Notas em Matemática Aplicada e-ISSN 2236-5915

Volume 28, 2012

Editado por

Eliana X.L. de Andrade
Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

Rubens Sampaio
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro -
Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Geraldo N. Silva
Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

2012

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7), as figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
http://www.sbmac.org.br/notas.php

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2012

CONVEXIDADE E MODELAGEM

Eduardo Souza de Cursi
eduardo.souza@insa-rouen.fr

INSA de Rouen

Rubens Sampaio
rsampaio@mec.puc-rio.br

PUC-Rio

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2012

Coordenação Editorial: Sandra Augusta Santos

Coordenação Editorial da Série: Eliana Xavier Linhares de Andrade

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Catalogação elaborada pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

de Cursi, José Eduardo Souza
Convexidade e Modelagem
- São Carlos, SP: SBMAC, 2012, 339 p ; 20,5cm
- (Notas em Matemática Aplicada; v. 28)

e-ISBN 978-85-86883-91-0

1. Análise Convexa. 2.Modelagem. 3. Inequações Variacionais.
I. de Cursi, José Eduardo Souza. II. Sampaio, Rubens.
IV. Título. V. Série.

CDD - 51

Esta é uma republicação em formato de e-book do livro original do mesmo título publicado em 2007 nesta mesma série pela SBMAC.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Projeto de Cooperação Internacional Brasil-França, Capes-Cofecub número 476/04 pelo suporte que possibilitou a preparação dessas Notas.

Agradecemos ainda ao CNPQ e FAPERJ pelo suporte.

Conteúdo

Prefácio

O início da SBMAC esta bastante ligado à Modelagem e à Análise Convexa. Várias das Escolas do LCC, depois LNCC, foram dedicadas a esses temas. Um delas, intitulada VI Escola de Matemática Aplicada (Análise de Sistemas Físicos), foi organizadas em 1985 e tratava dos dois temas, mas para problemas muito mais simples. O objetivo dessas Notas é retomar o assunto, mas dessa vez em maior profundidade, de forma a motivar o estudo dos dois temas e, também fornecer um livro de referência para os pesquisadores onde os principais resultados possam ser encontrados.

Um curso de Análise Convexa estuda subconjuntos convexos de um espaço vetorial, funções convexas reais definidas em conjuntos convexos, problemas de máximo, ou máximo-mínimo, envolvendo essas funções. Cursos mais avançados estudam também desigualdades variacionais e semi-variacionais, operadores monótonos, que são intimamente associados à Análise Convexa.

Como associar Modelagem com Análise Convexa?

Possivelmente o primeiro problema de modelagem em que se fez uso de convexidade foi o problema mecânico de caracterizar as posições de equilíbrio de um corpo rígido apoiado em um plano horizontal e sujeito à gravidade. Essas posições de equilíbrio são caracterizadas pela condições de que para uma posição ser de equilíbrio, qualquer linha vertical passando pelo centro de massa do corpo deve interseptar o envelope convexo dos pontos de suporte do corpo. Esse antigo problema trata de uma condição unilateral e ainda tem interesse, especialmente suas generalizações à dinâmica.

Outro assunto de importância em Análise Convexa é o conceito de Dualidade. Esse conceito apareceu pela primeira vez em Mecânica e é a essência do método das potências virtuais, ou trabalhos virtuais. As dualidades força–velocidade (ou força–deslocamento) e tensão–deformação ainda são uma excelente forma de se entender o significado do conceito de Dualidade. Uma maneira de entender o processo é pensar que uma equação $Au = f$ em um espaço funcional é substituida por uma equação escalar $[Au](w) = f(w)$ em que $[Au](w)$ é um funcional linear associado ao operador Au e similarmente para f. Essa forma de interpretar, que em Matemática é denominada de formulação fraca de $Au = f$, é equivalente em dimensão finita (isto é, $Au = f \iff w^T Au = w^T f, \forall w \in \mathbb{R}^n$), mas não em dimensão infinita (nesse caso a caracterização dos funcionais lineares não é tão simples, exceto em espaços de Hilbert), e se constitue em uma ferramenta poderosa para provar existência de solução para problemas complicados de Mecânica.

O conceito de subdiferencial também é muito usado em Mecânica para introduzir comportamento constitutivo multi–valorado, por exemplo.

Vale a pena ressaltar também um outro tipo de formulação bem mais recente, que é a formulação variacional de um problema de equação de derivadas parciais, e que foi comentada pela primeira vez por Euler no século 18. Ele estudava problemas relacionados a minimização de uma função definida em um conjunto de curvas e verificou que uma condição necessária para existência de uma solução era que a curva minimizante satisfizesse uma equação diferencial. Nessa pesquisa inovadora o método usado não ficava claro, o que permitiu que Lagrange introduzisse um método analítico mostrando como derivar a equação que deveria ser satisfeita. A equação diferencial é hoje chamada de equação de Euler-Lagrange do problema. De uma forma mais precisa, usando uma notação moderna, o problema é assim descrito:

Seja V um espaço de funções, $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $u \in V$ uma solução de

$$J(u) = min_{w \in V} J(w) \tag{1}$$

então u é solução de

$$J'(u) = 0. \tag{2}$$

(2) é a equação de Euler-Lagrange associada a (1).

Modernamente, o que se denomina de formulação variacional de um problema de equações diferenciais e o procedimento inverso. Se $F(w) = 0$ é uma equação diferencial, procura-se um funcional $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $J' = F$. Encontrado um funcional com essa propriedade, $F(w) = 0$ é agora a equação de Euler-Lagrange de um problema variacional.

Uma formulação variacional é muito conveniente em Mecânica e por isso muito usado. Em Estática, por exemplo, um princípio importante é o que caracteriza as configurações de equilíbrio estável de um corpo como sendo as que minimizam um funcional de energia.

A possibilidade de formular um problema de maneira diversas é muito conveniente e em Análise Convexa elas são muito usadas. Para entender alguns dos desenvolvimentos feitos nesse curso, vale a pena comentar um pouco sobre a história dessas idéias. Até meados do século 19 se pensava que, caso o funcional J tivesse uma cota inferior, então a solução do problema de minimização estava assegurada. Acreditava-se, portanto, que a existência de um ínfimo implicava na existência de um mínimo. Weierstrass mostrou que a existência de uma cota inferior não assegurava a existência de um mínimo, ou seja, da solução do problema de minimização. Isso pode ser visto examinando que o conjunto de números positivos não-nulos, P, que é limitado inferiormente pelo *zero*, mas não existe um mínimo para P em P. Apareceu então o problema de procurar condições adicionais que garantissem a existência de solução. Surge então a noção de compacidade, que no Cálculo das Variações levou ao "método direto", que geralmente é atribuído a Hilbert e Arzela. A idéia do método é simples e será descrita a seguir. Suponhamos que seja dado um funcional J com uma cota inferior. Procura-se minimizá-lo diretamente construindo um seqüência (w_n) tal que $J(w_n) \to \inf J$. Uma pergunta essencial é se w_n é uma seqüência convergente, digamos para w e, em sendo convergente, se $J(w) = \inf J$. Hipóteses de compacidades para o domínio de J são necessárias para responder positivamente à primeira questão e de continuidade para J para responder positivamente à segunda. Veremos que convexidade é uma das hipóteses fundamentais para provar esses resultados.

Esse curso foi estruturado em torno de alguns problemas de Mecânica que são discutidos na primeira parte do curso, chamada de *Motivação*. As dificuldades no equacionamento e na aproximação numérica são discutidas. Na segunda parte, chamada de *Elementos Teóricos* são desenvolvidas, de forma sistemática, as ferramentas necessárias para dar sentido matemático ao modelo, isto é, equacionamento do problema, prova de existência de soluções, caracterização dessas soluções, e desenvolvimento de algoritmos para aproximação. O problema mecânica discutido não é simples e so modernamente, através das técnicas de Análise Convexa, é que ele pode ser rigorosamente tratado. As ferramentas discutidas na segunda parte do curso foram desenvolvidas de forma a servir de fonte de consulta ao iniciante em Análise Convexa. Achamos que faltava uma referência desse tipo em língua portuguesa.

Esperamos que esse livro venha motivar a difusão das técnicas de Análise Convexa e aumentar o seu uso em Modelagem.

Capítulo 1

Introdução

Existem três maneiras básicas de construir a Física e, sobretudo, a Mecânica. A primeira consiste em escrever *equações de equilíbrio* estático ou dinâmico, tais como, por exemplo, a famosa lei de Newton $F = ma$, isto é, força = massa vezes aceleração. A segunda consiste em escrever igualdades entre variações de energia, ou seja, *trabalhos ou potências virtuais.* A terceira maneira, que é íntimamente ligada à segunda, consiste em exprimir matemáticamente a energia do sistema estudado e impor que sua variação seja nula para todo campo de velocidades admissível no instante de tempo considerado, isto é, para todo *movimento virtual compatível.* Em termos matemáticos, a primeira maneira consiste em escrever *equações diferenciais ou equações diferenciais parciais* descrevendo o estado (equilíbrio ou o movimento) do sistema; a segunda consiste em escrever *equações variacionais*, ou seja, formulações variacionais (ou fracas) destas mesmas equações; a terceira maneira nos leva a escrever a *variação de um funcional de energia*, isto é, o diferencial de um funcional de energia.

As duas últimas formas são conhecidas como *métodos variacionais.* É interessante notar que a idéia aparentemente alternativa que consiste em escrever a conservação de quantidades físicamente significativas (por exemplo, massa, quantidade de movimento, energia) para toda parte do sistema é, em realidade uma variante dos métodos variacionais.

O Cálculo Científico moderno e sobretudo os populares elementos e volumes finitos são baseados em métodos variacionais e parecem ser intrínsicamente ligados à informatização da Ciência. Na verdade, os métodos variacionais são ao mesmo tempo os mais modernas e as mais antigas: como ocorre freqüentemente na História das Ciências, novos autores revisitaram e atualizaram idéias clássicas para atingir horizontes ainda inexplorados: parafraseando Newton, podemos concluir da História dos métodos variacionais que, para ver mais longe, o melhor é subir aos ombros de gigantes.

Um dos grandes problemas científicos -estudado pela humanidade durante praticamente dois milênios antes de ser completamente resolvido - foi o problema da alavanca. Aristóteles já propusera que o princípio da alavanca poderia ser explicado através da análise dos "movimentos naturais"e "não naturais"do sistema e que o equilíbrio poderia ser explicado através da análise dos movimentos possíveis. De maneira análoga, o célebre Heron de Alexandria - cujos princípios fundadores orientam o ensino da Mecânica até hoje - formulou o *princípio de economia*, que pode ser interpretado em termos de variações de funcionais. Na Idade Média, o célebre Jordanus Nemorarius, estudando o mesmo problema, introduziu uma noção de linearidade próxima da de trabalho virtual. Outros grandes nomes da Ciência, tais como - entre outros -Torricelli, Fermat, Huyghens, Leibiniz, a família Bernouilli, Euler, Varignon, Maupertuis, Fourier, D'Alembert, Coulomb, Lagrange, Hamilton marcaram o desenvolvimento dos métodos variacionais.

Podemos fincar dois grandes marcos na história dos métodos variacionais: o Cálculo Diferencial e Integral e o computador - ambos deram um impulso extremamente forte à abordagem variacional, cuja atual popularidade dos métodos variacionais foi grandemente ampliada pelos trabalhos do construtor de barragens Boris Galerkin, o qual - após sua famosa viagem pela Europa às vésperas da Primeira Guerra Mundial - teve a inspiração de construir as aproximações que recebem seu nome. Os trabalhos de outro russo - Sobolev - deram um quadro matemático apropriado aos trabalhos de Galerkin e foram retomados e aprofundados pela escola francesa criada por Hadamard, Fréchet, Schwarz, Lions, Moreau.

No estudo dos sistemas físicos e, mais recentemente, econômicos, uma classe de problemas exige uma atenção particular: os problemas envolvendo *vínculos* (ou restrições), para os quais cuidados particulares - ligados às forças de vínculo - são exigidos. Neste campo, os métodos variacionais mostram toda sua potência e flexibilidade, conduzindo a procedimentos sistemáticos e métodos numéricos variados e adaptados aos objetivos do analista. Em tais situações, a teoria servindo de base à abordagem variacional é a Análise Convexa, que é o tema destas Notas. Neste campo, um grande número de situações de grande interesse prático leva a problemas matemáticos ainda abertos e não resolvidos - o que deve realçar o interesse de pesquisadores pelo assunto.

Estas Notas tem por objetivo a apresentação dos fundamentos da Análise Convexa e exemplificar a utilização dos resultados através de alguns exemplos. Notemos que a Análise Convexa trata de conjuntos convexos mas não trata somente de funções convexas: funções não convexas são também estudadas neste texto.

Parte I

Motivação: exemplos de aplicações

Capítulo 2

Meios Curvilíneos

Em certas situações - freqüentemente encontradas na prática - os movimentos e esforços ligados a sólidos tridimensionais podem ser aproximados por campos análogos associados a meios unidimensionais ou bidimensionais. Tal é o caso, por exemplo, das teorias de cordas, barras, vigas, membranas, placas ou cascas.

Tais aproximações repousam geralmente sobre hipóteses de tipo geométrico. Por exemplo, no caso de cordas, barras, vigas, observa-se que uma das dimensões é muito maior do que as outras e aproximam-se a descrição geométrica do meio por uma curva e os movimentos do sólido por deformações desta curva: resulta assim um modelo descrito com apenas um parâmetro, uma estrutura unidimensional.

De maneira análoga, quando um das dimensões é muito menor do que as outras duas, aproxima-se a descrição geométrica por uma superfície e os movimentos do sólido por deformações desta superfície, resultando uma estrutura bidimensional. Esse é o caso de membranas, placas e cascas.

As descrições aproximadas assim obtidas formam a importante classe dos *meios curvilíneos*, de grande relevância em Engenharia. A aparente simplicidade geométrica dos modelos gerados é, porém, altamente enganadora: os modelos podem apresentar grandes dificuldades teóricas e práticas, muitas das quais se encontram ainda não resolvidas. O estudo de meios curvilíneos freqüentemente aponta para dificuldades fundamentais em Engenharia e Matemática, como veremos através de alguns exemplos.

2.1 Meios Curvilíneos Unidimensionais

Consideremos un sólido tridimensional de natureza "tubular", isto é, caracterizado por uma curva e uma seção reta (Figura 2.1).

Para descrever um sólido deste tipo, é usual parametrizar a curva através de uma variável real $\alpha \in (0, A)$. Por exemplo, podemos tomar $\alpha = s$, onde s é o comprimento de arco associado ao arco de curva (neste caso, $A = L$, onde L é o comprimento da curva): a descrição assim obtida é a *descrição euleriana* e s é a *variável de Euler*. Também podemos escolher $\alpha = a$, onde a é uma partícula do sólido, modelado como sendo a curva, mas em uma configuração natural (isto é, em ausência de qualquer força exterior). Neste caso, $A = \ell$, onde ℓ é o comprimento natural da curva, ou seja, seu comprimento na configuração natural): a descrição assim obtida é *descrição lagrangeana* e a é a *variável de Lagrange.*

A configuração do sólido é:

$$\Omega = \left\{ \ \xi \in \mathbb{R}^3 : \xi \in x\left(\alpha\right) + S\left(\alpha\right) : \alpha \in (0,\, A) \right\} \ .$$

Supondo que a maior dimensão das seções retas $S(\alpha)$ (por exemplo, o maior diâmetro ou lado de uma seção reta $S(\alpha)$) é pequena quando comparada com o comprimento da curva, podemos aproximar a geometria do sólido como sendo a da curva $(x(\alpha) : \alpha \in (0, A))$.

Seja σ o tensor das tensões no sólido. Para utilizar a aproximação acima de maneira eficaz, devemos reduzir σ a uma resultante $T(\alpha)$ e a um momento resultante $M(\alpha)$ aplicados no ponto $x(\alpha)$, isto é,

$$T\left(\alpha\right) = \int\limits_{S(\alpha)} \sigma t \ \ ; \ \ M\left(\alpha\right) = \int\limits_{S(\alpha)} \left(\xi - x\left(\alpha\right)\right) \wedge \sigma t \ .$$

Os esforços internos no sólido podem ser caraterizados por T e M. Quando este é submetido a um carregamento externo que corresponde a uma densidade de forças $c(\alpha)$ e de momentos $m(\alpha)$, o equilíbrio de uma parte elementar é dado por (Figura 2.2)

$$\begin{aligned} T\left(\alpha + d\alpha\right) - T\left(\alpha\right) + c\left(\alpha\right) d\alpha = \mathit{0} \\ M\left(\alpha + d\alpha\right) - M\left(\alpha\right) + m\left(\alpha\right) d\alpha + \left(x\left(\alpha + d\alpha\right) - x\left(\alpha + \frac{d\alpha}{2}\right)\right) \wedge T\left(\alpha + d\alpha\right) \\ - \left(x\left(\alpha\right) - x\left(\alpha + \frac{d\alpha}{2}\right)\right) \wedge T\left(\alpha\right) = \mathit{0}, \end{aligned}$$

ou seja

$$\frac{dT}{d\alpha} + c = \mathit{0} \ \ \text{e} \ \ \frac{dM}{d\alpha} + m + t \wedge T = \mathit{0} \ \ \text{para} \ \ \alpha \in (0,\, A) \ . \tag{2.1}$$

Para completar estas equações, é necessário introduzir, por um lado, as condições de contorno e, por outro lado, uma lei de comportamento (por exemplo, uma conexão entre variações de geometria de x e os esforços internos). Observe que em modelos mecânicos estamos interessados em saber como variações de geometria ocasionam forças e momentos.

