Notas em Matemática Aplicada e-ISSN 2236-5915

**Volume 29, 2012**

**Editado por**

**Eliana X.L. de Andrade**
Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

**Rubens Sampaio**
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro -
Rio de Janeiro, RJ, Brasil

**Geraldo N. Silva**
Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

**Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

**2012**

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7), as figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
http://www.sbmac.org.br/notas.php

**Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

**2012**

# MODELAGEM MATEMÁTICA EM FINANÇAS QUANTITATIVAS EM TEMPO DISCRETO

Max O. de Souza
msouza@mat.uff.br

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática
Universidade Federal Fluminense

Jorge P. Zubelli
zubelli@impa.br

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
Est. D. Castorina 110, Rio de Janeiro, RJ 22460-320, Brasil

**Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

São Carlos - SP, Brasil
2012

Coordenação Editorial: Sandra Augusta Santos

Coordenação Editorial da Série: Eliana Xavier Linhares de Andrade

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2012 by Max Oliveira de Souza e Jorge Passamani Zubelli.
Direitos reservados, 2012 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

**Catalogação elaborada pela Biblioteca do IBILCE/UNESP**
**Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner**

Souza, Max Oliveira.
Modelagem Matemática em Finanças Quantitativas em Tempo Discreto - São Carlos, SP: SBMAC, 2012, 79 p.; 20,5cm - (Notas em Matemática Aplicada; v. 29)

e-ISBN 978-85-86883-92-7

1. Métodos Matemáticos em Finanças. 2. Finanças Quantitativas. 3. Modelagem Matemática.
I. Souza, Max Oliveira. II. Zubelli, Jorge Passamani. III. Título. IV. Série.

CDD - 51

Esta é uma republicação em formato de e-book do livro original do mesmo título publicado em 2007 nesta mesma série pela SBMAC.

# Agradecimentos

Queremos registrar aqui nossos agradecimentos aos alunos e colegas que ajudaram na revisão deste texto.

A exposição apresentada aqui, bem como muitos dos exemplos, foi estimulada por entusiásticas conferências que assistimos de M. Avellaneda (Courant Institute of Mathematical Sciences) e B. Dupire (Bloomberg) em diversos momentos. O Capítulo 4 foi muito influenciado pelo contato com F. A. Grünbaum (U. C. Berkeley). A todos eles somos imensamente gratos, eximindo-os porém das imperfeições que este texto apresenta.

J. P. Zubelli agradece o apoio financeiro do CNPq através dos projetos 302161/2003-1 e 474085/2003-1, PROSUL 490300/2004-9, bem como do programa ALFA da Comunidade Europeia através do contrato II-0143-FCD. Agradece também a AUTOCAD pela disponibilização do software Matlab que utilizamos em diversas ocasiões na preparação deste texto.

Os dois autores agradecem também o apoio financeiro da CAPES através do projeto CAPG-BA 002/02.

# Conteúdo

**Prefácio** **9**

**1 Introdução** **11**
1.1 Modelagem Básica de Dados Financeiros . . . . . 13
1.2 Plano para o Texto . . . . . 15
1.3 Arbitragem e o Mundo Neutro ao Risco . . . . . 16

**2 Apreçamento Via Não-Arbitragem** **19**
2.1 Arbitragem . . . . . 19
2.2 Modelo de Arrow-Debreu . . . . . 20
2.3 Replicação . . . . . 25
2.4 Precificação de Derivativos por Não-Arbitragem . . . . . 26
2.5 Modelo Binomial . . . . . 28
2.6 Mercados Completos e Incompletos . . . . . 31
2.7 Exercícios . . . . . 34

**3 Modelo Binomial** **35**
3.1 O Modelo Básico . . . . . 35
3.2 Precificação de Pagamentos Contigenciados . . . . . 37
3.2.1 Precificação via Recursão . . . . . 37
3.2.2 Precificação via Hedging . . . . . 38
3.3 Precificação das Opções Baunilha . . . . . 39
3.3.1 Calls . . . . . 39
3.3.2 Construção do Portfólio Replicador . . . . . 41
3.3.3 Puts . . . . . 41
3.4 Análise de Média e Variância . . . . . 42
3.4.1 Estatística dos Preços do Modelo . . . . . 42
3.4.2 Calibragem e Modelagem . . . . . 43
3.5 Exercícios . . . . . 45

**4 A Fórmula de Feynman-Kac** **47**
4.1 A Fórmula Reversa de Kolmogorov . . . . . 47
4.2 A Fórmula de Feynman-Kac . . . . . 50
4.3 Aplicação à Precificação de Opções . . . . . 52

**5 Black & Scholes** **55**
5.1 A Aproximação Lognormal . . . . . 56
5.2 A Fórmula de Black-Scholes . . . . . 57
5.3 A Equação de Black-Scholes . . . . . 58
5.4 Conclusões . . . . . 59
5.5 Exercícios . . . . . 61

**A Conceitos Básicos de Probabilidade e Processos Estocásticos** **63**
A.1 Definições Básicas . . . . . 63
A.2 Valor Esperado e Esperança Condicional . . . . . 65
A.3 Processos Estocásticos e Cadeias de Markov . . . . . 68
A.4 Martingais . . . . . 69

**B Programa para Simulação de Séries Históricas** **71**

**Bibliografia** **73**

# Prefácio

A presença de incerteza é uma constante na vida moderna. Entretanto, isto não significa que devemos nos desesperar ou tentar eliminar completamente as incertezas. Isto poderia resultar em gastos excessivos ou em situações pouco práticas. Por outro lado, as incertezas não podem ser ignoradas exceto, possívelmente, em sistemas pequenos e muito simples. Este último não é o caso em sistemas complexos como os biológicos e sociais. Também não é o caso em mercados financeiros. A modelagem de sistemas complexos e com características estocásticas vem sendo utilizada cada vez mais nas ciências sociais e biológicas, permitindo descrever situações onde a incerteza é a única certeza.

Nos últimos anos, através do estudo de técnicas de probabilidade e estatística, grandes progressos teóricos e práticos vêm sendo feitos na análise de investimentos e na proteção contra eventos catastróficos. Tais estudos não se atém somente ao âmbito de aplicações financeiras mas são potencialmente relevantes, por exemplo, a pequenas cooperativas de agricultores que precisam planejar seus insumos para as próximas safras, ou para um grupo que decide gerir seu próprio seguro saúde ou seu fundo de pensão. O estudo de modelos estocásticos está também cada vez mais comum para a gestão de seguros e outros processos que envolvem risco.

O tema de modelagem matemática em finanças é fascinante e possui aspectos interdisciplinares que relacionam algumas das principais contribuições científicas do século XX. Dentre elas, citamos como exemplo:

- A metodologia de Arrow-Debreu descrita na Seção 2.2 que está associada ao prêmio Nobel em Economia de Kenneth Arrow (1972) e o de Gerard Debreu (1983).

- A teoria de precificação por princípios de não-arbitragem e de cobertura de carteiras tratada no Capítulo 2 e que leva a equação de Black-Scholes do Capítulo 5. Esta última contribuição está associada ao prêmio Nobel de 1997 para Robert Merton e Myron Scholes também na área de Economia.

- A fórmula de Feynman-Kac que é o assunto do Capítulo 4. Aqui novamente, temos uma referência ao célebre matemático aplicado Marc Kac em conexão com o físico Richard P. Feynman ganhador do prêmio Nobel de Física de 1965.

O presente texto tem por objetivo apresentar de forma sucinta e elementar alguns aspectos da área de modelagem matemática em finanças. Mais especificamente no

apreçamento de derivativos. Nossa exposição se caracteriza por evitar ao máximo o uso de conceitos avançados de análise e cálculo estocástico. A ênfase segue a máxima atribuida a Marc Kac

*Be wise, discretise!*

Sendo assim, o texto se concentra em quase sua totalidade em modelos em tempo discreto. Dentro deste espírito, o Capítulo 4 sobre a fórmula de Feynman-Kac é completamente original e até quanto sabemos neste nível elementar não possui similar em outros textos na área de finanças. A despeito do contexto de tempo discreto e do caráter elementar da exposição, os resultados estão diretamente conectados com aplicações e permitem, através dos chamados métodos de Monte Carlo a implementação numérica em problemas práticos. A apresentação tem um caráter informal, porém tentamos ao máximo fornecer referências a textos mais avançados.

Rio de Janeiro, 30 de abril de 2007.

Max O. de Souza
Jorge P. Zubelli

# Capítulo 1

# Introdução

*This conjoining of intrinsic intellectual interest with extrinsic application is central to the research in modern finance.*
— R. Merton. Nobel Lecture

Nos últimos anos, uma verdadeira revolução conceitual teve lugar e levou a utilização de um ferramental matemático cada vez mais sofisticado nas diversas áreas associadas a mercados de capitais e seguros. Isto se deve em parte ao crescimento do chamado mercado de derivativos, ou seja de instrumentos financeiros cujo valor deriva de outros instrumentos mais fundamentais como ações, bonds, ou commodities. Um exemplo de um derivativo é uma opção, ou seja um contrato que dá ao possuidor o direito, mas não a obrigação, de negociar no futuro um ativo a um certo preço pré-estabelecido. O uso de tais instrumentos, chamados de derivativos, em mercados financeiros modernos se tornou tão importante, que o seu volume cresceu para ser comparável com os chamados mercados primários. Uma das razões principais para isto é que opções são usadas amplamente como uma forma de proteção contra as flutuações dos valores de preços de produtos e bens.

Um dos problemas centrais em mercados de derivativos é o de apreçamento: *Como determinar o preço justo, hoje, de um contrato financeiro sobre um ativo cujo o comportamento futuro é imprevisível e sujeito a flutuações aleatórias?* Este problema envolve técnicas matemáticas bastante sofisticadas tais como análise estocástica, equações diferenciais parciais, e otimização. O prêmio Nobel de 1997 em Economia foi outorgado a Robert C. Merton e Myron S. Scholes pelo seu trabalho, em colaboração, com Fisher Black, no desenvolvimento do modelo de Black-Scholes de precificação de opções. Black, que havia falecido em 1995, teria sido, indubitávelmente, também agraciado com o prêmio caso ainda estivesse vivo.

Intimamente ligada a questão de apreçamento está a questão de proteção e cobertura de riscos. O vendedor do contrato deve ser capaz de se proteger em relação às flutuações do mercado para que, de fato, possa cumprir com a sua obrigação. Isto está ligado ao conceito de *hedging* ou cobertura de riscos que toma um papel essencial no enfoque proposto por Black, Merton e Scholes.

Algumas perguntas naturais que surgem quando falamos de opções e contratos derivativos são:

- Por quê? O uso de contratos derivativos do lado do comprador está associado à proteção ou redução de exposição ao risco. Como exemplo, uma firma pode ter que comprar parte de seus insumos em uma moeda estrangeira, digamos o euro, e com isso assumir uma dívida nesta moeda em um momento futuro. Com o objetivo de se proteger ela pode decidir entrar em um contrato futuro no qual tenha o direito de adquirir uma certa quantidade de euros por uma taxa de câmbio pré-fixada. Do ponto de vista do vendedor destes contratos, eles podem ser usados com o objetivo de alavancar seus lucros (e conseqüentemente expô-lo a um risco), ou no caso de uma instituição financeira com uma grande carteira, contrabalançar outros contratos de seu portfólio.

- Quando? Contratos derivativos devem ser usados sempre que existe risco ou incerteza sobre os possíveis fluxos de caixa. Em um certo sentido, contratos de seguro podem ser pensados como derivativos. Investimentos em renda fixa também.

- Quem? Muitos investidores, mesmo sem saber, são possuidores ou afetados por tais contratos. Além de grandes investidores institucionais podemos citar possuidores de títulos de renda fixa, possuidores de seguros, fundos de pensão, empresas que trabalham com exportação e importação.

Vamos exemplificar os contratos mais simples:

**Opção de compra européia (*call*)**: Um contrato que dá ao possuidor o direito, mas não a obrigação, de comprar uma unidade de um ativo subjacente no instante futuro $T$ por um preço (strike) $K$. O chamado *payoff* $F$ deste contrato é

$$F(S_T) = \begin{cases} S_T - K & \text{se } S_T > K, \\ 0 & \text{se } S_T \leq K. \end{cases}$$

**Opção de venda européia (*put*)**: Dá o direito ao possuidor de *vender* uma unidade de um ativo subjacente no instante futuro $T$ por um preço (strike) $K$. Seu payoff é

$$F(X_T) = \begin{cases} K - X_T & \text{if } X_T < K, \\ 0 & \text{if } X_T \geq K. \end{cases}$$

No texto que se segue, vamos atacar o problema fundamental de determinar o preço justo $V(t, S)$ em um instante $t < T$ do contrato *dado que* o ativo subjacente neste instante $t$ vale $S = S_t$. Um dos aspectos fascinantes é que, de acordo com a modelagem desenvolvida por Black, Merton e Scholes dentro de hipóteses bastante simplificadoras, $V(t, S)$ satisfaz a equação de Black-Scholes:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r\left(S\frac{\partial V}{\partial S} - V\right) = 0 \\ &V(T, S) = F(S) \end{aligned}$$

onde $r$ é a taxa de juros prevalente no mercado e $\sigma$ é a volatilidade do ativo subjacente $S_t$.

Dentre as hipóteses simplificadoras mencionadas está que o nosso mercado é completo e que consiste somente de um ativo sem risco (um investimento bancário seguro a uma taxa constante $r$) e um ativo com risco $S$ que satisfaz um movimento Browniano exponencial de volatilidade constante $\sigma$

No caso de uma opção de compra, a solução da equação de Black-Scholes toma a forma

$$C^{\mathrm{BS}}(S,t;K,T,r,\sigma) = XN(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-) \tag{1.0.1}$$

onde $N$ é a distribuição normal cumulativa

$$d_\pm = \frac{\log(Xe^{r(T-t)}/K)}{\sigma\sqrt{T-t}} \pm \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} \ . \tag{1.0.2}$$

Um gráfico ilustrativo se encontra na Figura 1.1.

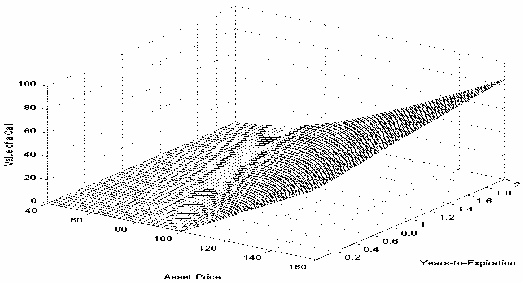



Figura 1.1: Gráfico do preço de uma opção de compra (call) europeia.

## 1.1 Modelagem Básica de Dados Financeiros

Nosso principal foco nestas notas é a modelagem do preço de derivativos. Não poderiamos, porém, deixar de mencionar algumas palavras sobre a modelagem dos ativos subjacentes que servem de base para tais derivativos, como por exemplo as ações ou índices sobre cestas de ações.

Na parte superior da Figura 1.2, mostramos o gráfico do índice IBOVESPA em um período recente. Na parte inferior da Figura 1.2 mostramos o gráfico da simulação numérica usando o modelo binomial para um índice fictício. O programa utilizado para gerar a simulação se encontra no Apêndice B. Este exercício nos mostra que pelo menos ao nível visual e qualitativo o comportamento estatístico do mercado e da simulação se assemelham.

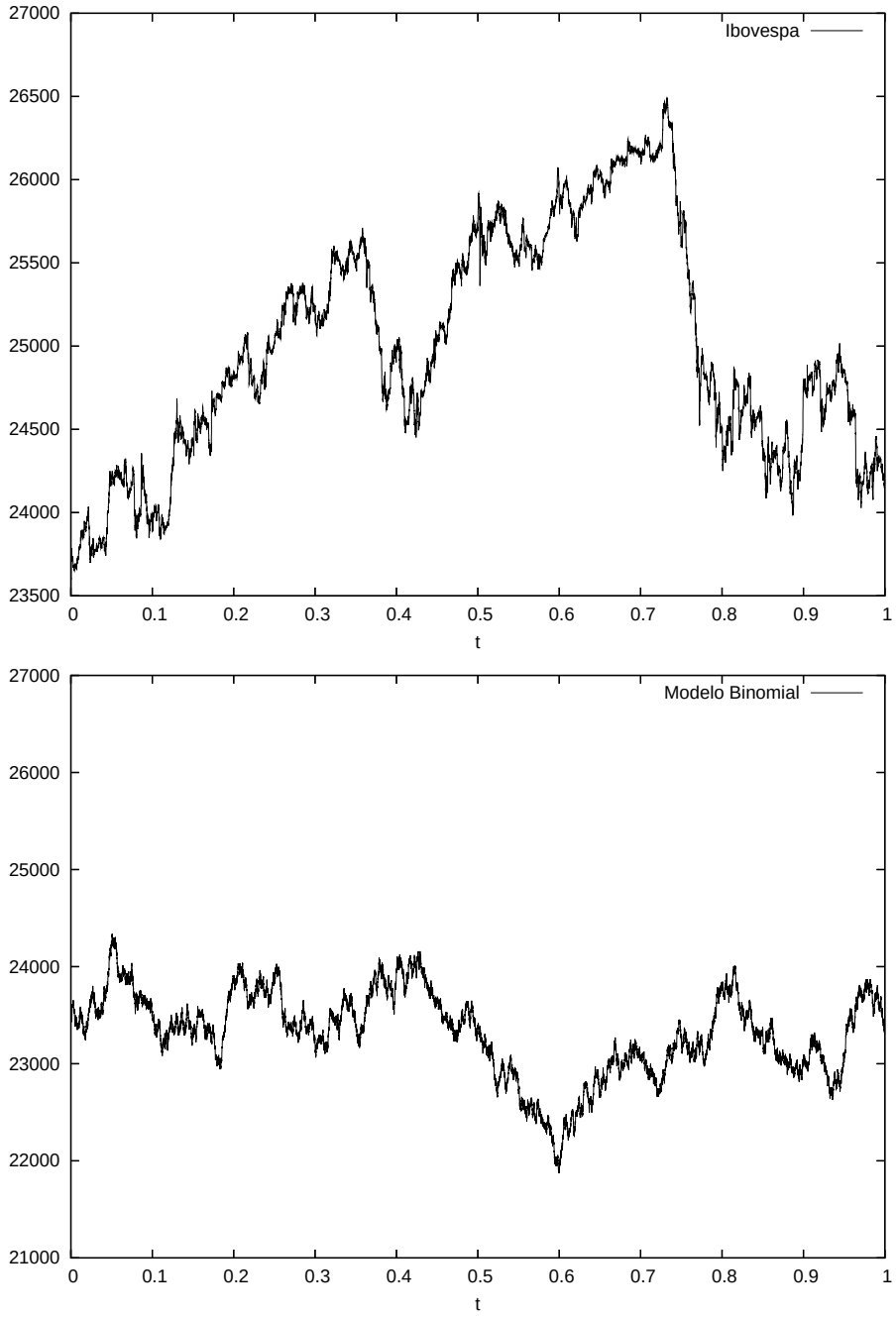



Figura 1.2: Figura superior: Valores do índice IBOVESPA. Figura inferior: Simulação numérica de um índice fictício seguindo o modelo binomial

A análise e modelagem estatística de séries temporais em finanças é um assunto vem sendo estudado intensamente. Novamente aqui, como vários outros tópicos destas notas, está ligado a contribuições importantíssimas como o prêmio Nobel de 2003 em Economia outorgado a R. F. Engle. Entretanto, nosso objetivo nestas notas não é o de seguir nesta direção. Nos limitamos a deixar registrado que do ponto de vista estatístico, um grande número de modelos para o comportamento dos ativos vem sendo proposto. Dentre estes modelos, podemos citar:

- Processos estocásticos auto-similares.
- Movimento Browniano fracionário.
- Processos de Lévy.
- Processos auto-regressivos.

