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda s_\lambda(y).$$

Demonstração: Basta tomar o coeficiente de $x_1 x_2 \cdots x_n$ em ambos os lados de (3.2.3). ■

O próximo teorema apresenta a propriedade mais importante de simetria do algoritmo RSK. Antes, apresentamos um conjunto parcialmente ordenado e dois lemas que serão de grande utilidade para sua demonstração.

Dada $W_A = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \\ v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, associada com A , onde os u_i e os v_i são distintos, definimos o conjunto parcialmente ordenado $I = I(A) = I \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ como segue. Os elementos (vértices) de I são as colunas de $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ (por conveniência denotaremos uma coluna $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ por ab) e definimos $ab < cd$ em I se $a < c$ e $b < d$.

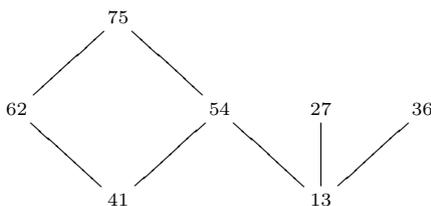


Figura 3.1: O conjunto parcialmente ordenado $I = \{75, 62, 54, 27, 36, 41, 13\}$

Exemplo 3.5. Seja $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Então, I é representado por:

O lema a seguir é uma consequência imediata da definição de I .

Lema 3.3. A aplicação $\varphi : I(A) \rightarrow I(A^t)$ definida por $\varphi(ab) = ba$ é um isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados, isto é, φ é uma bijeção que preserva ordem.

Dado $I = I(A)$, definimos I_1 como o conjunto dos elementos minimais de I , I_2 como o conjunto dos elementos minimais de $I - I_1$, I_3 como o conjunto dos elementos minimais de $I - (I_1 \cup I_2)$ e assim por diante. No exemplo anterior, temos $I_1 = \{13, 41\}$, $I_2 = \{27, 36, 54, 62\}$, $I_3 = \{75\}$. Notemos que como I_i é uma anti-cadeia em I , isto é, quaisquer dois elementos distintos de I_i são incomparáveis, podemos identificar (discriminar) seus elementos por:

$$(u_{i1}, v_{i1}), (u_{i2}, v_{i2}), \dots, (u_{in_i}, v_{in_i}), \quad (3.2.5)$$

onde $n_i = |I_i|$, de modo que

$$\begin{aligned} u_{i1} &< u_{i2} < \dots < u_{in_i} \\ v_{i1} &> v_{i2} > \dots > v_{in_i}. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

De posse desses conjuntos $I_i \subset I$ temos o lema a seguir.

Lema 3.4. *Sejam I_1, \dots, I_d as anti-cadeias não-vazias definidas acima com a identificação $I_i = \{(u_{i1}, v_{i1}), (u_{i2}, v_{i2}), \dots, (u_{in_i}, v_{in_i})\}$, $i = 1, \dots, d$. Seja $A \xrightarrow{RSK} (P, Q)$. Então, a primeira linha de P é $v_{1n_1}v_{2n_2} \cdots v_{dn_d}$, enquanto a primeira linha de Q é $u_{11}u_{21} \cdots u_{d1}$. Além disso, se $(u_k, v_k) \in I_i$, então v_k é inserido na i -ésima coluna da primeira linha de $P(k-1)$ no algoritmo RSK.*

Demonstração: A demonstração é por indução em n . O caso $n = 1$ é trivial. Suponhamos que o resultado vale para $n - 1$ e sejam

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Seja $(P(n-1), Q(n-1))$ o par de TYSS obtidas após a inserção de v_1, \dots, v_{n-1} e seja $I'_i = I_i(\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}})$, $1 \leq i \leq e$ (sendo $e = d-1$ ou $e = d$), dada por $(\tilde{u}_{i1}, \tilde{v}_{i1}), \dots, (\tilde{u}_{im_i}, \tilde{v}_{im_i})$, onde $\tilde{u}_{i1} < \cdots < \tilde{u}_{im_i}$ e $\tilde{v}_{i1} > \cdots > \tilde{v}_{im_i}$. Pela hipótese indutiva, a primeira linha de $P(n-1)$ é $\tilde{v}_{1m_1}\tilde{v}_{2m_2} \cdots \tilde{v}_{em_e}$, enquanto a primeira linha de Q é $\tilde{u}_{11}\tilde{u}_{21} \cdots \tilde{u}_{e1}$. Agora, inserimos v_n em $P(n-1)$. Se $\tilde{v}_{im_i} > v_n$, então $I'_i \cup \{(u_n, v_n)\}$ é uma anti-cadeia de $I(\frac{u}{v})$, pois $u_n > u_{\tilde{im}_i}$. Logo, $(u_n, v_n) \in I_i(\frac{u}{v})$ se i é o menor índice para o qual $\tilde{v}_{im_i} > v_n$. Neste caso, v_n é inserido na i -ésima coluna de $P(n-1)$. Se não existe um tal i , então (u_n, v_n) é o único elemento da anti-cadeia $I_d(\frac{u}{v})$ de $I(\frac{u}{v})$, pois $u_{\tilde{im}_i} \leq u_n$ e $v_{\tilde{im}_i} \leq v_n, \forall i$. Neste caso, v_n é inserido na d -ésima coluna de $P(n-1)$. Assim, se $(u_n, v_n) \in I_k$, então v_n é inserido na k -ésima coluna de $P(n-1)$ como queríamos mostrar. Inserimos uma nova i -ésima coluna exatamente quando $v_n = v_{d1}$ e, neste caso, $u_n = u_{d1}$, então u_n é inserido na i -ésima coluna da primeira linha de $Q(n-1)$. ■

A seguir temos o teorema que estabelece a propriedade simétrica mais importante do algoritmo RSK.

Teorema 3.2. *Seja A uma $(\mathbb{N} \cup \{0\})$ -matriz de suporte finito e suponhamos que $A \xrightarrow{RSK} (P, Q)$. Então, $A^t \xrightarrow{RSK} (Q, P)$.*

Demonstração: Se $I_i\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$ é a anti-cadeia dada por (3.2.5) tal que (3.2.6) é satisfeita, então pelo Lema 3.3, $I_i\left(\begin{smallmatrix} v \\ u \end{smallmatrix}\right)$ é:

$$(v_{im_i}, u_{im_i}), \dots, (v_{i2}, u_{i2}), (v_{i1}, u_{i1}),$$

onde

$$\begin{aligned} v_{im_i} &< \dots < v_{i2} < v_{i1} \\ u_{im_i} &> \dots > u_{i2} > u_{i1}. \end{aligned}$$

Então, pelo Lema 3.4, se $A^t \xrightarrow{RSK} (P', Q')$, a primeira linha de P' é $u_{11}u_{21} \dots u_{d1}$ e a primeira linha de Q' é $v_{1m_1}v_{2m_2} \dots v_{dm_d}$. Logo, o Lema 3.4, assegura que as primeiras linhas de P' e Q' coincidem com as primeiras linhas de Q e P , respectivamente.

Aplicando o algoritmo RSK a $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$, o elemento v_{ij} , $1 \leq j < m_i$, é deslocado para a segunda linha de P “antes” do elemento v_{rs} , $1 \leq s < m_r$ se, e somente se, $u_{i,j+1} < u_{r,s+1}$. Denotemos por \bar{P} e \bar{Q} , respectivamente, P e Q sem suas primeiras linhas. Logo,

$$\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right) := \left(\begin{array}{cccccccccc} u_{12} & \cdots & u_{1m_1} & u_{22} & \cdots & u_{2m_2} & \cdots & u_{d2} & \cdots & u_{dm_d} \\ v_{11} & \cdots & v_{1,m_1-1} & v_{21} & \cdots & v_{2,m_2-1} & \cdots & v_{d1} & \cdots & v_{d,m_d-1} \end{array}\right)_o$$

$$\xrightarrow{RSK} (\bar{P}, \bar{Q}),$$

onde $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)_o$ indica que colocamos as colunas de $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$ em ordem estritamente crescente pela ordem lexicográfica.