2.1.1 Fio idealmente flexível

Um fio idealmente flexível é um meio contínuo unidimensional para o qual $M \equiv 0$ e $T = Tt$, onde T é a tensão (por abuso de notação designamos o escalar e o vetor pela mesma letra), e t é a tangente a curva. Um tal modelo é freqüentemente usado para descrever cordas delgadas, elásticos, barbantes ou fios de costura. Todos estes meios apresentam uma característica essencial: o comportamento unilateral. Ou seja, nesses meios somente esforços de tração são possíveis e uma força de compressão induz uma modificação de geometria que transforma a compressão em tração (Cf. Figura 2.3). Assim, $T \geq 0$ em toda configuração físicamente realizável.

Adotando o ponto de vista de Lagrange, a configuração do fio é dada por uma aplicação $x : [0, \ell] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, associando à partícula $a \in [0, \ell]$ o vetor-posição $x(a)$. Temos então

$$t = \frac{x'}{\mid x' \mid} \quad ; \quad x' = \frac{dx}{da} \ . \tag{2.2}$$

A equação (2.1) se reduz a

$$T' + c(a) = 0 \quad \text{para} \quad a \in]0, \ \ell[\quad . \tag{2.3}$$

Para um fio elástico, a lei de Hooke se escreve

$$T = K\varepsilon \quad \text{e} \quad T \geq 0 \ , \tag{2.4}$$

onde $K > 0$ é o módulo de elasticidade e ε é a deformação:

$$\varepsilon = \mid x' \mid - 1 \quad . \tag{2.5}$$

As condições de contorno naturais para um fio são a amarragem de uma extremidade e uma força aplicada na outra:

$$x(0) = 0 \quad \text{e} \quad T(\ell) = F \ . \tag{2.6}$$

As configurações de equilíbrio do fio são as soluções de

Problema 2.1.1. *Sejam $K > 0$, $\ell > 0$, c e F dados. Determinar (x, T) satisfazendo (2.2)-(2.6).* ■

Notemos que (2.4) combinada a (2.5) mostra que

$$x \in V_+ = \{ \ x \in V : \mid x' \mid \geq 1 \text{ q. s.} \} \quad ; \quad V = \left\{ \ x : [0, \ell] \longrightarrow \mathbb{R}^3 : x(0) = 0 \ \right\} \ . \tag{2.7}$$

Assim, as configurações admissíveis do fio são os elementos de V_+.

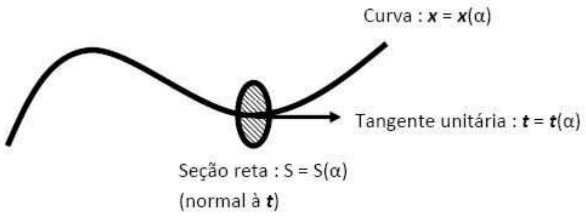

Figura 2.1: Estrutura tubular caracterizada por uma curva e uma seção reta

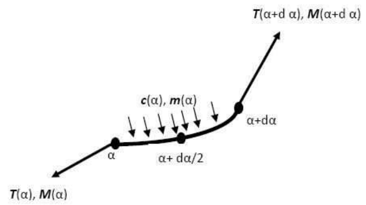

Figura 2.2: Equilíbrio de um elemento do sólido tubular.

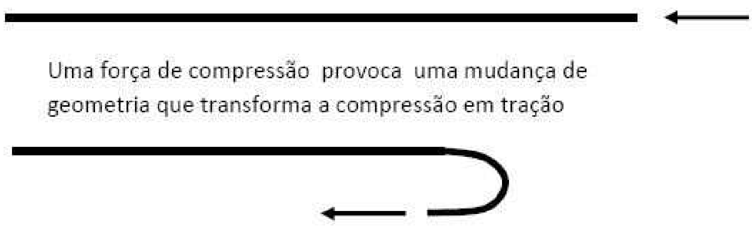

Figura 2.3: Comportamento unilateral : $T \geq 0$

A dificuldade essencial

O comportamento unilateral introduz uma dificuldade essencial. Para ilustrá-la consideremos a situação onde $c(a) = -x(a)$ e $F = 0$. Neste caso, o problema (2.1.1) não tem solução: com efeito, suponhamos que x é uma configuração de equilíbrio do fio: então $x \in V_+$. Ora, por um lado,

$$T' = x \Longrightarrow \; T'.x = x.x = \mid x \mid^2$$

e, por outro lado,

$$T.x' = K\varepsilon \mid x' \mid = K\varepsilon\,(1+\varepsilon) = T\left(1 + \frac{T}{K}\right).$$

Assim,

$$(T.x)' = T'.x + T.x' = \mid x \mid^2 + T\left(1 + \frac{T}{K}\right) \geq \mid x \mid^2 \quad \text{para} \quad a \in]0,\ \ell[\quad .$$

Logo,

$$\int_0^\ell \mid x \mid^2 \leq \int_0^\ell (T.x)' = T(\ell)\,.x(\ell) - T(0)\,.x(0) = 0.$$

Assim,

$$x = 0 \;\; \text{q.s. sobre} \quad]0,\ \ell[\Longrightarrow \; x' = 0 \;\; \text{em} \quad]0,\ \ell[\,.$$

Mas então $x \notin V_+$. Assim, $x \in V_+$ e $x \notin V_+$, o que é absurdo. Assim, para o carregamento descrito, o fio não admite uma configuração de equilíbrio.

Apesar da não existência de solução, podemos abordar o problema sob um ângulo puramente numérico: consideremos, por exemplo, $\ell = 1$ e $K = 1$. O fio pode ser discretizado em N elementos de comprimento $h = 1/N$ e podemos utilizar uma aproximação $T^{(N)}$ tal que $T^{(N)}$ é constante em cada subintervalo $((i-1)\,h,\ ih)$, $i = 1, ..., N$. Sejam $x_i^{(N)} = x^{(N)}(ih)$, $u_i^{(N)} = \left(x^{(N)}\right)'(ih)$, $T_i^{(N)} = T^{(N)}(ih)$. Escolhendo como variável principal $U^{(N)} = \left(u_i^{(N)}, i = 1, ..., N\right)$, podemos definir $X^{(N)}\left(U^{(N)}\right) = \left(x_i^{(N)}, i = 1, ..., N\right)$, dado por

$$x_i^{(N)} = x_{i-1}^{(N)} + hu_i^{(N)} \;\; , \;\; i = 1, ..., N \;\; ; \;\; x_0^{(N)} = 0$$

e $T^{(N)}\left(U^{(N)}\right) = \left(T_i^{(N)}, i = 1, ..., N\right)$ dado por

$$T_i^{(N)} = K\left(\left| \; u_i^{(N)} \; \right| - 1\right) \frac{u_i^{(N)}}{\left| \; u_i^{(N)} \; \right|} \;\; , \;\; i = 1, ..., N-1 \;\; ; \;\; T_N^{(N)} = 0$$

Assim, a discretização das equações de equilíbrio conduz a um sistema de equações não lineares:

$$R\left(U^{(N)}\right) = 0 \quad ; \quad R\left(U^{(N)}\right) = \left(R_i\left(U^{(N)}\right), i = 1, ..., N\right) \ ,$$

onde

$$R_{i-1}\left(U^{(N)}\right) = T_i^{(N)} - T_{i-1}^{(N)} - \frac{h}{2}\left(x_i^{(N)} + x_{i-1}^{(N)}\right), \ \ i = 2, ..., N \ ; \ R_N\left(U^{(N)}\right) = T_N^{(N)}.$$

Estas equações podem ser resolvidas numericamente por um método de relaxação :

$$U^{(N,\ p+1)} = U^{(N,\ p)} + \omega R\left(U^{(N,\ p)}\right) \quad ; \quad U^{(N,\ 0)} \text{ dado.}$$

$\omega > 0$ é um coeficiente de relaxação. A qualidade do resultado pode ser controlada, por exemplo pelo parâmetro

$$r\left(p\right) = \left\| \ R\left(U^{(N,\ p)}\right) \ \right\| = \left(\frac{1}{N}\sum_{i\,=\,1}^{N}\left| \ R_i\left(U^{(N,\ p)}\right)\right|^2\right)^{1/2}$$

Na prática, as iterações são terminadas quando $p = p_{\max}$ ou $\| \ r\left(p\right)\| \leq \delta$. Aplicando este método com $\omega = 0.75$; $U^{(N,\ 0)} = \left(e_1, i = 1, ..., N\right)$, obtemos os resultados abaixo (Tabela 1)

N	p	$r(p)$
10	79	$9.5E-11$
100	742	$1E-10$
1000	6575	$1E-10$

;

N	p	$r(p)$
10	250	$3E-17$
100	2500	$4E-17$
1000	25000	$3E-17$

Tabela 1 - Resultados obtidos por relaxação, com $U^{(N,\ 0)} = \left(e_1, i = 1, ..., N\right)$

Estes resultados permanecem estáveis para outros pontos de partida. Por exemplo, $U^{(N,\ 0)} = \left(\left(-1\right)^i e_1, i = 1, ..., N\right)$ leva aos resultados abaixo (Tabela 2)

N	p	$r(p)$
10	69	$1E-10$
100	555	$1E-10$
1000	3713	$1E-10$

;

N	p	$r(p)$
10	120	$4E-17$
100	1200	$5E-17$
1000	12000	$6E-17$

Tabela 2 - Resultados obtidos por relaxação, com $U^{(N,\ 0)} = \left(\left(-1\right)^i e_1, i = 1, ..., N\right)$

Para um ponto de partida $U^{(N,\ 0)}$ aleatório, os resultados são muito parecidos com os da Tabela 1. Vários valores de ω conduzem a resultados análogos, todos muito próximos. Assim, *apesar da inexistência de solução, observa-se uma excelente* *convergência numérica*: pelo menos no plano numérico, não estamos resolvendo o mesmo problema.

Para explicar esta convergência, podemos aplicar os resultados demonstrados no que segue: o campo de forças externo $c(a) = -x(a)$ e $F = 0$ deriva de um potencial. Tomando

$$U(x) = \int_0^\ell \frac{1}{2} \mid x \mid^2 da,$$

temos

$$-c \in \partial U(x),$$

onde $\partial U(x)$ é o subgradiente de U no ponto x. De forma análoga,

$$T \in \partial W(x),$$

onde W é a energia potencial interna do sistema:

$$W(x) = \int_0^\ell \frac{K}{2} (\mid x' \mid - 1)^2 da$$

Assim, a equação de equilíbrio se escreve

$$x \in V_+ \quad \text{e} \quad 0 \in \partial W(x) + \partial U(x) \ .$$

Seja

$$W^{**}(x) = \int_0^\ell \frac{K}{2} \left[(\mid x' \mid - 1)^+\right]^2 da \quad ; \quad \xi^+ = \max\{\xi, 0\} = \frac{1}{2}(\mid \xi \mid + \xi) \ .$$

Temos

$$\forall \ x \in V_+ : W(x) = W^{**}(x) \ \text{e} \ \partial W(x) = \partial W^{**}(x) \ .$$

Esta igualdade mostra que a equação de equilíbrio se escreve

$$x \in V_+ \quad \text{e} \quad 0 \in \partial W^{**}(x) + \partial U(x)$$

Sejam $J = W + U$ e $J^{**} = W^{**} + U$. W^{**} é convexa, $W^{**}(x) \in \mathbb{R}$ para todo x, U é convexa, $U(x) \in \mathbb{R}$ para todo x: decorre do Teorema 6.7.17 que $\partial J^{**}(x) = \partial W^{**}(x) + \partial U(x)$ para todo x. Assim, a equação de equilíbrio se escreve

$$x \in V_+ \quad \text{e} \quad 0 \in \partial J^{**}(x)$$

e o Teorema 7.2.2 mostra que

$$x \in V_+ \quad \text{e} \quad x = \arg \min_V J^{**}.$$

Este problema não admite solução. Porém o problema relaxado

$$\overline{x} = \arg \min_V J^{**}$$

possue uma solução única $\overline{x} = 0$. Ora, a seqüência $\{ \ x_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}}$ dada por

$$x_n' = \sum_{i\,=\,1}^{n} (-1)^i \, 1_{]\ a_{i-1},\ a_i\ [} e_1 \quad ; \quad a_j = \frac{j}{n} \ \ (\ j = 0, ..., n) \ \ ; \ 1_A(a) = \begin{cases} 1, \text{ se } \ a \in A \\ 0, \text{ se } \ a \notin A \end{cases}$$

verifica $x_n \in V_+$ e $x_n \longrightarrow \overline{x} = 0$ e $J\,(x_n) = J^{**}\,(x_n) \longrightarrow J^{**}\,(\overline{x})$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Resulta que

Ora,

$$\min_{V_+} \ J = \ \min_{V_+} \ J^{**} = \ \min_{V} \ J^{**} \ ,$$

Assim, toda seqüência minimizante $\{ \ x_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}} \subset V_+$ tal que $J\,(x_n) \longrightarrow \min\limits_{V_+} J$ verifica $J\,(x_n) = J^{**}\,(x_n) \longrightarrow \min\limits_{V} J^{**}$. Assim, toda seqüência minimizante associada à minimização de J em V_+ é também uma seqüência minimizante de um problema diferente, associado à minimização de J^{**} sobre V. Ora, este problema tem por solução única $\overline{x} = 0$, de modo que $x_n \longrightarrow \overline{x} = 0$, o que explica a convergência observada.

Contato unilateral

A análise de fios perfeitamente flexíveis apresenta dificuldades suplementares quando consideramos a presença de um obstáculo. Por exemplo, consideremos o obstáculo definido pela equação $\psi\,(\xi) = 0$ e a região admissível $\psi\,(\xi) \geq 0$: as configurações do fio estão restritas ao lado positivo do obstáculo:

$$x \in V_+ \cap C \quad ; \quad C = \left\{ \ x : [0, \ell] \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \psi\,(x\,(a)) \geq 0 \ \text{ q. s. } \right\} \ . \tag{2.8}$$

A parte do fio $D\,(x)$ que está em contato com o obstáculo é uma das incógnitas do problema: em geral, para determiná-la é preciso conhecer a solução. Temos

$$D\,(x) = \{ \ a \in [0, \ell] : \psi\,(x\,(a)) = 0 \ \} \ . \tag{2.9}$$

A presença do obstáculo introduz um *vínculo* no sentido da Mecânica Clássica, ao qual está associada uma *reação*, ou *força de vínculo*, r, que também é uma das incógnitas do problema.

O caso sem atrito Quando o contato ocorre sem atrito, o carregamento externo compreende uma força de reação r ligada ao obstáculo:

$$c = c_0 + r \ . \tag{2.10}$$

A reação do obstáculo é ortogonal à sua própria superfície, cuja equação é $\psi(\xi) = 0$. Assim, temos:

$$r = Rn, \tag{2.11}$$

onde n é a normal unitária voltada para o interior da região admissível. Supondo que $\nabla\psi \neq 0$ sobre o obstáculo, temos

$$n = \frac{\nabla\psi}{\mid \nabla\psi \mid} \ . \tag{2.12}$$

A reação é dirigida para o interior da região admissível e é nula quando não há contato:

$$R(a) \geq 0 \quad \text{e} \quad R(a) = 0 \ \ \text{se} \ \ \psi(x(a)) > 0 \tag{2.13}$$

Neste caso, r é um vetor normal à C (definição 5.6.11) e o vínculo é *ideal*, isto é, o trabalho da força de reação r é nulo para todo *movimento virtual compatível com o vínculo* - ou seja, para todo dx pertencente ao cone tangente $TC(C,x)$. r não somente pertence ao cone normal $NC(C,x)$ - o qual é formado pelas forças que realizam um trabalho não positivo (isto é, negativo ou nulo) nos movimentos virtuais compatíveis (ou seja, pelos elementos cujo produto escalar é não positivo para todo elemento de $TC(C,x)$) - mas também é ortogonal à $TC(C,x)$. Um vínculo ideal *não dissipa energia.*

Para determinar o equilíbrio do fio em presença de um obstáculo, devemos resolver o problema seguinte:

Problema 2.1.2. *Sejam $K > 0$, $\ell > 0$, c_0 e F dados. Determinar $(x, T, r, D(x))$ satisfazendo (2.2)-(2.6) e (2.8)-(2.13).* ■

A principal dificuldade no estudo de problemas de contato unilateral reside na multiplicidade de valores de $D(x)$ e R (logo, de r). Por exemplo, consideremos a situação onde o obstáculo é um cilindro:

$$\psi(\xi) = \xi_1^2 + (\xi_2 + 2\alpha)^2 - \alpha^2 \quad (\ 0 < \alpha < 1\ ).$$

Caso o fio seja suficientemente longo, podemos construir várias soluções (Cf. Figura 2.6) conduzindo a valores de T, $D(x)$ e R distintos.