Uma excelente introdução e amplas referências podem ser encontradas no texto [VOI].

## 1.2 Plano para o Texto

Nosso foco nestas notas notas será o de utilizar processos Markovianos em tempo discreto. Em última análise, após a passagem ao limite dos modelos aqui considerados, obtemos processos difusivos baseados no movimento Browniano. A metodologia inicial de apreçamento seguirá o enfoque de ausência de oportunidades de arbitragem, cobertura de portfolios e medida neutra ao risco. Estas idéias serão brevemente exemplificadas na Seção 1.3 e posteriormente em mais detalhe no Capítulo 2.

O Capítulo 3 implementará as idéias de apreçamento por não arbitragem no contexto do importantíssimo modelo binomial, que na literatura de finanças está associado ao modelo de Cox, Ross e Rubinstein [CO-RO-RU].

No Capítulo 4, desenvolveremos a fórmula de Feynman-Kac em um contexto discreto e usaremos esta fórmula para interpretar o resultado do apreçamento em termos de soluções de certas equações de diferenças.

Finalmente, no Capítulo 5 efetuaremos a passagem ao limite contínuo, o que nos permitirá explicar a equação de Black-Scholes mencionada acima e a fórmula de apreçamento.

No Apêncice A, que consideramos um acessório fundamental para a leitura do texto, apresentamos um revisão dos principais conceitos de probabilidade e processos estocásticos que utilizamos no restante do texto.

Por brevidade, neste texto não nos dedicaremos à análise e modelagem estatística de dados. Este assunto, apesar de sua extrema importância, foge ao escopo destas notas. Do ponto de vista de pesquisa recente, bem como de aplicações em finanças e atuária recomendamos os textos e atas dos eventos [KO-MO, FE-SC-KO]. Para aplicação na área de análise de risco e alocação de carteiras recomendamos [MEU].

## 1.3 Arbitragem e o Mundo Neutro ao Risco

Nesta seção introdutória, apresentaremos alguns exemplos ilustrativos com o objetivo de motivar a idéia de apreçamento neutro ao risco e princípios de não-arbitragem.

Arbitragem pode ser entendida intuitivamente como a possibilidade de fazer dinheiro do nada, sem risco.

**Exemplo 1.1.** *Considere uma roleta que paga 2:1 quando sai vermelho, e nada quando sai preto e cujas probabilidades são*

$$\begin{cases} \textit{Vermelho} & 70\% \\ \textit{Preto} & 30\% \end{cases}$$

*Se jogarmos muitas vezes, esperamos receber, em média,*

$$2 \times 0.7 + 0 \times 0.3 = R\$1,40$$

*por real apostado.*

*Um negociante local oferece um bilhete que vale*

- *R$100,00, se sair vermelho na roleta*
- *R$0,00, se sair preto.*

*O bilhete é vendido a R$60,00. Você compra ou você vende?*

*Usando o raciocínio acima, temos um valor esperado de R$70,00 para o bilhete. Portanto, o bilhete parece estar barato e vale a pena comprá-lo. Entretanto, considere as seguintes estratégias que o negociante pode adotar ao vender um bilhete:*

1. *Ele guarda os R$60,00.*
   - *Se sair preto, ele fica com R$60,00 de lucro.*
   - *Se sair vermelho, ele tem um prejuízo de R$40,00.*
2. *Ele aposta os R$60,00 na roleta.*
   - *Se sair preto, ele perde tudo, mas também não tem que pagar nada.*
   - *Se sair vermelho, ele recebe R$120,00, paga R$100,00 e lucra R$20,00.*
3. *Ele aposta R$ 50,00 na roleta.*
   - *Se sair preto, ele perde os R$50,00, não precisa pagar nada e fica com um lucro de R$10,00.*
   - *Se sair vermelho, ele recebe R$100,00, com os quais paga o prometido pelo bilhete e lucra R$10,00.*

*A simples estratégia 2, já garante que ele não terá prejuízo e ainda poderá ter lucro. A estratégia 3, entretanto, ainda é mais eficiente. Independente do resultado da roleta, ele lucra R$10,00.*

Nesse caso, se quiséssemos precificar o bilhete através do valor esperado dele, deveríamos ter usado probabilidades iguais a 1/2 para os dois possíveis resultados. Esse percepção, nos leva a definição de uma medida de probabilidade **neutra ao risco**, que nos permite precificar corretamente o ativo em questão. É interessante notar que essas probabilidades não estão associadas às probabilidades freqüênciais, o que não é nada intuitivo em princípio.

**Exemplo 1.2.** *Considere uma moeda cujas probabilidades são*

$$\begin{cases} \textit{Cara} & \frac{3}{4} \\ \textit{Coroa} & \frac{1}{4} \end{cases}$$

*Suponha também que você receba R$0,50 quando sai coroa e R$2,00 quando sai cara para cada real apostado. Em média, esperamos acumular um valor de*

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{3}{4} = \frac{13}{8} = 1,625.$$

*Quanto vale um bilhete que retorna R$12,00 se der cara e nada se der coroa, numa cidade com empréstimo sem juros?*

**Almoço de graça** *Se cobrarmos R$9,00 como seria o esperado podemos proceder da seguinte forma:*

- *Apostamos R$6,00 na moeda.*
- *Se der cara, recebemos R$12,00, pagamos o valor do bilhete e lucramos R$3,00.*
- *Se der coroa recebemos R$3,00 e lucramos R$6,00.*

*Nesse caso o preço justo seria R$4,00!!*

**Hedging** *Considere a seguinte estratégia, ao vender um bilheter por R$4,00:*

- *Tomamos R$4,00 emprestado.*
- *Apostamos na moeda R$8,00.*
- *Se der cara: ganhamos R$16,00 pagamos R$12,00 ao comprador do bilhete e usamos os R$4,00 restantes para quitar o empréstimo.*
- *Se der coroa: ganhamos R$4,00 e quitamos o empréstimo.*

**Mais Hedging** *Se o bilhete fosse vendido por R$3,00 em vez, poderíamos nos aproveitar da situação usando a seguinte estratégia:*

- *Tomamos R$7,00 de um terceiro, nos comprometendo a pagar o retorno de uma aposta desse valor na moeda.*
- *Compramos o bilhete do vendedor por R$3,00.*

- *Esperamos o resultado da moeda.*
- *Se der cara: ganhamos R$12,00, juntamos mais R$2,00 e pagamos o terceiro; lucramos R$2,00.*
- *Se der coroa: ficamos com R$4,00, pagamos R$3,50 ao terceiro e embolsamos R$0,50.*

**Mas...** *Algumas objeções podem aparecer:*

- *Isso deve ser uma conseqüência de se ter a possibilidade de ganho nulo;*
- *Empréstimos sem juros nem nos contos de fada;*
- *Tomar dinheiro com um terceiro e aplicar no ativo com risco não parece algo factível.*

*Entretanto:*

- *De fato não! Se o bilhete pagasse R$3,00 no caso de coroa e R$12,00 se for cara o preço justo é R$6,00 e não R$9,75 como poderia parecer a primeira vista! Note que o bilhete está na mesma proporção da moeda agora!*
- *Juros não mudam a conclusão, embora mudem os valores.*
- *Ficar vendido é uma operação comum no mercado.*

No exemplo acima, a probabilidade neutra ao risco é 1/3 para cara e 2/3 para coroa. Assim, nos dois casos mencionados no exemplo, temos:

$$\frac{1}{3} \times R\$12,00 + \frac{2}{3} \times R\$0,00 = R\$4,00$$
$$\frac{1}{3} \times R\$12,00 + \frac{2}{3} \times R\$3,00 = R\$6,00$$

Note que um bilhete que paga $R$ reais, no caso da moeda dar cara, custa **menos** que um bilhete que para $R$ reais no caso da moeda dar coroa. Nesse sentido, o bilhete pode ser interpretado com uma espécie de seguro que cobra mais no caso adverso.

# Capítulo 2

# Apreçamento Via Não-Arbitragem

*For a successful technology, reality must take precedence over public relations, for Nature cannot be fooled.*
— R. P. Feynman

## 2.1 Arbitragem

A noção de arbitragem é extremamente importante na moderna teoria de finanças e é o alicerce da teoria de precificação de opções, cujo desenvolvimento inicial é devido a [BL-SC, MER].

A idéia de arbitragem pode ser explicada através de uma piada bastante comum, em várias versões, nos círculos acadêmico-financeiros: um professor de finanças matemáticas está caminhando com um colega de outra área, que encontra uma nota de R$100,00 no chão e está pronto a pegá-la, quando o professor retruca: Não tente fazer isso! É absolutamente impossível que exista uma nota de R$100,00 no chão. De fato, se fosse o caso, alguma outra pessoa já a teria encontrado.

Para fins dessa discussão introdutória, vamos usar a seguinte definição:

**Definição 2.1.** *Uma arbitragem é uma posição no mercado satisfazendo:*

1. *custo inicial zero;*
2. *impossibilidade de prejuízo no futuro;*
3. *probabilidade não-nula de lucro no futuro.*

Se no dia a dia, a idéia de encontrar uma nota de R$100,00 na esquina nos parece esdrúxula, no mercado financeiro isso é ainda mais verdade. No exemplo abaixo, adaptado de [AV-LA], mostramos como isso pode ser explorado:

**Exemplo:** Suponha que o preço da onça de ouro seja R$ 800,00 e que o preço de um contrato a termo, com vencimento em três meses de uma onça de ouro seja R$ 780,00. Suponha também que o juros de conveniência[1] no período de três meses seja, anualizado, de 10%. Finalmente, suponha que haja empréstimos a uma taxa trimestral de juros que, anualizada, seja de 4%.

Nesse caso podemos realizar uma arbitragem da seguinte maneira: ficamos vendidos em uma onça de ouro; aplicamos o dinheiro por três meses e entramos num contrato a termo também por três meses. O custo dessa operação é

$$\begin{aligned} R\$\,800,00 \times 2.5\% &= R\$\,20,00 \quad \text{juros de conveniência} \\ R\$\,800,00 \times 1.0\% &= R\$\,8,00 \quad \text{juros} \\ custo &= R\$\,12,00. \end{aligned}$$

Ao final do três meses, teremos então R$ 788,00 na conta. Comprando o ouro no contrato a termo e devolvendo a barra ficamos com R$ 788,00 - R$ 780,00=R$ 8,00 de lucro. Esse exemplo está ignorando taxas e supondo que juros do banco e no ativo sejam pagos ou cobrados ao fim do período.

Note que um *arbitrador*[2] poderia fazer isso numa escala tão grande quanto possível. Neste caso, o mercado não pode estar em equilíbrio. Naturalmente, num mercado eficiente, a ação dos arbitradores levaria a um ajuste nos juros de conveniência e no preço a termo do ouro de maneira a tornar a arbitragem inexistente. Isso nos leva ao seguinte:

| |
|---|
| **Princípio Básico**: Em um mercado eficiente, não há oportunidades permanentes de arbitragem. |

## 2.2 Modelo de Arrow-Debreu

Vamos considerar uma economia com $N$ ativos $s_1, s_2, \ldots, s_N$ e $M$ possíveis estados. Um investidor toma uma posição inicial e, após um período, um estado é escolhido e a posição do investidor é liquidada.

O modelo fica totalmente especificado, a partir de

$$\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_N)^t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad D = (d_{ij}),$$

onde $\mathbf{p}$ é o vetor de preços—com $p_i$ sendo o preço dos ativo $s_i$—e onde $D$ é a matriz de fluxos de caixa. No modelo de Arrow-Debreu, estamos supondo que $D$ é conhecida por todos, mas que o estado final da economia **não** é conhecido *a priori*.

[1] Pode ser pensado como um aluguel a ser pago pelo direito de dispor do bem durante esse período.

[2] Como notado em [DE-SC], essas são pessoas com dois telefones na mão e três telas de computadores na sua frente.

**Definição 2.2.** *Um portfólio de ativos é um vetor*

$$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)^t, \quad \in \mathbb{R}^N,$$

*onde $\theta_i > 0$ significa que o investidor está comprado no ativo e $\theta_i < 0$ significa que o investidor está vendido no ativo.*

**Notação:** No que se segue, se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, diremos que

$$\mathbf{x} > \mathbf{y} \quad \text{se} \quad x_i > y_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Escreveremos $\mathbf{x} > 0$ significando que $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. A mesma notação vale para $\geq$. Usaremos a notação usual de produto interno entre vetores $\theta$ e $\gamma$ em $\mathbb{R}^N$, a saber:

$$\theta \cdot \gamma = \sum_{i=1}^{N} \theta_i \gamma_i.$$

Além disso, será útil calcularmos o produto interno entre um vetor e colunas de uma matriz, por exemplo:

$$\theta \cdot D_{\cdot,j} := \sum_{i=1}^{N} \theta_i D_{ij} \ .$$

No modelo de Arrow-Debreu, estar vendido num ativo significa tomar emprestado uma certa quantidade deste ativo e vendê-lo a preço presente.

**Definição 2.3.** *Um portfólio de arbitragem é um portfólio $\theta$ satisfazendo uma das duas condições abaixo:*

*1.*
$$\theta \cdot \mathbf{p} = 0, \quad \theta^t D \geq 0 \quad \text{e para algum} \quad j, \quad \theta \cdot D_{\cdot,j} > 0 \ .$$

*2.*
$$\theta \cdot \mathbf{p} < 0 \quad \text{e} \quad \theta^t D \geq 0 \ .$$

No primeiro caso, o portfólio não tem custo inicial, não oferece risco de prejuízo e ainda oferece um possibilidade real de lucro. No segundo caso, o portfólio dá lucro imediato, sem risco de prejuízo no futuro.

**Teorema 2.1.** *Existe um vetor de números positivos $\pi$, tal que*

$$\mathbf{p} = D\pi, \tag{2.2.1}$$

*se, e somente se, não existem portfólios de arbitragem.*

Demonstração:

Supondo que vale (2.2.1), observe que temos

$$\theta \cdot \mathbf{p} = \theta \cdot (D\pi) = (\theta \cdot D) \cdot \pi > 0.$$

Note que nas duas alternativas de arbitragem, temos que ter $\theta^t \cdot D \leq 0$. Mas, neste caso, como $\pi > 0$, temos que ter $\theta \cdot \mathbf{p} \geq 0$. Logo, não podemos ter a segunda alternativa.

Por outro lado, se adicionalmente $\theta \cdot D_{\cdot,j} > 0$ para algum $j$, então temos que ter $\theta \cdot \mathbf{p} > 0$, o que exclui a primeira alternativa.

Para provar a volta, sejam

$$\Delta^+ = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^{M+1} \;\middle|\; \mathbf{x} \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{M+1} x_i = 1 \right\}$$

e

$$L = \left\{ (-\theta \cdot \mathbf{p}, \theta \cdot D_{\cdot,j}, \ldots, \theta \cdot D_{\cdot,M}), \quad \theta \in \mathbb{R}^N \right\}.$$

Observe que $L$ é um sub-espaço vetorial e que ausência de portfólios de arbitragem é equivalente a

$$L \cap \Delta^+ = \emptyset.$$

No que se segue, vamos necessitar do seguinte teorema de separação:

**Teorema 2.2** (Teorema da Separação de Minkowski)**.** *Sejam $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^k$ convexos e disjuntos, com $C_1$ fechado e $C_2$ compacto. Então, existe um vetor não-nulo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^t \in \mathbb{R}^k$, e dois números $b_1$ e $b_2$ distintos, tais que,*

$$\forall x \in C_1 \quad , \forall y \in C_2, \qquad \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j \leq b_1 < b_2 \leq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j y_j.$$

Note que podemos interpretar o vetor $\alpha$ como o vetor normal a um hiperplano que separa os dois conjuntos, conforme mostra a Figura 2.2

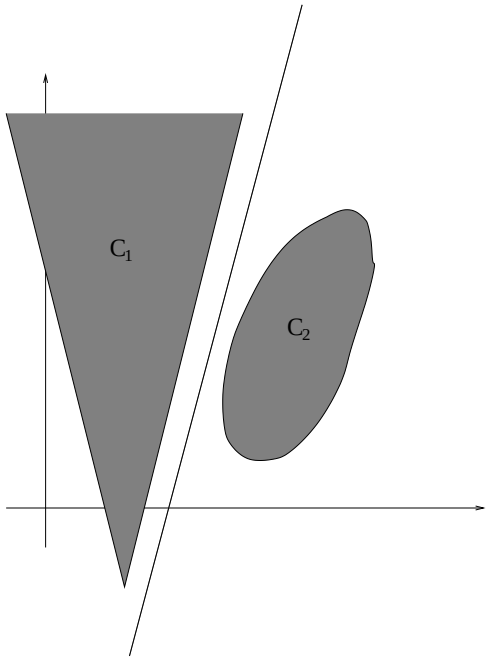



Figura 2.1: Ilustração geométrica do teorema de Minkwoski.

Como $L$ é um sub-espaço vetorial, portanto fechado, e $\Delta^+$ é compacto, podemos invocar o Teorema da Separação de Minkowski e definir

$$H = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{M+1} \;\middle|\; \sum_{j=0}^{M} \gamma_j x_j = 0 \right\}, \quad \gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_M)^t.$$

Note que separação implica

$$\gamma \cdot \mathbf{x} > \gamma \cdot \mathbf{z}, \quad \mathbf{x} \in \Delta_+, \quad \mathbf{z} \in L.$$

Como $L$ é um sub-espaço vetorial, concluímos que para $x$ fixo temos que ter

$$\gamma \cdot \mathbf{x} > c\gamma \cdot \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in L \quad \text{e} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\gamma \cdot \mathbf{z} = 0, \quad \forall \mathbf{z} \in L.$$

Assim, $L \subset H$.

Por outro lado, se denotarmos o $i$-ésimo vetor canônico do $\mathbb{R}^{M+1}$ por $\mathbf{e}_i$, temos que $\mathbf{e}_i \in \Delta^+$. Logo,

$$0 < \gamma \cdot \mathbf{e}_i = \gamma_i, \quad i = 0, \ldots, M+1.$$

Donde,

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}^N, \quad -\gamma_0 \theta \cdot \mathbf{p} + \sum_{j=1}^{M} \gamma_j \theta \cdot D_{\cdot j} = 0$$

e, portanto, temos

$$-\gamma_0 \mathbf{p} + \sum_{j=1}^{M} \gamma_j D_{\cdot j} = 0$$

$$\mathbf{p} = \sum_{j=1}^{M} \left( \frac{\gamma_j}{\gamma_0} \right) D_{\cdot j}$$

■

Vamos escrever $\pi_j = \gamma_j / \gamma_0$; os preços do estado.

Podemos então definir

$$\hat{\pi}_j = \frac{\pi_j}{\sum_{k=1}^{M} \pi_k}.$$

Seja

$$(1+R)^{-1} = \sum_{k=1}^{M} \pi_k.$$

Vamos ver que $R$ representa a taxa de juros da economia.