Similarmente, sejam \bar{P}' e \bar{Q}' , respectivamente, P' e Q' com suas primeiras linhas removidas. Argumentando em $\left(\begin{smallmatrix} v \\ u \end{smallmatrix}\right)$ como fizemos

para $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$, obtemos

$$\left(\begin{array}{c} a' \\ b' \end{array}\right) := \left(\begin{array}{cccccccccc} v_{1m_1-1} & \cdots & v_{11} & v_{2,m_2-1} & \cdots & v_{21} & \cdots & v_{d,m_d-1} & \cdots & v_{d1} \\ u_{1m_1} & \cdots & u_{12} & u_{2m_2} & \cdots & u_{22} & \cdots & u_{dm_d} & \cdots & u_{d2} \end{array}\right)_o$$

$$\xrightarrow{RSK} (\bar{P}', \bar{Q}').$$

Mas, $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} b' \\ a' \end{smallmatrix}\right)$, donde por indução em n (número de linhas) temos $(\bar{P}', \bar{Q}') = (\bar{Q}'^o, \bar{P}')$. ■

A seguir apresentamos algumas consequências deste último teorema.

Corolário 3.3. *Sejam A uma $(\mathbb{N} \cup \{0\})$ -matriz de suporte finito e $A \xrightarrow{RSK} (P, Q)$. Então, A é simétrica ($A = A^t$) se, e somente se, $P = Q$.*

Demonstração: Imediato, pois $A^t \xrightarrow{RSK} (Q, P)$. ■

Corolário 3.4. *Sejam $A = A^t$, $A \xrightarrow{RSK} (P, P)$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, sendo $\alpha_i \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty$. Então, a aplicação $A \mapsto P$ estabelece uma bijeção entre as $(\mathbb{N} \cup \{0\})$ -matrizes simétricas com $r(A) = \alpha$ e as TYSS de tipo α .*

Demonstração: Segue diretamente pelo Teorema 3.1 e pelo corolário anterior. ■

Corolário 3.5. *Temos*

$$\frac{1}{\prod_i (1 - x_i) \prod_{i < j} (1 - x_i x_j)} = \sum_{\lambda \in Par} s_{\lambda}(x).$$

Demonstração: Notemos que o coeficiente de x^{α} no lado esquerdo da igualdade é o número de $(\mathbb{N} \cup \{0\})$ -matrizes simétricas A com $r(A) = \alpha$. De fato, como

$$\frac{1}{\prod_i (1 - x_i) \prod_{i < j} (1 - x_i x_j)} = \prod_k \sum_{a_{kk}=0}^{\infty} x_k^{a_{kk}} \prod_{i < j} \sum_{a_{ij}=0}^{\infty} (x_i x_j)^{a_{ij}},$$

para se obter x^{α} neste produto escolhemos uma $(\mathbb{N} \cup \{0\})$ -matriz simétrica $A = (a_{ij})$ tal que $x^{\alpha} = \prod_k \sum_{a_{kk}=0}^{\infty} x_k^{a_{kk}} \prod_{i < j} \sum_{a_{ij}=0}^{\infty} (x_i x_j)^{a_{ij}}$, donde o coeficiente de x^{α} no lado esquerdo da igualdade será o número de tais matrizes.

Por outro lado, o coeficiente de x^α em $\sum_{\lambda \in \text{Par}} s_\lambda(x)$ é o número de TYSS de tipo α . Logo, pelo corolário anterior, o resultado segue. ■

Corolário 3.6. *Temos*

$$\sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda = |\{w \in S_n : w^2 = 1\}|. \text{ (o número de involuções de } S_n)$$

Demonstração: Sejam $w = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \in S_n$ e $w \xrightarrow{RSK} (P, Q)$, onde P e Q são TYS de mesma forma $\lambda \vdash n$. A matriz permutação correspondente a w é simétrica se, e somente se, $w^2 = 1$ (olhar exercício 3.1). Agora, aplicando o Teorema 3.2, $w^2 = 1$ se, e somente se, $P = Q$ e o resultado segue. ■

Finalizamos esta seção apresentando o *algoritmo RSK dual*, representado por $A \xrightarrow{RSK^*} (P, Q)$, que trabalha exatamente como o algoritmo RSK, exceto por ser A uma $(0, 1)$ -matriz de suporte finito e que um elemento i desloca um elemento mais à esquerda que é maior do que ou igual a i e não o elemento mais à esquerda que é maior do que i (como acontece no algoritmo RSK).

Exemplo 3.6. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \implies W_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Então, $(P(1), Q(1)), \dots, (P(7), Q(7))$, com $(P, Q) = (P(7), Q(7))$, obtidos pelo algoritmo RSK^* são:

O teorema a seguir tem demonstração análoga à aquela do Teorema 3.1.

| P(i) | Q(i) |
|------------------------|------------------------|
| 1 | 1 |
| 1 3 | 1 1 |
| 1 2 3 | 1 1 2 |
| 1 2 1 3 | 1 1 2 3 |
| 1 2 3 1 3 | 1 1 3 2 3 |
| 1 2 3 1 3 3 | 1 1 3 2 4 3 |
| 1 2 3 1 2 3 3 | 1 1 3 2 4 3 5 |

Tabela 3.2: Obtenção de $(P(1), Q(1)), \dots, (P(7), Q(7))$

Teorema 3.3. *O algoritmo RSK^* é uma bijeção entre as $(0, 1)$ -matrizes de suporte finito e os pares (P, Q) tais que P^t (o transposto de P) e Q são TYSS com a mesma forma. Além disso, $c(A) = tipo(P)$ e $r(A) = tipo(Q)$.*

Do mesmo modo que obtivemos a Identidade de Cauchy (Proposição 3.1) a partir do Teorema 3.1, a proposição seguinte estabelece a *Identidade de Cauchy dual* como consequência do Teorema 3.3.

Proposição 3.2. *Temos*

$$\prod_{i,j} (1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda \in Par} s_{\lambda}(x) s_{\lambda'}(y).$$

Na seção seguinte estaremos interessados no estudo das partições planas via funções simétricas.

3.3 Partições Planas e Funções Simétricas

Nesta seção apresentamos algumas aplicações enumerativas das funções simétricas. Iniciamos pela generalização do conceito de partições de um inteiro não-negativo, conhecida como *partições planas*.

Definição 3.1. *Uma partição plana é uma matriz $\pi = (\pi_{ij})_{i,j \geq 1}$ de inteiros não-negativos tal que π tem suporte finito (apenas uma quantidade finita de entradas são não-nulas) e é não-crescente em cada linha e cada coluna. Se $\sum_{i,j} \pi_{ij} = n$, escrevemos $|\pi| = n$ e chamamos π de partição plana de n .*

Exemplo 3.7. *A seguir apresentamos exemplos de partições planas, onde omitimos as entradas iguais a 0.*

$$\begin{array}{rcl}
 n = 0 : & \emptyset \\
 n = 1 : & 1 \\
 n = 2 : & \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \\
 & \qquad \qquad \qquad 1 \\
 n = 3 : & \begin{array}{ccccccccccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & & & 1 \end{array}
 \end{array}$$

Uma partição $\lambda \vdash n$ pode ser vista como uma matriz unidimensional $(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots)$ de inteiros não-negativos com suporte finito e não-crescente, isto é, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$.

Segue, pois, que as partições planas generalizam para duas dimensões as partições ordinárias. Além disso, as partições planas têm similaridades que saltam aos olhos com as Tabelas de Young Semi-Simples, pois uma TYSS reversa é um tipo particular de partição plana. Devido a essa similaridade é de se esperar que as funções simétricas tenham um papel importante na enumeração das partições planas.

Definição 3.2. *Uma entrada $\pi_{ij} > 0$ de π é chamada de parte da partição plana π . A forma de π é a partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ tal que λ_i é igual ao número de partes não-nulas na i -ésima linha de π (ou*

seja, $\pi_{i\lambda_i} > 0$ e $\pi_{i,\lambda_i+1} = 0$). Logo, π tem r linhas se $r = l(\lambda)$ e, similarmente, π tem s colunas se $s = l(\lambda') = \lambda_1$. Denotamos por $l_1(\pi)$ e $l_2(\pi)$ os números de linhas e colunas de π , respectivamente. Definimos o traço de π de maneira usual: $tr(\pi) = \sum_i \pi_{ii}$.