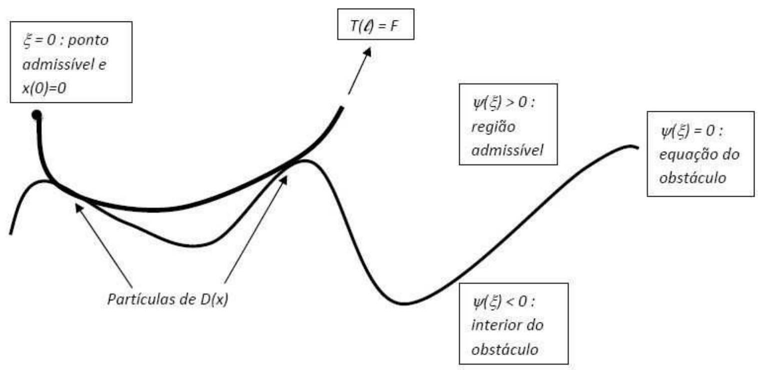

Figura 2.4: Contato unilateral entre o fio e o obstáculo

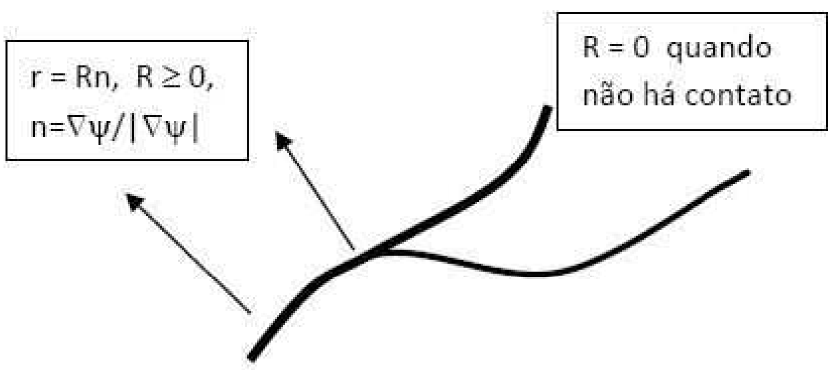

Figura 2.5: Reação do obstáculo

A multiplicidade de soluções e, em particular, a dos valores de $D(x)$ e R está intimamente ligada à convexidade: suponhamos que nosso carregamento externo c_0 deriva de um potencial convexo e contínuo U_0, isto é,

$$-c_0 \in \partial U_0(x) \quad ; \quad U_0 \text{ convexo e contínuo } .$$

Suponhamos que a região admissível também seja convexa. Neste caso, por um lado, C é um convexo fechado de V e, por outro lado, a reação r do obstáculo está associada ao subgradiente (Cf. definição 6.7.8) da função indicatriz Ψ_C de C (Cf. definição 7.0.19): como vimos acima, r é um elemento do cone normal a C em x $NC(C,x)$ (Cf. definição 5.6.11) e, como C é convexo (Cf. Lema 7.1.3),

$$-r \in \partial \Psi_C(x) \quad .$$

Assim, o carregamento externo verifica (Cf. Teorema 6.7.17):

$$-c \in \partial U(r) \quad ; \quad U = U_0 + \Psi_C$$

O potencial U é convexo e fracamente semicontínuo inferiormente (definição 6.3.5 e Teorema 6.3.19). Ora, como já vimos, o Teorema 7.2.2 mostra que

$$x \in V_+ \quad \text{e} \quad x = \arg\min_V J^{**} \quad ; \quad J^{**} = W^{**} + U$$

Neste caso, o problema relaxado

$$\overline{x} = \arg\min_V J^{**}$$

admite uma solução a qual estão associados um campo de tensões $\overline{T} \in \partial W^{**}(\overline{x})$, uma reação $\overline{r} \in -\partial \Psi_C(\overline{x})$, um carregamento $\overline{c}_0 \in \partial U_0(\overline{x})$ e uma zona de contato $D(\overline{x})$. Usando a convexidade do problema, é possível mostrar que

$$\overline{T} \in \partial W(x) \quad ; \quad -(\overline{r} + \overline{c}_0) \in \partial U(r) ,$$

ou seja, que o campo de tensões associado a x é $\overline{T}$ e que o carregamento externo total associado a x é $\overline{r} + \overline{c}_0$. Assim, obtemos um resultado parcial de unicidade dos esforços internos e externos. Em certas situações particulares, como a de um obstáculo plano e forças de gravidade, estas igualdades levam à unicidade da zona de contato.

O problema de pequenas perturbações ou pequenos deslocamentos Uma situação freqüentemente encontrada na prática é aquela em que uma configuração inicial x_0 é dada e busca-se um conjunto de configurações x_1, x_2, ..., x_N tais que $x_i = x_{i-1} + u_i$, para $1 \leq i \leq N$. Por exemplo, tal é o caso quando um problema de evolução em um intervalo de tempo $[0, t_{\max}]$ é discretizado utilizando um passo $\Delta t = t_{\max}/N$. Além disto, a prática dos problemas de contato unilateral conduz -por razões numéricas - ao uso de esquemas de discretização explícitos com passos de tempo extremamente pequenos (isto é, valores de N extremamente grandes), de forma que os deslocamentos u_i são muito pequenos.

Neste caso, a situação é - para cada índice i - a seguinte: dispomos de uma configuração de referência x_R para a qual a zona de contato $D(x_R)$ é conhecida e desejamos calcular um "pequeno"campo de deslocamentos u tal que a solução seja $x = x_R + u$. Em tal caso, é natural utilizar a informação disponível na configuração x_R para determinar o deslocamento u conduzindo à nova configuração x: resulta a aproximação dita de "pequenas perturbações" ou "pequenos deslocamentos", em que u é suposto infinitesimal. Esta aproximação repousa sobre as seguintes:

a) *Aproximação da zona de contato:* a zona de contato é aproximada pela zona de contato na configuração de referência, isto é

$$D(x) \approx D(x_R) \ . \tag{2.14}$$

De maneira coerente com esta aproximação, temos

$$n(a) \approx n_R(a) = \frac{\nabla\psi(x_R(a))}{\mid \nabla\psi(x_R(a)) \mid} \text{ sobre } D(x) \tag{2.15}$$

b) *Aproximação do conjunto admissível:* seja $x_R(a) \notin D(x_R)$. Então $\psi(x_R(a)) > 0$. Temos então

$$\psi(x(a)) = \psi(x_R(a) + u(a)) \approx \underbrace{\psi(x_R(a))}_{>0} + \underbrace{\nabla\psi(x_R(a)).u(a)}_{\text{infinitesimal}} .$$

Assim, para todo $u(a)$ infinitesimal,

$$\psi(x(a)) \ \geq 0 \ .$$

Seja $x_R(a) \in D(x_R)$. Então $\psi(x_R(a)) = 0$. Temos então

$$\psi(x(a)) = \psi(x_R(a) + u(a)) \approx \underbrace{\psi(x_R(a))}_{=0} + \ \nabla\psi(x_R(a)).u(a) \ ,$$

de modo que

$$\psi(x(a)) \approx \ \nabla\psi(x_R(a)).u(a) \ .$$

Assim, para todo $u(a)$ infinitesimal,

$$\psi(x(a)) \geq 0 \Leftrightarrow \ n_R(a).u(a) \ \geq 0 \quad ; \ n_R(a) = \frac{\nabla\psi(x_R(a))}{\mid \nabla\psi(x_R(a)) \mid} \ .$$

Resulta que

$$C \approx \{ \ x = x_R + u : u.n_R \geq 0 \text{ sobre } D\left(x_R\right) \ \} \tag{2.16}$$

c) *Aproximação da reação do obstáculo:* de forma coerente com a aproximação do conjunto admissível,

$$r \approx Rn_R \ , \ R \geq 0 \ \text{ sobre } D\left(x_R\right) \quad ; \ r \approx \mathit{0} \ \text{ sobre o resto do fio.} \tag{2.17}$$

d) *Aproximação do carregamento externo não ligado ao obstáculo:* de maneira coerente com a hipótese de um deslocamento infinitesimal,

$$c_0\left(x\right) \approx \underbrace{c_0\left(x_R\right)}_{\text{finito}} + \underbrace{Dc_0\left(x_R\right)\left(u\right)}_{\text{infinitesimal}} \ ,$$

onde $u \longrightarrow Dc_0\left(x_R\right)\left(u\right)$ é uma aplicação linear. Logo,

$$c_0\left(x\right) \approx c_0\left(x_R\right) \quad . \tag{2.18}$$

Assim, o problema de "pequenas perturbações"do equilíbrio do fio é seguinte:

Problema 2.1.3. *Sejam $K > 0$, $\ell > 0$, x_R, c_0 e F dados. Determinar (x, T, r) satisfazendo (2.2)-(2.6), (2.10), (2.14)-(2.18).* ∎

Esta formulação elimina as dificuldades ligadas à não convexidade da região admissível e do potencial externo U_0 : C é aproximado por um convexo fechado e U_0 é aproximado pelo trabalho de uma força constante (i. e., um funcional linear e contínuo). Neste caso, a unicidade do carregamento externo global implica a unicidade da reação do obstáculo r. Para a implementação numérica, a função indicatriz deve ser aproximada por uma função contínua, através de um dos métodos apresentados na seção 7.2.1.

O caso com atrito Quando o contato ocorre com atrito, a reação do obstáculo não é ortogonal à sua superfície :

$$r = Rn + \phi \ \ ; \phi.n = \mathit{0} \quad . \tag{2.19}$$

ϕ é o esforço de atrito, tangente ao obstáculo e cujo valor é limitado:

$$\mid \phi \mid \leq A \quad . \tag{2.20}$$

A função A é definida pelo coeficiente de atrito $\mu > 0$ e pela reação normal:

$$A = \mu R \ . \tag{2.21}$$

A presença de atrito introduz uma nova incógnita e dificuldades adicionais: ϕ não é único, mesmo para situações convexas. Por exemplo, consideremos a situação onde o obstáculo é um plano horizontal passando pela origem (isto é, $\psi(\xi) = \xi_2$) e o carregamento externo é dado pela gravidade $c_0 = -\rho g e_2$ e $F = F e_1$, $F > 0$ (Figura 2.7), onde ρ é a densidade linear do fio (unidade de massa/unidade de comprimento) e g é a aceleração de gravidade.

Nesta situação, C e o potencial U_0 são convexos, a parte normal R da reação do obstáculo e a zona de contato $D(x)$ são únicas: $R = \rho g$ e $D(x) = (0, \ell)$. Apesar disto, o fio admite uma infinidade de configurações de equilíbrio, correspondendo a valores arbitrários de ϕ tais que $\mid \phi \mid \leq \mu \rho g$. Em particular, podemos construir uma família de soluções para a tensão linear tal que $T(a) = (F - \phi\ell) + \phi a$, $\phi = \phi e_1$, $\mid \phi \mid \leq \mu \rho g$.

O problema de "pequenas perturbações" com atrito A dificuldade acima faz com que a aproximação de pequenas perturbações seja freqüentemente utilizada para a resolução de problemas envolvendo atrito. Neste caso, além das aproximações introduzidas acima, utiliza-se

e) *Aproximação do atrito:* de maneira coerente com as aproximações (2.14) e (2.16), aproxima-se o valor máximo possível do atrito por

$$A \approx A_R = \mu R_R \ , \tag{2.22}$$

onde A_R é o valor máximo possível do atrito na configuração de referência x_R e R_R é a parte normal da reação do obstáculo nessa mesma configuração.

Além disto, o atrito age de maneira a impedir o movimento. Supõe-se que oposição do atrito ao deslocamento é máxima, ou seja, que só há movimento quando o atrito não o pode impedir. Decorre desta idéia a chamada *lei de Coulomb*, definida pelas equações:

$$\mid \phi \mid < A \Longrightarrow u_T = 0 \quad ; \quad \mid \phi \mid = A \Longrightarrow \exists\ \lambda \geq 0 \text{ tal que } u_T = -\lambda \phi \quad , \tag{2.23}$$

onde u_T é o deslocamento tangencial (lembremos que, por hipótese, $n \approx n_R$):

$$u_T = u - (u.n_R)\, n_R \ . \tag{2.24}$$

Neste caso, temos

$$-\phi \in \partial j(u) \quad ; \quad j(u) = \int_0^\ell A_r \mid u_T \mid \ ,$$

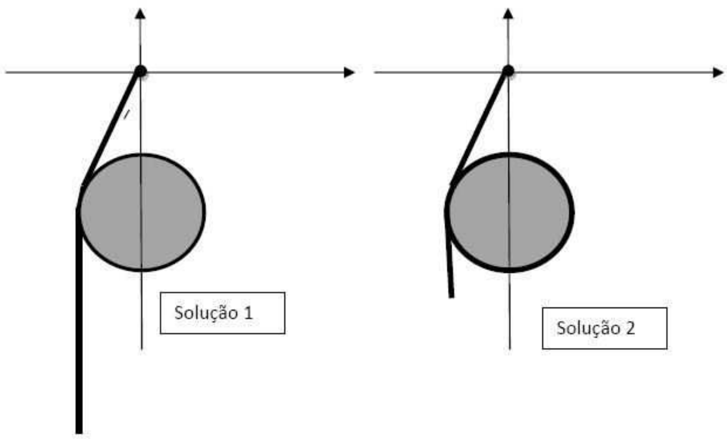

Figura 2.6: Soluções múltiplas

Figura 2.7: Multiplicidade de soluções num caso convexo

de forma que o problema pode ser tratado pela inclusão do potencial exterior suplementar j: $U = U_0 + j + \Psi_C$. Como já observamos anteriormente, dentro da aproximação em "pequenas perturbações", U_0 é afim e C é convexo. Como j é convexo e fracamente contínuo, resulta U é convexo e fracamente semicontínuo inferiormente, de modo que o esquema de resolução precedente se aplica. No plano numérico, j é usualmente aproximado por um funcional diferenciável no sentido de Gâteaux (definição 6.7.2) através do procedimento de regularização (seção 7.2.1) antes da aplicação de um dos procedimentos de aproximação (seção 7.2.1).

2.1.2 O problema da "elástica": flambagem de uma viga inextensível.

Consideremos um meio curvilíneo ocupando a configuração de um segmento horizontal e submetido a forças horizontais F e $-F$, com $F > 0$ (Figura 2.8)

Figura 2.8: O problema da "elástica"

Supondo a viga inextensível e tratando o problema de maneira bidimensional, o vetor tangente é representado por

$$t = x' = (\cos(\theta), \sin(\theta)),$$

de modo que

$$x(a) = \left(\int_0^a \cos(\theta(s))\, ds, \int_0^a \sin(\theta(s))\, ds \right).$$

O deslocamento é

$$u(a) = x(a) - (a, 0) = (x_1(a) - a, x_2(a))$$

Em ausência de todo carregamento além do contato com o obstáculo e das forças aplicadas às extremidades, o potencial associado às forças externas é

$$U(\theta) = -F u_1(0) + F u_1(\ell) = F \int_0^\ell u_1'(s)\, ds = F \int_0^\ell (\cos(\theta(s)) - 1)\, ds$$

e a energia de deformação elástica é

$$W = \frac{EI}{2} \int_0^{\ell} \left[\theta'(s)\right]^2 ds \; .$$

Assim, podemos determinar configurações de equilíbrio *estáveis* através do Princípio do Mínimo de Energia:

$$\theta^* = \arg\min_V J \quad ; \quad J = W + U \; ; \; V = \{ \; \theta : [0, \ell] \longrightarrow \mathbb{R} \} \; .$$

De maneira mais geral, temos, calculando a diferencial de Gâteaux de J em θ,

$$(DJ(\theta), \; \alpha) = EI \int_0^{\ell} \theta'\alpha' - F \int_0^{\ell} \sin(\theta)\,\alpha \; .$$

Logo, para $\lambda = \dfrac{F}{EI} > 0$,

$$\theta'' + \lambda \sin(\theta) = 0 \quad ; \quad \theta'(0) = \theta'(\ell) = 0 \; .$$

Notemos que estas condições implicam que

$$x_2(\ell) = \int_0^{\ell} \sin(\theta(s))\, ds = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\ell} \theta' = 0 \; .$$

Seja

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \; .$$

Se $\lambda < \lambda_1$, então a única solução é $\theta = 0$. Para $\lambda > \lambda_n$, existem n soluções θ_m, $1 \leq m \leq n$, não nulas e dadas por

$$k_m \sin(\varphi_m) = \sin\left(\frac{\theta_m}{2}\right) \quad ;$$

$$\ell\sqrt{\lambda} = 2m \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_m^2 \sin^2(\varphi)}} \quad ;$$

$$\varphi_m' = \sqrt{\lambda}\sqrt{1 - k_m^2 \sin^2(\varphi_m)} \quad ; \quad \varphi_m(0) = \frac{\pi}{2} \; .$$

Temos

$$J(\theta_m) = 2k_m^2\sqrt{FEI} \int_{\pi/2}^{\pi/2 \, + \, m\pi} \frac{\cos(2\varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1 - k_m^2 \sin^2(\varphi)}} < 0 \; .$$

Assim, $J(\theta_m) < J(0)$ e $\theta = 0$ (solução em forma de segmento de reta) não é estável quando $\lambda > \lambda_1$, pois não corresponde a um mínimo de energia: a solução estável é θ_1. Quando F cresce de 0 a $\lambda_1 EI$, a viga tende a passar da solução $\theta = 0$ à solução $\theta = \theta_1$: ocorre a flambagem da viga.

É interessante notar que a presença de um obstáculo plano não altera este resultado (Figura 2.9)

Neste caso, as configurações admissíveis verificam

$$\int_0^a \sin(\theta(s))\, ds \geq 0 \quad \text{para } a \in [0, \ell],$$

de modo que os valores admissíveis de θ são os elementos de

$$C = \left\{ \theta : [0, \ell] \longrightarrow \mathbb{R} : \int_0^a \sin(\theta(s))\, ds \geq 0 \quad \text{para } a \in [0, \ell] \right\} .$$

Como $\theta_1 \in C$, a solução estável contínua correspondendo a θ_1, quando $\lambda > \lambda_1$.

2.2 Um Modelo Simples para a Fusão/Solidificação

Num modelo simplificado, podemos considerar que um material se encontra em fase sólida quando sua temperatura θ é inferior à temperatura crítica de mudança de fase θ_c e se encontra em fase líquida quando sua temperatura ultrapassa este mesmo valor. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\theta_c = 0$: em caso contrario, basta tomar $\tilde{\theta} = \theta - \theta_c$ e a mudança de fase ocorre quando $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_c = 0$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a região ocupada pelo material: a cada instante do tempo $t \geq 0$, o campo de temperaturas do material é $\theta(x, t)$, associando ao ponto $x \in \Omega$ a temperatura nesse mesmo ponto no instante t. Assim, para todo $t \geq 0$, a fase líquida ocupa a região

$$\Omega_L(t) = \{\, x \in \Omega : \theta(x, t) > 0\} \ ,$$

enquanto que a fase sólida ocupa a região

$$\Omega_S(t) = \{\, x \in \Omega : \theta(x, t) < 0\} \ .$$

Figura 2.9: Flambagem em presença de um obstáculo

A região

$$\Sigma(t) = \{ x \in \Omega : \theta(x, t) = 0\}$$

é a frente de mudança de fase e separa a parte líquida da parte sólida. No que segue, supomos que $\Sigma(t)$ é uma superfície, mas esta hipótese limitativa pode ser eliminada e a formulação final é válida mesmo quando $\Sigma(t)$ tem um volume estritamente positivo.