**Ativo sem risco**

Suponha que exista um ativo que garanta o pagamento de R$ 1,00, qualquer que seja o estado. O vetor de fluxos de caixa de um ativo assim seria $(1, \ldots, 1)^t$. Suponhamos que vale (2.2.1). Se denotarmos o preço do ativo sem risco por $p_{sr}$, temos então que

$$p_{sr} = \sum_{k=1}^{M} \pi_k = (1+R)^{-1}$$

Portanto, $R$ pode ser associado à taxa de juros sem risco vigente na economia em questão.

Rescrevendo (2.2.1), temos

$$p_i = \frac{1}{1+R} \sum_{j=1}^{M} D_{ij} \hat{\pi}_j = \frac{1}{1+R} \mathbb{E}(D_i),$$

onde $\mathbb{E}$ é o valor esperado com respeito à medida de probabilidade dada por $\mathbb{P}[\{j\}] = \hat{\pi}_j$.

Podemos enunciar o resultado acima da seguinte forma:

**Corolário 2.1.** *Suponha que o mercado não admita portfólios de arbitragem e que exista empréstimo sem risco a taxa $R$. Então existe uma medida de probabilidade no conjunto de estados tal que o valor justo do ativo é o valor esperado dos seus fluxos de caixa descontado pela taxa $R$.*

**Terminologia:** A medida mencionada no corolário acima é geralmente conhecida como *Medida Neutra ao Risco* ou *Medida Martingal*.

**Nota:** A probabilidade neutra ao risco **não** está associada a probabilidade freqüêncial observada na economia.

Mais ainda, podemos escrever

$$\sum_{j=1}^{M} \hat{\pi}_j \left( \frac{D_{ij}}{p_i} - 1 \right) = R.$$

Ou seja, sob a probabilidade neutra ao risco, o retorno esperado de qualquer ativo é $R$.

**Preços de estado**

Vamos incluir os seguintes ativos na economia

$$S_{N+k} \text{ com fluxo de caixa } \begin{cases} R\$\,1,00 & \text{se a economia estiver no estado } k \\ R\$\,0,00 & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, M.$$

Considere um portfólio formado por

$$\theta = (\mathbf{0}, D_{i1}, \ldots, D_{iM})^t, \mathbf{0} \in \mathbb{R}^N.$$

Esse portfólio tem fluxo de caixa

$$(D_{i1}, \ldots, D_{iM}).$$

Assim, $\theta$ tem o mesmo retorno do ativo $S_i$ e isso justifica chamar $\pi_j$ do preço associado ao estado $j$.

## 2.3 Replicação

**Definição 2.4.** *Dizemos que um portfólio $(\theta_1, \ldots, \theta_K)^t$ de ativos $S_1, \ldots, S_K$ replica o ativo $S$, se o fluxo de caixa do portfólio e do ativo $S$ são os mesmos, qualquer que seja o estado da economia.*

**Proposição 2.1** (Lei do Preço Único)**.** *Em um mercado sem oportunidade de arbitragem, se um ativo admite um portfólio replicador, então o preço justo do ativo é o mesmo do seu portfólio replicador.*

Demonstração: Sejam

$$\mathbf{p} = (S, S_1, \ldots, S_K)^t \quad \text{e} \quad Q = \sum_{j=1}^{k} \theta_j S_j.$$

o vetor de preços dessa economia e o valor do portfólio replicador, respectivamente. Se $P < S$, então construímos o seguinte portfólio $\eta \in \mathbb{R}^{K+1}$

$$\eta_0 = S \quad \text{e} \quad \eta_i = -\theta_i, \quad i = 1, \ldots, K.$$

Como $P < S$, temos que

$$\eta \cdot \pi < 0,$$

i.e, temos um lucro imediato. Como os fluxos de caixa do portfólio e do ativo são os mesmos não há possiblidade de prejuízo, qualquer que seja o estado selecionado pela economia no futuro. Temos, portanto, um portfólio de arbitragem.

Se $P > S$, basta construirmos o portfólio $-\eta$ e chegamos ao mesmo resultado. Assim, $P = S$. ■

No que se segue, veremos algumas aplicações da Lei do Preço Único.

## 2.4 Precificação de Derivativos por Não-Arbitragem

**Definição 2.5.** *Um contrato a termo é um documento que obriga o seu possuidor a comprar uma unidade do ativo $S$ por um preço $K$—dito o strike.*

**Proposição 2.2** (Valor de um contrato a termo)**.** *Num modelo sem arbitragem, o preço $Q$ de um contrato a termo com strike $K$, cujo o preço spot do ativo subjacente é $P$, é dado por*

$$Q = P - \frac{K}{1+R}.$$

Demonstração: Pela lei do preço único, basta mostrar que as duas posições têm o mesmo fluxo de caixa. De fato, se tivermos um contrato a termo, ao final do período, teremos uma unidade do ativo e teremos desembolsado $K$. Por outro lado, tomando um empréstimo de $K/(1+R)$ e comprando o ativo agora teremos, ao final do período, que desembolsar $K$ para pagar o empréstimo e possuiremos uma unidade do ativo. ■

**Preço a termo** O preço a termo de um ativo é dado por $F = (1+R)P$. A motivação por trás dessa definição é que, se tomarmos $K = F$, teremos $Q = 0$. Em outras palavras, um contrato a termo cujo o strike é o preço a termo tem custo zero. Esse fato é importante para uma modalidade de derivativo conhecida como *Contrato Futuro* que, infelizmente não trataremos aqui.

**Definição 2.6.** *Uma opção de compra (Call) do tipo européia sobre o ativo $S$ é um documento que dá o direito, mas não a obrigação, ao seu detentor de comprar uma unidade do ativo $S$ pelo preço $K$—dito o strike—no tempo $T$, que é o tempo de expiração da opção.*

**Definição 2.7.** *Uma opção de venda (Put) do tipo européia sobre o ativo $S$ é um documento que dá o direito, mas não a obrigação, ao seu detentor de vender uma unidade do ativo $S$ pelo preço $K$—dito o strike—no tempo $T$, que é o tempo de expiração da opção.*

### Paridade Put-Call

**Proposição 2.3** (Paridade Put-Call)**.** *Numa economia sem arbitragem, seja $S$ o preço de um ativo e $R$ a taxa livre de risco. Se $P$ e $C$ denotam o preço de uma opção de venda e de uma opção de compra, respectivamente, deve valer a seguinte relação:*

$$P = C - S + \frac{K}{1+R}. \tag{2.4.2}$$

Demonstração: Se ao final do período, tivermos $S < K$, então o detentor da opção de venda irá exercê-la e terá um fluxo positivo de $K$ e fica com menos uma unidade do ativo, com um balanço de $K - S$. O detentor do portfólio, não exerce a opção de compra, fica com menos uma unidade do ativo e tem $K$ depositado no banco, com um balanço $K - S$.

Por outro lado, se $S \geq K$, o detentor da opção de venda não a exercerá ficando com um fluxo zero. O detentor do portfólio, terá $K$ no banco, com o qual exerce a opção e fecha a sua posição vendida no ativo também ficando com um fluxo zero. ■

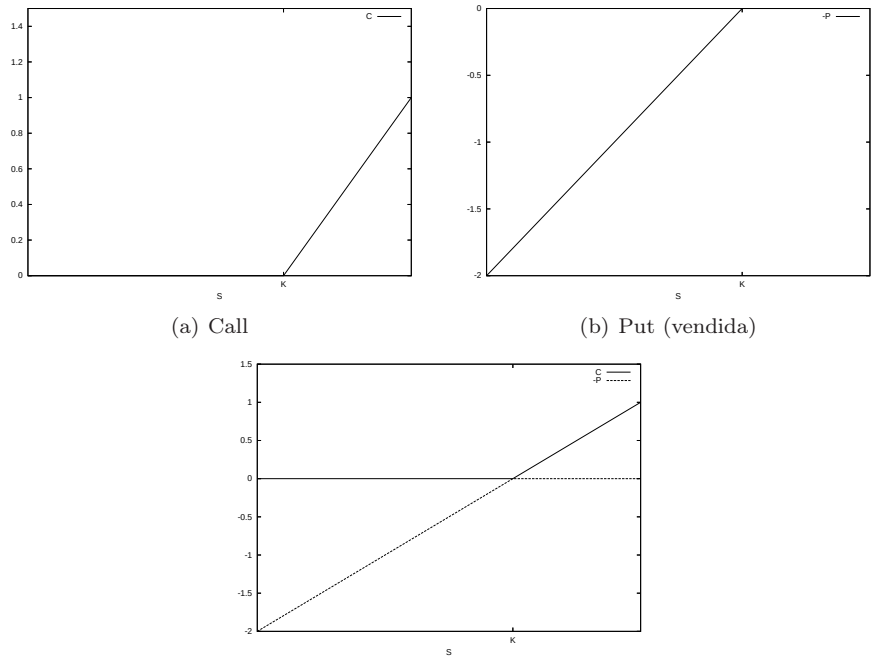
**Produtos sintéticos:** A paridade dada por (2.4.2) nos permite montar uma *opção de compra sintética* em termos de uma Call, do ativo e de um depósito remunerado. Por outro lado, ela também nos permite montar uma opção de compra sintética, ficando vendido numa opção de venda, vendido no ativo e comprado num depósito bancário. Ela também nos permite montar o ativo sinteticamente: ficamos comprados numa opção de compra e num depósito bancário e vendidos numa opção de compra. Finalmente, replicamos um depósito bancário, ficando comprados numa opção de venda e vendidos numa opção de compra e no ativo.

Escrevendo (2.4.2) como

$$S - \frac{K}{1+R} = C - P \ ,$$

observamos que o lado esquerdo é o preço de um contrato a termo que, portanto, podemos replicar com uma posição comprada numa Call e vendida numa Put.

Na Figura 2.2, vemos uma replicação de um contrato a termo através dos gráficos do valor de vencimento de uma posição comprada em opções de compra e vendida em opções de venda.




(a) Call

(b) Put (vendida)

(c) Contrato a Termo

Figura 2.2: Replicação de um contrato a termo por uma posição comprada em Calls e vendida em Puts.

## 2.5 Modelo Binomial

Vamos considerar uma economia com dois ativos e dois possíveis estados, i.e, $N = M = 2$ no modelo de Arrow-Debreu.

Vamos supor que haja empréstimo a uma taxa $R$, i.e, um ativo sem risco. O ativo de risco tem preço $P$ e fluxos de caixa $PU$ no estado I e $PD$ no estado II, com $D < U$. Graficamente isto está descrito na Figura 2.3.

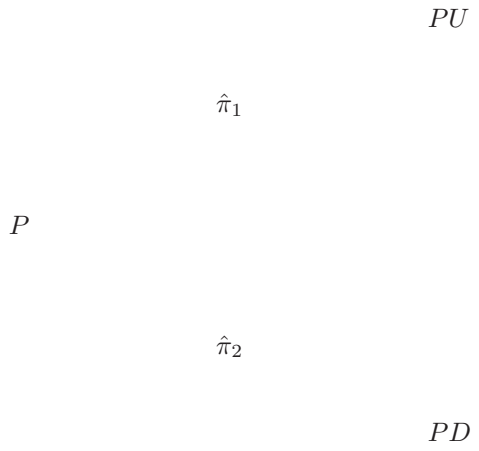



Figura 2.3: Árvore binomial na medida neutra ao risco.

Vamos supor que vale não-arbitragem para essa economia. Nesse caso, temos que ter

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{1+R}\{\hat{\pi}_1 PU + \hat{\pi}_2 PD\} \\ \hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2 &= 1. \end{aligned}$$

Que pode ser rescrito como

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2 &= 1 \\ \hat{\pi}_1 U + \hat{\pi}_2 PD &= 1 + R \end{aligned}$$

cuja solução é

$$\hat{\pi}_1 = \frac{1+R-D}{U-D} \quad \text{e} \quad \frac{U-(1+R)}{U-D}.$$

Note que temos soluções positivas se, e somente se,

$$D < 1 + R < U.$$

Essa condição está diretamente relacionada com não-arbitragem. De fato, se

$$1 + R \geq U,$$

uma posição vendida no ativo de risco com uma contrapartida comprada num depósito remunerado garante um fluxo caixa não-negativo, com possibilidade de um fluxo positivo. Por outro lado, se

$$1 + R \leq D,$$

uma posição comprada no ativo e um empréstimo correspondente, também garante fluxos não negativos, como possibilidade de fluxo positivo. Nos dois casos, temos uma arbitragem.

**Pagamento contigenciado ao estado**

Considere um ativo que tem fluxo de caixa $D_1$ no estado I e $D_2$ no estado II. Temos então que o preço justo desse ativo seria

$$V = \frac{1}{1+R}\{\hat{\pi}_1 D_1 + \hat{\pi}_2 D_2\}$$

**Exemplo** Considere uma Call no ativo de risco com $PD < K < PU$. Nesse caso os possíveis fluxos de caixa são

$$D_1 = PU - K \quad \text{e} \quad D_2 = 0.$$

Portanto, o valor justo desta call, $V_{\text{call}}$, é dado por

$$V_{\text{call}} = \frac{1}{1+R}\frac{1+R-D}{U-D}(PU-K)$$

**Hedging e replicação**

Considere um portfólio $\theta = (\theta_1, \theta_2)^t$, com $\theta_1$ unidades do ativo de risco a um preço $P$ e $\theta_2$ unidades em depósito remunerado—a um preço de $1/(1+R)$.

O valor do portfólio vai ser então

$$\begin{aligned} \theta_1 PU + \theta_2 &= D_1, \qquad \text{no estado I;} \\ \theta_1 PD + \theta_2 &= D_2, \qquad \text{no estado II.} \end{aligned}$$

Resolvendo para $\theta_1$ e $\theta_2$, temos

$$\theta_1 = \frac{D_1 - D_2}{PU - PD} \quad \text{e} \quad \theta_2 = \frac{UD_2 - DD_1}{U-D}$$

Logo, o valo do portfólio será

$$V = \theta_1 P + \frac{\theta_2}{1+R}$$

i.e.

$$V = \frac{1}{1+R}\{\hat{\pi}_1 D_1 + \hat{\pi}_2 D_2\}.$$

**Moral** Em alguns mercados, temos uma probabilidade neutra ao risco se, e somente se, podemos construir portfólios replicadores. Nesse caso, podemos precificar ativos através da Lei do Preço Único. No que se segue, vamos estudar um pouco mais sobre esses mercados.

## 2.6 Mercados Completos e Incompletos

**Definição 2.8.** *Um mercado com $N$ ativos e $M$ estados é dito completo se, para todo vetor de fluxo de caixa $(D_1, \ldots, D_M)^t$, existe um portfólio $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)^t$, cujo fluxo de caixa no estado $j$ é $D_j$.*

Em outras palavras,

$$\theta^t D = \mathbf{E}^t, \quad \mathbf{E} \in \mathbb{R}^M$$

tem sempre solução. Este será o caso quando

$$\text{posto}\left(D^t\right) = M.$$

**Teorema 2.3.** *Suponha uma economia sem arbitragem. O mercado é completo se, e somente se, existe um único vetor de preços de estado satisfazendo (2.2.1).*

Demonstração: Suponha que o mercado é completo. Então, temos

$$\text{posto}(D^t) = M \Rightarrow \text{nul}(D) = 0.$$

Portanto $D$ é injetora e, assim, a equação $D\pi = \mathbf{p}$ tem, no máximo, uma única solução.

Por outro lado, suponha que o mercado não seja completo. Nesse caso,

$$\text{posto}(D^t) < M \Rightarrow \text{posto}(D) < M$$

Isso quer dizer, que existe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^M$ satisfazendo $D\mathbf{v} = 0$. Mas então, se $\pi$ é um vetor de preço de estados, temos que

$$D(\pi + \rho\mathbf{v}) = \mathbf{p}.$$

Como $\pi$ tem entradas positivas, tomando $\rho$ suficientemente pequeno temos que $\pi + \rho\mathbf{v}$ tem entradas positivas. Assim, os preços de estado não são únicos. ■

### O Modelo Trinomial

Considere uma economia com dois ativos, $N =$ e três possíveis estados $M = 3$, com fluxos de caixas $PU$, $PM$ e $PD$, $D < M < U$ e empréstimo sem risco a taxa $R$.

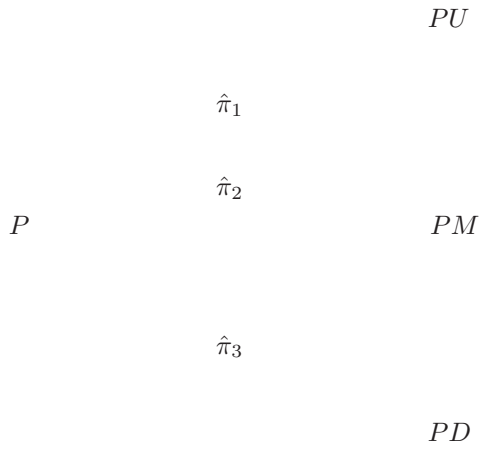



Figura 2.4: Árvore binomial na medida neutra ao risco.

Temos então

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2 + \hat{\pi}_3 &= 1 \\ U\hat{\pi}_1 + M\hat{\pi}_2 + D\hat{\pi}_3 &= 1. \end{aligned}$$

Mais uma vez, temos soluções positivas apenas se

$$D < 1 + R < U.$$

As soluções positivas são segmentos de reta com extremos

$$\hat{\pi}_1^0 = \frac{1+R-D}{U-D}, \quad \hat{\pi}_2^0 = 0 \quad \text{e} \quad \hat{\pi}_3^0 = \frac{1+R-D}{M-D}$$

**e**

$$\hat{\pi}_1^1 = 0, \quad \hat{\pi}_2^1 = \frac{M-(1+R)}{M-D} \quad \text{e} \quad \hat{\pi}_3^1 = \frac{1+R-D}{M-D} \qquad (M \geq 1+R);$$

**ou**

$$\hat{\pi}_1^2 = \frac{1+R-M}{U-M}, \quad \hat{\pi}_2^2 = \frac{U-(1+R)}{U-M} \quad \text{e} \quad \hat{\pi}_3^2 = 0 \qquad (M < 1+R).$$

Nesse caso, o valor de um pagamento contigenciado que paga $D_i$ no estado $i$ é dado por:

$$V = \frac{1}{1+R}\{\hat{\pi}_1 D_1 + \hat{\pi}_2 D_2 + \hat{\pi}_3 D_3\}$$

Para valores fixos de $D_i$, temos que $V$ é uma função linear das probabilidades neutras ao risco e escreveremos $V = V(\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \hat{\pi}_3)$. Sejam $\mathbf{P}_i = (\hat{\pi}_1^i, \hat{\pi}_2^i, \hat{\pi}_3^i)$, $i = 0, 1, 2$ e $I_i$ o segmento de reta que liga os pontos $\mathbf{P}_0$ e $\mathbf{P}_i$ $i = 1, 2$. Temos então o seguinte resultado:

**Proposição 2.4.** *Se $V = V(\mathbf{P})$, como definido acima, temos que:*

$$\max_{\mathbf{P}\in I_j} V(P) = \max\{V(\mathbf{P}_0), V(\mathbf{P}_j)\},$$

*onde $j = 1$, se $M \geq 1 + R$ e j=2, se $M < 1 + R$.*

Demonstração: Se $M \geq 1 + R$, então $V$ está definida no intervalo $I_1$ que é um segmento de reta limitado e, portanto, compacto. Logo o máximo é atingido. Seja $\mathbf{d} = (D_1, D_2, D_3)$ e defina

$$\tilde{V}(t) = t(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) + \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{d}.$$

Se o máximo for interior, em $t = t_0 \in (0, 1)$ digamos, então $\tilde{V}'(t_0) = 0$. Nesse caso temos

$$(P_1 - P_0) \cdot \mathbf{d} = 0$$

Mas, nesse caso, $\tilde{V}(t) = P_0 \cdot D$ e o máximo também é atingido nos extremos. O caso $M < 1 + R$ é análogo. ■

**Exemplo 2.1.** *Considere uma opção de compra (call) com strike $K$ satisfazendo $PM < K < PU$. Nesse caso, os fluxos de caixa são: $PU - K$ no estado I, e zero nos estados II e III.*

*Assim, se $M \geq 1 + R$, temos que*

$$V_{call} = \frac{\hat{\pi}_1}{1+R} D_1 \begin{cases} V^+ & \frac{1+R-D}{(1+R)(U-D)}(PU - K) \\ V^- & 0 \end{cases}$$

*Por outro lado, se $M < 1 + R$, temos em vez:*

$$V_{call} = \frac{\hat{\pi}_1}{1+R} D_1 \begin{cases} V^+ & \frac{1+R-D}{(1+R)(U-D)}(PU - K) \\ V^- & \frac{1+R-M}{(1+R)(U-M)}(PU - K) \end{cases}$$

**Interpretação Financeira**

Podemos interpretar esses limites nos preços dos ativos em termos de aversão ao risco: um comprador vai sempre oferecer $V^-$ (preço de compra) para não estar correndo risco. Por outro lado, para não incorrer em riscos, um vendedor vai estar sempre pedindo $V^+$ (preço de venda). No caso de uma negociação por $V$, com $V^- < V < V^+$, existe risco tanto para o comprador quanto para o vendedor.