Exemplo 3.8. A partição plana

$$\pi = \begin{array}{cccccccc} & 7 & 5 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ & 6 & 5 & 5 & 2 & 1 & 1 & & \\ & 6 & 3 & 2 & 2 & & & & \end{array}$$

tem forma $(8, 6, 4)$, 18 partes, 3 linhas, 8 colunas e traço 14.

Seja $\mathcal{P}(r, c)$ o conjunto de todas as partições planas com, no máximo, r linhas e, no máximo, c colunas. Por exemplo, $\mathcal{P}(1, c)$ é o conjunto das partições com comprimento menor do que ou igual a c e se $\pi \in \mathcal{P}(1, c)$, então $tr(\pi)$ é a maior parte de π .

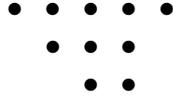
De posse dessas considerações preliminares, apresentamos o primeiro resultado importante desta seção cuja demonstração faz uso do algoritmo RSK.

Teorema 3.4. *Sejam $r, c \in \mathbb{N}$. Então,*

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r, c)} q^{tr(\pi)} x^{|\pi|} = \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^c (1 - qx^{i+j-1})^{-1}.$$

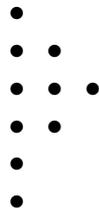
Demonstração: Vamos, primeiramente, descrever como juntar duas partições λ e μ com partes distintas, mas com o mesmo número de partes de modo a obter uma partição $\rho = \rho(\lambda, \mu)$. Traçamos o Diagrama de Ferrers de λ , mas com cada linha deslocada um espaço para a direita do início da linha anterior, chamamos este novo diagrama de *Diagrama de Ferrers Modificado* de λ .

Por exemplo, se $\lambda = (5, 3, 2)$, o Diagrama de Ferrers Modificado de λ é:

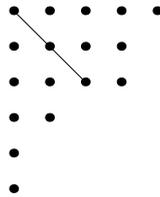


Obtemos também o Diagrama de Ferrers Modificado de μ transposto.

Por exemplo, se $\mu = (6, 3, 1)$, temos



Agora juntamos estes dois diagramas identificando suas diagonais principais. Para λ e μ acima, por exemplo, temos



Definimos $\rho(\lambda, \mu)$ como a partição cujo Diagrama de Ferrers é o diagrama juntado. Do nosso exemplo,

$$\rho(532, 631) = 544211.$$

A aplicação $(\lambda, \mu) \mapsto \rho(\lambda, \mu)$ estabelece uma bijeção entre os pares de partições (λ, μ) com k partes distintas e as partições ρ de posto k (definido ao final da Seção 2 do primeiro capítulo). Notemos que $|\rho| = |\lambda| + |\mu| - l(\lambda)$.

Agora, vamos estender a bijeção acima aos pares (P, Q) de TYSS reversas de mesma forma. Se λ^i denota a i -ésima coluna de P e μ^i a i -ésima coluna de Q , então, seja $\pi(P, Q)$ a matriz cuja i -ésima coluna é $\rho(\lambda^i, \mu^i)$.

Por exemplo, se

$$P = \begin{array}{cccc} 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \\ 2 & & & \end{array} \quad \text{e } Q = \begin{array}{cccc} 5 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & \\ 1 & & & \end{array},$$

então

$$\pi(P, Q) = \begin{array}{cccc} 4 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & & \\ 2 & & & \\ 2 & & & \end{array}$$

Assim, $\pi(P, Q)$ é uma partição plana. Trocando cada linha de $\pi(P, Q)$ por sua conjugada, obtemos uma outra partição plana $\pi'(P, Q)$.

Por exemplo, com $\pi(P, Q)$ acima, obtemos

$$\pi'(P, Q) = \begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \end{array}$$

Segue que a aplicação $(P, Q) \mapsto \pi'(P, Q)$ é uma bijeção entre pares (P, Q) de TYSS reversas de mesma forma e partições planas $\pi'(P, Q)$ obtidas por este procedimento. De fato, observemos que o processo para se obter $\pi'(P, Q)$ é facilmente invertido para se obter P e Q .

Vamos denotar por $\text{diag}(\pi') = (\pi'_{11}, \pi'_{22}, \dots)$ a diagonal principal de π' , $\text{max}(P)$ a maior parte P_{11} da TYSS reversa P . Lembremos que

$sh(P)$ denota a forma de P , $sh(P) = sh(Q)$ e

$$|\pi'| = |P| + |Q| - |sh(P)|, \quad (3.3.7)$$

$$\begin{aligned} \text{diag}(\pi') &= sh(P) = sh(Q), \text{ donde } \text{tr}(\pi') = |sh(P)|, \\ l_1(\pi') &= \max(Q), \\ l_2(\pi') &= \max(P). \end{aligned}$$

Seja $A = (a_{ij})$ uma $(\mathbb{N} \cup \{0\})$ -matriz de suporte finito. Queremos associar com A um, e somente um, par de TYSS reversas de mesma forma. Fazemos isso com uma variação do algoritmo RSK, onde invertem-se as regras \leq e \geq na definição da inserção na linha. Ou, equivalentemente, se

$$W_A = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \\ v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$$

é a matriz permutação generalizada associada a A , então aplicamos o algoritmo RSK na matriz

$$\begin{pmatrix} -u_n & \cdots & -u_1 \\ -v_n & \cdots & -v_1 \end{pmatrix}$$

e, depois, trocamos o sinal para positivo de todas as entradas do par de TYSS. Assim, obtemos um par (P, Q) de TYSS reversas satisfazendo

$$|P| = \sum_{i,j} j a_{ij} \quad (3.3.8)$$

$$\begin{aligned} |Q| &= \sum_{i,j} i a_{ij} \\ \max(P) &= \max(\{j : a_{ij} \neq 0\}) \\ \max(Q) &= \max(\{i : a_{ij} \neq 0\}) \\ |sh(P)| &= |sh(Q)| = \sum_{i,j} a_{ij}. \end{aligned}$$

Segue das Equações (3.3.7) e (3.3.8) que se \mathcal{M}_{rc} é o conjunto de todas as $(\mathbb{N} \cup \{0\})$ -matrizes $r \times c$, então

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \mathcal{P}(r,c)} q^{tr(\pi)} x^{|\pi|} &= \sum_{A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{rc}} q^{(\sum_{i,j} a_{ij})} x^{(\sum_{i,j} (i+j)a_{ij} - \sum_{i,j} a_{ij})} \\ &= \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^c \left(\sum_{a_{ij} \geq 0} q^{a_{ij}} x^{(i+j-1)a_{ij}} \right) \\ &= \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^c (1 - qx^{i+j-1})^{-1}. \end{aligned}$$

■

Como caso particular deste teorema temos

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(1,c)} q^{tr(\pi)} x^{|\pi|} = \frac{1}{(1 - qx)(1 - qx^2) \cdots (1 - qx^c)}.$$

A seguir apresentamos duas consequências deste teorema. Seja $\mathcal{P}(r)$ o conjunto de todas as partições planas com, no máximo, r linhas. Se $q = 1$ e $c \rightarrow \infty$ no teorema anterior, então temos o seguinte resultado sobre a enumeração dos elementos de $\mathcal{P}(r)$.