Supondo que o material é homogêneo em cada fase, θ verifica

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - k_L \Delta \theta = f \quad \text{em } \Omega_L(t) \quad ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} - k_S \Delta \theta = f \quad \text{em } \Omega_S(t) \quad ,$$

onde $k_S > 0$ e $k_L > 0$ são constantes características de cada uma das fases. A estas equações, devemos adicionar a condição de Stefan:

$$k_L \nabla \theta . n - k_S \nabla \theta . n = -\lambda v . n \quad \text{sobre } \Sigma(t) \ ,$$

onde v é a velocidade da frente de mudança de fase e n é a normal unitária a $\Sigma(t)$, dirigida para o interior da fase líquida. $\lambda > 0$ é um coeficiente ligado ao calor latente do material. As condições de contorno e a condição inicial envolvem geralmente o valor do campo de temperatura na fronteira:

$$\theta = \theta_0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad ; \quad \theta(x, 0) = \theta_0 \quad \text{em } \Omega \quad .$$

Sejam w e β tais que

$$w = k_S \theta, \ \text{se } \theta < 0 \ ; \ w = k_L \theta, \ \text{se } \theta > 0 \ ;$$

$$\beta(a) = \frac{a}{k_S} - \lambda, \ \text{se } a < 0 \ ; \beta(0) = [-\lambda, \ 0] \ ; \ \beta(a) = \frac{a}{k_L}, \ \text{se } a > 0$$

e temos

$$\frac{\partial \beta(w)}{\partial t} - \Delta w = 0 \ \text{ em } \Omega$$

$$w = w_0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad ; \quad w(x, 0) = w_0 \quad \text{em } \Omega \quad .$$

Notemos que β^{-1} é unívoco, de forma que,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta \beta^{-1}(u) = 0 \ \text{ em } \Omega \ ; \ u \in \beta(w) ;$$

$$w = w_0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad ; \quad w(x, 0) = w_0 \quad \text{em } \Omega \quad .$$

Esta equação de evolução pode ser estudada através dos resultados expostos na seção 8.4: sejam $V = L^2(\Omega)$ e $H = H^{-1}(\Omega)$. H é munido do produto escalar

$$(u, \ v)_H = (\nabla \widetilde{u}, \ \nabla \widetilde{v})_V \quad ; \quad -\Delta \widetilde{u} = u \ \text{ e } \ -\Delta \widetilde{v} = v \ \text{ em } \Omega \ ; \ \widetilde{u} = \widetilde{v} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \ .$$

Com estas definições, $A(u) = \Delta \beta^{-1}(u)$ é um operador maximal monótono, unívoco, hemicontínuo e limitado sobre V, de modo que podemos aplicar os resultados da seção 8.4.

Parte II

Elementos teóricos

Capítulo 3

Elementos de Teoria dos Conjuntos

"Precisamos do Axioma da Escolha para nossas meias, mas não para nossos sapatos"
– Bertrand Russel

A Análise Convexa repousa sobre a Teoria dos Conjuntos e, em particular, sobre o *Axioma da Escolha*. Relembramos aqui os elementos essenciais necessários ao estabelecimento dos fundamentos da Análise Convexa.

A Teoria dos Conjuntos é o elemento fundamental da Matemática e é até hoje objeto de controvérsia. Seus primeiros desenvolvimentos forma realizados por Georg Cantor e conduziram à *Teoria Ingênua dos Conjuntos*, sintetizada por exemplo em [Halmos 2001]. O adjetivo *ingênua* não indica imprecisão, mas simplesmente uma abordagem de tipo semi-axiomático utilizando conceitos intuitivos, sem excesso de formalismo. Nesta teoria, o ponto de partida é a noção de *elemento*: as coleções de elementos formam os conjuntos. Esta abordagem facilita a compreensão e a utilização operacional dos conjuntos, o que explica seu sucesso.

O inconveniente da *Teoria Ingênua* é de não impor restrições claras às operações podendo ser efetuadas sobre conjuntos, nem à escolha dos elementos: a não imposição conduz a antinomias tais como o *paradoxo de Russell* (o conjunto de todos os conjuntos). Para eliminar tais inconsistências, Ernst Zermelo desenvolveu a *Teoria Axiomática dos Conjuntos*, baseada em um conjunto de axiomas caracterizando os conjuntos.

Em sua versão inicial, Zermelo formulou oito axiomas fundamentais (extensão, conjunto vazio, pares, reunião, infinito, fundação, partes de um conjunto, escolha). A maioria destes axiomas é utilizada de maneira implícita pela *Teoria Ingênua.* Adolf Fraenkel e Thoralf Skolem introduziram um axioma suplementar (substituição). A teoria resultante dos nove axiomas é conhecida como *Teoria ZFC(Zermelo-Fraenkel-Choice).*

O destaque dado ao *Axioma da Escolha* é facilmente explicável: por um lado, este axioma conduz a dificuldades, tais como o *paradoxo de Banach-Tarski* (não mesurabilidade de uma bola de $\mathbb{R}^3$); mas, por outro lado, ele serve para justifica a maioria dos fundamentos da Análise. Por exemplo, ele justifica alguns dos raciocínios mais freqüentes em Análise, tais como definir um elemento a partir de uma família de objetos, escolhendo uma parte do elemento em cada membro da família considerada. Assim, o *Axioma da Escolha* é freqüentemente indispensável à prova de resultados fundamentais e sobre ele repousam, por exemplo, a existência de de bases em espaços vetoriais, o método diagonal, o método de indução finita e a manipulação de valores pontuais em seqüências de funções.

Podemos encontrar na literatura desenvolvimentos recusando o *Axioma da Escolha*, por exemplo baseados exclusivamente nos outros oito axiomas (*Teoria ZF*) ou nos sete outros iniciais de Zermelo (*teoria Z*). Existem também teorias baseadas em formas enfraquecidas, tais como o *Axioma da Escolha Dependente.* Note-se porém que nenhuma destas teorias contém resultados clássicos, tais como o Teorema de Stone-Weierstrass ([Good et al, 1998]).

O desenvolvimento destes elementos está além do escopo deste texto, de forma que limitaremos o texto aos elementos necessários à nossa teoria.

3.1 Noções e Operações Elementares sobre os Conjuntos

Utilizaremos no texto que segue várias noções e operações elementares sobre os conjuntos, em geral bem conhecidas. Lembramos aqui as definições essenciais a fim de fixar a notação utilizada.Como já observamos, nosso objetivo não é o estudo detalhado da teoria dos conjuntos e nos contentamos dos elementos essenciais necessários aos desenvolvimentos que seguem.

A primeira noção primitiva - *logo, não definida* - sobre os conjuntos é a noção de *pertinência*: um conjunto é formado de *elementos.* Escrevemos $x \in A$ para dizer que x é um elemento do conjunto A. Diremos também de A contém x.

Em geral, um conjunto é definido através das propriedades de seus elementos: dada uma sentença $\mathbb{S}$, define-se A como sendo formado pelos elementos para os quais $\mathbb{S}$ é satisfeita e utiliza-se a notação

$$A = \{\ x : \mathbb{S}\ \} \quad \text{ou} \quad A = \{\ x \mid \mathbb{S}\ \}\ .$$

Esta maneira de proceder - aparentemente intuitiva - é na verdade um dos axiomas fundamentais da teoria dos conjuntos (*Axioma da Especificação*).

Dois conjuntos são iguais se e somente se são formados pelos mesmos elementos: $A = B$ se e somente se $x \in A \iff x \in B$. Esta idéia - também aparentemente intutiva - é ainda um dos axiomas fundamentais da teoria dos conjuntos (*Axioma da Extensão*).

Outra noção básica é a de *inclusão*: diremos que $A \subset B$, isto é, que o conjunto A é um subconjunto de B ou que A está contido em B, se e somente se todo elemento de A é também um elemento de B: $x \in A \implies x \in B$. Diremos também que B contém A. A inclusão é reflexiva ($A \subset A$), transitiva ($A \subset B$ e $B \subset C \implies A \subset C$) e antisimétrica ($A \subset B$ e $B \subset A \implies A = B$). Por vezes, definiremos um subconjunto A de um conjunto B utilizando uma especificação dada por uma sentença $\mathbb{S}$. Neste caso, escreveremos $A = \{\ x \in B : \mathbb{S}\ \}$ ou $A = \{\ x \in B \mid \mathbb{S}\ \}$.

Utilizaremos o símbolo $\varnothing$ para indicar o - único - conjunto sem elementos. A existência e a unicidade de $\varnothing$ resultam dos axiomas acima (especificação e extensão) e da noção de igualdade.

A primeira operação básica sobre conjuntos é a de *reunião*: dados dois conjuntos A e B, definimos um conjunto $A \cup B$ - a reunião de A e B - formado pelos elementos de A e B: $x \in A \cup B \iff (x \in A$ **ou** $x \in B)$. Esta operação simples e intuitiva é também um dos axiomas fundamentais da teoria dos conjuntos (*axioma da união*).

A segunda operação básica sobre conjuntos é a de *intersecção*: dados dois conjuntos A e B, definimos um conjunto $A \cap B$ - a intersecção de A e B - formado pelos elementos comuns de A e B: $x \in A \cap B \iff (x \in A$ **e** $x \in B)$.

Utilizaremos com relativa freqüência a operações de *diferença*:

$$A - B = \{\ a : a \in A,\ b \notin B\} \ .$$

Quando $B \subset A$, diremos que $A - B$ é o *complemento* de B com relação a A.

Também utilizaremos freqüentemente a operação de *soma*

$$A + B = \{\ a + b : a \in A,\ b \in B\}$$

Deve-se notar que a operação $-$ (diferença) **não é** a inversa da operação $+$(soma) : a primeira seleciona os elementos de A que não são comuns a B, enquanto que esta última forma um conjunto utilizando as somas de elementos de A e B.

Para simplificar a notação, escreveremos $u + A$ em lugar de $\{\ u\} + A$

$$u + A = \{\ u + a : a \in A\} .$$

Se S é um conjunto, utilizaremos a notação $\mathcal{P}(S)$ para o conjunto das partes de S, isto é, $\mathcal{P}(S) = \{\ A \mid A \subset S\ \}$ (*Axioma da Potência*).

Utilizaremos também as *fórmulas de Morgan*: para toda família $\{\ A_\omega\ \}_{\omega \in \Omega} \subset \mathcal{P}(\ S)$

$$S - \bigcap_{\omega \in \Omega} A_\omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} (S - A_\omega) \quad e \quad S - \bigcup_{\omega \in \Omega} A_\omega = \bigcap_{\omega \in \Omega} (S - A_\omega) .$$

3.2 Axioma da Escolha

O Axioma da Escolha pode ser formulado da forma seguinte:

Axioma 3.2.1 (Escolha)**.** *O produto cartesiano de uma família não-vazia de conjuntos não-vazios é não-vazio, isto é, se* $\mathcal{F} = \{\ S_\lambda\}_{\lambda\ \in\ \Lambda}$ *é uma família não-vazia* $(\ \Lambda \neq \varnothing)$ *de conjuntos não-vazios* $(\ S_\lambda \neq \varnothing,\ \forall\ \lambda \in \Lambda)$*, então existe uma família* $\{\ s_\lambda\}_{\lambda\ \in\ \Lambda}$ *tal que* $s_\lambda \in S_\lambda,\ \forall\ \lambda \in \Lambda$. ■

Esta forma do axioma pode ser interpretada da maneira seguinte: *a escolha* ***simultânea*** *de um elemento pertencente a cada conjunto da família é sempre possível.*

Uma das conseqüências mais importantes do Axioma da Escolha é a seguinte:

Proposição 3.2.2. *Seja S um conjunto não-vazio. Então existe uma* ***função de escolha*** *que associa a cada subconjunto não-vazio de S um de seus elementos, isto é, se* $\mathcal{F}$ *é o conjunto das partes não-vazias de* $S \neq \varnothing\ (\ \mathcal{F} = \mathcal{P}(S) - \{\ \varnothing\ \})$*, então existe uma* ***função de escolha*** $f : \mathcal{F} \to S$*, tal que* $f(A) \in A,\ \forall\ A \in \mathcal{F}$ ■

Prova. Basta aplicar o Axioma da Escolha à família $\mathcal{G} = \{\ A\}_{A\ \in\ \mathcal{F}}$: toma-se como conjunto de índices $\Lambda = \mathcal{F}$ e como indexador a aplicação identidade $S_A = A$. Dado que $S \neq \varnothing$, temos $\mathcal{F} \neq \varnothing$ e $\mathcal{G} = \{\ S_A\}_{A\ \in\ \mathcal{F}} = \{\ A\}_{A\ \in\ \mathcal{F}} = \mathcal{F} \neq \varnothing$. Resulta do Axioma da Escolha a existência de $\{\ s_A\}_{A\ \in\ \mathcal{F}}$ tal que $s_A \in S_A,\ \forall\ A \in \mathcal{F}$, ou seja, $\{\ s_A\}_{A\ \in\ \mathcal{F}}$ tal que $s_A \in A,\ \forall\ A \in \mathcal{F}$. Define-se então $f\ (\ A) = s_A$. ■

Existem na literatura numerosos resultados equivalentes ao Axioma da Escolha (Cf., por exemplo, [Rubin e Rubin 1985]). Entre estes resultados, destacamos o *Lema de Zorn*. Antes de enunciar e provar o Lema de Zorn, precisaremos de algumas definições e notações. A primeira destas definições fundamentais é a de *conjunto parcialmente ordenado*:

Definição 3.2.3 (conjunto parcialmente ordenado)**.** *Seja S um conjunto. Diremos que* $\leq$ *é uma relação de ordem parcial sobre S ou que* $(\ S,\ \leq\ )$ *é parcialmente ordenado se e somente se as propriedades seguintes forem satisfeitas:*

Reflexividade: $\forall\ a \in S : a \leq a$.

Transitividade: $\forall\ \{a, b, c\} \subset S : a \leq b\ \text{ e } b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

Anti-simetria: $\forall\ \{a, b\} \subset S : a \leq b\ \text{ e }\ b \leq a \Rightarrow a = b$. ■

Seja S um conjunto. Podemos sempre definir uma ordem parcial sobre $\mathcal{P}(S)$ usando a relação de inclusão:

Proposição 3.2.4. *Seja S um conjunto. Então $(\ \mathcal{P}(S),\ \subset)$ é parcialmente ordenado.* ■

Prova. A relação de inclusão satisfaz às propriedades de reflexividade, transitividade e anti-simetria:

$$A \subset A \ \ ; \ \ A \subset B \ \text{ e } \ B \subset C \implies A \subset C \ \ ; \ A \subset B \ \text{ e } \ B \subset A \implies A = B \ .$$

■

Numa relação de ordem parcial, dois elementos arbitrários podem não ser comparáveis, isto é, podemos não ter nem $a \leq b$ nem $b \leq a$. Por exemplo, se $S = \{\ 1,\ 2,\ 3\ \}$, $A = \{\ 1\ \}$, e $B = \{\ 2\ \}$ não são comparáveis em $(\ \mathcal{P}(S),\ \subset)$: não temos nem $A \subset B$ nem $B \subset A$. Pode-se entretanto considerar subconjuntos de elementos comparáveis: tais subconjuntos são chamados *cadeias*:

Definição 3.2.5 (cadeia)**.** *Seja $(\ S,\ \leq)$ parcialmente ordenado e $C \subset S$. $(\ C,\ \leq)$é uma cadeia se e somente se todos os elementos de C forem comparáveis através da relação $\leq$:*

$$\forall\ (\ a,\ b\ ) \in C \times C\ :\ \ a \leq b \ \ \textit{ou} \ \ b \leq a. \quad ■$$

Por exemplo, se $S = \{\ 1,\ 2,\ 3\ \}$, $C = \{\ \varnothing,\ \{\ 1\ \}, \{\ 1,\ 2\ \}\ \}$ é uma cadeia.

Utilizaremos mais abaixo a propriedade seguinte:

Proposição 3.2.6. *Toda subcadeia é uma cadeia, isto é, $(\ C,\ \leq)$ é uma cadeia e $B \subset C \implies (\ B,\ \leq)$ é uma cadeia.*■

Prova. Seja $(\ a,\ b\ ) \in B \times B$. Dado que $B \subset C$, temos$(\ a,\ b\ ) \in C \times C$. Como $(\ C,\ \leq)$ é uma cadeia, $a \leq b$ ou $b \leq a$. ■

Quando S é uma cadeia, isto é, todos os elementos de S são comparáveis, dizemos que o conjunto é totalmente ordenado:

Definição 3.2.7 (conjunto totalmente ordenado)**.** *Seja $(\ S,\ \leq)$ parcialmente ordenado. Diremos que $\leq$ é uma relação de ordem total sobre S ou que $(\ S,\ \leq)$ é totalmente ordenado se e somente se dois elementos arbitrários de S são comparáveis através da relação $\leq$:*

$$\forall\ (\ a,\ b\ ) \in S \times S\ :\ \ a \leq b \ \ \textit{ou} \ \ b \leq a \quad ■$$

Notemos que a definição de uma cadeia implica que $(C, \leq)$ é bem ordenado. Utilisaremos em seguida a noção de *elemento maximal* e de *elemento minimal* :

Definição 3.2.8 (elemento maximal, minimal de uma parte de S)**.** *Seja* $(S, \leq)$ *parcialmente ordenado e* $A \subset S$. *Diremos que* M *é o elemento maximal de* A *se e somente se :* $M \in A$ *e* $\forall\, a \in A : M \leq a \implies a = M$. *De maneira análoga, diremos que* m *é o elemento minimal de* A *se e somente se:* $m \in A$ *e* $\forall\, a \in A : a \leq m \implies a = m$. ■

A noção de elemento maximal *é diferente* daquelas de *majorante*, ou *cota superior*, *supremo*, e *máximo*. Similarmente, a noção de elemento minimal *é diferente* daquelas de *minorante*, ou *cota inferior*, *ínfimo*, e *mínimo*. Estas definições também nos serão úteis:

Definição 3.2.9 (majorante, minorante de uma parte de S)**.** *Seja* $(S, \leq)$ *parcialmente ordenado e* $A \subset S$. *Diremos que* M *é um majorante de* A *se e somente se :* $\forall\, a \in A\ : a \leq M$. *De maneira análoga, diremos que* m *é um minorante de* A *se e somente se* $\forall\, a \in A\ :\ m \leq a$. ■

O maior dos minorantes é o *ínfimo* e o menor dos majorantes é o *supremo* :

Definição 3.2.10 (ínfimo, supremo de uma parte de S)**.** *Seja* $(S, \leq)$ *parcialmente ordenado e* $A \subset S$. *Diremos que* M *é o supremo de* A *se e somente se* M *é um majorante de* A *e todo majorante* M' *de* A *verifica* $M \leq M'$, *isto é:*

$$\forall\, a \in A\ :\ a \leq M\ \ ;\ \forall\, a \in A\ :\ a \leq M' \Rightarrow M \leq M'.$$

De maneira análoga, diremos m *é o ínfimo de* A *se e somente se* m *é um minorante de* A *e todo minorante* m' *de* A *verifica* $m' \leq m$, *isto é:*

$$\forall\, a \in A\ :\ m \leq a\ \ ;\ \forall\, a \in A :\ m' \leq a \Rightarrow m' \leq m\ .\ \blacksquare$$

O supremo e do ínfimo são únicos, quando existem. Por exemplo, se m_1 e m_2 são dois supremos de S, temos $m_1 \leq m_2$ e $m_2 \leq m_1$, de modo que a reflexividade da relação de ordem parcial implica $m_1 = m_2$.