## 2.7 Exercícios

1. Suponha que haja uma eleição presidencial, com candidatos de dois partidos políticos, $A$ e $B$. Historicamente, houve um número igual de presidentes de cada partido. Por outro lado, um corretor de apostas está pagando 2:7 no candidato do partido $A$ e 3:4 no candidato do partido $B$.

   (a) Calcule as probabilidades neutras ao risco do ponto de vista do corretor.

   (b) Compare o cálculo anterior com as probabilidades *freqüenciais*. Interprete o resultado.

   (c) Suponha que você conhece alguém que está disposto a pagar 1:2 no candidato $B$. Mostre que esta situação é passível de arbitragem.

2. Considere um país, onde o governo decretou uma banda cambial, i.e., a taxa de câmbio entre a moeda local $XYZ$ e o dólar flutua na faixa

$$U\$0.95 \leq XYZ \leq U\$1.05,$$

   por pelo menos um ano. Suponha também que o governo tenha letras de câmbio que pagam 30% ao ano e que a taxa do Banco Central Americano seja 6% ao ano. Mostre que esta é uma situação passível de arbitragem.

3. Numa rodada de apostas considerando pré-candidatos, suponha que um corretor esteja pagando Lula 6:7, Alckmin 1:6, Heloísa Helena 1:50. Calcule as probabilidades neutras ao risco da vitória de cada candidato. Que hipóteses são necessárias para justificar a sua conta?

4. Supondo uma economia sem arbitragem, para que valores do strike $K$, uma opção de compra vale o mesmo que uma opção de venda? Mostre que esse valor independe do modelo de precificação, desde que não haja possibilidade de arbitragem.

5. (a) Mostre que o conjunto de todas as medidas de probabilidade num conjunto de $M$ elementos pode ser representado como um conjunto convexo $P$ do $\mathbb{R}^M$.

   (b) Seja $s$ um título negociável definido pelo seu preço e seus fluxos de caixa. Mostre que o conjunto de medidas neutras ao risco associado a esse título pode ser descrito como a interseção de $P$ com um hiperplano em $\mathbb{R}^M$.

   (c) Generalize o resultado anterior para o caso de $N$ títulos negociáveis.

6. Aplique o resultado anterior, para analisar o modelo trinomial na seguinte situação: $S = 100.00$, $U = 1.10$, $M = 1.0$, $D = 0.80$ e uma opção de compra com strike de $K = 105.00$, que tem um prêmio $C = 3.80$. Mostre que se, em vez, $C = 1.00$ existe uma oportunidade de arbitragem.

# Capítulo 3

# Modelo Binomial

*The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences.*
— E. Wigner [WIG]

Neste capítulo, vamos estudar em mais detalhe o modelo binomial multiperíodos desenvolvido inicialmente por [CO-RO-RU]. Embora seja um dos modelos mais simples para a dinâmica dos preços, este modelo já é suficientemente rico para permitir obtermos, inclusive, a célebre fórmula de Black-Scholes quando passamos ao limite contínuo.

## 3.1 O Modelo Básico

Como no capítulo anterior, temos uma economia com dois ativos e dois estados Entretanto, temos agora $N+1$ datas de negócio. Nosso espaço amostral para cada período continua sendo

$$\Omega = \{U, D\}.$$

satisfazendo

$$\mathbb{P}[\{U\}] = p \quad \text{e} \quad \mathbb{P}[\{D\}] = q,$$

com $p + q = 1$.

Vamos denotar por $S_n$ o preço do ativo de risco em $t = t_n$. A dinâmica de preços do ativo é dada por

$$S_{n+1} = H_{n+1} S_n, \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

onde

$$H_n = \begin{cases} U, & \text{com probabilidade } p, \\ D, & \text{com probabilidade } q, \end{cases}$$

A dinâmica dos preços do ativo de risco pode ser representada pela árvore da figura 3.1.

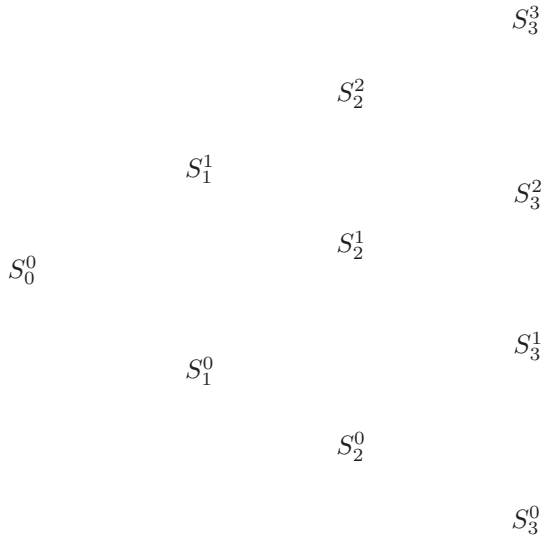



Figura 3.1: Árvore binomial de quatro períodos

A questão que se põe, neste caso, é a construção de uma medida de probabilidade nos caminhos na árvore ilustrada na Figura 3.1, que nos possibilite escrever o preço de um pagamento contigenciado como o valor esperado do payoff descontando a valor presente. Entretanto, já vimos que as probabilidade freqüênciais não são relevantes para uma precificação correta do ativo. Vamos supor que existe uma medida neutra ao risco e que, nessa medida, em cada período o valor correto do ativo é o valor esperado do fluxo de caixa no próximo período. Mais precisamente

**Hipótese Martingal** Existe uma medida de probabilidade para $H_n$ tal que

$$S_n = \frac{1}{1+R}\mathbb{E}[S_{n+1}|S_n],$$

que pode ser escrita como

$$1 = \frac{1}{1+R}\{UP_U + DP_D\}, \quad P_U + P_D = 1.$$

A unica solução do sistema acima é dada por

$$P_U = \frac{1+R-D}{U-D}, \quad P_D = \frac{U-(1+R)}{U-D}, \quad D < 1+R < U.$$

Logo temos o seguinte resultado

**Proposição 3.1.** *Dado parâmetros $U$, $D$ e $R$, satisfazendo $D < 1+R < U$, existe uma única medida de probabilidade neutra ao risco para $H_n$ e, conseqüentemente, para a os espaço de caminhos de preço do ativo de risco.*

## 3.2 Precificação de Pagamentos Contigenciados

### 3.2.1 Precificação via Recursão

Suponha um payoff $F(S)$, cujo vencimento ocorre em $t = t_N$.

Vamos denotar por $S_n^j$ o preço do ativo no tempo $t = t_n$, que teve $j$ choques de preço dados por $U$. Vamos escrever também $V_n^j = V(S_n^j)$, onde $V_n(S_n)$ denota o preço do contrato no tempo $t = t_n$ com o ativo custando $S_n$. Sob a medida neutra ao risco, temos então:

$$V_n^j = \frac{1}{1+R}\mathbb{E}\{V_{n+1}|S_n = S_n^j\}$$
$$V_n^j = \frac{1}{1+R}\{P_U V_{n+1}^{j+1} + P_D V_{n+1}^j\}$$

Temos que ter também a condição terminal, i.e,

$$V_N^j = F(S_N^j).$$

Para resolver a recursão acima em forma fechada, escrevemos

$$\begin{aligned} V_n^j &= \left(\frac{1}{1+R}\right)^{N-n} \mathbb{E}\{F(S_N)|S_n = S_n^j\} \\ &= \frac{1}{1+R}^{N-n} \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}[S_N = S_N^k|S_n = S_n^j]F(S_N^k). \end{aligned}$$

Vamos precisar do seguinte resultado

**Lema 3.1.**

$$\mathbb{P}[S_N = S_N^k|S_n = S_n^j] = \binom{N-n}{k-j} P_U^{k-j} P_D^{N-n-k+j}.$$

<u>Demonstração</u>: Um caminho até $S_N^k$ começando em $S_n^j$ pode ser pensando com uma palavra de $N-n$ letras com $k-j$ letras $U$ e $N-n-k+j$ letras $S$. Se a probabilidade de termos uma letra $U$ for $P_U$ e de termos uma letra $D$ for $P_D$, então a probabilidade de termos uma certa palavra com $N-n$ letras, das quais $k-j$ são $U$ é $P_U^{k-j}P_D^{N-n-k+j}$. Logo

$$\mathbb{P}\left[S_N = S_N^k|S_n = S_n^j\right] = C_{N,n}^{k,j} P_U^{k-j} P_D^{N-n-k+j},$$

onde $C_{N,n}^{k,j}$ denota o número de caminhos começando em $S_n^j$ e terminando em $S_N^k$ ou, equivalentemente, o número de palavras e $N-n$ letras com $k-j$ letras $U$ e $N-n-k+j$ letras $S$.

Por outro lado, temos $N-n$ lugares vazios onde podemos colocar $k-j$ letras $U$ e as restantes terão quer ser preenchidas com $S$. Mas, combinatória básica nos diz que

$$C_{N,n}^{k,j} = \binom{N-n}{k-j}$$

Isto conclui a demonstração. ■
Portanto,

$$V_n^j = \left(\frac{1}{1+R}\right)^{N-n} \sum_{k=j}^{N-n+j} \binom{N-n}{k-j} P_U^{k-j} P_D^{N-n-k+j} F(S_N^k).$$

Se $n = j = 0$, temos

$$V_0^0 = \left(\frac{1}{1+R}\right)^{N} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} P_U^{k} P_D^{N-k} F(S_N^k).$$

Registramos este importante resultado na proposição abaixo

**Proposição 3.2.** *O preço de uma opção com payoff $F(S)$, vencimento em $T = N$ unidades de tempo a partir do instante atual é dado por*

$$V_0 = \left(\frac{1}{1+R}\right)^{N} \mathbb{E}\left[F(S_N)\middle|S_0\right].$$

O valor esperado proposição 3.2 é definido pela probabilidade de se estar na folha $k$ no tempo $N$. No caso de uma árvore com $P_U = P_D = 1/2$ a distribuição de probabilidade pode ser vista na Figura 3.2.1.

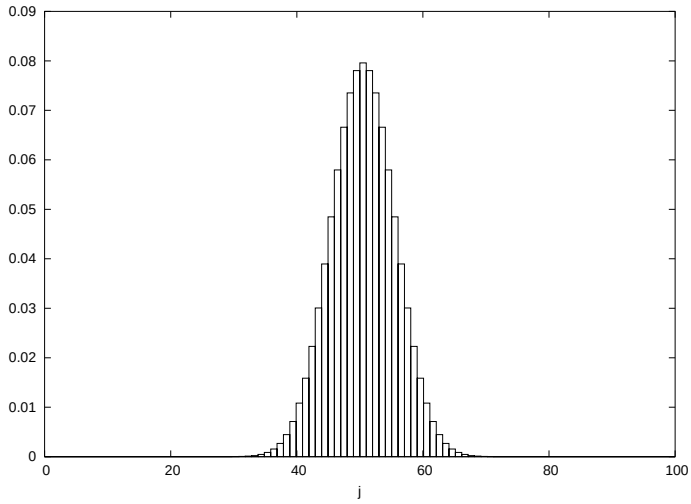



Figura 3.2: Gráfico de $\mathbb{P}\left[S_N = U^j D^{N-j}\middle|S_0 = S\right]$.

### 3.2.2 Precificação via Hedging

Considere um portfólio $\theta_n^j = (\Delta_n^j, B_n^j)^t$. O valor do portfólio será

$$V_n^j = \Delta_n^j S_n^j + B_n^j.$$

Dependendo do estado, teremos

$$\Delta_n^{j+1} + B_n^j(1+R) = V_{n+1}^{j+1}$$
$$\Delta_n^j + B_n^j(1+R) = V_{n+1}^j$$

Resolvendo para $\Delta_n^j$ e $B_n^j$, obtemos

$$\Delta_n^j = \frac{V_{n+1}^{j+1} - V_{n+1}^j}{S_{n+1}^{j+1} - S_{n+1}^j} \quad \text{e} \quad B_n^j = -\frac{1}{1+R}\frac{S_{n+1}^j V_{n+1}^{j+1} - S_{n+1}^{j+1} V_{n+1}^j}{S_{n+1}^{j+1} - S_{n+1}^j}$$

Portanto

$$\begin{aligned} V_n^j &= \frac{1}{1+R}\left[\frac{S_n^j(1+R) - S_{n+1}^j}{S_{n+1}^{j+1} - S_{n+1}^j} V_{n+1}^{j+1} + \frac{S_{n+1}^{j+1} - S_n^j(1+R)}{S_{n+1}^{j+1} - S_{n+1}^j} V_{n+1}^j\right] \\ &= \frac{1}{1+R}[P_U V_{n+1}^{j+1} + P_D V_{n+1}^j] \end{aligned}$$

Levando em conta que $V_N^j = F(S_N^j)$, temos a mesma recursão anterior.

Temos então a seguinte estratégia:

1. No tempo $t = t_n$ montamos um portfólio $\theta_n^j = (\Delta_n^j, B_n^j)^t$.
2. A partir daí
$$\Delta_k^j = \frac{V_{k+1}^{j+1} - V_{k+1}^j}{S_{k+1}^{j+1} - S_{k+1}^j}, \quad n \le k \le N.$$
3. Claramente teremos
$$B_k^j = V_k^j - \Delta_k^j S_k^j.$$

## 3.3 Precificação das Opções Baunilha

Embora a fórmula de precificação derivada acima seja válida para qualquer payoff, o seu cálculo no caso de uma Call ou de uma Put tem interesse específico além de, historicamente, terem sido as primeiras fórmulas de precificação obtidas.

### 3.3.1 Calls

Neste caso, temos

$$F(S_N) = \max(S_N - K, 0)$$

Escrevendo $S_0^0 = S$, temos que

$$\begin{aligned} C(S,K;N) &= \frac{1}{(1+R)^N}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k} P_U^k P_D^{N-k} \max(S_N^k - K, 0) \\ &= \frac{1}{(1+R)^N}\sum_{S_N^k \ge K}^{N}\binom{N}{k} P_U^k P_D^{N-k}(S_N - K). \end{aligned}$$

Como $S_N^k = SU^k D^{N-k}$, temos que

$$S\left(\frac{U}{D}\right)^k D^N > K \Rightarrow k > \frac{\ln(\frac{K}{SD^N})}{\ln(\frac{U}{D})}.$$

Assim, se escrevermos

$$k_0 = \lceil \ln(K/SD^n)/\ln(U/D) \rceil,$$

onde $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro maior ou igual a $x$, observamos que $(1+R)^N = (1+R)^k(1+R)^{N-k}$, obtemos

$$\begin{aligned} C(S,K;N) &= S\sum_{k>k_0}^{N}\binom{N}{k}\left(\frac{U}{1+R}P_U\right)^k\left(\frac{D}{1+R}P_D\right)^{N-k} \\ &\quad -\frac{K}{(1+R)^N}\sum_{k>k_0}^{N}\binom{N}{k}P_U^k P_D^{N-k}. \end{aligned}$$

Sejam

$$Q_U = \frac{U}{1+R}P_U \quad \text{e} \quad Q_D = \frac{D}{1+R}P_D$$

podemos então escrever

$$C(S,K;N) = S\sum_{k>k_0}^{N}\binom{N}{k}Q_U^k Q_D^{N-k} - \frac{K}{(1+R)^N}\sum_{k>k_0}^{N}\binom{N}{k}P_U^k P_D^{N-k}. \tag{3.3.1}$$

Observe que $Q_U + Q_D$=1, Aplicando a fórmula de precificação dada por (3.3.1), temos o seguinte gráficos normalizados

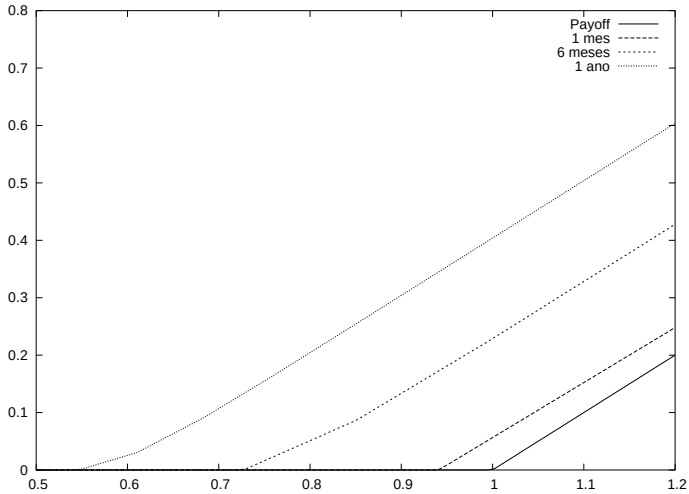



Figura 3.3: Preços de opções de compras com maturidades de 1 mês, 6 meses e um ano, comparados com o *payoff*.

### 3.3.2 Construção do Portfólio Replicador

Vamos agora construir explicitamente o portfólio equivalente, que um emissor de uma Call deve montar para se proteger de um eventual pagamento.