Corolário 3.7. *Seja $r \in \mathbb{N}$. Então,*

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r)} x^{|\pi|} = \prod_{i \geq 1} (1 - x^i)^{-\min\{i,r\}}.$$

Demonstração: Pelo Teorema 3.4, temos

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \mathcal{P}(r)} x^{|\pi|} &= \prod_{i=1}^r \prod_{j \geq 1} (1 - x^{i+j-1})^{-1} \\ &= \underbrace{(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1} \cdots (1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1} \cdots}_{(1-x^3)^{-1}(1-x^4)^{-1} \cdots} \underbrace{\cdots (1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1} \cdots}_{(1-x^r)^{-1}(1-x^{r+1})^{-1} \cdots} \\ &= (1-x)^{-1} (1-x^2)^{-2} (1-x^3)^{-3} \cdots (1-x^r)^{-r} (1-x^{r+1})^{-r} (1-x^{r+2})^{-r} \cdots \\ &= \prod_{i \geq 1} (1-x^i)^{-\min\{i,r\}}. \end{aligned}$$

■

Seja \mathcal{P} o conjunto de todas as partições planas e seja $r \rightarrow \infty$ no corolário anterior. O corolário a seguir é de grande importância na teoria das partições planas.

Corolário 3.8. *Temos*

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}} x^{|\pi|} = \prod_{i \geq 1} (1 - x^i)^{-i}.$$

O teorema a seguir é visto como uma variação do Teorema 3.4 e sua demonstração faz uso do Teorema 3.2.⁽³⁾ Dizemos que uma partição plana $\sigma = (\sigma_{ij})$ é simétrica se $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \forall i, j$. Denotamos por $\mathcal{S}(r)$ o conjunto de todas as partições planas simétricas com, no máximo, r linhas e, portanto, r colunas no máximo.

Teorema 3.5. *Seja $r \in \mathbb{N}$. Então,*

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}(r)} q^{tr(\sigma)} x^{|\sigma|} = \prod_{i=1}^r (1 - qx^{2i-1})^{-1} \prod_{1 \leq i < j \leq r} (1 - q^2 x^{2(i+j-1)})^{-1}.$$

Demonstração: Seja $\pi'(P, Q)$ a partição plana descrita na demonstração do Teorema 3.4. Logo, π' é simétrica se, e somente se, $P = Q$.

Além disso, suponhamos que $A \xrightarrow{RSK'} (P, Q)$, onde RSK' é o algoritmo RSK “reverso” descrito na demonstração do Teorema 3.4 (sendo P e Q TYSS reversas). Temos que RSK' satisfaz o Teorema 3.2, isto é,

$A \xrightarrow{RSK'} (P, P)$ se, e somente se, $A = A^t$. Seja M'_r o conjunto de todas as $(\mathbb{N} \cup \{0\})$ -matrizes $r \times r$ simétricas. Logo, procedendo como na demonstração do Teorema 3.4, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(r)} q^{tr(\sigma)} x^{|\sigma|} &= \sum_{A=(a_{ij}) \in M'_r} q^{\sum a_{ij} x^{\sum (i+j-1)a_{ij}}} \\ &= \sum_A q^{(\sum_{i \geq 1} a_{ii}) + (2 \sum_{1 \leq i < j \leq r} a_{ij})} x^{(\sum_{i \geq 1} (2i-1)a_{ii}) + (2 \sum_{1 \leq i < j \leq r} (i+j-1)a_{ij})} \\ &= \prod_{i=1}^r \left(\sum_{a_{ii} \geq 0} q^{a_{ii}} x^{(2i-1)a_{ii}} \right) \prod_{1 \leq i < j \leq r} \left(\sum_{a_{ij} \geq 0} q^{2a_{ij}} x^{2(i+j-1)a_{ij}} \right) \\ &= \prod_{i=1}^r (1 - qx^{2i-1})^{-1} \prod_{1 \leq i < j \leq r} (1 - q^2 x^{2(i+j-1)})^{-1}. \end{aligned}$$

■

³Para uma demonstração alternativa sem o uso do Teorema 3.2, veja Seção 7.20 na referência [12].

Apresentamos a seguir alguns resultados que decorrem da restrição do tamanho da maior parte da partição plana $\pi \in \mathcal{P}(r, c)$. Para compreender melhor os significados das restrições do número de linhas, do número de colunas e da maior parte, vamos apresentar o diagrama de uma partição plana, que deve generalizar a noção de Diagrama de Ferrers de uma partição.

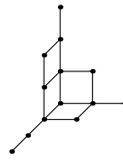
Definição 3.3. O diagrama $D(\pi)$ de uma partição plana $\pi = (\pi_{ij})$ é o subconjunto de \mathbb{N}^3 definido por

$$D(\pi) = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 : 1 \leq k \leq \pi_{ij}\}.$$

Exemplo 3.9. Se

$$\pi = \begin{array}{ccc} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & \\ 1 & & \\ 1 & & \end{array}$$

então $D(\pi)$ é dado por



Observemos que se w é uma permutação dos três eixos coordenados, então w transforma o diagrama $D(\pi)$ de uma partição plana de n no diagrama $w(D(\pi))$ de uma outra partição plana de n . Assim, temos que cada partição plana tem seis partições planas associadas (indexadas por elementos de S_3), obtidas pelos diagramas decorrentes de:

- deixar π inalterado;
- conjugar cada linha de π ;
- conjugar cada coluna de π ;
- transpor π ;

- conjugar cada linha de π e depois transpor;
- conjugar cada coluna de π e depois transpor.

No que segue, vamos identificar π com seu diagrama $D(\pi)$. Note-mos que $l_1(\pi)$, $l_2(\pi)$ e $\max(\pi)$ permutam entre eles quando aplicamos w em π . Assim, por exemplo, temos que o número de partições planas de n com, no máximo, r linhas e, no máximo, c colunas é igual ao número de partições planas de n com, no máximo, c linhas e maior parte, no máximo, r .

Sejam $r, c, t \in \mathbb{N}$ e definimos a *caixa*

$$B(r, c, t) = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq c, 1 \leq k \leq t\}.$$

Assim, uma partição plana π satisfaz $l_1(\pi) \leq r$, $l_2(\pi) \leq c$ e $\max(\pi) \leq t$ se, e somente se, o diagrama de π está contido em $B(r, c, t)$, $D(\pi) \subset B(r, c, t)$. Antes de prosseguir, façamos mais algumas definições.

Dado um Diagrama de Young (Ferrers) λ e um quadrado $u = (i, j) \in \lambda$, definimos $h(u) = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$, ou seja, $h(u)$ conta o número de quadrados à direita ou abaixo de u em sua coluna e u inclusive. Vamos escrever $h(u)$ dentro do quadrado u .

Exemplo 3.10. A partição 4421 tem $h(u)$ dado por

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 5 | 3 | 2 |
| 6 | 4 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | | |
| 1 | | | |

Definimos, também, $c(u)$ de λ em $u = (i, j)$ por

$$c(u) = j - i.$$

Exemplo 3.11. $\lambda = 4421$, $c(u)$ é dado por

| | | | |
|----|----|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| -1 | 0 | 1 | 2 |
| -2 | -1 | | |
| -3 | | | |

De posse dessas observações podemos apresentar o seguinte lema.

Lema 3.5. *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \text{Par}$ e $\mu_i = \lambda_i + n - i$. Então,*

$$\prod_{u \in \lambda} [h(u)] = \frac{\prod_{i \geq 1} [\mu_i]!}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} [\mu_i - \mu_j]} \tag{3.3.9}$$

$$\prod_{u \in \lambda} [n + c(u)] = \prod_{i=1}^n \frac{[\mu_i]!}{[n - i]!}, \tag{3.3.10}$$

onde $[k] = 1 - q^k$ e $[k]! = [1][2] \cdots [k] = (1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^k)$.

Demonstração: Adicionamos $n - i$ quadrados à i -ésima linha do diagrama de λ , obtendo o diagrama de μ . No quadrado (i, j) inserimos o número $\mu_i - j + 1$. Logo, o conjunto dos números inseridos é $\bigcup_{i \geq 1} \{1, 2, \dots, \mu_i\} = \{\{1, 2, \dots, \mu_1\}, \{1, 2, \dots, \mu_2\}, \dots\}$, ou seja, os expoentes no numerador de (3.3.9). Para cada $1 \leq i < j \leq n$, escrevemos o número $\mu_i - \mu_j$ no quadrado $(i, \mu_j + 1)$.