Definição 3.2.11 (máximo, mínimo de uma parte de S)**.** *Seja* $(S, \leq)$ *parcialmente ordenado e* $A \subset S$. *Diremos que* M *é o máximo de* A *se e somente se :* $M \in A$ *e* $\forall\, a \in A : a \leq M$. *De maneira análoga, diremos que* m *é o mínimo de* A *se e somente se :* $m \in A$ *e* $\forall\, a \in A : m \leq a$. ■

Quando existem, o máximo e o mínimo são únicos. Por exemplo, se m_1 e m_2 são dois máximos de S, temos $m_1 \leq m_2$ e $m_2 \leq m_1$, de modo que a reflexividade da relação de ordem parcial implica $m_1 = m_2$.

Não se deve confundir um elemento maximal nem com um majorante, nem um supremo, nem um máximo. Um elemento maximal é um elemento de A que não admite nenhum majorante em A, mas não é obrigatoriamente um majorante de A. Por exemplo, se $A = \{\ \{\ 1\ \}, \{\ 2\ \}\ \}$, $\{\ 1\ \}$ e $\{\ 2\ \}$ são elementos maximais de $(\ A,\ \subset)$ mas não são majorantes de A. Analogamente, um elemento minimal de A é um elemento de A que não admite nenhum minorante em A, mas não precisa ser um minorante de A: um elemento minimal não deve ser confundido nem com um minorante, nem um ínfimo, nem um mínimo. Todas estas noções coincidem quando $(\ C,\ \leq)$ é uma cadeia:

Proposição 3.2.12. *Se M é o máximo de $(\ C,\ \leq)$, então M é o único elemento maximal de $(\ C,\ \leq)$. Reciprocamente, se M é um elemento maximal de $(\ C,\ \leq)$ e $(\ C,\ \leq)$ é uma cadeia então M é o máximo de $(\ C,\ \leq)$.*

Se m é o mínimo de $(\ C,\ \leq)$, então m é o único elemento minimal de $(\ C,\ \leq)$. Reciprocamente, se m é um elemento minimal de $(\ C,\ \leq)$ e $(\ C,\ \leq)$ é uma cadeia então m é o mínimo de $(\ C,\ \leq)$. ■

Prova. Daremos a prova somente para o máximo (a prova para o mínimo é inteiramente análoga).

Seja M o máximo de $(\ C,\ \leq)$. Consideremos $a \in C$ tal que $M \leq a$ e mostremos que $a = M$: como M é o máximo, temos também $a \leq M$, de modo que $M \leq a$ e $a \leq M$. Assim $a = M$. Logo, M é um elemento maximal.

Para a unicidade, consideremos outro elemento maximal N e mostremos $N = M$: como M é o máximo, temos $N \leq M$. Como N é maximal, esta desigualdade implica em $N = M$.

Seja $(\ C,\ \leq)$ uma cadeia e M um elemento maximal de $(\ C,\ \leq)$. Temos $M \in C$ por definição. Mostremos que $a \leq M, \forall\ a \in C$. Seja $B = \{\ a \in C\ \mid a \leq M\}$. Basta mostrar que $C - B = \varnothing$: suponhamos $C - B \neq \varnothing$. Então $\exists\ a \in C$ tal que $a \notin B$. Como C é uma cadeia, a e M são comparáveis: $a \leq M$ ou $M \leq a$. Se $a \leq M$, temos $a \in B$, o que contradiz $a \notin B$. Suponhamos $M \leq a$: M é maximal, de modo que $M \leq a \implies M = a \implies a \leq M$. Assim, $a \in B$, o que contradiz $a \notin B$. Logo $C - B = \varnothing$, de modo que $a \leq M, \forall\ a \in C$. ■

Temos também:

Proposição 3.2.13. *Seja $(\ C,\ \leq)$ uma cadeia finita não-vazia. Então $(\ C,\ \leq)$ tem um máximo e um mínimo.* ■

Prova. Daremos a prova somente para o máximo (a prova para o mínimo é inteiramente análoga). Seja $f : \mathcal{P}(C) \to C$ uma função escolha sobre C. Seja X o subconjunto de C formado pelas cadeias que têm um máximo. $X \neq \varnothing$, pois C é não-vazia e $c \in C \implies \{ c \} \in X$. Além disto, se $B \in X$ e $c \in C$, então $B \cup \{ c \} \in X$: com efeito, seja $M(B)$ o máximo de B. Como $B \subset C$, temos $M(B) \in C$. Como C é uma cadeia, $M(B)$ e c são comparáveis. Se $M(B) \leq c$ então $\forall\ x \in B \cup \{ c \} : x \leq c$, de modo que $c = M(B \cup \{ c \})$ é o máximo de $B \cup \{ c \}$. Se $c \leq M(B)$, de maneira análoga, $M(B) = M(B \cup \{ c \})$.

Definimos $g : X \to X$ como

$$g(B) = B \cup \{ f (C - B)\} \ , \quad \text{se } C - B \neq \varnothing \quad ; \quad g(B) = B, \quad \text{se } C - B = \varnothing.$$

Nosso objetivo é mostrar que existe $B \in X$ tal que $g(B) = B$: em tal caso, $C - B = \varnothing$, de modo que $C \subset B \subset C \implies C = B$ e C tem um máximo.

Seja $n = \#(C) \in \mathbb{N}$, o número de elementos de C. Temos

$$\forall\ B \in X \quad : \quad \#(B) \leq \#(g(B)) \leq n.$$

Notando que, por um lado, $\{ f (C - B)\}$ contém um e um só elemento e que, por outro lado, $\{ f (C - B)\} \cap B = \varnothing$, temos

$$B \neq g(B) \iff \#(g(B)) = \#(B) + 1 \ .$$

Seja $C_0 = \varnothing \in X$ e, para todo $i \in \mathbb{N}$, $C_{i+1} = g(C_i) \in X$. Como C é não-vazia, $n > 0$ e $g(C_0) \neq C_0$, de modo que $\#(C_1) = 1$.

Seja $\Lambda = \{ \#(C_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$. Mostremos que $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tal que $g(C_k) = C_k$. Com efeito, temos

$$\#(g(C_i)) \leq n \implies \#(C_{i+1}) \leq n, \ \forall\ i \in \mathbb{N} \implies n + 1 \notin \Lambda.$$

Suponhamos $g(C_i) \neq C_i, \forall\ i \in \mathbb{N}$: então

$$\#(C_0) = 0 \quad \text{e} \quad \forall\ i \in \mathbb{N} \quad : \quad \#(C_{i+1}) = \#(g(C_i)) = \#(C_i) + 1 \ .$$

Assim, Λ é um conjunto sucessor e, portanto, $\mathbb{N} \subset \Lambda \implies n + 1 \in \Lambda$. Logo, $n + 1 \in \Lambda$ e $n + 1 \notin \Lambda$, o que é absurdo. ■

N.B. 3.2.14. *É possível demonstrar esta proposição utilizando uma função $h : C \to \mathbb{N}$ dada por $h(c_i) = i$, onde $c_i = f (C - C_i)$. Se $g(C_i) \neq C_i$, $\forall\ i \in \mathbb{N}$, então h é sobrejetiva, de modo que C não é finito.*■

3.3 O Lema de Zorn

O Lema de Zorn estabelece uma relação entre a existência de majorantes para as cadeias de S e a existência de um elemento maximal para S.

Lema 3.3.1 (Zorn)**.** *Seja* $(S, \leq)$ *parcialmente ordenado tal que toda cadeia de* $(S, \leq)$ *possua um majorante em* S*. Então* S *tem um elemento maximal.* ■

A demonstração do Lema de Zorn utiliza o seguinte resultado auxiliar

Lema 3.3.2. *Seja* S *um conjunto e* $\mathcal{F} = \{ S_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{P}(S)$ *uma família não-vazia tal que:*

(i) $A \in \mathcal{F}$ *e* $B \subset A \implies B \in \mathcal{F}$*;*

(ii) *Se* $\mathcal{C}$ *é uma cadeia de* $(\mathcal{F}, \subset)$ *então* $\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \in \mathcal{F}$*.*

Então $(\mathcal{F}, \subset)$ *tem um elemento maximal.* ■

prova do lema auxiliar.

1) Seja $U : \mathcal{F} \to \mathcal{P}(S)$ dada por

$$U(C) = \{ s \in S \mid C \cup \{ s \} \in \mathcal{F} \}$$

Temos $C \subset U(C)$. Além disto,

$$U(C) - C = \varnothing \iff C \text{ é um elemento maximal de } (\mathcal{F}, \subset). \tag{3.1}$$

Com efeito,

a) Seja C um elemento maximal de $\mathcal{F}$. Então $\forall\ D \in \mathcal{F} :\ C \subset D \implies C = D$. Suponhamos $U(C) - C \neq \varnothing$. Então existe $s \in S$ tal que $D = C \cup \{ s \} \in \mathcal{F}$ e $s \notin C$. Mas então $C \subset D \in \mathcal{F}$, de modo que a maximalidade de C mostra que $C = D$. Assim $C \cup \{ s \} \subset C$, de modo que $s \in C$, o que contradiz $s \notin C$.

b) Suponhamos $U(C) - C = \varnothing$. Seja $D \in \mathcal{F}$ tal que $C \subset D$. Suponhamos que $\exists\ s \in D$ tal que $s \notin C$. Como $C \cup \{ s \} \subset D$ e $D \in \mathcal{F}$, a hipótese (i) mostra que $\mathcal{C} \cup \{ s \} \in \mathcal{F}$, de modo que $s \in U(C)$. Como $U(C) - C = \varnothing$, temos $s \in C$, o que contradiz $s \notin C$.

2) Seja $f : \mathcal{P}(S) \to S$ uma função escolha sobre S. Definimos $g : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ como:

$$g(\,C\,) = \begin{cases} C \cup \{\, f(\,U(\,C\,) - C\,)\,\}, & \text{se } U(\,C\,) - C \neq \varnothing \\ C, & \text{se } U(\,C\,) = C \end{cases} .$$

A equivalência da Eq. (3.1) mostra que

$$g(\,C\,) = C \iff C \text{ é um elemento maximal de } (\,\mathcal{C},\ \subset). \qquad (3.2)$$

3) Definimos uma torre $\mathcal{T}$ de elementos de $\mathcal{F}$ da maneira seguinte: $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$ é uma torre se e somente se $\mathcal{T}$ satisfaz às três condições seguintes :

$$\varnothing \in \mathcal{T}\ ;\ C \in \mathcal{T} \implies g(\,C\,) \in \mathcal{T}\ ;\ \mathcal{C} \text{ cadeia em } (\,\mathcal{T},\ \subset) \implies \bigcup_{A\,\in\,\mathcal{C}} A \in \mathcal{T}.$$

$\mathcal{F}$ é uma torre, de modo que o conjunto das torres é não vazio. Além disto, $\mathcal{T}_0 = \bigcap_{\mathcal{T} \text{ torre}} \mathcal{T}$ é uma torre:

a) $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{F}$, pois $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$, $\forall\ \mathcal{T}$ torre de $\mathcal{F}$

b) $\varnothing \in \mathcal{T}$, $\forall\ \mathcal{T}$ torre de $\mathcal{F} \implies \varnothing \in \mathcal{T}_0$;

c) $C \in \mathcal{T}_0 \implies C \in \mathcal{T}$, $\forall\ \mathcal{T}$ torre de $\mathcal{F} \implies g(\,C\,) \in \mathcal{T}$, $\forall\ \mathcal{T}$ torre de $\mathcal{F} \implies g(\,C\,) \in \mathcal{T}_0$;

d) $\mathcal{C}$ cadeia em $(\,\mathcal{T}_0,\ \subset) \implies \mathcal{C}$ cadeia em $(\,\mathcal{T},\ \subset)$, $\forall\ \mathcal{T}$ torre de $\mathcal{F} \implies \bigcup_{A\,\in\,\mathcal{C}} A \in \mathcal{T}$, $\forall\ \mathcal{T}$ torre de $\mathcal{F} \implies \bigcup_{A\,\in\,\mathcal{C}} A \in \mathcal{T}_0$.

4) Seja

$$\mathcal{W}_0 = \{\ C \in \mathcal{T}_0\ \mid C \text{ é comparável com todos os elementos de } \mathcal{T}_0\ \}\ ,$$

isto é,

$$\mathcal{W}_0 = \{\ C \in \mathcal{T}_0\ \mid C \subset A \text{ ou } A \subset C\ ,\ \forall\ A \in\ \mathcal{T}_0\ \}\ .$$

$\mathcal{W}_0$ é uma cadeia de $(\,\mathcal{T}_0,\ \subset)$, de modo que

$$M = \bigcup_{C\,\in\,\mathcal{W}_0} C \in \mathcal{T}_0 \qquad (3.3)$$

5) Mostremos que $\mathcal{W}_0$ é uma torre. Temos $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{F}$ e $\varnothing \in \mathcal{W}_0$. Seja $C \in \mathcal{W}_0$ e mostremos que $g\,(\,C\,) \in \mathcal{W}_0$. Consideremos

$$\mathcal{V}\,(C) = \{\ B \in \mathcal{T}_0 \ \mid B\ \subset C \ \text{ ou } \ g\,(\,C\,) \subset B\ \}\ .$$

$\mathcal{V}\,(C)$ é uma torre:

a) $\varnothing \in \mathcal{V}\,(C)$ (pois $\varnothing \subset C$);

b) $B \in \mathcal{V}\,(C) \implies g\,(\,B\,) \in \mathcal{V}\,(C)$. Com efeito, dado que $B \in \mathcal{V}\,(C) \subset \mathcal{T}_0$ e $\mathcal{T}_0$ é uma torre, temos $g\,(\,B\,) \in \mathcal{T}_0$. Além disto, $B \subset C$ ou $g\,(\,C\,) \subset B$. Suponhamos $B \subset C$.

(i) Seja $B \neq C \implies g\,(\,B\,) \subset C$. Com efeito, como C é comparável com todos os elementos de $\mathcal{T}_0$, $g\,(\,B\,)$ e C são comparáveis: $g\,(\,B\,) \subset C$ ou $C \subset g\,(\,B\,)$. Se $g\,(\,B\,) \subset C$, então $g\,(\,B\,) \in \mathcal{V}\,(C)$. Suponhamos $C \subset g\,(\,B\,)$. Então $B \subset C \subset g\,(\,B\,) = B \cup \{\ f\,(\,U\,(\,B\,) - B\,)\ \}$. Temos então $C - B \subset g\,(\,B\,) - B = \{\ f\,(\,U\,(\,B\,) - B\,)\ \}$. Como $B \neq C$, $C - B$ contém pelo menos um elemento.Ora, $\{\ f\,(\,U\,(\,B\,) - B\,)\ \}$ contém exatamente um elemento: temos então $C - B = \{\ f\,(\,U\,(\,B\,) - B\,)\ \}$, de modo que $g\,(\,B\,) = C$. Assim, $g\,(\,B\,) \subset C$ e $g\,(\,B\,) \in \mathcal{V}\,(C)$.

(ii) Seja $B = C \implies g\,(\,B\,) = g\,(\,C\,)$. Dado que $\mathcal{T}_0$ é uma torre e $C \in \mathcal{T}_0$, temos $g\,(\,C\,) \in \mathcal{T}_0$. Como $g\,(\,C\,) \subset g\,(\,C\,)$, temos $g\,(\,B\,) \in \mathcal{V}\,(C)$.

Suponhamos $g\,(\,C\,) \subset B$, então $g\,(\,C\,) \subset g\,(\,B\,)$, de modo que $g\,(\,B\,) \in \mathcal{V}\,(C)$.

c) Se $\mathcal{C}$ é uma cadeia em $(\ V(C),\ \subset)$ então $\underset{A\,\in\,\mathcal{C}}{\cup} A \in V(C)$: como $\mathcal{V}\,(C) \subset \mathcal{T}_0$ e $\mathcal{T}_0$ é uma torre, $\mathcal{C}$ é uma cadeia em $(\ \mathcal{T}_0,\ \subset)$ e $\underset{A\,\in\,\mathcal{C}}{\cup} A \in \mathcal{T}_0$. Além disto, $A \in \mathcal{V}\,(C)$, $\forall\ A \in \mathcal{C}$, de modo que $A \subset C$ ou $g\,(\,C\,) \subset A$, $\forall\ A \in \mathcal{C}$. Se $\exists\ A \in \mathcal{C}$ tal que $g\,(\,C\,) \subset A$, temos $g\,(\,C\,) \subset \underset{A\,\in\,\mathcal{C}}{\cup} A$, o que implica $\underset{A\,\in\,\mathcal{C}}{\cup} A \in \mathcal{V}\,(C)$. No caso contrário, $A \subset C$, $\forall\ A \in \mathcal{C}$, de modo que $\underset{A\,\in\,\mathcal{C}}{\cup} A \subset C$, o que também implica $\underset{A\,\in\,\mathcal{C}}{\cup} A \in \mathcal{V}\,(C)$.