Vamos denotar por $E_n^j$ o valor de um portfólio, por unidade do ativo, no tempo $t = t_n$ e $S_n = S_n^j$. Temos então que

$$E_n^j = \frac{1}{1+R}\left[P_U E_{n+1}^{j+1} + P_D E_{n+1}^j\right]$$

satisfazendo as seguintes condições

$$E_N^j = S_N^j, \quad S_N^j \geq K \quad \text{e} \quad E_N^j = 0, \quad S_N^j < K.$$

Analogamente, se $B_n^j$ denota o valor no ativo sem risco que devemos ter no portfólio no tempo $t = t_n$, com o ativo $S_n = S_n^j$, temos então que:

$$B_n^j = \frac{1}{1+R}\left[P_U B_{n+1}^{j+1} + P_D B_{n+1}^j\right],$$

satisfazendo

$$B_N^j = -K, \quad S_N^j \geq K \quad \text{e} \quad B_N^j = 0, \quad S_N^j < K.$$

Assim observamos que o portfólio replicador é basicamente:

- Ficar comprado no ativo de risco
- Ficar vendido em dinheiro—ou seja, contrair uma dívida.

Note também que

- $\Delta \to 1$, quando $S \gg K$;
- $\Delta \to 0$, quando $S \ll K$;

Isso reflete um fato natural, quando o ativo se valoriza muito, o único jeito de se proteger contra uma obrigação de fornecer uma certa quantidade é ficando comprado neste ativo. Por outro lado, quando um ativo se desvaloriza muito, investe-se num depósito remunerado sem risco.

### 3.3.3 Puts

No caso da Put, podemos usar a paridade Put-Call para $N$ períodos, i.e,

$$P = C - S + \frac{K}{(1+R)^N},$$

Como

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} P_U^k P_D^{N-k} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} Q_U^k Q_D^{N-k} = 1$$

Obtemos que

$$P(S,K;N) = \frac{K}{(1+R)^N} \sum_{k=0}^{k<k_0} \binom{N}{k} P_U^k P_D^{N-k} - S \sum_{k=0}^{k<k_0} \binom{N}{k} Q_U^k Q_D^{N-k}$$

## 3.4 Análise de Média e Variância

### 3.4.1 Estatística dos Preços do Modelo

Seja

$$\mathrm{d}t = \frac{T}{N}, \quad R = \mathrm{e}^{r\mathrm{d}t} - 1 \approx r\mathrm{d}t.$$

Seja $Y$ o processo de crescimento dado por

$$Y = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{S_N}{S_0}\right)$$

Para o ativo sem risco temos $Y = r$.

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{T}\ln\left(\frac{(1+R)^N S_0}{S_0}\right) \\ &= \frac{1}{T}\ln \mathrm{e}^{rN\mathrm{d}t} \\ &= r. \end{aligned}$$

Por outro lado, no caso do ativo de risco temos

$$\ln\left(\frac{S_N}{S_0}\right) = \sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{N}\ln(H_n).$$

Vamos escrever

$$\nu = \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}[\ln(H_n)] = \frac{1}{\mathrm{d}t}\{\ln UP_U + \ln DP_D\}.$$

Quanto à variância, temos por conta da independência dos $H_n$'s que:

$$\mathrm{Var}\,[Y] = \frac{1}{T^2}\left(\sum_{n=1}^{N}\mathrm{Var}\,[\ln(H_n)]\right) = \frac{N}{T^2}\mathrm{Var}\,[\ln(H_1)].$$

Portanto,

$$\mathrm{Var}\,[Y] = \frac{1}{T\mathrm{d}t}\left\{\ln^2 UP_U + \ln^2 DP_D - [\ln UP_U + \ln DP_D]^2 = \frac{1}{T\mathrm{d}t}\left[\ln\left(\frac{U}{D}\right)\right]^2 P_U P_D.\right\}$$

Fazendo $T = 1$ na expressão acima, nos dá uma quantidade que é conhecida como a *volatilidade* do ativo de risco:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mathrm{d}t}\left[\ln\left(\frac{U}{D}\right)\right]^2 P_U P_D.$$

A volatilidade mede, como o próprio nome sugere, o grau de incerteza associada ao valor do ativo de risco. Note que, se $\sigma^2 = 0$, então $U = D = 1 + R$ e o ativo de risco é equivalente, financeiramente, ao ativo sem risco.

Nesse contexto, um investidor que aplique no ativo de risco espera ter um ganho médio $\nu$ , que pode variar dentro de um intervalo de incerteza proporcional a $\sigma$.

### 3.4.2 Calibragem e Modelagem

Uma questão natural se põe:

> Será possível escolher os parâmetros do modelo binomial para que este seja capaz de mimetizar o comportamento estatístico dos preços observados no mercado?

A resposta a essa pergunta vem com um grão de um sal:

> **Se** acreditarmos que o comportamento estatístico dos preços seja de fato bem aproximado por esse modelo, então devemos ter, certamente, uma concordância entre a média e o desvio padrão observados no mercado e os do modelo.

No que se segue, vamos descrever como calibrar o modelo a partir da média e variância dos preços observados no mercado. Seja

$$U = U'\mathrm{e}^{\mathrm{d}t}, \quad D = D'\mathrm{e}^{\mathrm{d}t}.$$

Nesse caso, temos

$$U'P_U + D'P_D = 1$$

Vamos escrever

$$\frac{U}{D} = \mathrm{e}^{2\rho\sqrt{\mathrm{d}t}}.$$

Obtemos então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} P_U + P_D = 1 \\ P_U P_D = \frac{\sigma^2}{4\rho^2} \end{cases}$$

Cujas soluções são

$$P_U = \frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}}\right] \quad \text{e} \quad P_D = \frac{1}{2}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}}\right] \tag{3.4.2}$$

Lembrando que

$$P_U = \frac{1 - D'}{U' - D'} \quad \text{e} \quad P_U = \frac{U' - 1}{U' - D'},$$

obtemos que

$$U' = \frac{\mathrm{e}^{\rho\sqrt{\mathrm{d}t}}}{P_D\mathrm{e}^{-\rho\sqrt{\mathrm{d}t}} + P_U\mathrm{e}^{\rho\sqrt{\mathrm{d}t}}} \quad \text{e} \quad D' = \frac{\mathrm{e}^{-\rho\sqrt{\mathrm{d}t}}}{P_D\mathrm{e}^{-\rho\sqrt{\mathrm{d}t}} + P_U\mathrm{e}^{\rho\sqrt{\mathrm{d}t}}}.$$

Portanto, temos

$$U = \frac{\mathrm{e}^{\rho\sqrt{\mathrm{d}t}+r\mathrm{d}t}}{P_D\mathrm{e}^{-\rho\sqrt{\mathrm{d}t}} + P_U\mathrm{e}^{\rho\sqrt{\mathrm{d}t}}} \quad \text{e} \quad D = \frac{\mathrm{e}^{-\rho\sqrt{\mathrm{d}t}+r\mathrm{d}t}}{P_D\mathrm{e}^{-\rho\sqrt{\mathrm{d}t}} + P_U\mathrm{e}^{\rho\sqrt{\mathrm{d}t}}} \tag{3.4.3}$$

Vamos calcular

$$\nu = \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{\mathrm{d}t}\left\{\ln UP_U + \ln DP_D\right\}$$

Substituindo os valores de $U$ e $D$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\nu &= \frac{1}{dt}\left\{r\mathrm{d}t + (P_U - P_D)\rho\sqrt{\mathrm{d}t} - \ln\left[P_D\mathrm{e}^{-\rho\sqrt{\mathrm{d}t}} + P_U\mathrm{e}^{\rho\sqrt{\mathrm{d}t}}\right]\right\} \\
&= r + (P_U - P_D)\frac{\rho}{\sqrt{\mathrm{d}t}} - \frac{1}{\mathrm{d}t}\ln\left[1 + (P_U - P_D)\rho\sqrt{\mathrm{d}t} + \frac{\rho^2\mathrm{d}t}{2} + \mathcal{O}(\mathrm{d}t^{3/2})\right] \\
&= r + (P_U - P_D)^2\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^2}{2} + \mathcal{O}(\mathrm{d}t^{1/2})
\end{aligned}$$

Como

$$P_U - P_D = \pm\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}},$$

obtemos

$$\nu = r - \frac{\sigma^2}{2} + \mathcal{O}(\mathrm{d}t^{1/2}). \tag{3.4.4}$$

Note que o ganho esperado, para $\mathrm{d}t \ll 1$ depende apenas da taxa de juros e da volatilidade do ativo de risco e **não** da percepção subjetiva de crescimento do ativo dada por $\rho$. Esse é um dos pontos cruciais da teoria aqui desenvolvida.

## 3.5 Exercícios

1. Suponha uma taxa de juros de 8% a.a. e uma volatilidade anual de 15% para um certo ativo.

   (a) Construa um árvore binomial com 5, 15 e 45 períodos para precificar uma opção de compra européia com vencimento em seis meses e strike de 10% acima do valor do ativo no mercado.

   (b) Calcule os deltas correspondentes e compare com a fórmula de Black-Scholes do Capítulo 1.

   (c) Quantos períodos você acha que serão necessários par obter um erro menor do que 1% com respeito ao preço de Black-Scholes do Capítulo 1.

2. Um companhia de petróleo emite cupons de débito dependendo do preço do óleo cru. Ela emite uma nota de dois anos, que paga cupons semestralmente e um pagamento final de $ 100.000,00. Os cupons são calculados da seguinte forma. Seja $C$ o preço do petróleo cru no momento em questão. Então:

$$\text{Pagamento do cupom} \begin{cases} \$4.000,00 & C \leq 18 \\ \$(4.000,00 + (C-18)400,00) & 18 \leq C \leq 23 \\ \$6.000,00 & C \geq 23. \end{cases}$$

   (a) Mostre que a nota pode ser decomposta numa série de bônus descontados e de opções sobre o preço do óleo cru.

   (b) Suponha que a taxa de juros é 8% e que a volatilidade do óleo cru é de 5%. Calcule o preço dessa nota usando a fórmula de Black-Scholes.

3. Usando a fórmula de Black-Scholes encontre uma fórmula para o strike de uma opção européia de compra, para um dado delta, supondo que a taxa de juros e a volatilidade são sabidas. Calcule o strike e o preço das opções com $\sigma = 0.14$, $r = 6\%$ e para $\Delta = 0.20, 0.25, 0.50, 0.55, 0.75, 0.80$.

4. Uma *call spread* é uma posição consistindo de uma call vendida e de uma comprada com diferentes strikes. Considere um *call spread* com strikes $90 (comprada) e $110 (vendida).

   (a) Calcule e trace gráficos do preço do spread, sabendo $r = 0.05$ e que a volatilidade pode ser de 10%, 20%, 30% ou 40%.

   (b) Se o preço do ativo base é $100, como muda o preço do spread se a volatilidade muda?

   (c) Que conclusões e/ou conjecturas você pode tirar da relação entre o valor do spread e volatilidade?

5. Suponha que o S&P500 tem um valor atual de 200 e que o dividendo esperado das ações que correspondentes seja de 4%. Letras do Tesouro Americano estão sendo lançadas por 6 meses a 6%. Qual o valor, sob o modelo binomial, de um contrato futuro de seis meses sobre o S&P500?

6. Suponha que um certo ativo $S$ é o ativo base de um contrato futuro. Você sabe que: o ativo $S$ está sendo negociado por R$80,00; $S$ paga dividendos anuais de R$8,00 em dois pagamentos semestrais de R$4,00 e o próximo pagamento será em exatamente 6 meses; você pode tomar empréstimos a uma taxa 6% ao semestre.

   (a) Qual o preço futuro do ativo dado pelo modelo binomial?

   (b) O que você faria se o preço futuro fosse de R$83,00?

   (c) O que você faria se o preço futuro fosse de R$76,00?

   (d) Suponha agora que os dividendos sejam pagam trimestralmente e que você possa reinvistir o que receber no próximo trimestre com juros de 1% ao trimestre. Qual o valor do futuro agora?

7. Considere uma opção de compra que vence em 12 meses, sobre um ativo que paga dividendos a cada seis meses e que o contrato foi fechando no primeiro dia logo após o pagamento de um cupom de dividendos. Sabendo que:

   - a volatilidade anual é de 15%;
   - a taxa de juros anual é de 6%;
   - o ativo paga 10% de dividendo em cada cupom.

   Precifique essa opção usando uma árvore binomial recombinante.

8. Você encontra notas com contas de precificação de um instrumento, expirando em um ano, usando o modelo binomial com os seguintes parâmetros$U = 2$, $D = 1/2$, $R = 3/4$ e $N = 100$. Quais os valores de $\sigma$ e $\rho$ estão sendo usados nessas contas? Essa determinação é única?

# Capítulo 4

# A Fórmula de Feynman-Kac

*Thirty-one years ago [1949], Dick Feynman told me about his "sum over histories" version of quantum mechanics. "The electron does anything it likes," he said. "It just goes in any direction at any speed, forward or backward in time, however it likes, and then you add up the amplitudes and it gives you the wave-function." I said to him, "You're crazy." But he wasn't.* F. J. Dyson.

Neste capítulo apresentamos uma versão discreta da célebre fórmula de Feynman-Kac que tem uma vasta aplicação em finanças quantitativas, bem como em outras áreas que vão desde a física à biologia. No contexto de finanças quantitativas, além de sua importância teórica, ela tem grande relevância pela possibilidade de implementação numérica usando os chamados métodos de Monte Carlo.

As origens da fórmula de Feynman-Kac remontam ao trabalho de doutorado de R. P. Feynman, que obteve uma relação heurística entre a equação de Schroedinger e a teoria de integração em espaços de funções de N. Wiener. Estas idéias foram desenvolvidas e ampliadas por M. Kac nos anos 40 e 50 [KAC]. Para mais detalhes e bibliografia veja [DM].

A idéia principal consiste em explorar uma conexão entre processos estocásticos e soluções de certas equações diferenciais (ou de diferenças, como faremos aqui). A solução das últimas consiste de valores esperados que levam em conta a contribuição de todos os estados do sistema, ou seja, a *soma sobre todos as histórias*.

## 4.1 A Fórmula Reversa de Kolmogorov

Nosso ponto de partida é a fórmula reversa de Kolmogorov que relaciona as soluções de uma equação de evolução com valores esperados.

Vamos considerar um processo estocástico Markoviano $X = \{X_k\}_{k=1,2,\cdots}$ conforme definimos no Apêndice A em tempo discreto. Por simplicidade vamos assumir que este processo toma, no máximo, uma quantidade enumerável de valores em um conjunto $\mathcal{E} = \{a_1, a_2, \cdots\}$.

Definimos cada elemento da matriz de transição de Markov $p[i,j]$ como a probabilidade de transição do estado $X = a_j$ para o estado $X = a_i$ após uma unidade de tempo. Sendo assim, após uma unidade de tempo a nossa esperança condicional de $f(X)$ com $X$ uma variável aleatória inicialmente no estado $X = a_j$ é dada por

$$\mathbb{E}[f(X_{k+1})|X_k = a_j] = \sum_j f(a_i)p[i,j] \ .$$

No que se segue, vamos também supor que a matriz de transição acima *não* se altera com o tempo, ou seja que o processo é um *processo homogêneo no tempo.*

**Exemplo 4.1.** *Consideremos o modelo binomial, proposto por Cox-Ross-Rubinstein (CRR), no qual o ativo com risco tem o seu movimento em uma árvore como descrito no Capítulo 3. Neste modelo, para cada $n = 0, 1, \cdots$, o ativo $S_n$ toma valores em um conjunto da forma $\{U^j D^{n-j} | j = 0, \cdots n\}$ ou equivalentemente os inteiros entre $0$ e $n$. A matriz de transição está definida no conjunto de pares $(j,n)$ com $0 \leq j \leq n$, com $n = 0, 1, \cdots$. As probabilidades de transição são dadas por $p[(j,n)|(j+1,n+1)] = P_U$ e $p[(j,n)|(j,n)] = P_D$ para $0 \leq j \leq n$, e é zero em todos os outros casos.*

Note que a matriz de transição tem a propriedade que $p[i,j] \geq 0$ e que para qualquer $j$ vale que

$$\sum_i p[i,j] = 1 \ .$$

Vamos definir agora um operador que vai ter um papel fundamental.[1]

**Definição 4.1.** *Para $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ limitada* [2] *colocamos*

$$\mathcal{A}f(a_j) := \left( \sum_i f(a_i)p[i,j] \right) - f(a_j) \ . \tag{4.1.1}$$

**Exemplo 4.2.** *Consideremos um processo de passeio aleatório simétrico na reta, ou seja com igual probabilidade de irmos para a direita ou para a esquerda por uma variação de $\Delta x$. Neste caso, o nosso conjunto $\mathcal{E} = (\Delta x)\mathbb{Z}$ e a matriz de transição é caracterizada pela propriedade que $p[i,i+1] = p[i-1,i] = 1/2$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ e vale zero em todos os outros elementos. Sendo assim*

$$\mathbb{E}[f(X_{k+1})|X_k = a_j] = \frac{1}{2}\left(f(a_{j+1}) + f(a_{j-1})\right)$$

[1] O operador $\mathcal{A}$ é o análogo discreto do gerador infinitesimal do semi-grupo do processo de difusão.

[2] Podemos definir $\mathcal{A}$ para situações mais gerais. Observamos que a definição de $\mathcal{A}$ faz sentido também quando $f$ é positiva.

*O operador $\mathcal{A}$ toma a forma*

$$\mathcal{A}f(a_j) = \frac{1}{2}\left(f(a_{j+1}) + f(a_{j-1}) - 2f(a_j)\right) \ .$$

*Note que $\mathcal{A}$ corresponde à discretização por diferenças finitas do operador $d^2/dx^2$.*

Nosso próximo resultado nos diz que, ao passarmos de um tempo $k$ ao tempo $k+1$ em um processo estocástico Markoviano, os valores esperados podem ser calculados através da aplicação de nossa matriz de transição aos estados intermediários. [3]

**Lema 4.1.** *Sejam $\{X_k\}_{k=0,1,\cdots}$ um processo estocástico Markoviano e $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Se definirmos $g(x) = \mathbb{E}[f(X_k)|X_0 = x]$ então*

$$\mathbb{E}[g(X_1)|X_0 = x] = \mathbb{E}[f(X_{k+1})|X_0 = x] \ .$$

Demonstração: A identidade pode ser justificada intuitivamente pelo fato que um processo estocástico Markoviano não possui memória. Mais rigorosamente, escrevemos

$$\mathbb{E}[g(X_1)|X_0 = x] = \mathbb{E}[g(Y_1)|Y_0 = x] \ ,$$

onde $\{Y_k\}_{k=0,1,\cdots}$ é um processo com as mesmas probabilidades de transição que $\{X_k\}_{k=0,1,\cdots}$. Porém,

$$\mathbb{E}[g(Y_1)|Y_0 = x] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_k)|X_0 = Y_1]|Y_0 = x] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(Y_{k+1})|Y_1]|Y_0 = x]$$

onde a substituição do processo $X$ pelo processo $Y$ foi feita pois eles possuem as mesmas probabilidades de transição. Agora, usamos a propriedade descrita na Equação (A.2.3) do Apêndice A para obtermos

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[f(Y_{k+1})|Y_1]|Y_0 = x] = \mathbb{E}[f(Y_{k+1})|Y_0 = x] = \mathbb{E}[f(X_{k+1})|X_0 = x] \ .$$

■

Estamos agora prontos para resolver a *equação de evolução*

$$\begin{cases} u_{k+1} - u_k = \mathcal{A}u_k \ , \ k = 0, 1, \cdots \\ u_0 = f \ , \end{cases} \tag{4.1.2}$$

para $f$ uma função definida no nosso conjunto $\mathcal{E}$.