Por exemplo, $\lambda = 4421$, então o diagrama de μ (com $\mu_i - \mu_j$ em negrito) é:

| | | | | | | |
|---|----------|---|----------|---|---|----------|
| 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | |
| 3 | 2 | 1 | | | | |
| 1 | | | | | | |

Agora, removendo as colunas $\mu_j + 1$ obtemos novamente o diagrama de λ com $h(u)$ no quadrado u , o que demonstra (3.3.9).

A demonstração de (3.3.10) é feita de modo análogo. ■

Dado $\lambda \vdash n$, definimos

$$b(\lambda) = \sum_i (i - 1)\lambda_i = \sum_i \binom{\lambda'_i}{2}. \tag{3.3.11}$$

Notemos que $b(\lambda)$ é a menor soma possível das entradas de uma TYSS (podendo ter 0 como parte) de forma λ obtido unicamente colocando $i - 1$ em todos os quadrados da i -ésima linha de λ . Em particular, para $n \geq l(\lambda)$, temos que $s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = q^{b(\lambda)}v(q)$, sendo $v(q)$ um polinômio em q tal que $v(0) = 1$ e, se $n < l(\lambda)$, $s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = 0$. Com isso temos o seguinte teorema.

Teorema 3.6. *Para quaisquer $\lambda \in Par$ e $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = q^{b(\lambda)} \prod_{u \in \lambda} \frac{[n + c(u)]}{[h(u)]}.$$

Demonstração: Se $n < l(\lambda)$ ambos os lados da igualdade são nulos, pois existe $u = (i, , j)$ tal que $n + c(u) = n + j - i = 0$ porque $1 \leq i \leq l(\lambda)$. Seja, pois, $n \geq l(\lambda)$. Como vimos na Seção 2.3.6, $s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = a_{\lambda+\delta}/a_\delta$, onde $a_{\lambda+\delta} = \det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{i,j=1}^n$ e $a_\delta = \det(x_i^{n-j})_{i,j=1}^n$, donde

$$s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = \frac{\det(q^{(i-1)(\lambda_j+n-j)})_{i,j=1}^n}{\det(q^{(i-1)(n-j)})_{i,j=1}^n}. \quad (3.3.12)$$

O denominador é igual a $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (q^{(i-1)} - q^{(j-1)})$. Seja

$$a_\delta^* = \det(x_j^{i-1})_{i,j=1}^n.$$

Então, $a_\delta^* = (-1)^{\binom{n}{2}} a_\delta$, pois a matriz $(x_j^{i-1})_{i,j=1}^n$ é obtida transpondo $(x_i^{n-j})_{i,j=1}^n$ e depois invertendo a ordem das linhas. Logo, o numerador em (3.3.12) é $a_\delta^*(q^{\mu_1}, q^{\mu_2}, \dots, q^{\mu_n})$, sendo $\mu_j = \lambda_j + n - j$. Assim,

$$s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{q^{\mu_i} - q^{\mu_j}}{q^{i-1} - q^{j-1}} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{q^{\mu_j} (q^{\mu_i - \mu_j} - 1)}{q^{(i-1)} (1 - q^{j-i})}.$$

Pelo lema anterior, usando $\prod_{1 \leq i < j \leq n} [j - i] = \prod_{i=1}^n [n - i]!$, temos

$$s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = \frac{q^{\sum_{i < j} \mu_j} \prod_{i < j} [\mu_i - \mu_j] \prod_{i \geq 1} [\mu_i]!}{q^{\sum_{i < j} (i-1)} \prod_{i < j} [j - i] \prod_{i \geq 1} [\mu_i]!} = q^{b(\lambda)} \prod_{u \in \lambda} \frac{[n + c(u)]}{[h(u)]}.$$

■

Apresentamos a seguir algumas consequências deste teorema.

Corolário 3.9. *Para qualquer $\lambda \in \text{Par}$ temos*

$$s_\lambda(1, q, q^2, \dots) = \frac{q^{b(\lambda)}}{\prod_{u \in \lambda} [h(u)]}.$$

Demonstração: Basta tomar $n \rightarrow \infty$ no teorema anterior, pois $\prod_{u \in \lambda} (1 - q^{n+c(u)})$ vai para 1 (por (3.3.10)).

■

Corolário 3.10. *Para quaisquer $\lambda \in \text{Par}$ e $n \in \mathbb{N}$ temos*

$$s_\lambda(1^n) = \prod_{u \in \lambda} \frac{n + c(u)}{h(u)}.$$

Demonstração: Fazendo $q = 1$ no teorema anterior e usando o fato $1 - q^k = (1 - q)(1 + q + \dots + q^{k-1})$ e cancelando o fator $1 - q$ no numerador e no denominador, o resultado segue.

■

O Teorema 3.6 estabelece uma função geradora para as partições planas cujas colunas são estritamente decrescentes. Na demonstração do próximo teorema veremos que, se $\lambda = (c^r)$, podemos associar uma função geradora com partições planas de forma (c^r) .

Teorema 3.7. *Sejam r, c, t fixos, com $r \leq c$. Então,*

$$\sum_{\pi \in B(r, c, t)} q^{|\pi|} = \frac{[t+1][t+2]^2 \cdots [t+r]^r [t+r+1]^r \cdots [t+c]^r [t+c+1]^{r-1} \cdots [t+r+c-1]}{[1][2] \cdots [r]^r [r+1]^r \cdots [c]^r [c+1]^r \cdots [c+r-1]}, \quad (3.3.13)$$

onde $[i] = 1 - q^i$.

Demonstração: Seja $\lambda = (c^r)$, retangular com r linhas e c colunas. Notemos que assumindo $r \leq c$ não perdemos generalidade, pois poderíamos trocar λ por λ' . Seja $\pi = (\pi_{ij})$ uma partição plana de forma λ cujas colunas são estritamente decrescentes, possivelmente com entradas iguais a 0. Definimos $\pi^* = (\pi_{ij}^*)$ por $\pi_{ij}^* = \pi_{ij} - r + i$. Com isso, cada coluna estritamente decrescente de π torna-se uma coluna não-crescente de π^* .

Por exemplo:

$$\pi = \begin{array}{cccccc} 6 & 6 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \implies \pi^* = \begin{array}{cccccc} 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Assim, π^* é uma partição plana satisfazendo

$$\begin{aligned} l_1(\pi^*) &\leq r, l_2(\pi^*) \leq c \\ \max(\pi^*) &= \max(\pi) - r + 1, \\ |\pi^*| &= |\pi| - \sum_{i,j=1}^r (r-i) = |\pi| - c \sum_{i=1}^r (r-i) = |\pi| - c \binom{r}{2}. \end{aligned}$$

Inversamente, dada tal partição plana π^* , fazendo $\pi_{ij} = \pi_{ij}^* + r - i$, podemos obter π . Logo, pelo Teorema 3.6,

$$\sum_{\pi \in B(r, c, t)} q^{|\pi|} = q^{-\binom{r}{2}c} s_{(c^r)}(1, q, \dots, q^{t+r-1}) = q^{b((c^r)) - \binom{r}{2}c} \prod_{u \in (c^r)} \frac{[t+r+c(u)]}{[h(u)]}. \quad (3.3.14)$$

Por (3.3.11), temos $b((c^r)) = \binom{r}{2}c$. Além disso, o conjunto formado pelos $h(u)$ de (c^r) é $\{1, 2^2, 3^3, \dots, r^r, (r+1)^r, \dots, c^r, (c+1)^{r-1}, (c+2)^{r-2}, \dots, c+r-1\}$ e o conjunto formado pelos $c(u)$ é obtido do anterior pela subtração de r . Substituindo os valores de $c(u)$ e $h(u)$ em

(3.3.13) o resultado segue. ■

Com este teorema finalizamos esta seção. A seguir, na próxima seção, vamos aplicar as funções simétricas em enumeração de permutações.

3.4 Enumeração de Permutações via Funções Simétricas

Nesta seção, aplicamos alguns resultados sobre funções simétricas para enumerar determinados tipos de permutações.