Temos então $\mathcal{V}\,(C) \subset \mathcal{T}_0 = \underset{\mathcal{T}\ \text{torre}}{\cap} \mathcal{T} \subset \mathcal{V}\,(C)$, de modo que $\mathcal{V}\,(C) = \mathcal{T}_0$. Assim,

$$B \in \mathcal{T}_0 \implies B \in \mathcal{V}\,(C) \implies B \subset C \ \text{ ou } \ g\,(\,C\,) \subset B.$$

Como $C \subset g\,(\,C\,)$, temos

$$B \in \mathcal{T}_0 \implies B\ \subset g\,(\,C\,) \ \text{ ou } \ g\,(\,C\,) \subset B$$

e $g\,(\,C\,)$ é comparável com todos os elementos de$\mathcal{T}_0$: $g\,(\,C\,) \in \mathcal{W}_0$.

5) Seja $\mathcal{C}$ uma cadeia de elementos de $\mathcal{W}_0$. Como $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{T}_0$ e $\mathcal{T}_0$ é uma torre, $\mathcal{C}$ é uma cadeia em $(\mathcal{T}_0, \subset)$ e $\underset{A \in \mathcal{C}}{\cup} A \in \mathcal{T}_0$. Seja $C \in \mathcal{T}_0$. Temos $A \in \mathcal{W}_0$, $\forall A \in \mathcal{C}$, de modo que $A \subset C$ ou $C \subset A$. Se $\exists\ A \in \mathcal{C}$ tal que $C \subset A$, temos $C \subset \underset{A \in \mathcal{C}}{\cup} A$, o que implica $\underset{A \in \mathcal{C}}{\cup} A \in \mathcal{W}_0$. No caso contrário, $A \subset C$, $\forall A \in \mathcal{C}$, de modo que $\underset{A \in \mathcal{C}}{\cup} A \subset C$, o que também implica $\underset{A \in \mathcal{C}}{\cup} A \in \mathcal{W}_0$.

6) Assim, $\mathcal{W}_0$ é uma torre. Temos então $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{T}_0 = \underset{\mathcal{T} \text{ torre}}{\cap} \mathcal{T} \subset \mathcal{W}_0$, de modo que $\mathcal{W}_0 = \mathcal{T}_0$ e (Cf. Eq. (3.3))

$$M = \underset{C \in \mathcal{T}_0}{\cup} C \in \mathcal{T}_0.$$

Como $M \in \mathcal{T}_0$ e $\mathcal{T}_0$ é uma torre, temos $g(M) \in \mathcal{T}_0 \implies g(M) \subset \underset{C \in \mathcal{T}_0}{\cup} C = M$. Assim, $g(M) \subset M$. Dado que $M \subset g(M)$, obtemos $g(M) = M$ e a Eq. (3.2) mostra que M é um elemento maximal de $\mathcal{F}$.

■

prova do Lema de Zorn. Definimos a aplicação $H : S \to \mathcal{P}(S)$ como

$$H(s) = \{\ a \in S \ \mid a \leq s\ \}.$$

Temos $H(s) \neq \varnothing$, $\forall\ s \in S$: a relação de reflexividade mostra que $s \in H(s)$.

1) Consideremos a família $\mathcal{H} = \{\ H(s) \mid s \in S\ \}$: dado que $S \neq \varnothing$, existe pelo menos um $s \in S$, de modo que existe também pelo menos um $H(s) \in \mathcal{H}$ e, por conseguinte, $\mathcal{H} \neq \varnothing$. Além disto, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(S)$, de modo que $(\mathcal{H}, \subset)$ é parcialmente ordenado.

A construção de H mostra que: $\forall\ A \in H$: $\exists\ s_A \in S$ tal que $A = H(s_A)$. Assim, H define uma bijeção entre S e $\mathcal{H}$: por um lado, $H : S \to \mathcal{H}$ é sobrejetiva, pois $H(S) = \mathcal{H}$ por construção; por outro lado H é injetiva: se $H(s_1) = H(s_2)$ então $H(s_1) \subset H(s_2)$ e $H(s_2) \subset H(s_1)$, de modo que $s_1 \leq s_2$ e $s_2 \leq s_1 \implies s_1 = s_2$.

Podemos então definir $H^{-1} : \mathcal{H} \to S$. Para $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$, temos $H^{-1}(\mathcal{A}) = \left\{\ s \in S \ \middle|\ s = H^{-1}(A),\ A \in \mathcal{A} \right\}$.

2) Basta demonstrar que $(\mathcal{H}, \subset)$ tem um elemento maximal. Com efeito, a ordem parcial definida sobre $\mathcal{H}$ pela inclusão é equivalente à ordem parcial $\leq$ sobre S, isto é, $(S, \leq)$ e $(\mathcal{H}, \subset)$ verificam

$$s_1 \leq s_2 \iff H(s_1) \subset H(s_2).$$

Assim,

$$C \text{ é uma cadeia de } (\ S,\ \leq) \iff H(C) \text{ é uma cadeia de } (\ \mathcal{H},\ \subset)\ .$$

Além disto, M é um majorante de $(\ C,\ \leq) \iff H(M)$ é um majorante de $(\ H(C),\ \subset)$:

$$M \in S \text{ e } s \leq M, \forall\ s \in C \iff H(M) \in \mathcal{H} \text{ e } B = H(s) \subset H(M), \forall\ B \in H(C).$$

De maneira análoga, M é um elemento maximal de $(\ S,\ \leq) \iff H(M)$ é um elemento maximal de $(\ \mathcal{H},\ \subset)$:

$$M \in S \text{ e } s \leq M, \forall\ s \in S \iff H(M) \in \mathcal{H} \text{ e } B = H(s) \subset H(M), \forall\ B \in \mathcal{H}.$$

3) Mostremos que toda cadeia de $(\ \mathcal{H},\ \subset)$ tem um majorante. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das cadeias de $(\ \mathcal{H},\ \subset)$:

$$\mathcal{F} = \{\ \mathcal{C}\ \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \mid (\ \mathcal{C},\ \subset) \text{ é totalmente ordenado} \}\ .$$

Mostremos que todos elementos de $\mathcal{F}$ têm um majorante em $(\ \mathcal{H},\ \subset)$. Seja $\mathcal{C} \in \mathcal{F}$: o resultado é imediato se $\mathcal{C} = \varnothing$: $\varnothing \subset A$, $\forall\ A \in \mathcal{H}$. Seja $\mathcal{C} \neq \varnothing$ e $C = H^{-1}(\mathcal{C})$. Consideremos dois elementos $s_A \in C$ e $s_B \in C$. $A = H(s_A)$ e $B = H(s_B)$ verificam $A \in \mathcal{C}$ e $B \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia, A e B são comparáveis: $A \subset B$ ou $B \subset A$. Temos então $H(s_A) \subset H(s_B)$ ou $H(s_B) \subset H(s_A)$, de modo que $s_A \leq s_B$ ou $s_B \leq s_A$. Logo, s_A e s_B são comparáveis. Assim, todos os elementos de C são comparáveis e C é uma cadeia de $(\ S,\ \leq)$. As hipóteses do lema mostram que C tem um majorante: $\exists\ M_C \in S$ tal que $s \leq M_C$, $\forall\ s \in C$. Então $H(s) \subset H(M_C)$, $\forall\ s \in C$, de modo que $\mathcal{C} = H(C) \subset H(M_C) \in \mathcal{H}$. Logo, $H(M_C)$ é um majorante de $\mathcal{C}$ em $(\ \mathcal{H},\ \subset)$.

4) Temos:

a $\mathcal{F} \neq \varnothing$, pois $\{\ H(s)\ \} \in \mathcal{F}$, $\forall\ s \in S$.

b) $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \implies B \in \mathcal{F}$, pois toda subcadeia é uma cadeia.

c) Se $\mathfrak{C}$ é uma cadeia de $(\ \mathcal{F},\ \subset)$ então $\underset{\mathcal{A}\,\in\,\mathfrak{C}}{\cup} \mathcal{A} \in \mathcal{F}$. Notemos que $\mathfrak{C}$ é um subconjunto de $(\ \mathcal{P}(\mathcal{F}),\ \subset)$, isto é, cada elemento de $\mathfrak{C}$ é uma cadeia de $(\ \mathcal{H},\ \subset)$. Assim, $\underset{\mathcal{A}\,\in\,\mathfrak{C}}{\cup} \mathcal{A}$ é um subconjunto de $(\ \mathcal{H},\ \subset)$, formado por uma reunião de cadeias. Sejam $U \in \underset{\mathcal{A}\,\in\,\mathfrak{C}}{\cup} \mathcal{A}$ e $V \in \underset{\mathcal{A}\,\in\,\mathfrak{C}}{\cup} \mathcal{A}$. Então: $\exists$ U $\in \mathfrak{C}$ e $\mathcal{V} \in \mathfrak{C}$ tais que $U \in \mathcal{U}$ e $V \in \mathcal{V}$. Como $\mathfrak{C}$ é uma cadeia,

$\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são comparáveis: $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ ou $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$: temos $U \in \mathcal{U}$ e $V \in \mathcal{U}$. Como $\mathfrak{C} \subset \mathcal{P}(\mathcal{F})$, temos $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$, de modo que $(\mathcal{U}, \subset)$ é totalmente ordenado U e V são comparáveis. Resulta que todos os elementos de $\bigcup_{\mathcal{A} \in \mathfrak{C}} \mathcal{A}$ são comparáveis: $\left(\bigcup_{A \in \mathfrak{C}} A, \leq \right)$ é totalmente ordenado e, por conseguinte, $\bigcup_{A \in \mathfrak{C}} A \in \mathcal{F}$.

5) O Lema 3.3.2 mostra que $\mathcal{F}$ tem um elemento maximal $\mathcal{C}_{\max}$. Temos então: $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{C}_{\max} \subset \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{C}_{\max} = \mathcal{A}$.

Como $\mathcal{C}_{\max}$ é uma cadeia de $(\mathcal{H}, \subset)$, $\mathcal{C}_{\max}$ tem um majorante $\mathcal{M} \in \mathcal{H}$, $M \in S$. Temos então $A \subset \mathcal{M}$, $\forall\, A \in \mathcal{C}_{\max}$.

$\mathcal{C}_{\max}$ é formado de elementos de $\mathcal{H}$: $A \in \mathcal{C}_{\max} \iff \exists\, a \in S$ tal que $A = H(a)$ e $H(a) \in \mathcal{C}_{\max}$. Analogamente, $\mathcal{M} \in \mathcal{H}$, de modo que $\exists\ M \in S$ tal que $\mathcal{M} = H(M)$.

Seja $\mathcal{U} = \bigcup_{A \in \mathcal{C}_{\max}} A$. Como $A \subset \mathcal{M}$, $\forall\, A \in \mathcal{C}_{\max}$, temos $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Assim, $H(a) \subset H(M)$, $\forall\, a \in S$ tal que $H(a) \in \mathcal{C}_{\max}$. Logo, $a \leq M$ para todo $a \in S$ tal que $H(a) \in \mathcal{C}_{\max}$.

Seja $s \in S$ tal que $M \leq s$. Mostremos que $s \leq M$: temos $a \leq M \leq s$, $\forall$ $a \in S$ tal que $H(a) \in \mathcal{C}_{\max}$, de modo que $H(a) \subset H(s)$, $\forall\, a \in S$ tal que $H(a) \in \mathcal{C}_{\max}$. Assim, todos os elementos de $\mathcal{C}_{\max}$ são comparáveis com $H(s)$, de modo que $\mathcal{A} = \mathcal{C}_{\max} \cup \{ H(s)\}$ é uma cadeia de $(\mathcal{H}, \subset)$. Então $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{C}_{\max} \subset \mathcal{A}$, de modo que a maximalidade de $\mathcal{C}_{\max}$ implica que $\mathcal{C}_{\max} = \mathcal{A}$. Temos então $H(s) \in \mathcal{C}_{\max}$, de modo que $H(s) \subset H(M)$ e $s \leq M$.

Assim, $M \in S$ e $\forall\, s \in S \ : \ M \leq s \Longrightarrow s = M$. Logo, M é um elemento maximal de S.

■

Capítulo 4

Espaços de Hilbert sobre $\mathbb{R}$

A teoria que segue pode ser construída dentro do quadro geral de um *espaço topológico*, isto é de um conjunto V onde existe uma familia de subconjuntos $\mathcal{A} = \{ A_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{P}(V)$ tal que

- $\varnothing \in \mathcal{A}$, $V \in \mathcal{A}$,

- $A_\omega \in \mathcal{A}$, $\forall \omega \in \Omega \implies \bigcup_{\omega \in \Omega} A_\omega \in \mathcal{A}$

- $A_i \in \mathcal{A}$, $1 \leq i \leq n \implies \bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i \in \mathcal{A}$

Não adotaremos aqui uma tal generalidade: lembremos que a família $\mathcal{A}$ acima descrita é a família dos *abertos* de V, utilizada essencialmente para definir a noção de *vizinhança* e, por conseguinte, a noção de *convergência.* A Análise introduz outras maneiras de definir estes elementos: por exemplo, através da noção de *espaço métrico*, isto é, um conjunto munido de uma *distância*; de *espaço normado*, isto é, um conjunto munido de uma *norma* ; ou de *espaço pré-hilbertiano*, isto é, um conjunto munido de um *produto escalar.* Este último caso apresenta a vantagem de permitir analogias geométricas, o que facilita a compreensão do leitor não-iniciado. Em coerência com nosso objetivo pedagógico, apresentaremos a teoria dentro do quadro mais restrito fornecido por um *espaço de Hilbert*, que nada mais é que um espaço pré-hilbertiano *completo* (Cf. abaixo).

Não recordaremos aqui as noções de Análise Real, que supomos conhecida (Cf. por exemplo, [Rudin 1974]). Lembremos sucintamente que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é *totalmente ordenado*; que *todo subconjunto de* $\mathbb{R}$ *limitado inferiormente tem um ínfimo* e, analogamente, *todo subconjunto de* $\mathbb{R}$ *limitado superiormente tem* *um supremo.* Recordemos também a propriedade seguinte de supremos e ínfimos de um subconjunto *não-vazio* $A \subset \mathbb{R}$:

$$m = \inf A \Longleftrightarrow m \leq a, \forall\, a \in A \text{ e } \forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, a(\varepsilon) \in A \text{ tal que } m \leq a(\varepsilon) < m + \varepsilon;$$

$$M = \sup A \Longleftrightarrow a \leq M, \forall\, a \in A \text{ e } \forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, a(\varepsilon) \in A \text{ tal que } M - \varepsilon < a(\varepsilon) \leq M.$$

Podemos, assim, caracterizar supremos e ínfimos utilizando *seqüências*:

$$m = \inf A \Longleftrightarrow m \leq a, \forall\, a \in A \quad \text{e} \quad \exists\ \{\, a_n \,\}_{n \,\in\, \mathbb{N}} \subset A \text{ tal que } a_n \longrightarrow m \text{ em } \mathbb{R} \quad ;$$

$$M = \sup A \Longleftrightarrow a \leq M, \forall\, a \in A \quad \text{e} \quad \text{e} \quad \exists\ \{\, a_n \,\}_{n \,\in\, \mathbb{N}} \subset A \text{ tal que } a_n \longrightarrow m \text{ em } \mathbb{R}.$$

Suporemos conhecido também que $\mathbb{R}$ é *completo*, isto é, que *toda seqüência de Cauchy de elementos de* $\mathbb{R}$ *converge.*

Tampouco relembraremos aqui a noção de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, que supomos conhecida (Cf. por exemplo, [Lang 1971]). Lembremos sucintamente que um tal espaço vetorial real V é munido de duas operações: por uma lado, uma operação interna de adição associando ao par $u \in V$ e $v \in V$ um elemento $u + v \in V$ e, por outro lado, uma operação externa de multiplicação por um escalar, associando ao par $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ um elemento $\lambda u \in V$. As duas operações são associativas, comutativas, distributivas e têm elementos neutros ($0 \in V$ para a adição, $1 \in \mathbb{R}$ para a multiplicação por escalar); em termos de adição, todo $v \in V$ tem um oposto $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$.

Tampouco relembraremos aqui as noções básicas ligadas aos espaços vetoriais, que também supomos conhecidas. Lembremos de maneira extremamente sucinta que $W \subset V$ é um subespaço vetorial se e somente se $W \neq \varnothing$ e W é estável com relação às operações de adição e multiplicação por um escalar (isto é, para todos $w_1 \in W$, $w_2 \in W$, $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda w_1 + w_2 \in W$).

Em tudo o que segue, V designa um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

4.1 Produto Escalar e Norma

Em um espaço pré-hilbertiano, a noção fundamental é a de produto escalar.