**Obs.:** Na equação (4.1.2), buscamos uma função $u : \mathbb{N} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$.

A solução será dada pela fórmula reversa de Kolmogorov, ou seja pelo seguinte teorema:

**Teorema 4.1.** *A solução da equação (4.1.2) para uma função $f$ limitada é dada por*

$$u_k(x) = \mathbb{E}[f(X_k)|X_0 = x] \ , \ k = 0, 1, 2, \cdots \ . \tag{4.1.3}$$

[3] Para os leitores familiares com física quântica isto pode ser interpretado como um análogo da equação de Lipmann-Schwinger.

Demonstração: Usaremos indução em $k$. Evidentemente que a afirmação vale para $k = 0$ e qualquer função $f$ limitada pois neste caso $u_0(x) = f(x)$. Suponhamos agora que vale para $l = 0, 1, \cdots, k$ e vamos demonstrar a validade quando $l = k+1$. Seja $g(x) = \mathbb{E}[f(X_{k+1})|X_0 = x]$ para $x \in \mathcal{E}$. Calculemos a quantidade

$$\begin{aligned} \mathcal{A}g(x) &= \mathbb{E}[g(X_1)|X_0 = x] - \mathbb{E}[f(X_{k+1})|X_0 = x] && (4.1.4) \\ &= \mathbb{E}[f(X_{k+2})|X_0 = x] - \mathbb{E}[f(X_{k+1})|X_0 = x] && (4.1.5) \\ &= u_{k+2} - u_{k+1} \ . && (4.1.6) \end{aligned}$$

A igualdade na equação (4.1.4) é justificada pela definição do operador $\mathcal{A}$ e de $g$. A passagem na equação (4.1.5) utilizou o Lema 4.1.

Portanto, por (4.1.4-4.1.6), segue-se que $u_{k+2} = u_{k+1} + \mathcal{A}u_{k+1}$, completando a indução. ■

**Exemplo 4.3.** *(Continuação do Exemplo 4.2). Para o caso do passeio aleatório nos inteiros, a equação (4.1.2) toma a forma*

$$\begin{cases} u^i_{k+1} - u^i_k = \frac{1}{2}\left(u^{i+1}_k + u^{i-1}_k - 2u^i_k\right) \ , \ i \in \mathbb{Z} \ , \ k = 0, 1, \cdots \ , \\ u^i_0 = f(i\Delta x) \ , i \in \mathbb{Z} \ . \end{cases} \tag{4.1.7}$$

*Esta equação corresponde à discretização da* equação do calor *pelo método de diferenças finitas. Mais especificamente, se considerarmos que o tempo é dado por $t = k\Delta t = (1/2)k(\Delta x)^2$, e aplicarmos o método de diferenças à equação*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \quad u(0, \cdot) = f \ . \tag{4.1.8}$$

*obtemos (4.1.7).*

Para finalizarmos esta seção, observamos que a solução da equação do calor (4.1.8) é dada por

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\exp \frac{-(x-y)^2}{2t}}{\sqrt{2\pi t}} dy$$

que podemos interpretar como o valor esperado

$$u(t, x) = \mathbb{E}[f(W_t)|W_0 = x] \ ,$$

onde $W_t$ é o movimento Browniano partindo do ponto $W_0 = x$.

## 4.2 A Fórmula de Feynman-Kac

A exposição da versão discreta da fórmula de Feynman-Kac que apresentaremos aqui, até quanto sabemos, é original.

Condideremos a recursão dada por

$$\begin{cases} (1 + R(x))v_{k+1}(x) - v_k(x) = \mathcal{A}v_k(x), \ x \in \mathcal{E} \ , \ k = 0, 1, \cdots \ , \\ v_0 = f \ . \end{cases} \tag{4.2.9}$$

**Teorema 4.2.** *A solução da recursão (4.2.9) para $f$ limitada é dada por*

$$v_k(x) = \mathbb{E}[\big(\Pi_{l=0}^{k-1}(1+R(X_l)\big)^{-1} f(X_k)|X_0 = x] \ . \tag{4.2.10}$$

Demonstração: Novamente por indução em $k$. Vamos denotar por $w_k$ o lado direito da equação (4.2.10). A afirmação para $k = 0$ é evidente desde que convencionemos que um produtório da forma $\Pi_{l=0}^{-1} s_l$ tem valor 1. Seja $g = w_k$

$$(\mathcal{A}+I)g(x) = \mathbb{E}[g(Y_1)|Y_0 = x] \tag{4.2.11}$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\big(\Pi_{l=0}^{k-1}(1+R(X_l)\big)^{-1} f(X_k)|X_0 = Y_1]|Y_0 = x] \tag{4.2.12}$$

$$= (1+R(x))\mathbb{E}[(1+R(Y_0))^{-1}\mathbb{E}[\big(\Pi_{l=0}^{k-1}(1+R(X_l)\big)^{-1} f(X_k)|X_0 = Y_1]|Y_0 = x]$$

$$= (1+R(x))\mathbb{E}[(1+R(Y_0))^{-1}\mathbb{E}[\big(\Pi_{l=1}^{k}(1+R(Y_l)\big)^{-1} f(Y_{k+1})|Y_1]|Y_0 = x]$$

$$= (1+R(x))\mathbb{E}[\mathbb{E}[\big(\Pi_{l=0}^{k}(1+R(Y_l)\big)^{-1} f(Y_{k+1})|Y_1]|Y_0 = x] \tag{4.2.13}$$

$$= (1+R(x))w_{k+1}(x) \tag{4.2.14}$$

onde (4.2.11) é justificado pela definição do operador $\mathcal{A}$ e (4.2.12) pela definição de $g = w_k$. A passagem seguinte (não numerada) está justificada pelo fato que $Y_0 = x$ e que $(1+R(x))(1+R(Y_0))^{-1} = 1$, enquanto que a passagem para (4.2.13) se justifica porque $Y_0$ é $\sigma(Y_1)$-mensurável. Finalmente, a passagem para (4.2.14) se baseia no mesmo argumento que levou ao Lema 4.1. Portanto, $w_k$ definido pelo lado direito de (4.2.10 ) satisfaz a recursão (4.2.9). ■

**Propriedade 4.1.** *A fórmula de Feynman-Kac dada pela equação (4.2.10) tem a importante interpretação que, para resolvermos uma equação da forma (4.2.9), devemos tomar o valor esperado sob todos os possíveis estados, levando em conta o percurso do sistema entre* 0 *e* $k$.

**Obs.** A fórmula de Feynman-Kac em sua versão em tempo contínuo toma a seguinte forma

$$u(t,x) = \mathbb{E}[e^{-\int_0^t V(X_s)ds} f(X_t)|X_0 = x] \ ,$$

e nos dá, sob determinadas hipóteses, a solução do problema de Cauchy

$$\frac{d}{dt}u = Au - V(x)u \ , \quad u(0,\cdot) = f \ ,$$

onde

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

é o operador de difusão associado ao processo estocástico

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \ , \quad X_0 = x \ .$$

Convidamos o leitor a explorar estes aspectos mais avançados da teoria em [ØKS].

## 4.3 Aplicação à Precificação de Opções

Um exemplo de muito interesse para nós é o caso da precificação de opções. Neste caso, seguiremos o modelo do Capítulo 3, já lembrado no Exemplo 4.1. Vimos naquele capítulo que o preço $V_n^j$ de uma opção com payoff $F$ assumindo que o ativo vale hoje $S_n^j$ é dado por

$$V_n^j = \frac{1}{(1+R)^{N-n}} \sum_{k=k}^{N-n+j} \binom{N-n}{k-j} P_U^{k-j} P_D^{N-n-k+j} F(S_N^k).$$

Tal preço pode ser interpretado como

$$V_n = \mathbb{E}[(1+R)^{-(N-n)} F(S_N)|S_n] \ . \tag{4.3.15}$$

Recordamos este importante resultado na forma da seguinte proposição:

**Proposição 4.1.** *O preço de uma opção do tipo européia com payoff $F = F(S)$ e vencimento em $t = N$ unidades de tempo dado que temos um preço $S_n$ no instante $t = n$ é dado pela equação (4.3.15).*

Em aplicações, com a finalidade de compararmos os preços, é interessante usarmos o *tempo até o vencimento.* Isto significa que consideramos como variável temporal o valor $k = N - n$ de unidades de tempo até que o contrato expire e com $U_k = V_{N-k}$. Segue-se então, como corolário do resultado acima, o seguinte:

**Corolário 4.1.** *O preço $U_k$ de uma opção com payoff $F = F(S)$ em um intante $k$ unidades de tempo antes do vencimento e para um valor do ativo subjacente $S = S_0$ é dado por*

$$U_k(S_0) = \mathbb{E}[(1+R)^{-k} F(S_k)|S_0] \ . \tag{4.3.16}$$

Na Seção 3.2.1 obtivemos a recursão que definia o preço da opção a saber

$$V_n^j = \frac{1}{1+R}\{P_u V_{n+1}^{j+1} + P_D V_{n+1}^j\} \ .$$

Em termos do tempo ao vencimento ficamos com a recursão

$$\begin{cases} (1+R)V_{k+1}(S) = \mathbb{E}[V_k(S_1)|S_0 = S] \\ V_0 = F \ . \end{cases} \tag{4.3.17}$$

A fórmula de Feynman-Kac nos diz que a solução da recursão (4.3.17) é precisamente dada pela equação (4.3.16) e que, de fato, isto é uma consequencia de uma teoria mais geral que permitiria até que o valor de $R$ variasse com $S$. Permitiria também que a árvore binomial fosse substituída por um processo de árvore mais complexo (como por exemplo trinomial). A teoria desenvolvida acima pode ser usada para obtermos a fórmula de precificação de Black-Scholes quando o intervalo de tempo entre dois períodos consecutivos de tempo $k$ e $k+1$ vai a zero. Neste contexto,

a taxa de juros deve ser considerada como juros contínuos e os ativos passam a descrever um movimento Browniano exponencial com drift:

$$dS_t = S_t r dt + \sigma S_t dW_t \ .$$

O leitor neste momento é convidado a fazer a passagem ao limite na equação de evolução e obter a equação de Black-Scholes para a evolução do preço da opção. Este será o tópico do próximo capítulo.

# Capítulo 5

# Black & Scholes

*In addition, business schools and economics departments have competition from new research and courses in mathematics departments and engineering schools in the mathematics of derivative pricing and alternative stochastic processes,* ...

M. Scholes. Nobel Lecture

A fórmula de apreçamento de Black-Scholes levou a uma verdadeira revolução devido ao fato de que, através de um modelo relativamente simples, é possível obter um preço que pode ser considerado justo para opções de compra e venda do tipo européia. Pela sua simplicidade, estas fórmulas foram rapidamente implementadas em calculadoras que se difundiram no mercado. Isto levou a popularização do uso de derivativos a tal ponto que, atualmente, o mercado de derivativos supera em muito o mercado primário. Mas não somente isto! A força e a simplicidade da *modelagem matemática* levou a um método bastante geral e poderoso para a precificação de um grande número de outras opções e derivativos.

O reconhecimento do impacto da teoria desenvolvida por Fischer Black, Robert Merton e Myron Scholes levou o prêmio Nobel de Economia para Merton e Scholes[1]

Neste capítulo, desenvolveremos de forma *heurística* a fórmula e a *equação de Black & Scholes* efetuando a passagem ao limite contínuo. Este caminho, apesar de ser distinto do caminho desenvolvido pelo trabalho seminal de Black e Scholes [BL-SC], permite reduzir ao mínimo os pré-requisitos de cálculo estocástico e análise sem que entretanto sejam perdidos os conceitos fundamentais de não-arbitragem e replicação de carteiras para apreçamento.

[1] F. Black já havia falecido.

## 5.1 A Aproximação Lognormal

Vamos iniciar estudando o modelo de Cox-Ross-Rubinstein do Capítulo 3, quando $\mathrm{d}t \to 0$. Isto significa que o número de passos $N$ entre o tempo inicial e o vencimento vai para infinito. Lembrando que o valor esperado do processo de ganho é

$$\nu = \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}(\ln(H_n)) = \frac{1}{\mathrm{d}t}\{\ln UP_U + \ln DP_D\}.$$

então, quando $\mathrm{d}t \to 0$, temos

$$\lim_{\mathrm{d}t\to 0}\nu = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

e, de qualquer maneira, temos

$$\lim_{\mathrm{d}t\to 0}\mathrm{Var}\,(Y) = \frac{\sigma^2}{T}.$$

A lei dos grande números nos garante que, quando $\mathrm{d}t \to 0$, i.e, quando $N \to \infty$, o processo $Y$ deve convergir—num sentido apropriado—para uma variável aleatória com distribuição normal. Como a média foi ajustada, em primeira ordem, e a variância do processo $Y$ é fixa, devemos ter, neste limite, uma varíavel aleatória com distribuição normal, com média $\nu$ e variância $\sigma^2$.

Em outras palavras

$$Y = \frac{\sigma}{\sqrt{T}}Z + r - \frac{\sigma^2}{2},$$

onde $Z$ é $N(0,1)$.

Portanto, segue da definição de $Y$, que o preço $S_T$ satisfaz

$$S_T = S\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}Z+(r-\sigma^2/2)T} \tag{5.1.1}$$

A expressão (5.1.1) é denominada a aproximação log-normal para o modelo binomial e corresponde à aproximação obtida, no limite quando $\mathrm{d}t \to 0$.

Considere um pagamento contigenciado com valor no vencimento dado por $F(S_N)$.

O valor desse contrato em $t = 0$ é

$$V = \mathrm{e}^{-rT}\mathbb{E}[F(S_N)].$$

Sob hipóteses bastante razoáveis, como por exemplo crescimento linear de $F$, o Teorema do Limite Central nos garante que quando $N \to \infty$ temos

$$\lim_{\mathrm{d}t\to 0} V = \mathrm{e}^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F\left(S\mathrm{e}^{\zeta\sigma\sqrt{T}+(r-\sigma^2/2)T}\right)\mathrm{e}^{-\zeta^2/2}\,\mathrm{d}\zeta$$

## 5.2 A Fórmula de Black-Scholes

No caso de uma opção de compra (*call*), temos

$$\begin{aligned} C(S,K;T) &= \mathrm{e}^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\max\left\{S\mathrm{e}^{\zeta\sigma\sqrt{T}+(r-\sigma^2/2)T},0\right\}\mathrm{e}^{-\zeta^2/2}\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \mathrm{e}^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}S\mathrm{e}^{\zeta\sigma\sqrt{T}+(r-\sigma^2/2)T}\mathrm{e}^{-\zeta^2/2}\,\mathrm{d}\zeta \\ &\quad -K\mathrm{e}^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}\mathrm{e}^{-\zeta^2/2}\,\mathrm{d}\zeta, \end{aligned}$$

onde

$$-d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\sqrt{T}}{\sigma}.$$

Denotando a densidade de probabilidade da normal de média zero e variância um por

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\mathrm{e}^{-\zeta^2/2}\,\mathrm{d}\zeta,$$

temos que

$$C(S,K;T) = SN(d_1) - \mathrm{e}^{-rT}KN(d_2),$$

onde

$$d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left(\frac{S\mathrm{e}^{rT}}{K}\right)\pm\frac{\sigma}{2}\sqrt{T}.$$

No caso de uma opção de compra podemos usar a paridade *put-call* e o fato de $N(-z) = 1 - N(z)$ para obtermos

$$P(S,K;T) = K\mathrm{e}^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1).$$

Na Figura 5.1 apresentamos o gráfico do preço de opções do tipo *call* e *put* europeia como função do tempo ao vencimento e do valor do ativo subjacente.

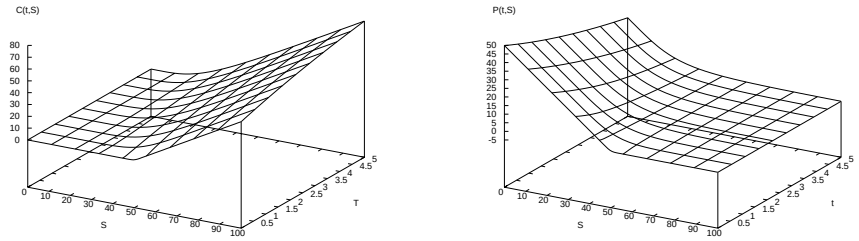



Figura 5.1: Gráfico do preço de uma opção de compra (call) europeia (esquerda) e venda (put) europeia (direita).

## 5.3 A Equação de Black-Scholes

Nosso objetivo agora é obter a equação de precificação de Black-Scholes[BL-SC] como limite contínuo do modelo CRR. Ela é uma equação diferencial parcial do tipo parabólico para o preço $V(t,S)$ em um instante $t < T$ dado que o ativo subjacente tem um valor $S_t = S$ e toma a forma do seguinte problema de valor final:

$$\begin{cases} \partial_t V + \dfrac{\sigma^2 S^2}{2}\partial_S^2 V + r(S\partial_S V - V) = 0, \quad 0 < S < \infty, \quad t < T \ , \\ V(T,S) = F(S). \end{cases} \tag{5.3.2}$$

No trabalho original de Black-Scholes [BL-SC] esta equação foi deduzida para um modelo de mercado em tempo contínuo na qual a dinâmica do ativo com risco toma a forma

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q, \\ S_{t_0} &= S. \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

com relação à medida neutra ao risco. Aqui $W_t^Q$ é célebre movimento Browniano [ØKS].

Nosso objetivo agora é obter a equação 5.3.2 como limite contínuo da equação de evolução para o preço da opção em tempo discreto. Para isto, retornamos à equação (4.3.17) do Capítulo 4:

$$\begin{cases} (1+R)V_{k+1}(S) = \mathbb{E}[V_k(S_1)|S_0 = S] = P_D V_k(SD) + P_U V_k(SU) \\ V_0 = F \ . \end{cases} \tag{5.3.4}$$

Tomaremos aqui $\tau = T - t$ o tempo ao vencimento e escreveremos, como de costume, $\tau = n\mathrm{d}t$. Definiremos a taxa de juros instantânea $r$ por $1 + R = \exp(r\mathrm{d}t)$.