Se $w = w_1 \cdots w_n \in S_n$, seja $v = w_{i_1} \cdots w_{i_k}$ uma subsequência de w , ou seja, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$. Dizemos que v é crescente se $w_{i_1} < w_{i_2} < \cdots < w_{i_k}$ e decrescente se $w_{i_1} > w_{i_2} > \cdots > w_{i_k}$. Vamos denotar por $msc(w)$ o comprimento (ou número de termos) da maior subsequência crescente de w e por $r_i(w)$ o inteiro j mais à direita em w tal que a maior subsequência crescente de w , cujo último termo é j , tem comprimento i .

Exemplo 3.12. Se $w = 725481963$, então $msc(w) = 4$, $r_1(w) = 1$, $r_2(w) = 3$, $r_3(w) = 6$ e $r_4(w) = 9$, sendo $r_i(w)$ indefinido para $i > 4$. Em geral, $1 = r_1(w) < r_2(w) < \cdots < r_{msc(w)}(w)$.

Proposição 3.3. Sejam $w \in S_n$, $m = msc(w)$ e $w \xrightarrow{RSK} (P, Q)$. Então, a primeira linha de P é igual a $r_1(w), r_2(w), \dots, r_m(w)$.

Demonstração: Uma subsequência crescente w_{i_1}, \dots, w_{i_k} de w é equivalente a uma cadeia $(i_1, w_{i_1}) < \cdots < (i_k, w_{i_k})$ no conjunto parcialmente ordenado $I(w)$ (definido antes do Lema 3.4). Então, a anti-cadeia $I_j(w)$ consiste dos pares (i, w_i) para os quais a maior subsequência crescente de w terminando em w_i tem comprimento j .

O máximo valor de i para um tal par é, por definição, u_{jn_j} , e o valor correspondente de w_i é v_{jn_j} . Logo, $v_{jn_j} = r_j(w)$ e a demonstração segue pelo Lema 3.4. ■

O corolário a seguir, imediato da proposição anterior, estabelece uma interpretação combinatória do comprimento da primeira linha de P quando $w \xrightarrow{RSK} (P, Q)$.

Corolário 3.11. *Sejam $w \in S_n$, $w \xrightarrow{RSK} (P, Q)$ e $sh(P) = sh(Q) = \lambda$. Então, $\lambda_1 = msc(w)$.*

Corolário 3.12. *Seja $g_p(n)$ o número de permutações $w \in S_n$ para as quais $msc(w) = p$. Então,*

$$g_p(n) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda_1 = p}} (f^\lambda)^2.$$

Demonstração: Existem $(f^\lambda)^2$ pares de TYS de forma λ . Logo, o resultado segue do corolário anterior. ■

Vamos procurar agora uma forma de enumerar as permutações não só com $msc(w) = p$, mas, também, com exigência quanto ao comprimento da maior subsequência decrescente.

Se $w \in S_n$, definimos a forma $sh(w)$ de w como a forma do TYS P (ou Q) quando $w \xrightarrow{RSK} (P, Q)$. A seguir, apresentamos um teorema cuja demonstração está num dos apêndices da referência [12] e é longa, razão pela qual não a colocamos neste trabalho.

Teorema 3.8. *Sejam $w \in S_n$ e $sh(w) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$. Então, para todo $i \geq 1$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_i$ é igual ao comprimento da maior subsequência de w que pode ser escrita como uma união de i subsequências crescentes.*

Exemplo 3.13. *Se $w = 247951368$, então a subsequência 24791368 é a união das subsequências crescentes 2479 e 1368. Logo, $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 8$. Como w não pode ser escrita como uma união de duas subsequências crescentes, então $\lambda_1 + \lambda_2 = 8$.*

Temos denotado por $T \leftarrow k$ a inserção, nas linhas, de um inteiro k numa TYSS T . Assumindo que todas as entradas de T são distintas e diferentes de k , vamos denotar por $k \rightarrow T$ a inserção de k nas colunas de T . Esta inserção é definida exatamente como a inserção

em linha trocando linha por coluna. Equivalentemente, se t denota transposição, então $(k \rightarrow T) = (T^t \leftarrow k)^t$, igualdade que decorre da análise de casos do seguinte lema fundamental.

Lema 3.6. *Se $i \neq j$, então*

$$j \rightarrow (T \leftarrow i) = (j \rightarrow T) \leftarrow i.$$

Ou seja, inserção em linha e em coluna comutam.

Lema 3.7. *Sejam*

$$\begin{aligned} P(i_1, i_2, \dots, i_n) &= ((i_1 \leftarrow i_2) \leftarrow i_3) \leftarrow \dots \leftarrow i_n \\ \tilde{P}(i_1, i_2, \dots, i_n) &= i_1 \rightarrow \dots \rightarrow (i_{n-2} \rightarrow (i_{n-1} \rightarrow i_n)). \end{aligned}$$

Então,

$$P(i_1, i_2, \dots, i_n) = \tilde{P}(i_1, i_2, \dots, i_n).$$

Demonstração: A prova é por indução em n . O resultado é claro para $n = 1$, pois $P(i_1) = \tilde{P}(i_1) = i_1$. Seja $n \geq 2$ e suponhamos que o resultado vale para $\forall m \leq n$. Temos

$$\begin{aligned} P(i_1, \dots, i_{n+1}) &= P(i_1, \dots, i_n) \leftarrow i_{n+1} \\ &= \tilde{P}(i_1, \dots, i_n) \leftarrow i_{n+1} \\ &= [i_1 \rightarrow \tilde{P}(i_2, \dots, i_n)] \leftarrow i_{n+1} && \text{(definição de } \tilde{P}) \\ &= i_1 \rightarrow [\tilde{P}(i_2, \dots, i_n) \leftarrow i_{n+1}] && \text{(lema anterior)} \\ &= i_1 \rightarrow [P(i_2, \dots, i_n) \leftarrow i_{n+1}] \\ &= i_1 \rightarrow P(i_2, \dots, i_n, i_{n+1}) && \text{(definição de } \leftarrow) \\ &= i_1 \rightarrow \tilde{P}(i_2, \dots, i_n, i_{n+1}) \\ &= \tilde{P}(i_1, \dots, i_n, i_{n+1}). && \text{(definição de } \rightarrow) \end{aligned}$$

■

De posse desse lema, apresentamos o teorema a seguir que estabelece um nova propriedade de simetria do algoritmo RSK.

Teorema 3.9. *Sejam $w = w_1 w_2 \dots w_n \in S_n, w \xrightarrow{RSK} (P, Q)$ e $w^r = w_n \dots w_2 w_1$. Suponhamos que $w^r \xrightarrow{RSK} (P^*, Q^*)$. Então, $P^* = P^t$. Em particular, $sh(w) = sh(w^r)$.⁽⁴⁾*

⁴a descrição de Q^* é mais complexa e é apresentada no apêndice da referência [12]. Para os propósitos deste trabalho, não necessitamos de Q^* e, por isso, vamos omiti-lo.

Demonstração: Usando a notação do lema anterior, temos que $P(w_1, \dots, w_n) = P$ e $\tilde{P}(w_1, \dots, w_n)^t = P^*$. Pelo lema anterior, $P^* = P^t$.

■

Como uma subsequência decrescente de w torna-se uma subsequência crescente (na ordem inversa) de w^r e vice-versa, o resultado a seguir é uma consequência imediata dos Teoremas 3.9 e 3.10.

Teorema 3.10. *Sejam $w \in S_n$ e $sh(w) = \lambda$. Então, para todo $i \geq 1$, $\lambda'_1 + \dots + \lambda'_i$ é igual ao comprimento da maior subsequência de w que pode ser escrita como uma união de i subsequências decrescentes. Em particular, λ'_1 é o comprimento da maior subsequência decrescente de w .*

Estamos agora em condições de estabelecer a segunda conexão entre as funções simétricas e a enumeração de permutações. Este resultado está no corolário a seguir que é uma consequência imediata do teorema anterior e da Proposição 3.3. Escrevemos $msd(w)$ para o comprimento da maior subsequência decrescente de w .