Definição 4.1.1 (produto escalar sobre V)**.** *Diremos que* $(\ \bullet\,,\ \bullet\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$ *é um produto escalar sobre* V *se e somente se, para todos* $u \in V$, $v \in V$, $w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *:*

$$\begin{aligned} (\,u, v\,) &= (\,v, u\,)\ ;\ \ (\,u, \lambda v + w\,) = \lambda(\,u, v\,) + (\,u, w\,)\ ; \\ (\,u, u\,) &\geq 0 \qquad ; \qquad (\,u, u\,) = 0 \Longrightarrow u = 0 \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Definição 4.1.2. *Sejam u e v dois elementos de V. Diremos que u e v são ortogonais se, e somente se, $(u, v) = 0$.* ■

Temos

Proposição 4.1.3. *As propriedades seguintes são equivalentes:*

(i) *u e v são ortogonais*

(ii) $(u + v, u + v) = (u, u) + (v, v)$

(iii) $(u - v, u - v) = (u, u) + (v, v)$

(iv) $(u + \lambda v, u + \lambda v) \geq (u, u), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ■

Prova. $(i) \Longrightarrow (ii)$: Temos

$$(u + v, u + v) = (u, u) + (v, v) + 2(u, v) = (u, u) + (v, v).$$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: Temos

$$2(u, v) = (u + v, u + v) - (u, u) - (v, v) = 0,$$

de modo que

$$(u - v, u - v) = (u, u) + (v, v) - 2(u, v) = (u, u) + (v, v).$$

$(iii) \Longrightarrow (iv)$: Temos

$$2(u, v) = (u, u) + (v, v) - (u - v, u - v) = 0,$$

de modo que $(u, v) = 0$. Assim, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (u + \lambda v, u + \lambda v) &= (u, u) + \lambda^2 (v, v) + 2\lambda (u, v) \\ &= (u, u) + \lambda^2 (v, v) \geq (u, u). \end{aligned}$$

$(iv) \Longrightarrow (i)$: Seja

$$f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c, \quad a = (v, v), \ b = 2(u, v), \ c = (u, u).$$

Temos $f(\lambda) \geq f(0)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que

$$2(u, v) = f'(0) = 0$$

e temos $(u, v) = 0$. ■

Proposição 4.1.4. *Seja* $(\ \bullet,\ \bullet\ )$ *um produto escalar sobre* V*. Então, para todos* $u \in V,\ v \in V$:

a) $|\ (\ u,\ v\ )\ | \leq \sqrt{\ (\ u,\ u\ )\ }\sqrt{\ (\ v,\ v\ )\ }$ *(desigualdade de Cauchy-Schwarz)*

b) $(\ u+v,\ u+v\ ) + (\ u-v,\ u-v\ ) = 2(\ (\ u,\ u\ ) + (\ v,\ v\ )\ )$ *(regra do paralelogramo)*

c) $\sqrt{\ (\ u+v,\ u+v\ )\ } \leq \sqrt{\ (\ u,\ u\ )\ } + \sqrt{\ (\ v,\ v\ )\ }$ *(desigualdade de Minkowski)*

d) $\left|\ \sqrt{\ (\ u,\ u\ )\ } - \sqrt{\ (\ v,\ v\ )\ }\ \right| \leq \sqrt{\ (\ u-v,\ u-v\ )\ }$ ■

Prova. Seja $f(\lambda) = (\ u+\lambda v,\ u+\lambda v\ )$. Temos

$$f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c, \quad a = (\ v,\ v\ ),\ \ b = 2(\ u,\ v\ ),\ \ c = (\ u,\ u\ )\ .$$

a) Como $f(\lambda) \geq 0$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} b^2 \leq 4ac \quad &\Longleftrightarrow \quad 4|\ (\ u,\ v\ )\ |^2 \leq 4(\ u,\ u\ )(\ v,\ v\ ) \\ &\Longleftrightarrow \quad |\ (\ u,\ v\ )\ | \leq \sqrt{\ (\ u,\ u\ )\ }\sqrt{\ (\ v,\ v\ )\ }\ . \end{aligned}$$

b) Temos

$$\begin{aligned} (\ u+v,\ u+v\ ) + (\ u-v,\ u-v\ ) &= f(1) + f(-1) = 2\left(a^2+b^2\right) \\ &= 2(\ (\ u,\ u\ ) + (\ v,\ v\ )\ ). \end{aligned}$$

c) A desigualdade de Cauchy-Schwarz mostra que $b \leq |\ b\ | \leq 2\sqrt{\ a\ }\sqrt{\ c\ }$. Assim,

$$(\ u+v,\ u+v\ ) = f(1) = a+b+c \leq a + 2\sqrt{\ a\ }\sqrt{\ c\ } + c = \left(\sqrt{\ a\ } + \sqrt{\ c\ }\right)^2,$$

de modo que $\sqrt{\ (\ u+v,\ u+v\ )\ } \leq \sqrt{\ (\ u,\ u\ )\ } + \sqrt{\ (\ v,\ v\ )\ }$.

d) Seja $w = v - u$. Temos, por um lado

$$\sqrt{\ (\ u,\ u\ )\ } = \sqrt{\ (\ v+(-w),\ v+(-w))\ } \leq \sqrt{\ (\ v,\ v\ )\ } + \sqrt{\ (\ w,\ w\ )\ },$$

de modo que

$$\sqrt{\ (\ u,\ u\ )\ } - \sqrt{\ (\ v,\ v\ )\ } \leq \sqrt{\ (\ w,\ w\ )\ };$$

e, por outro lado,

$$\sqrt{\ (\ v,\ v\ )\ } = \sqrt{\ (\ w+u,\ w+u)\ } \leq \sqrt{\ (\ w,\ w\ )\ } + \sqrt{\ (\ u,\ u\ )\ },$$

de modo que

$$\sqrt{\ (\ v,\ v\ )\ } - \sqrt{\ (\ u,\ u\ )\ } \leq \sqrt{\ (\ w,\ w\ )\ }.$$

Assim, $\left|\ \sqrt{\ (\ u,\ u\ )\ } - \sqrt{\ (\ v,\ v\ )\ }\ \right| \leq \sqrt{\ (\ u-v,\ u-v\ )\ }$. ■

Recordemos a noção de norma:

Definição 4.1.5 (norma sobre V)**.** *Diremos que* $\| \bullet \| : V \to \mathbb{R}$ *é uma norma sobre* V *se e somente se, para todos* $u \in V$*,* $v \in V$*,* $\lambda \in \mathbb{R}$ *:*

$$\| \lambda u\| = | \lambda| \, \| u\| \ ; \ \| u+v\| \leq \| u\| + \| v\| \ ; \ \| u\| \geq 0 \ ; \ \| u\| = 0 \implies u = 0 \ \blacksquare$$

Em um espaço pré-hilbertiano, a norma natural deriva do produto escalar:

Proposição 4.1.6. *Seja* $(\bullet , \bullet)$ *um produto escalar sobre* V*. Então* $\| u\| = \sqrt{(u, u)}$ *é uma norma sobre V.Além disto, para todos* $u \in V$*,* $v \in V$

a) $| (u, v) | \leq \| u\| \, \| v\|$ *(desigualdade de Cauchy-Schwarz)*

b) $\| u+v\|^2 + \| u-v\|^2 = 2\left(\| u\|^2 + \| v\|^2 \right)$ *(regra do paralelogramo)*

c) $| \, \| u\| - \| v\| \, | \leq \| u-v\| \ \blacksquare$

Prova. Temos

$$\| \lambda u\| = \sqrt{(\lambda u, \lambda u)} = \sqrt{\lambda^2 (u, u)} = | \lambda| \, \| u\| \, ;$$

$$\| u\| \geq 0 \ ; \ \| u\| = 0 \implies (u, u) = 0 \implies u = 0 \ ;$$

$$\| u+v\| = \sqrt{(u+v, u+v)} \leq \sqrt{(u, u)} + \sqrt{(v, v)} = \| u\| + \| v\| \ ,$$

de modo que $\| \bullet \|$ é uma norma sobre V. As desigualdades provêm da proposição 4.1.4. $\blacksquare$

4.2 Bases e Dimensão

As aplicações consideradas tratam de espaços de *dimensão infinita*. Vamos definir este conceito de maneira precisa através da noção de *base* do espaço vetorial, que é intrinsicamente ligada à noção de *dimensão finita*. Uma base é um conjunto *linearmente independente* e *gerador*:

Definição 4.2.1. *Seja* $\mathcal{S} \subset V$ *um subconjunto* não-vazio *de* V*. Uma combinação linear de elementos de* $\mathcal{S}$ *é uma soma* ***finita*** *de múltiplos dos elementos de* $\mathcal{S}$*, isto é,*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ ; \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \ \ e \ x_i \in \mathcal{S} \quad para \ i = 1, \ ..., \ n \ . \ \blacksquare$$

Definição 4.2.2. *Seja $\mathcal{S} \subset V$ um subconjunto* não-vazio *de V. Diremos que $\mathcal{S}$ é linearmente independente se e somente se a única combinação linear nula de elementos de S é formada por coeficientes nulos, isto é,*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \quad ; \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad e \; x_i \in \mathcal{S} \quad para \; i = 1, \; ..., \; n \Longrightarrow \alpha_i = 0, \; i = 1, \; ..., \; n. \; \blacksquare$$

Definição 4.2.3. *Seja $\mathcal{S} \subset V$ um subconjunto* não-vazio *de V. O subespaço $[\ \mathcal{S}\ ]$ gerado por $\mathcal{S}$ é o conjunto das combinações lineares de elementos de $\mathcal{S}$, isto é,*

$$[\ \mathcal{S}\ ] = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad : \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad e \; x_i \in \mathcal{S} \quad para \; i = 1, \; ..., \; n \right\}. \; \blacksquare$$

Temos

Proposição 4.2.4. *$[\ \mathcal{S}\ ]$ é um subespaço vetorial.* $\blacksquare$

Prova. $[\ \mathcal{S}\ ]$ é não-vazio, pois $0 \in [\ \mathcal{S}\ ]$: $\mathcal{S}$ é não-vazio, logo existe $x \in \mathcal{S}$. O elemento tomar $0 = 0x \in [\ \mathcal{S}\ ]$. Se

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in [\ \mathcal{S}\ ], \quad y = \sum_{i=1}^{m} \beta_i y_i \in [\ \mathcal{S}\ ]$$

e $\lambda \in \mathbb{R}$ então

$$\lambda x + y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_i)\, x_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i y_i \in [\ \mathcal{S}\ ],$$

o que completa a prova. $\blacksquare$

Definição 4.2.5. *Seja $\mathcal{S} \subset V$ um subconjunto* não-vazio *de V. Diremos que $\mathcal{S}$ é gerador se e somente se $[\ \mathcal{S}\ ] = V$.* $\blacksquare$

Definição 4.2.6. *Seja $\mathcal{S} \subset V$ um subconjunto* não-vazio *de V. Diremos que $\mathcal{S}$ é uma base se e somente se $\mathcal{S}$ é gerador e linearmente independente.* $\blacksquare$

Temos

Teorema 4.2.7. *Todo espaço vetorial que tenha um elemento diferente de* 0 *tem uma base.* ■

Prova. Seja $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(V)$ o conjunto das partes linearmente independentes de V. Como existe $x \in V$ tal que $x \neq 0$, $S = \{ x \} \in \mathcal{L}$, de modo que $\mathcal{L} \neq \varnothing$. Além disto, $(\mathcal{L}, \subset)$ é parcialmente ordenado.

Seja $\mathcal{C} = \{ L_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ uma cadeia de $\mathcal{L}$. Então $\mathcal{S} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$ é um majorante de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{L}$: com efeito,

- $L_\lambda \subset \mathcal{S}$, para todo $\lambda \in \Lambda$;
- $\mathcal{S}$ é linearmente independente: seja $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in \mathcal{S}$ tal que $y = 0$. Para todo $i = 1, ..., n$, existe um $\lambda_i \in \Lambda$ tal que $x_i \in L_{\lambda_i}$. O conjunto $L = \{ L_{\lambda_1}, ..., L_{\lambda_n} \} \subset \mathcal{L}$ é uma subcadeia finita, logo trata-se de uma cadeia. Da proposição 3.2.13, L tem um máximo $C \in L$. temos então $L_{\lambda_i} \subset C$ para todo $i = 1, ..., n$, de modo que $x_i \in C$ para todo $i = 1, ..., n$. Temos então $x \in C$. Como $C \in L \subset \mathcal{L}$, C é linearmente independente, de modo que $y = 0 \Longrightarrow \alpha_i = 0$, $i = 1, ..., n$.
- Assim, o Lema de Zorn mostra que $\mathcal{L}$ tem um elemento maximal M.
- M tem pelo menos um elemento diferente de 0, pois $S = \{ x \} \in \mathcal{L}$, de modo que $\{ x \} \subset M$.
- Como $M \in \mathcal{L}$, M é linearmente independente. Suponhamos que $[M] \neq V$. Então existe $v \in V$ tal que $v \notin [M]$. Seja $N = M \cup \{ v \}$. Seja $z \in M$ e $u = z + \beta v = 0$. Se $\beta \neq 0$ então
$$v = -\frac{1}{\beta} z \in [M] ,$$
de modo que $v \in [M]$ e $v \notin [M]$, o que é absurdo. Logo, $\beta = 0$, o que implica que $z = 0$. Assim,
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}_{= z \in [M]} + \beta v = 0 \ \ ; \ \ \beta \in \mathbb{R} \ \ , \ \ \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ e } x_i \in C \text{ para } i = 1, \ldots, n,$$
o que implica $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ e $\beta = 0$.
Como C é linearmente independente, temos
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \beta v = 0 \ \ ; \ \ \beta \in \mathbb{R} \ \ , \ \ \alpha_i \in \mathbb{R} \ \text{ e } x_i \in C \quad \text{para } i = 1, \ldots, n,$$
o que implica $\alpha_i = 0$, $i = 1, ..., n$ e $\beta = 0$, de modo que N é linearmente independente. Assim, $N \in \mathcal{L}$. Como M é maximal, temos $N \subset M$, de modo que $v \in M$. Mas, então ,$v \in [M]$, o que contradiz $v \notin [M]$.

- Resulta que $[\ M\ ] = V$, de modo que V é uma base.

■

Temos também o resultado clássico seguintes:

Teorema 4.2.8 (base incompleta)**.** *Seja V um espaço vetorial que tenha um elemento diferente de* 0 *e $\mathcal{S} \subset V$ um subconjunto linearmente indepente e* não-vazio. *Então existe B tal que B é uma base de V e $S \subset B$.* ■

prova do teorema da base incompleta:. A prova é inteiramente análoga à prova do Teorema 4.2.7: basta considerar $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(V)$ como sendo o conjunto das partes linearmente independentes de V e que contém S, isto é, $\mathcal{L} = \{\ A \subset V : S \subset A\ \}$. $\mathcal{L} \neq \varnothing$, pois $S \in \mathcal{L}$. Além disto, $(\ \mathcal{L},\ \subset\ )$ é parcialmente ordenado (mesma demonstração que no Teorema 4.2.7). Decorre do Lema de Zorn que $\mathcal{L}$ tem um elemento maximal M. Dado que $M \in \mathcal{L}$, M é linearmente independente e $S \subset M$. Se existe $v \in V$ tal que $v \notin [\ M\ ]$, podemos considerar $N = M \cup \{\ v\ \}$: N é linearmente independente (mesma demonstração que no Teorema 4.2.7) e $S \subset N$, de forma que $N \in \mathcal{L}$. Como M é maximal, temos $N \subset M$, o que contradiz $v \notin [\ M\ ]$.
■

Definição 4.2.9. *Seja $\mathcal{B} \subset V$ uma base de V. Se $\mathcal{B}$ é finito e tem exatamente n elementos distintos, então diremos que V é de dimensão finita n e escreveremos* $\dim V = n < \infty$. *No caso contrário, diremos que V é de dimensão infinita e escreveremos* $\dim V = \infty$. ■

Proposição 4.2.10. *Seja V um espaço vetorial que tenha um elemento diferente de* 0 *tal que* $\dim V = n < \infty$. *Seja $S = \{\ x_1,\ ...,\ x_n\}$ um conjunto linearmente independente de exatamente n elementos de V. Então S é uma base de V.* ■

Prova. Decorre do teorema da base incompleta (Teorema 4.2.8) que existe uma base B tal que $S \subset B$. Suponhamos $B \neq S$. Então existe $b \in B$ tal que $b \notin S$. Como $\dim V = n < \infty$, B tem exatamente n elementos distintos, de forma que b coincide com um dos n elementos distintos $\{\ x_1,\ ...,\ x_n\}$, isto é, $b \in S$. Assim, $b \in S$ e $b \notin S$, o que é absurdo. Logo, $B = S$ e S é uma base de V. ■

Definição 4.2.11. *Seja $\mathcal{B} \subset V$ uma base de V. Diremos que $\mathcal{B}$ é ortonormal se e somente se*

$$\forall\ u,\ v \in \mathcal{B} : \|\ u\| = \|\ v\| = 1 \quad e \quad (\ u,\ v\ ) = 0 \text{ se } u \neq v. ■$$

Temos:

Proposição 4.2.12. *Seja V um espaço vetorial que tenha um elemento diferente de 0 tal que $\dim V = n < \infty$. Seja $S = \{ x_1, ..., x_n\}$ um conjunto ortonormal de exatamente n elementos de V. Então S é uma base de V.* ■

Prova. Segundo a proposição 4.2.10, basta mostrar que S é linearmente independente. Como

$$(x_j, x_j) = 1 \;\text{ e }\; (x_i, x_j) = 0, \text{ se } i \neq j,$$

temos, para $1 \leq j \leq n$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, x_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, x_j) = \alpha_j,$$

de forma que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \Longrightarrow \alpha_j = 0, \, i = 1, \; ..., \; n$$

e temos o resultado enunciado . ■

Corolário 4.2.13. *Seja V tal que $\dim V = n < \infty$. Sejam $S = \{ x_1, ..., x_n\}$ uma base de V e $E = \{ e_1, ..., e_n\}$ dada por*

$$e_i = \frac{y_i}{\| \, y_i \, \|}$$

onde :

$$y_1 = x_1 \; ; \; y_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\; x_i, \, e_j \;) \, e_j \quad \textit{para } 2 \leq i \leq n \; .$$

Lema 4.2.14. *Então E é uma base ortonormal de V.*■

Prova. Segundo a proposição 4.2.12, basta mostrar que E é ortonormal, isto é, que, por um lado,

$$\| \, e_i \, \| = 1, \, i = 1, \; ..., \; n$$

e, por outro lado,

$$1 \leq \; j, p \leq n \;\text{ e }\; j \neq p \Longrightarrow (\; e_p, \, e_j \;) = 0.$$

Suponhamos que $y_1 = 0$. Então podemos considerar $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_i = 0$, $i > 1$. Como S é linearmente independente, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = y_1 = 0 \implies \alpha_i = 0,\ i = 1,\ ...,\ n \implies \alpha_1 = 0,$$

de forma que $0 = \alpha_1 = 1$, o que é absurdo. Logo, $y_1 \neq 0$.