Vamos supor que existe uma função $V = V(\tau, S)$, suficientemente suave, que é aproximada pelo preço $V_n$ dado pelo modelo binomial do Capítulo 3 com parâmetros

$$U = 1/D = \exp(\sigma\sqrt{\mathrm{d}t}) \ .$$

Isto leva a $P_U$ e $P_D$ como no Capítulo 3 com a seguinte expansão

$$P_U = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sigma\sqrt{\mathrm{d}t}}{2}\right) + \frac{r\sqrt{\mathrm{d}t}}{2\sigma} + \mathcal{O}(\mathrm{d}t)$$

e

$$P_U = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sigma\sqrt{\mathrm{d}t}}{2}\right) + \frac{r\sqrt{\mathrm{d}t}}{2\sigma} + \mathcal{O}(\mathrm{d}t) \ .$$

Usando a expansão de Taylor da função $V$ e denotando, por simplicidade, $V_k(S) = V(k\mathrm{d}t, S)$ obtemos

$$V_k(SU) = V_k(S) + (S\partial_S V_k(S))(U-1) + \frac{1}{2}(S^2\partial_S^2 V_k(S))(U-1)^2 + \cdots \ ,$$

bem como uma expressão semelhante para $V_k(SD)$. Agora, calculamos o lado direito da equação (5.3.4) usando que $U - 1 = \sigma\sqrt{\mathrm{d}t} + \cdots$ e $D - 1 = -\sigma\sqrt{\mathrm{d}t} + \cdots$ para obtermos

$$P_U V_k(SU) + P_D V_k(DU) = \tag{5.3.5}$$

$$V_k(S) + \frac{1}{2}\left(S^2\sigma^2\partial_S^2 V_k\right)\mathrm{d}t + rS\partial_S V_k \mathrm{d}t + \mathcal{O}(\mathrm{d}t^{3/2}) \ . \tag{5.3.6}$$

O lado esquerdo da equação 5.3.4 nos dá, por outro lado, que

$$(1+R)V_{k+1}(S) = (1 + r\mathrm{d}t + \mathcal{O}(\mathrm{d}t^2))(V_k(S) + \partial_\tau V_k(S)\mathrm{d}t + \mathcal{O}(\mathrm{d}t^2)) \ . \tag{5.3.7}$$

Substituindo as equações (5.3.5) e (5.3.7) na recursão (5.3.4) obtemos

$$\partial_\tau V_k = \frac{1}{2}S^2\sigma^2\partial_S^2 V_k + r\left(S\partial_S V_k - V_k\right) + \mathcal{O}(\mathrm{d}t)) \ . \tag{5.3.8}$$

Tomando o limite, quando $\mathrm{d}t \to 0$, obtemos a equação de evolução

$$\partial_\tau V = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_S^2 V + r\left(S\partial_S V - V\right) \ ,$$

com condição inicial $V(0,S) = F(S)$.

Em aplicações em finanças quantitativas é costume trabalharmos com o tempo $t$ e portanto, ao trocarmos a variável para $t = T - \tau$, obtemos o problema de valor final dado em (5.3.2)

O leitor atento observará que, se partirmos para a solução da equação (5.3.2) pelo método de diferenças finitas, obteremos a equação (5.3.8). O raciocínio empregado aqui nos permite dizer que o erro de truncamento local é de ordem $\mathrm{d}t^{3/2}$. Portanto, quando integrada numericamente entre 0 e $T$, o erro global será $\mathcal{O}(\mathrm{d}t^{1/2})$. Isto nos mostra que o modelo binomial, a despeito de sua simplicidade, pode ser usado para a solução numérica da equação de Black-Scholes. Além disso, a interpretação em termos da fórmula de Feynman-Kac nos permite justificar o uso de simulações numéricas através dos chamados métodos de Monte Carlo. O leitor interessado em se aprofundar neste tema poderá consultar o Capítulo 4 do livro [KO-KO] que apresenta uma excelente descrição do uso de árvores binomiais e trinomiais para o apreçamento de opções, tanto do ponto de vista teórico quanto numérico. Outra excelente referência é o texto [AV-LA] que serviu de inspiração a diversas partes deste texto.

## 5.4 Conclusões

Uma pergunta natural, por parte de quem chegou até aqui nestas notas, seria: E agora por onde prosseguir em nível de pesquisa? Mencionaremos algumas áreas diretamente relacionadas com os nossos interesses.

A equação de Black-Scholes é um equação diferencial parcial parabólica que relaciona o preço de derivativos ao preço atual das ações subjacentes em termos de

parâmetros de mercado, sendo dentre esses o mais importante e de difícil obtenção a volatilidade. O problema de obter a volatilidade de forma estável, que é conhecido como o problema de calibração do modelo, é bastante difícil e pertence ao domínio dos chamados Problemas Inversos. Um assunto que vem atraindo o interesse de vários matemáticos de renome e que tomou uma vida própria. Para uma introdução à teoria de Problemas Inversos referimos o leitor ao texto [BA-LE] e para uma introdução dentro do contexto de finanças o leitor deve consultar o texto [ZUB] e suas referências.

Dentro do contexto de entender o processo de volatilidade, e de grande impacto em aplicações, encontramos a linha de pesquisa relacionada com modelos de volatilidade estocástica. Neste caso, a dinâmica que descreve o preço dos ativos segue um processo estocástico. Isto leva a dificuldades adicionais na precificação e vem sendo assunto de intensa pesquisa. Em particular, ao longo das linhas da pesquisa de Fouque, Papanicoulaou e Sircar[FO-PA-SI] que utilizou ferramentas de expansões assintóticas para obter métodos de calibragem e apreçamento. O leitor interessado pode consultar também os trabalhos [SO-ZU3, SO-ZU2, SO-ZU1] e referências ali citadas.

Outra área fundamental em Finanças é a administração e a otimização de carteiras. Tais carteiras podem se apresentar em diversas formas, desde uma carteira de títulos e obrigações até instrumentos mais complexos envolvendo derivativos. A administração de carteiras envolve o uso de técnicas de otimização estocástica, processos estocásticos e de probabilidades. Nesta área cada vez mais se faz presente a necessidade de quantificar e administrar risco. Uma excelente introdução a esta área pode ser encontrada no texto [MEU]. A quantificação de risco, que tradicionalmente usa o conceito por vezes inadequado de value at risk, clama por ferramentas mais precisas e eficientes. As técnicas matemáticas necessárias para o estudo dos problemas complexos de administração de risco ainda estão em sua infância.

## 5.5 Exercícios

1. O Vega, que é a derivada do preço com respeito a volatilidade, mede a sensibilidade do preço de uma opção à variação de volatilidade.

   (a) Calcule o Vega para uma opção de compra européia

   (b) O que acontece no vencimento? Qual a interpretação desse fato?

   (c) Qual a relação entre o Vega e variação da volatilidade implicada em relação ao preço da mesma?

2. Suponha que você leia num noticiário econômico estrangeiro, que um certo título negociado *spot* a \$100 tenha opções de compra e venda para três meses com strike \$100. Os preços dessas opções são, respectivamente, \$5 e \$4. Supondo que tal mercado seja bem modelado por Black-Scholes, qual a taxa de juros vigente nesse país?

3. A volatilidade implicada (implied volatility) é o valor da volatilidade que deve ser usado na fórmula de Black-Scholes para se obter o preço que está sendo observado no mercado.

   (a) Suponha que $f$ é suave e que $f'(x) > 0$. Considere a seqüência

   $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - y}{f'(x_n)}.$$

   Essa seqüência é dita o **Método de Newton**. Mostre que, se a seqüência converge para $x_\infty$, então $f(x_\infty) = y$.

   (b) Use o método de Newton para calcular a volatilidade implicada de uma opção de compra sobre o S&P 500, digamos, com strike de 600, que está sendo negociada a \$10. A taxa de juros é de 6% e o valor do índice é 590.

4. Considere um opção de compra sobre um ativo de risco num mercado bem modelado por Black-Scholes.

   (a) Suponha que você seja o detentor de uma opção de compra e esteja vendido em $\Delta$ unidades do ativo de risco.

      i. Trace o gráfico de ganhos e perdas (P/L) desse portfólio em relação ao preço do ativo num instante $t = t_0$.

      ii. Supondo que essa posição seja mantida, o que acontece com o gráfico de P/L em $t + \delta t$?

      iii. Interprete o resultado acima em termos do $\Gamma$ e do $\Theta$ da opção.

   (b) Responda as mesmas perguntas, mas supondo que agora você está vendido numa opção de compra e comprado $\Delta$ unidades do ativo de risco.

5. Suponha que você esteja vendido numa opção de compra sobre um determinado ativo, com strike \$455 e vencimento em dez dias. Suponha também que o preço *spot* do ativo seja \$449 e que a opção de compra esteja sendo negociada a \$1. Sabendo que a taxa de juros é de 7% ao ano, responda:

   (a) Indique como calcular a volatilidade implicada da opção. Assuma que essa é a volatilidade que deve ser usada nos cálculos a seguir.

   (b) Calcule o *delta* da opção.

   (c) Calcule o *gama* da opção.

   (d) Construa uma posição de *hedge* para a opção, supondo que o mercado é líquido.

   (e) Suponha que você mantenha a posição do item anterior por 5 dias. Nessa data, o ativo estava sendo negociado a \$454. Supondo que a opção pode ser comprada/vendida pelo valor de Black-Scholes, estime os ganhos/perdas da sua estratégia.

6. Suponha que você tenha o seguinte portfólio de opções todas sobre um mesmo ativo de risco:

   - 5 calls com strike 100 expirando em 60 dias;
   - -3 puts com strike 90 expirando em 90 dias;
   - -4 puts com strike 85 expirando em 120 dias.

   (a) Qual o Delta combinado do portfólio, supondo que, num certo instante, $S = 100$, $\sigma = 0.16$ e $r = 0.07$.

   (b) Construa um portfólio replicador para o portfólio nesse caso.

7. Uma opção de compra digital paga no seu vencimento

$$F(S) = \begin{cases} 1, & S \geq K \\ 0, & S < K \end{cases}$$

   Usando a aproximamção lognormal, calcule o preço justo dessa opção.

# Apêndice A

# Conceitos Básicos de Probabilidade e Processos Estocásticos

A teoria de probabilidade e processos estocásticos tem um papel fundamental na ciência moderna. Ela é usada para a construção de modelos em biologia, economia, física e finanças. Nesta seção faremos um apanhado de conceitos básicos de probabilidade e de processos estocásticos que serão usados no restante do texto. Seguiremos diversos textos, em particular [FER, SHR, FRI]. Para maiores detalhes veja também [BRE2, BRE1, JAM, FEL].

## A.1 Definições Básicas

Um *espaço amostral* é um conjunto que identificamos com os possíveis resultados de experimentos ou estados de um sistema. Neste conjunto, que denotaremos por $\Omega$, consideramos uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $\Omega$ e uma medida de probabilidade $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ satisfazendo as condições abaixo.

**Definição A.1.** *A família de subconjuntos $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ é uma $\sigma$-álgebra se*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. *$\mathcal{F}$ é fechada por complementos, i.e., $F \in \mathcal{F} \implies (\Omega \setminus F) \in \mathcal{F}$.*
3. *$\mathcal{F}$ é fechada por uniões enumeráveis, i.e., $\{F_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \implies \cup_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$.*

O par $(\Omega, \mathcal{F})$ com $\mathcal{F}$ uma $\sigma$-álgebra é dito um *espaço mensurável.*

**Definição A.2.** *Uma medida de probabilidade em um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ é uma função $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ satisfazendo as propriedades:*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

2. $\mathbb{P}$ *é* $\sigma$*-aditiva, ou seja, se* $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ *é uma família de sub-conjuntos mutuamente disjuntos então*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_i) \ .$$

A tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é dita um *espaço de probabilidade.*

Um exemplo fundamental no contexto de finanças é o conjunto $\Omega = \{U, D\}^N$. Neste caso podemos identificar o resultado $U$ como um acréscimo e $D$ com um decréscimo no valor de um ativo.

Os elementos de $\Omega$ correspondem a possíveis trajetórias do nosso mercado, ou seja a seqüências de movimentos $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ com $x_i \in \{U, D\}$.

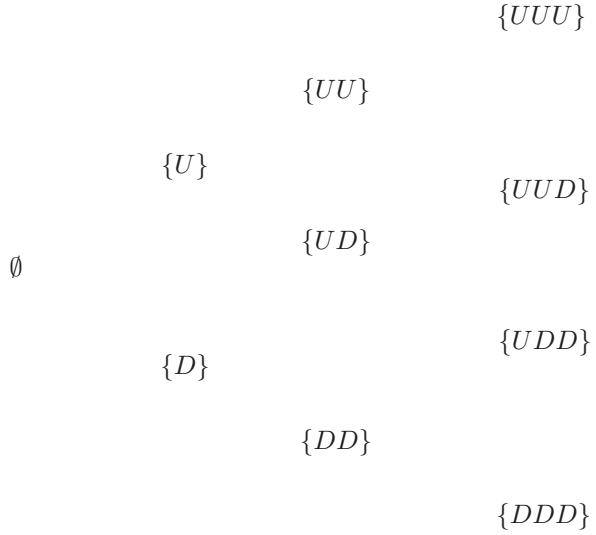



Figura A.1: Trajetórias aleatórias e o espaço $\Omega$

Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Uma variável aleatória é uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}$ com a propriedade que a imagem inversa de sub-intervalos de $\mathbb{R}$ está na $\sigma$-álgebra $\mathcal{F}$. Em outras palavras, se chamarmos de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a $\sigma$-álgebra gerada pelos sub-intervalos de $\mathbb{R}$ (ou seja a menor $\sigma$-álgebra que contém este conjunto) temos que a função $X$ é mensurável de $(\Omega, \mathcal{F})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. O conjunto $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é conhecido como Borelianos da reta.

**Obs.:** A interpretação do conjunto $\Omega$ é a de eventos elementares (ou estados elementares) em nosso espaço de probabilidade, enquanto que a $\sigma$-álgebra $\mathcal{F}$ corresponde a uma família de possíveis configurações de eventos que é fechado por uniões contáveis e por complementos. Portanto por interseções contáveis. Nos conjuntos

$F \in \mathcal{F}$ a nossa medida de probabilidade $\mathbb{P}(F)$ faz sentido, e portanto podemos ter uma informação, mesmo que parcial ou seja no sentido de uma probabilidade, sobre tal conjunto. Quanto maior a $\sigma$-álgebra $\mathcal{F}$, mais informação temos sobre $\Omega$. Os casos limites são as $\sigma$-álgebras $\{\emptyset, \Omega\}$ e $2^{\Omega}$. No caso de $\{\emptyset, \Omega\}$ não temos quase nenhuma informação sobre $\Omega$, exceto a óbvia. No caso de $2^{\Omega}$, todo e qualquer subconjunto de $\Omega$ está associado a uma probabilidade.

**Exemplo A.1.** *Consideremos os conjuntos $\mathcal{A} := \{U, D\}$, $\Omega = \{U, D\}^N = \mathcal{A}^N$ e tomemos $k \in \{0, 1, \cdots, N\}$. Definamos a $\sigma$-álgebra*

$$\mathcal{F}_k := \underbrace{2^{\mathcal{A}} \times \cdots \times 2^{\mathcal{A}}}_{k vezes} \times \underbrace{\{\emptyset, \mathcal{A}\} \times \cdots \times \{\emptyset, \mathcal{A}\}}_{(N-k) vezes}$$

*Neste caso, temos informações sobre a trajetória do ativo até o $k$-ésimo passo e após este passo não sabemos nada, exceto o óbvio, sobre a trajetória dos ativos.*

**Obs.** Quanto maior a $\sigma$-álgebra, mais variáveis aleatórias existem no conjunto. No exemplo acima, as $\sigma$-álgebras $\mathcal{F}_k$ satisfazem

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \mathcal{F}_N = 2^{\Omega} \ .$$

**Definição A.3.** *Uma v.a. $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita simples quando ela toma um número finito de valores distintos.*

**Definição A.4.** *Dada uma família $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ definimos como a $\sigma$-álgebra gerada por $\mathcal{A}$ como a menor $\sigma$-álgebra que contém $\mathcal{A}$. Denotamos por $\sigma(\mathcal{A})$ tal $\sigma$-álgebra. Para $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, definimos a $\sigma$-álgebra gerada por $Y$ como a $\sigma$-álgebra gerada pelas imagens inversas de Borelianos de $\mathbb{R}$. Denotamos por $\sigma(Y)$ tal $\sigma$-álgebra.*

## A.2 Valor Esperado e Esperança Condicional

Nesta sub-seção discutiremos os importantes conceitos de valor esperado e esperança condicional . Inicialmente não assumiremos familiaridade do leitor com a teoria de medida integração, porém ao final da seção apresentaremos as definições para os leitores familiares com esta teoria. Uma excelente referência para o assunto é o livro texto [BAR].

Consideremos um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Suponhamos, inicialmente, que nosso espaço amostral $\Omega$ é *finito*. Neste caso, $\mathcal{F}$ também é finito e podemos decompo-lo em sub-conjuntos $S_1, \cdots, S_m$ disjuntos entre si tais que $\cup S_i = \Omega$. Podemos também assumir que cada um destes conjuntos $S_i$ não contém nenhum outro conjunto da $\sigma$-álgebra $\mathcal{F}$, exceto vazio. Sendo assim, uma variável aleatória $X$ em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tem de ser necessáriamente constante em cada um destes conjuntos $S_i$, $i = 1, \cdots, S_m$.

O valor esperado de uma variável aleatória $X$, é então definido como

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{m} X_i \mathbb{P}(S_i) \ , \tag{A.2.1}$$

onde $X_i \in \mathbb{R}$ é o valor de $X$ no conjunto $S_i$.

A *variância* de $X$ é definida como

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right] \ ,$$

onde $\mu = \mathbb{E}[X]$.

Uma interpretação fundamental por trás do conceito de valor esperado de uma variável aleatória é a de uma boa estimativa para o valor da quantidade $X$. Já a variâncias, $\mathrm{Var}[X]$ nos indica o quanto os valores de $X$ estão espalhados ou afastados do valor esperado $\mathbb{E}[X]$.

Do ponto de vista de observações de um fenômeno aleatório, o valor esperado corresponde ao cálculo da média dos valores observados associados a distribuição de $X$. Isto é justificado pela *Lei dos Grandes Números*:

**Teorema A.1.** *Sejam $X_1, X_2, \cdots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com médias e variâncias finitas. Então, temos que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - \mathbb{E}[X]\right| > \epsilon\right] = 0 \ .$$

Para os leitores familiares com teoria da medida, é fácil ver que a definição acima coincide com a definição "oficial"

$$\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X d\mathbb{P} \ ,$$

para $X$ uma v.a. integrável. Quando $X$ é uma variável aleatória simples, então esta definição coincide com a dada pela Equação (A.2.1).

Lembramos agora o conceito de probabilidade condicional, ou seja, a probabilidade do evento $A$ dado o evento $B$. Ela é definida como

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \ ,$$

desde que o evento $B$ tenha probabilidade não nula. Isto nos permite considerar o conjunto $B$ como um espaço de probabilidade com a probabilidade definida para conjuntos da forma $A \cap B$ com $A \in \mathcal{F}$ por

$$\widetilde{\mathbb{P}} := \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}(B)} \ .$$

Neste caso faz sentido calcularmos o valor esperado de variáveis aleatórias $X$ restritas a $B$ com respeito a medida de probabilidade $\widetilde{\mathbb{P}}$. Em termos da medida $\widetilde{\mathbb{P}}$ temos o valor esperado

$$\widetilde{\mathbb{E}}[X] := \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X d\mathbb{P} \ .$$

Vamos agora considerar a questão: Qual seria a definição para $\mathbb{E}[X|Y]$? Uma maneira de interpretar esta questão é a seguinte: Se o acaso seleciona um ponto

$\omega \in \Omega$ e tudo que sabemos é $Y(\omega)$ o que podemos dizer sobre o valor esperado $X$? Observemos que neste contexto $\mathbb{E}[X|Y]$ deve também ser pensado como uma variável aleatória, ou seja uma função do ponto $\omega \in \Omega$.

Vamos considerar inicialmente a situação na qual o a v.a. $Y$ é *simples*, ou seja, toma valores

$$Y = \begin{cases} a_1 & \text{em} & A_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_m & \text{em} & A_m \end{cases},$$

com $A_1, \cdots, A_m$ disjuntos, $\Omega = \cup_{i=1}^m A_i$ e $a_1, \cdots, a_m$ distintos.