Corolário 3.13. *Seja $g_{p,q}(n)$ o número de permutações $w \in S_n$ tais que $msc(w) = p$ e $msd(w) = q$. Então,*

$$g_{p,q}(n) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda_1 = p, \lambda'_1 = q}} (f^\lambda)^2.$$

Finalizamos esta seção com dois exemplos.

Exemplo 3.14. *Se $w \in S_{pq+1}$, então $msc(w) > p$ ou $msd(w) > q$, pois nenhuma partição $\lambda \vdash pq+1$ satisfaz $\lambda_1 \leq p$ e $\lambda'_1 \leq q$ (se assim o fosse, $|\lambda| < pq+1$). Logo, $g_{p,q}(pq+1) = 0$.*

Exemplo 3.15. *Sejam $p, q > n$. Então, existem exatamente $p(n)$ partições $\lambda \vdash (p+q+n-1)$ tais que $\lambda_1 = p$ e $\lambda'_1 = q$, quais sejam, $\lambda = (p, 1+\mu_1, 1+\mu_2, \dots, 1+\mu_{q-1})$, onde $\mu \vdash n$, ou seja, $\lambda = (p, 1+\mu)$. Então*

$$g_{p,q}(p+q+n-1) = \sum_{\mu \vdash n} (f^{(p, 1+\mu)})^2.$$

3.5 Funções Simétricas e a Enumeração Sob a Ação de Grupos

A teoria de enumeração sob a ação de grupos (ou Teoria de Pólya) é um tópico importante em combinatória enumerativa, que normalmente é apresentada sem fazer uso das funções simétricas. Nesta seção, no entanto, vamos abordar esta teoria a partir do que vimos até agora.

Lembremos que a Teoria de Pólya apóia-se numa função geradora $Z_G(x)$ dos tipos cíclicos dos elementos de um subgrupo G de S_R (o grupo simétrico de todas as permutações de um conjunto finito R).

Definição 3.4. *Seja K um subgrupo do grupo simétrico S_R . Definimos o indicador cíclico argumentado \tilde{Z}_K de K como sendo a função simétrica*

$$\tilde{Z}_K = \sum_{w \in K} p_{\rho(w)},$$

onde $\rho(w)$ denota o tipo cíclico de w . O indicador cíclico Z_K de K é definido por

$$Z_K = \frac{1}{|K|} \sum_{w \in K} p_{\rho(w)}.$$

Notemos que Z_K (ou \tilde{Z}_K) é uma função geradora para os elementos de K de acordo com seu tipo cíclico. Além disso, se $n = |R|$, então Z_K e \tilde{Z}_K são homogêneas de grau n , ou seja, $Z_K, \tilde{Z}_K \in \Lambda^n$.

Na exposição tradicional da Teoria de Pólya, a função simétrica soma de potências p_i é substituída por uma variável t_i . Isto representa apenas uma mudança de ponto de vista, pois as p_i 's são algebricamente independentes (Corolário 2.4).

Vejamos agora dois exemplos para ilustrar a definição anterior.

Exemplo 3.16. *Sejam R o conjunto de vértices de um quadrado e G o grupo de todas as transformações espaciais do quadrado agindo em R . O elemento identidade tem indicador cíclico p_1^4 . As rotações de 90° ou 270° têm indicador cíclico p_4 . A rotação de 180° tem indicador cíclico p_2^2 . As duas reflexões diagonais têm indicador cíclico $p_1^2 p_2$. Logo,*

$$Z_G = \frac{1}{8}(p_1^4 + 2p_4 + 3p_2^2 + 2p_1^2 p_2).$$

Se considerarmos G como o grupo das simetrias rotacionais planas do quadrado, teríamos

$$Z_G = \frac{1}{4}(p_1^4 + 2p_4 + p_2^2).$$

Exemplo 3.17. Seja G o grupo S_R de todas as permutações do conjunto de n elementos R , então $G \cong S_n$. Seja $\lambda \vdash n$. Lembremos (igualdade (2.3.1)) que $n!z_\lambda^{-1}$ é o número de permutações $w \in S_n$ de tipo cíclico λ . Logo, pela Proposição 2.10, $Z_G = h_n$.

Sejam $X = \{c_1, c_2, \dots\}$ um conjunto de cores, S um conjunto não-vazio e X^S o conjunto de todas as funções $f : S \rightarrow X$. Pensamos em f como uma coloração do conjunto S , com o elemento $s \in S$ recebendo a cor $f(s) \in X$. O peso x^f de $f \in X^S$ é definido por

$$x^f = \prod_{i \geq 1} x_i^{|f^{-1}(c_i)|}.$$

Exemplo 3.18. Sejam $X = \{\text{preta}, \text{branca}\}$ e S o conjunto dos vértices de um quadrado, $S = \{a, b, c, d\}$. Tomemos $f : S \rightarrow X$ tal que $f(a) = f(b) = \text{preta}$ e $f(c) = f(d) = \text{branca}$. Logo, $x^f = x_1^2 x_2^2$.

Assim, x^f é um monômio de grau $n = |S|$ nas variáveis x_1, x_2, \dots , que, para cada i , diz quantos elementos de S são coloridos com c_i .

Existe uma ação natural de $G = S_S$ em X^S : se $w \in G$, $f \in X^S$ e $s \in S$, então

$$(w \cdot f)(s) = f(w \cdot s).$$

Denotamos por X^S/G o conjunto das órbitas desta ação, ou seja, os elementos de X^S/G são as classes de equivalência com respeito à relação $\sim : f \sim g$ se existe $w \in G$ tal que $g = w \cdot f$. Notemos que se $f \sim g$, então $x^f = x^g$. Assim, se $\mathcal{F} \in X^S/G$, definimos $x^{\mathcal{F}}$ como x^f , para qualquer $f \in \mathcal{F}$. As classes de equivalência \mathcal{F} são chamadas *padrões*. O *inventário padrão* de G é a função geradora

$$F_G(x) = \sum_{\mathcal{F} \in X^S/G} x^{\mathcal{F}}.$$

Assim, o coeficiente de um monômio x^α em $F_G(x)$ é o número de órbitas $\mathcal{F} \in X^S/G$ de peso x^α . Como os elementos de X são tratados igualmente, (são cores), segue que $F_G(x)$ é uma função simétrica; mais ainda $F_G(x) \in \Lambda^n$.

Exemplo 3.19. *Sejam S o conjunto dos vértices de um quadrado e G o grupo de suas simetrias espaciais, como no exemplo 3.17. Duas colorações dos vértices são equivalentes se existir uma simetria do quadrado levando uma coloração na outra. Seja $\lambda \vdash 4$. O coeficiente de m_λ em F_G é o número de colorações não-equivalentes dos vértices usando λ_i i 's, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Utilizando a notação $\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}$ para um quadrado cujos vértices têm cores a, b, c e d , apresentamos abaixo representantes de cada uma destas colorações não-equivalentes (usando as cores 1, 2, 3, 4):*

$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 3 & 4 & 4 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 4 & 2 \end{matrix}$

Então, $F_G = m_4 + m_{31} + 2m_{22} + 2m_{211} + 3m_{1111}$.

Se G fosse o grupo de simetrias rotacionais do quadrado, teríamos, além daquelas acima, as seguintes colorações não-equivalentes:

$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{matrix}$

e $F_G = m_4 + m_{31} + 2m_{22} + 3m_{211} + 6m_{1111}$.

Exemplo 3.20. *Sejam G o grupo S_R de todas as permutações do conjunto R de n elementos, como no exemplo 3.18. Para simplificar vamos assumir $R = [n]$, donde $S_R = S_n$. Duas colorações $f, g \in X^R$ são equivalentes se, e somente se, $\{|f^{-1}(c)| : c \in X\} = \{|g^{-1}(c)| : c \in X\}$. Logo, o coeficiente de qualquer monômio x^α de grau n em F_{S_n} é igual a 1, donde*

$$F_{S_n} = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda = h_n.$$

Até aqui, temos definido duas funções simétricas Z_G e F_G associadas com o grupo de permutações G . O indicador de ciclo Z_G é definido em termos das funções simétricas soma de potências, enquanto a

função simétrica inventário padrão F_G é definida em termos das funções simétricas monomiais m_λ .