Nesta caso o valor esperado $\mathbb{E}[X|Y]$ deve ser

$$\mathbb{E}[X|Y](\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_{A_i} X d\mathbb{P}$$

se $Y = a_i$, ou seja, se $\omega \in A_i$.

**Obs** A variável aleatória $\mathbb{E}[X|Y]$ só depende da conjuntos $A_i$'s. Portanto, ela é mensurável em relação a $\sigma$-álgebra $\sigma(Y) \subset \mathcal{F}$. Logo temos que se $A \in \sigma(Y)$ então

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X|Y] d\mathbb{P} \ . \tag{A.2.2}$$

Para os leitores familiares com teoria da medida, observamos que em geral podemos definir:

**Definição A.5.** *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\mathcal{U}$ uma $\sigma$-sub-álgebra de $\mathcal{F}$. Se $X : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma v.a. em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ integrável (i.e., $\int_A |X| d\mathbb{P} < \infty$) definimos $E(X|\mathcal{U})$ como uma v.a. que satisfaz*

1. *$\mathbb{E}[X|\mathcal{U}]$ é mensurável em relação a $\sigma$-álgebra $\mathcal{U}$.*
2. *$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{U}] d\mathbb{P}$ para qualquer $A \in \mathcal{U}$).*

A existência e unicidade da v.a $E[X|\mathcal{U}]$ é conseqüência do Teorema de Radon-Nikodym [BAR].

Listamos agora um conjunto de propriedades importantes sobre a esperança condicional.

**Propriedade A.1.** *Sejam $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ variáveis aleatórias t.q. $\mathbb{E}[|Y| + |Y|] < \infty$. Então,*

1. *Para $a$ e $b$ reais temos $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{U}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{U}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{U}]$.*
2. *Se $\mathcal{U}$ é uma $\sigma$-sub-álgebra de $\mathcal{V}$ então vale*

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{V}] \,\middle|\, \mathcal{U}\right] = \mathbb{E}[U] \ . \tag{A.2.3}$$

3. *Se $X$ é $\mathcal{U}$-mensurável, então*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{U}] = X \ .$$

*4. Se $X$ é independente* [1] *de $\mathcal{U}$, então $\mathbb{E}[X|\mathcal{U}] = \mathbb{E}[X]$ .*

A equação (A.2.3) tem um papel importantíssimo na teoria de probabilidades. Ela nos diz que quando temos $\sigma$-álgebras $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ o cálculo do valor esperado pode ser feito tomando médias com relação aos conjuntos da $\sigma$-álgebra mais fina. Ou seja $\mathbb{E}[X|\mathcal{U}]$ pode ser calculado primeiro arrumando as médias nos conjuntos onde a v.a. $\mathbb{E}[X|\mathcal{V}]$ é mensurável e depois tomando a média em relação a $\mathcal{U}$.

## A.3 Processos Estocásticos e Cadeias de Markov

Um *processo estocástico* é uma família de variáveis aleatórias em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indexada por um conjunto ordenado, típicamente um conjunto de inteiros ou um intervalo real. Mais precisamente, seja $\mathcal{I}$ um conjunto ordenado e $X_{k\,k\in\mathcal{I}}$ um conjunto de variáveis aleatórias. De maneira coloquial nos referiremos a $X$ como um processo estocástico. Interpretaremos, para cada $\omega \in \Omega$ fixo, a aplicação $k \mapsto X_k(\omega)$ como possíveis trajetórias de um sistema físico ou financeiro. Por outro lado, para cada $k$ fixo devemos pensar em $X_k$ como uma variável aleatória.

Vamos considerar nestas notas o caso em que o nosso conjunto de índices $\mathcal{I}$ é $\{1, 2, \cdots, N\}$ ou $\mathbb{N}$. Intuitivamente, uma *cadeia de Markov* é um processo estocástico definido em espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ para o qual o comportamento das variáveis aleatórias $X_{k+1}, X_{k+2}, \cdots$ só depende do valor de $X_k$ e não dos valores anteriores à $X_k$. Ou seja, o processo não possui memória sobre o que aconteceu antes do instante $k$. Antes de prosseguir, vamos construir alguns exemplos e não-exemplos. Uma maneira de contruir um grande número de exemplos é considerarmos uma seqüência $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de variáveis aleatórias *independentes* e considerarmos uma função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(k, \cdot, \cdot\cdot)$ mensurável. Então, se definirmos

$$X_k = f(k, X_{k-1}, Y_k) \ , \ k = 1, 2, \cdots \ ,$$

teremos que a distribuição da variável aleatória $X_k$ (e de todas as variáveis $X_j$ com $j > k$) só depende do valor de $X_{k-1}$. Um exemplo de um processo estocástico não Markoviano seria tomarmos $X_k = X_1 + \cdots X_{k-1}$.

**Definição A.6.** *O processo estocástico $\{X_k\}_{k\in\mathcal{I}}$ é dito Markoviano se*

$$\mathbb{P}[X_{k+1} \in A_{k+1}|X_0 \in A_0, X_1 \in A_1, \cdots, X_k \in A_k] = \mathbb{P}[X_{k+1} \in A_{k+1}|X_k \in A_k]$$

Um processo Markoviano é o análogo probabilístico de um processo determinístico definido por uma relação de recursão da forma $x_{k+1} = f(k, x_k)$ em contraponto com um processo com memória definido por uma recorrência da forma $x_{k+1} = f(k, x_k, \cdots, x_1)$.

**Exemplo A.2.** *Consideremos uma seqüência de v.a. independentes $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e definamos $X_k := \sum_{j=1}^{k} Y_j$. Então, $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é um processo Markoviano. Como conseqüência temos a propriedade que*

$$\mathbb{E}[f(X_{k+1})|X_k] = G(X_k) \ ,$$

[1] No sentido que para todo $A \in \sigma(X)$ e $B \in \mathcal{U}$ temos que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

*com $G$ uma função que só depende de $f$ e da função densidade de probabilidade de $Y_{k+1}$.*

## A.4 Martingais

Vimos nas seções anteriores que associado ao conceito de uma $\sigma$-álgebra está a ideia de informação que podemos obter de nosso espaço de probabilidade com base em v.a. mensuráveis em relação a esta $\sigma$-álgebra. Quando consideramos um processo estocástico $\{X_k\}_{k\in\mathcal{I}}$ em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ temos uma família de $\sigma$-álgebras, a saber: $\mathcal{G}_k := \sigma(X_1, \cdots, X_k)$ que é a menor $\sigma$-álgebra que torna $X_1, \cdots, X_k$ mensurável. Neste sentido, $\mathcal{G}_k$ carrega consigo a estrutura de informação fornecida pelas v.a. $(X_1, \cdots, X_k)$.

Uma família $\{\mathcal{H}_k\}_{k\in\mathcal{I}}$ de $\sigma$-álgebras é chamada de um *filtro* quando $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}_l$ para $l$ subsequente a $k$. A família $\{\mathcal{G}_k\}_{k\in\mathcal{I}}$ é um exemplo de um filtro.

Dizemos que um filtro $\{\mathcal{H}_k\}_{k\in\mathcal{I}}$ é *adaptado* a um processo estocástico $\{X_k\}_{k\in\mathcal{I}}$ quando $X_k$ é $\mathcal{H}_k$-mensurável para todo $k$.

Um dos modelos fundamentais na teoria de finanças é o de processos estocásticos que, na média, não levam a ganhos ou perdas com base na informação que temos acumulada até o presente momento. Em outras palavras, quando consideramos o valor esperado futuro condicionado à informação que temos até o presente, obtemos o valor presente do processo. Isto leva a definição de um *martingal*:

**Definição A.7.** *Um par $(X, \{\mathcal{H}_k\}_{k\in\mathcal{I}})$ consistindo de um processo estocástico $X_k$ e de um filtro $\{\mathcal{H}_k\}_{k\in\mathcal{I}}$ adaptado a este processo é dito um martingal se*

1. *Para todo $k \in \mathcal{I}$ temos que $\mathbb{E}|X_k| < \infty$.*

2. $$\mathbb{E}[X_k|\mathcal{H}_s] = X_s \ ,\forall s \leq k \ . \tag{A.4.4}$$

Um exemplo de martingal é o processo $Y_k = \sum_{j\leq k} X_k$ onde os $X_k$ são independentes, integráveis e de média 0.

# Apêndice B

# Programa para Simulação de Séries Históricas

Neste apêndice apresentamos um pequeno código em C para produzir simulações numéricas seguindo o modelo binomial. O programa faz uso da *GNU Scientific Library* que é uma excelente biblioteca numérica de uso gratuito. O leitor pode encontrar mais detalhes visitando o sítio *www.gnu.org/software/gsl/*. Este foi o programa que utilizamos para gerar a parte sintética da Figura 1.2. Os valores utilizados dos parâmetros foram calibrados com base nos dados reais.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <gsl/gsl_math.h>
#include <gsl/gsl_rng.h>


#define SIGMA 0.1
#define RHO SIGMA
#define NU 0.0263547
#define N 19460
#define S0 23546.8


double sqr(double);

int main(){
  FILE* out;
  int i;
  double x;
  double U,D,PU,PD,dt,sdt,aux;
```

```
  double S=S0;
  gsl_rng * rg;
  double r;

  r=NU+0.5*sqr(SIGMA);
  PU=0.5*(1+sqrt(1-sqr(SIGMA/RHO)));
  PD=0.5*(1-sqrt(1-sqr(SIGMA/RHO)));
  dt=1.0/N;
  sdt=sqrt(dt);
  aux=PD*exp(-RHO*sdt)+PU*exp(RHO*sdt);
  U=exp(RHO*sdt+r*dt)/aux;
  D=exp(-RHO*sdt+r*dt)/aux;

  gsl_rng_env_setup();
  rg = gsl_rng_alloc(gsl_rng_taus);
  gsl_rng_set(rg,time(NULL));
  out=fopen("precos.dat","w");
  fprintf(out,"%g %g\n",0.0,S);
  for(i=1;i<N;i++){
    x=gsl_rng_uniform(rg);
    S=(x<=PU?S*U:S*D);
    fprintf(out,"%g %g\n",(double)i/N,S);
  }


}

double sqr(double x){
  return x*x;
}
```

# Bibliografia


[AV-LA] M. Avellaneda e P. Laurence, *Quantitative modeling of derivative securities,* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000, From theory to practice.

[BA-LE] J. Baumeister e A. Leitão, *Topics in inverse problems,* Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2005, , 25º Colóquio Brasileiro de Matemática. [25th Brazilian Mathematics Colloquium].

[BAR] R. G. Bartle, *The elements of integration,* John Wiley & Sons Inc., New York, 1966.

[BL-SC] F. Black e M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 637–659, 1973.

[BRE1] L. Breiman, *Probability,* Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1968.

[BRE2] L. Breiman, *Probability and stochastic processes with a view toward applications.,* Houghton Miffin Co., Boston, Mass., 1969.

[CO-RO-RU] J. Cox, S. Ross e M. Rubinstein, Option pricing: a simplified approach, *Journal of Financial Economics*, 7, 229–263, 1979.

[DE-SC] F. Delbaen e W. Schachermayer, *The mathematics of arbitrage,* Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[DM] P. Del Moral, *Feynman-Kac formulae,* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 2004, Genealogical and interacting particle systems with applications.

[FE-SC-KO] C. Fernandes, H. Schmidli e N. Kolev, eds., *Third Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance,* IME-USP, São Paulo, 2007.

[FEL] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I,* Third edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.

[FER] P. Ferrari, *Passeios Aleatórios e Redes Elétricas,* 16º Colóquio Brasileiro de Matemática. [16th Brazilian Mathematics Colloquium]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1987.

[FO-PA-SI] J.-P. Fouque, G. Papanicolaou e K. R. Sircar, *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility,* Cambridge University Press, 2000.

[FRI] C. P. Fries, Mathematical finance: Theory, modeling, implementation, Frankfurt am Main. http://www.christian-fries.de/finmath/book., 2006.

[JAM] B. R. James, *Probabilidade: um curso em nível intermediário*, volume 12 of *Projeto Euclides [Euclid Project],* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981.

[KAC] M. Kac, On distributions of certain Wiener functionals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 65, 1–13, 1949.

[KO-KO] R. Korn e E. Korn, *Option pricing and portfolio optimization*, volume 31 of *Graduate Studies in Mathematics,* American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, Modern methods of financial mathematics, Translated from the 1999 German original by the authors.

[KO-MO] N. Kolev e P. Morettin, eds., *Second Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance,* IME-USP, São Paulo, 2005.

[MER] R. C. Merton, An intertemporal capital asset pricing model, *Econometrica*, 41, 867–887, 1973.

[MEU] A. Meucci, *Risk and asset allocation,* Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[ØKS] B. Øksendal, *Stochastic differential equations,* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, fifth edition, 1998, An introduction with applications.

[SHR] S. E. Shreve, *Stochastic calculus for finance. I,* Springer Finance. Springer-Verlag, New York, 2004, The binomial asset pricing model.

[SO-ZU1] M. O. Souza e J. P. Zubelli, Asymptotic behavior of stochastic volatility models, em N. Kolev e P. Morettin, eds., *Second Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance*, pp. 222–227, São Paulo, 2005. IME-USP.

[SO-ZU2] M. O. Souza e J. P. Zubelli, Multiple scale asymptotics of fast mean reversion stochastic volatility models, em C. Fernandes, H. Schmidli e N. Kolev, eds., *Third Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance*, pp. 248–253, São Paulo, 2007. IME-USP.

[SO-ZU3] M. O. Souza e J. P. Zubelli, On the asymptotics of a stochastic volatility option price model, To appear: International Journal of Theoretical and Applied Finances, 2007.

[VOI] J. Voit, *The statistical mechanics of financial markets,* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[WIG] E. P. Wigner, The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences [Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 1–14; Zbl 102, 7], em *Mathematical analysis of physical systems*, pp. 1–14. Van Nostrand Reinhold, New York, 1985.

[ZUB] J. P. Zubelli, Inverse problems in finance, em N. Kolev e P. Morettin, eds., *Second Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance*, pp. 64–75, São Paulo, 2005. IME-USP.

# Índice

adaptado, 69
arbitragem, 19
ativo sem risco, 24

Be wise, 10
Black & Scholes, 55

cadeia de Markov, 68
Call, 27
    precificação no modelo binomial, 30
contrato a termo, 26

equação de Black & Scholes, 55
equação de evolução, 49
equação do calor, 50
espaço amostral, 63
espaço de probabilidade, 64
espaço mensurável, 63
esperança condicional, 65, 67

Feynman-Kac, 47, 50
Feynman-Kac versão contínua, 51
Feynman-Kac versão discreta, 50
filtro, 69

hedging, 11

lei do preço único, 25
Lei dos Grandes Números, 66

martingal, 69
medida de probabilidade, 63
Medida Neutra ao Risco, 24
mercado completo, 31
modelagem matemática, 55
modelo binomial, 35
Modelo de Arrow-Debreu, 20

não-arbitragem, 19
Nobel de Economia: F. Black, 55
Nobel de Economia: R. Merton, 55
Nobel de Física: R. P. Feynman, 47

pagamentos contingenciados, 37
paridade Put-Call, 27, 41
payoff, 12
portfólio, 20
portfólio de arbitragem, 21
portfólio replicador, 41
precificação recursiva
    Call, 39
processo estocástico, 68
processo homogêneo no tempo, 48
Put, 27

Replicação, 30

sigma-álgebra, 63
soma sobre todos as histórias, 47
sum over histories, 47

tempo até o vencimento, 52

valor esperado, 65
variável aleatória simples, 65
variância, 66
volatilidade, 42

Wiener, 47

# Notas em Matemática Aplicada

1. Restauração de Imagens com Aplicações em Biologia e Engenharia
   Geraldo Cidade, Antônio Silva Neto e Nilson Costa Roberty
2. Fundamentos, Potencialidades e Aplicações de Algoritmos Evolutivos
   Leandro dos Santos Coelho
3. Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Águas Subterrâneas
   Edson Wendlander
4. Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais
   Maria Cristina de Castro Cunha e Maria Amélia Novais Schleicher
5. Modelagem em Biomatematica
   Joyce da Silva Bevilacqua, Marat Rafikov e Cláudia de Lello Courtouke Guedes
6. Métodos de Otimização Randômica: algoritmos genéticos e "simulated annealing"
   Sezimária F. Pereira Saramago
7. "Matemática Aplicada à Fisiologia e Epidemiologia"
   H.M. Yang, R. Sampaio e A. Sri Ranga
8. Uma Introdução à Computação Quântica
   Renato Portugal, Carlile Campos Lavor, Luiz Mariano Carvalho e Nelson Maculan
9. Aplicações de Análise Fatorial de Correspondências para Análise de Dados
   Dr. Homero Chaib Filho, Embrapa
10. Modelos Matemáticos baseados em autômatos celulares para Geoprocessamento
    Marilton Sanchotene de Aguiar, Fábia Amorim da Costa, Graçaliz Pereira
    Dimuro e Antônio Carlos da Rocha Costa

11. Computabilidade: os limites da Computação
    Regivan H. N. Santiago e Benjamín R. C. Bedregal
12. Modelagem Multiescala em Materiais e Estruturas
    Fernando Rochinha e Alexandre Madureira
13. Modelagem em Biomatemática (Coraci Malta ed.)
    1 - "Modelagem matemática do comportamento elétrico de neurônios e algumas aplicações"
    Reynaldo D. Pinto
    2 - "Redes complexas e aplicações nas Ciências"
    José Carlos M. Mombach
    3 - "Possíveis níveis de complexidade na modelagem de sistemas biológicos"
    Henrique L. Lenzi, Waldemiro de Souza Romanha e Marcelo Pelajo-Machado
14. A lógica na construção dos argumentos
    Angela Cruz e José Eduardo de Almeida Moura
15. Modelagem Matemática e Simulação Numérica em Dinâmica dos Fluidos
    Valdemir G. Ferreira, Hélio A. Navarro, Magda K. Kaibara
16. Introdução ao Tratamento da Informação nos Ensinos Fundamental e Médio
    Marcilia Andrade Campos, Paulo Figueiredo Lima
17. Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações
    Rosana Sueli da Motta Jafelice, Laércio Carvalho de Barros, Rodney Carlos Bassanezi
18. Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira
    Socorro Rangel
19. Observar e Pensar, antes de Modelar
    Flavio Shigeo Yamamoto, Sérgio Alves, Edson P. Marques Filho, Amauri P. de Oliveira
20. Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações
    Eliana Xavier Linhares de Andrade, Cleonice Fátima Bracciali
21. Uma Introdução à Teoria de Códigos
    Carlile Campos Lavor, Marcelo Muniz Silva Alves, Rogério Monteiro de Siqueira, Sueli Irene Rodrigues Costa

22. Análise e Processamento de Sinais
    Rubens Sampaio, Edson Cataldo, Alexandre de Souza Brandão
23. Introdução aos Métodos Discretos de Análise Numérica de EDO e EDP
    David Soares Pinto Júnior
24. Representações Computacionais de Grafos
    Lílian Markenzon, Oswaldo Vernet
25. Ondas Oceânicas de Superfície
    Leandro Farina
26. Técnicas de Modelagem de Processos Epidêmicos e Evolucionários
    Domingos Alves, Henrique Fabrício Gagliardi