O lema a seguir, chamado Lema de Burnside, é um resultado simples porém fundamental. Ele vai permitir demonstrar o resultado mais importante desta seção, qual seja, $Z_G = F_G$.

Lema 3.8. *Sejam Y um conjunto finito e G um subgrupo de S_Y . Para cada $w \in G$ seja*

$$Fix(w) = \{y \in Y : w(y) = y\},$$

onde $|Fix(w)|$ é o número de ciclos de tamanho 1 na permutação w . Seja Y/G o conjunto das órbitas de G . Então,

$$|Y/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{w \in G} |Fix(w)|.$$

Demonstração: Para $y \in Y$, seja $G_y = \{w \in G : w(y) = y\}$, o estabilizador de y . Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{w \in G} |Fix(w)| &= \frac{1}{|G|} \sum_{w \in G} \sum_{\substack{y \in Y \\ w(y)=y}} 1 \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{y \in Y} \sum_{\substack{w \in G \\ w(y)=y}} 1 \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{y \in Y} |G_y|. \end{aligned}$$

Seja $Gy = \{w(y) : w \in G\}$ a órbita de G contendo y . Como duas órbitas são disjuntas ou coincidem, o conjunto formado pelos elementos $w(y), w \in G$, contém cada elemento da órbita Gy o mesmo número de vezes, qual seja, $|G|/|Gy|$ vezes. Logo, y ocorre $|G|/|Gy|$ vezes entre os elementos $w(y)$, donde

$$\frac{|G|}{|Gy|} = |G_y|.$$

$$\text{Assim, } \frac{1}{|G|} \sum_{w \in G} |Fix(w)| = \frac{1}{|G|} \sum_{y \in Y} \frac{|G|}{|Gy|} = \sum_{y \in Y} \frac{1}{|Gy|}.$$

Para uma órbita fixa $\mathcal{O} \in Y/G$, temos $G_y = \mathcal{O}$ se, e somente se, $y \in \mathcal{O}$. Logo, o termo $\frac{1}{|\mathcal{O}|}$ aparece $|\mathcal{O}|$ vezes na última soma acima. Portanto, esta soma nos dá o número de órbitas $|Y/G|$. ■

Finalizamos esta seção com o resultado prometido anteriormente.

Teorema 3.11. *Seja R um conjunto finito. Para qualquer subgrupo G de S_R temos que $Z_G = F_G$.*

Demonstração: Sejam $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \text{Comp}(n)$ e \mathcal{C}_α o conjunto de todas as colorações $f \in X^R$ com a cor c_j sendo usada α_j vezes. O conjunto \mathcal{C}_α é invariante sob a ação de G em X^R . Denotamos por w_α a ação de w em \mathcal{C}_α . Vamos aplicar o lema anterior para encontrar o número de órbitas. Para isso, precisamos encontrar $|Fix(w_\alpha)|$.

Para que $f \in Fix(w_\alpha)$, f deve “colorir” R de modo que: (a) em qualquer ciclo de w , todos os elementos ganham a mesma cor; (b) a cor c_j aparece α_j vezes. Logo,

$$|Fix(w_\alpha)| = [x^\alpha] \prod_j p_j^{m_j(w)} = [x^\alpha] p_{\rho(w)}, \quad (5)$$

onde $m_j(w)$ é o número de ciclos de w de comprimento j . Então,

$$p_{\rho(w)}(x) = \sum_\alpha |Fix(w_\alpha)| x^\alpha.$$

Agora, somamos sobre todas as $w \in G$ e dividimos por $|G|$. O lado esquerdo torna-se Z_G , enquanto o lado direito, pelo Lema de Burnside (lema anterior), torna-se F_G . ■

Exercícios

3.1. *Seja $w = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \in S_n$. Mostre que a matriz A tal que $W_A = w$ é simétrica se, e somente se, $w^2 = id$.*

⁵lembramos que $[x^\alpha]$ é o coeficiente de x^α em f .

Bibliografia

- [1] A.C. Aitken, Note on dual symmetric functions, *Proc. Edin. Math. Soc.*, **2(2)** (1931), 164-7.
- [2] A. Garcia; Y. Lequain, “Elementos de Álgebra”, IMPA, 2002.
- [3] B.E. Sagan, “The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions”, Brooks/Cole Publishing Company, California, 1991.
- [4] D.M. Goldschmidt, “Group Characters, Symmetric Functions and Hecke Algebra”, American Mathematical Society, 1993.
- [5] I.N. Herstein, “Tópicos de Álgebra”, segunda edição, John Wiley & Sons, 1975.
- [6] I.G. MacDonal, “Symmetric Functions And Hall Polynomials”, Oxford University Press, Oxford, 1979.
- [7] J.P.O. Santos, “Introdução à Teoria dos Números”, IMPA, 2000.
- [8] J.P. Serre, “Linear Representation Of Finite Groups”, Springer-Verlag, 1977.
- [9] N. Jacobson, “Basic Algebra I, Second Edition”, W. H. Freeman and Company, New York, 1985.
- [10] R. da Silva, “Funções Simétricas e Combinatória”, Dissertação de Mestrado, IMECC, UNICAMP, Campinas, SP, 2007.
- [11] R.P. Stanley, “Enumerative Combinatorics, Vol 1”, Cambridge University Press, 1997.

- [12] R.P. Stanley, "Enumerative Combinatorics, vol 2", Cambridge University Press, 1999.

Índice

- algoritmo RSK, 72, 75, 77–79, 81, 101
 - dual, 84, 85
 - reverso, 92
- anel, 9
 - de polinômios, 11
- caminho de inserção
 - inverso, 77
- Coefficientes de Littlewood-Richardson, 58
- composições de n , 24, 28, 48, 49, 65
- corpo, 11
- faixa com fronteira, 65, 66
 - adicionar, 67
 - altura da, 65
- função geradora
 - das funções simétricas elementares, 26
- função simétrica
 - homogênea de grau n , 24
 - de Schur, 48
 - definição clássica, 53, 54
 - de Schur diagonal
 - definição clássica, 58
 - definição combinatória, 48
 - elementar, 26, 33, 54
 - homogênea completa, 32
 - monomial, 25
 - soma de potências, 36, 68, 106
- grupo, 12
 - ação de um, 14
 - ordem de um, 14
 - grupo de permutações, 12
 - grupo simétrico
 - caracteres irredutíveis do, 70
- homomorfismo, 11
- Identidade de Cauchy, 78, 85
- identidade de Jacobi-Trudi, 58
- indicador cíclico, 103
 - argumentado, 103
- inventário padrão, 104, 106
- involução, 35, 38, 45, 63
- Lema de Burnside, 106
- matriz
 - de transição, 63
 - estritamente unitriangular, 61
 - permutação, 77, 84
 - permutação generalizada, 74
 - transposição, 62

- triangular superior, 61
- Número de Kostka, 49, 64
- ordem
 - \subseteq , 17
 - de dominância, 17
 - lexicográfica reversa, 18, 61
- partição, 67, 86, 88
 - comprimento de uma, 15
 - conjugada, 16
 - definição de, 15
 - Diagrama de Ferrers
 - Modificado, 87
 - Diagrama de Ferrers da, 16, 93
 - Diagrama de Young, 16, 46
 - de forma λ/μ conexo, 64
 - de forma λ/μ , 47
 - plana, 86, 92, 94
 - diagrama, 93
 - parte da, 86
 - simétrica, 92
 - posto da, 18
- permutação
 - ciclos de uma, 13
 - ciclos disjuntos da, 13
 - tipo cíclico da, 13, 38
- produto escalar, 43
- Reticulado de Young, 17
- Regra de Murnaghan-Nakayama, 68
- subgrupo, 14
- Tabela de Young
 - faixa com fronteira de forma λ/μ , 67, 68
 - comprimento da, 46
 - peso da, 47
 - Semi-Simples, 46
 - de forma diagonal, 47
 - reversa de forma diagonal, 51
 - Simples, 50
 - tipo da, 47
- teorema
 - fundamental das funções simétricas, 31
- tranposição, 13