De maneira análoga, suponhamos que existe $i > 1$ tal que $y_i = 0$. Então podemos considerar $\alpha_j = -(\ x_i,\ e_j\ )$, para $j < i$; $\alpha_i = 1$ e $\alpha_j = 0$, $j > i$. Como S é linearmente independente, temos

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = y_i = 0 \implies \alpha_j = 0,\ i = 1,\ ...,\ n \implies \alpha_i = 0,$$

de forma que $0 = \alpha_i = 1$, o que é absurdo. Assim, $y_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$.

Temos então

$$\|\ e_i\ \| = \left\| \frac{y_i}{\|\ y_i\ \|} \right\| = \frac{\|\ y_i\ \|}{\|\ y_i\ \|} = 1,\ i = 1,\ ...,\ n\ .$$

Mostremos que, para $i \geq 2$

$$H_i:\ 1 \leq\ j, p \leq i\ \text{ e } j \neq p \implies (\ e_p,\ e_j\ ) = 0\ .$$

Com efeito,

$$(\ y_2,\ e_1\ ) = (\ x_2,\ e_1\ ) - (\ x_2,\ e_1\ ) \underbrace{\|\ e_1\ \|^2}_{=\,1} = 0\ ,$$

de forma que

$$(\ e_2,\ e_1\ ) = \frac{1}{\|\ y_2\ \|}(\ y_2,\ e_1\ ) = 0$$

e H_2 é verificada. Seja

$$C = \{\ i : 2 \leq i \leq n\ \text{ e } H_i \text{ não é verificada }\}$$

Suponhamos $C \neq \varnothing$: então $(C,\ \leq)$ é uma cadeia finita não-vazia e, logo, tem um mínimo $k \in C$ tal que $k \leq j$ para todo $j \in C$ (Cf. proposição 3.2.13). Como H_2 é verificada, temos $k > 2$, de modo que $i = k - 1 > 1$. Como $i < k$, $i \notin C$, de forma que H_i é verificada. Assim,

$$1 \leq\ j, p < k\ \text{ e } j \neq p \implies (\ e_p,\ e_j\ ) = 0, \tag{4.1}$$

de modo que, para $j < k$,

$$(\ y_k,\ e_j\ ) = (\ x_k,\ e_j\ ) - \sum_{p\,=\,1}^{i} (\ x_k,\ e_p\ )(\ e_j,\ e_p\ ) \ = (\ x_k,\ e_j\ ) - (\ x_k,\ e_j\ ) = 0$$

e

$$(e_k, e_j) = \frac{1}{\| y_k \|} (y_k, e_1) = 0 \ . \tag{4.2}$$

Ora, (4.1) e (4.2) mostram que

$$1 \leq \ j, p \leq k \ \text{ e } j \neq p \Longrightarrow (e_p, e_j) = 0,$$

isto é, que H_k é verificada. Assim, $k \notin C$ e $k \in C$, o que é absurdo. Logo, $C = \varnothing$ e H_i é verificada para $2 \leq i \leq n$.

Assim,

$$1 \leq \ j, p \leq n \ \text{ e } j \neq p \Longrightarrow (e_p, e_j) = 0$$

e E é ortonormal. ■

Corolário 4.2.15. *Se* $\dim V = n < \infty$ *então* V *tem uma base ortonormal.* ■

Prova. É uma conseqüência imediata do Corolário 4.2.13. ■

4.3 Conjuntos Abertos e Fechados

A noção de norma induz uma topologia, através das definições seguintes

Definição 4.3.1 (bola)**.** *A bola de centro* x *e raio* r *é o conjunto*

$$B_r (x) = \{ \ y \in V \ \mid \ \| \ y - x\| \leq r \} \quad ■$$

Definição 4.3.2 (aberto)**.** *Seja* $A \subset V$ *um conjunto. Diremos que* A *é aberto se e somente se*

$$\forall \ x \in A : \exists \ \varepsilon > 0 \ \text{ tal que } B_\varepsilon (x) \subset A \quad ■$$

Proposição 4.3.3. *As definições acima induzem uma topologia sobre* V*:*

a) $\varnothing$ *é aberto,* V *é aberto,*

b) A reunião de uma família qualquer de abertos é um aberto.

c) A intersecção de uma família finita de abertos é um aberto. ■

Prova. a) V é aberto, pois $B_\varepsilon(\ x) \subset V$ para todo $x \in V$ e $\varepsilon > 0$. $\varnothing$ é aberto: se $A \subset V$ não é aberto, então existe $x \in A$ tal que $\forall\ \varepsilon > 0\ : B_\varepsilon(\ x) \cap (\ V - A) \neq \varnothing$. Logo, se $\varnothing$ não é aberto, então $\exists\ x \in \varnothing$, o que é absurdo.

b) Seja $\{\ A_\omega\ \}_{\omega\ \in\ \Omega} \subset \mathcal{P}(\ V\ )$uma família tal que A_ω é aberto, $\forall\ \omega \in \Omega$. Seja $x \in \bigcup_{\omega\ \in\ \Omega} A_\omega$. Então existe $\alpha \in \Omega$ tal que $x \in A_\alpha$. Como A_α é aberto, $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\ x) \subset A_\alpha \subset \bigcup_{\omega\ \in\ \Omega} A_\omega$.

c) Seja $\{\ A_i\ \}_{1\ \leq\ i\ \leq\ n} \subset \mathcal{P}(\ V\ )$uma família tal que A_i é aberto, $1 \leq i \leq n$. Seja $x \in \bigcap_{1\ \leq\ i\ \leq\ n} A_i$. Como A_i é aberto, $\exists\ \varepsilon_i > 0$ tal que $B_{\varepsilon_i}(\ x) \subset A_i$. Seja $E = \{\ \varepsilon_i\colon\ 1 \leq i \leq n\}$. E é formado de números reais: E é uma cadeia finita. Assim, a proposição 3.2.13 mostra que E possui um mínimo.

Seja $\varepsilon = \min\{\ \varepsilon_i\colon\ 1 \leq i \leq n\}$. Temos $B_\varepsilon(\ x) \subset B_{\varepsilon_i}(\ x) \subset A_i$, $1 \leq i \leq n$. Logo, $B_\varepsilon(\ x) \subset \bigcap_{1\ \leq\ i\ \leq\ n} A_i$ e $\bigcap_{1\ \leq\ i\ \leq\ n} A_i$ é aberto. ■

Definição 4.3.4 (interior)**.** *Seja $S \subset V$ um conjunto. Definimos $int(\ S\ )$, o interior de S, como o maior aberto contido em S:*

$$int(\ S\ ) = \cup\{\ A\ :\ A\ \in\ P(\ S)\ \text{ e } A \text{ aberto}\} \quad \blacksquare$$

Notemos que, $\forall\ S \subset V\ :\ int(\ S\ )$ é um aberto e $int(\ S\ ) \subset S$. Temos

Lema 4.3.5. *Sejam $x \in V$, $r > 0$. Então*

$$int(\ B_r(\ x)\ ) = \{\ y \in V\ \mid\ \|\ y - x\| < r\} \quad .$$

Por conseguinte, $B_s(\ x) \subset int(\ B_r(\ x)\ )$ para todo s tal que $r > s > 0$. ■

Prova. Seja $A = \{\ y \in V\ \mid\ \|\ y - x\| < r\}$. Seja $a \in A$ e ε tal que $0 < \varepsilon < r - \|\ a - x\|$. Então

$$\|\ z - a\| \leq \varepsilon \implies \|\ z - x\| = \|\ z - a\| + \|\ a - x\| \leq \varepsilon + \|\ a - x\| < r,$$

de modo que $B_\varepsilon(\ a) \subset A$ e A é aberto. Temos então $A \subset\ int(\ B_r(\ x)\ )$.

Seja $b \in\ int(\ B_r(\ x)\ )$. Se $b = x$, então $b \in A$. Suponhamos $b \neq x$. Então existe $B \subset B_r(\ x)$, B aberto tal que $b \in B$. Como B é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\ b) \subset B \subset B_r(\ x)$. Assim,

$$z = b + \varepsilon \frac{b - x}{\|\ b - x\|} \implies z \in B_\varepsilon(\ b) \subset B \subset B_r(\ x) \implies \|\ z - x\| \leq r.$$

Ora,

$$z - x = (b - x) + \varepsilon \frac{(b - x)}{\| \, b - x \|} = (\, \| \, b - x \| + \varepsilon) \, \frac{(b - x)}{\| \, b - x \|},$$

de modo que

$$\| \, z - x \| \leq r \implies \| \, b - x \| + \varepsilon \leq r \implies \| \, b - x \| \leq r - \varepsilon < r$$

e temos $b \in A$. Assim, $int \, (\, B_r \, (\, x) \,) \subset A$.

As duas inclusões mostram que $int \, (\, B_r \, (\, x) \,) = A$. Para s tal que $r > s > 0$, temos $B_s \, (\, x) \subset \{ \, y \in V \mid \| \, y - x \| < r \}$, o que completa a prova. ■

Proposição 4.3.6. $int \, (\, S \,) = \{ \, x \in S : \exists \, \varepsilon > 0$ *tal que* $B_\varepsilon \, (\, x) \subset S \, \}$. ■

Prova. Temos $int \, (\, S \,) \subset \{ \, x \in S : \exists \, \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon \, (\, x) \subset S \, \}$. Com efeito, se $x \in int \, (\, S \,)$, então existe um aberto $A \subset S$ tal que $x \in A$. Como A é aberto, $\exists \, \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon \, (\, x) \subset A \subset S$.

Temos $\{ \, x \in S : \exists \, \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon \, (\, x) \subset S \, \} \subset int \, (\, S \,)$: se $\exists \, \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon \, (\, x) \subset S$. Logo, $x \in int \, (\, B_\varepsilon \, (\, x) \,) \subset S$. Assim, existe um aberto $A = int \, (\, B_\varepsilon \, (\, x) \,) \subset S$ tal que $x \in A$ e temos $x \in int \, (\, S \,)$. ■

Corolário 4.3.7. *S é aberto se e somente se $int \, (\, S \,) = S$.* ■

Prova. Temos $int \, (\, S \,) \subset S$. Por outro lado, como S é aberto,

$$S \in \{ \, A : A \in P \, (\, S) \text{ e } A \text{ aberto} \} \, ,$$

de modo que $S \subset int \, (\, S \,)$. ■

Definição 4.3.8 (fechado)**.** *Seja $A \subset V$ um conjunto. Diremos que A é fechado se e somente se $V - A$ é aberto.* ■

Existem conjuntos fechados:

Lema 4.3.9. *$B_r \, (\, x)$ é fechado.* ■

Prova. Temos

$$V - B_r \, (\, x) = \{ \, y \in V \mid \| \, y - x \| > r \} \quad .$$

Seja $y \in V - B_r \, (\, x)$ e ε tal que $0 < \varepsilon < \| \, y - x \| - r$. Então

$$\| \, y - z \| \leq \varepsilon \implies r + \varepsilon < \| \, y - x \| \leq \| \, y - z \| + \| \, z - x \| \leq \varepsilon + \| \, z - x \| \, ,$$

de modo que $\| \, z - x \| > r$. Assim, $B_\varepsilon \, (\, y) \subset V - B_r \, (\, x)$ e $V - B_r \, (\, x)$ é aberto. ■

Temos também:

Proposição 4.3.10. *a) $\varnothing$ é fechado, V é fechado,*

b) A intersecção de uma família qualquer de fechados é um fechado.

c) A reunião de uma família finita de fechados é um fechado. ■

Prova. a) V é aberto, de modo que $V - V = \varnothing$ é fechado. Analogamente, $\varnothing$ é aberto, de modo que $V - \varnothing = V$ é fechado.

b) Seja $\{ F_\omega \}_{\omega \in \Omega} \subset \mathcal{P}(V)$ uma família tal que F_ω é fechado, $\forall \omega \in \Omega$. Então $A_\omega = V - F_\omega$ é aberto, $\forall \omega \in \Omega$. Logo $A = \bigcup_{\omega \in \Omega} A_\omega$ é aberto. Ora, as fórmulas de Morgan mostram que , $V - \bigcap_{\omega \in \Omega} F_\omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} (V - F_\omega) = \bigcup_{\omega \in \Omega} A_\omega$. Logo, $V - \bigcap_{\omega \in \Omega} F_\omega$ é aberto.

c) Seja $\{ F_i \}_{1 \leq i \leq n} \subset \mathcal{P}(V)$ uma família tal que F_i é fechado, $1 \leq i \leq n$. Então $A_i = V - F_i$ é aberto, $1 \leq i \leq n$. Assim, $\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i$ é aberto. Ora, as fórmulas de Morgan mostram que , $V - \bigcup_{1 \leq i \leq n} F_i = \bigcap_{1 \leq i \leq n} (V - F_i) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i$. Logo, $V - \bigcup_{1 \leq i \leq n} F_i$ é aberto. ■

Definição 4.3.11 (aderência). *Seja $S \subset V$ um conjunto. Definimos $\overline{S}$, a aderência de S, como o menor fechado contendo S:*

$$\overline{S} = \cap \{ A : S \in P(A) \text{ e } A \text{ fechado} \} \quad \blacksquare$$

Proposição 4.3.12. *Seja $S \subset V$ um conjunto. Então $\overline{S}$ é fechado. Além disto, S é fechado se e somente se $S = \overline{S}$.* ■

Prova. $\overline{S}$ é a intersecção de uma família de fechados, de modo que a proposição 4.3.10 mostra que $\overline{S}$ é fechado. Se $S = \overline{S}$, então S é fechado, pois $\overline{S}$ é fechado.

Reciprocamente, se S é fechado então podemos tomar $A = S$, de modo que $\overline{S} = \cap \{ A : S \in P(A) \text{ e } A \text{ fechado} \} \subset S$. ■

Proposição 4.3.13. *$T \subset \overline{S}$ e $\overline{T} \subset \overline{S}$ para todo $T \subset S$.* ■

Prova. Seja A um fechado contendo S. Então $T \subset S \subset A$, de modo que A é um fechado contendo T. Resulta que $T \subset \cap \{ A : S \in P(A) \text{ e } A \text{ fechado} \} = \overline{S}$.

Como $\overline{S}$ é fechado, temos $\overline{T} = \cap \{ A : T \in P(A) \text{ e } A \text{ fechado} \} \subset \overline{S}$. ■

Proposição 4.3.14. $\overline{S} = \{\ x \in V\ : \forall\ \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(\ x) \cap S\ \neq \varnothing\ \}$. ■

Prova. Seja $A = \{\ x \in V : \forall\ \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(\ x) \cap S\ \neq \varnothing\ \}$.

Mostremos que $A \subset \overline{S}$: suponhamos que $\exists\, x \in A$ tal que $x \notin \overline{S}$. Então $x \in V - \overline{S}$, o qual é aberto. Assim, $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\ x) \subset V - \overline{S} \implies B_\varepsilon(\ x) \cap \overline{S}\ = \varnothing$. Como $S \subset \overline{S}$, temos $B_\varepsilon(\ x) \cap S\ = \varnothing$, de modo que $x \notin A$. Assim, $x \in A$ e $x \notin A$, o que é absurdo.

Mostremos que $\overline{S} \subset A$: basta mostrar que A é fechado. Como $A \subset \overline{S}$ e $\overline{S}$ é o menor fechado contendo A, isto implica $\overline{S} \subset A$. Assim, basta mostrar que, para todo $x \in V - A$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\ x) \subset V - A$, isto é, $\forall\ y \in B_\delta(\ x) : \exists\ \eta > 0$ tal que $B_\eta(\ y) \cap S\ = \varnothing$. Ora, se $x \in V - A$ então $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\ x) \cap S\ = \varnothing$. Seja δ tal que $0 < \delta < \varepsilon/2$ e η tal que $0 < \eta < \varepsilon/2$. Então

$$\|\ y - z\| \leq \eta \implies \|\ x - z\| \leq \|\ x - y\| + \|\ y - z\| \leq \delta + \eta \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

de modo que

$$\|\ y - z\| \leq \eta \implies z \in B_\varepsilon(\ x) \implies z \in V - S \implies B_\eta(\ y) \cap S\ = \varnothing.$$

Assim $A \subset \overline{S}$ e $\overline{S} \subset A$, de modo que $\overline{S} = A$. ■

Proposição 4.3.15. *Se S é um subespaço vetorial de V, então $\overline{S}$ é um subespaço vetorial de V.* ■

Prova. Sejam $x \in \overline{S}$, $y \in \overline{S}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostremos que $z = x + \lambda y \in \overline{S}$: basta mostrar que $\forall\ \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(\ z) \cap S\ \neq \varnothing$. Seja $\delta = \varepsilon/(\ 1 + |\ \lambda\ |\ ) > 0$: como $x \in \overline{S}$ e $y \in \overline{S}$, temos $B_\delta(\ x) \cap S\ \neq \varnothing$ e $B_\delta(\ y) \cap S\ \neq \varnothing$. Logo, existem $x_\delta \in B_\delta(\ x) \cap S$ e $y_\delta \in B_\delta(\ y) \cap S$. Como S é um subespaço vetorial, $z_\delta = x_\delta + \lambda y_\delta \in S$. Assim, por um lado,

$$\begin{aligned} \|\ z_\delta - z\| &= \|\ (\ x_\delta - x\ ) + \lambda(\ y_\delta - y\ )\| \\ &\leq \|\ x_\delta - x\ \| + |\ \lambda\ |\, \|\ y_\delta - y\ \| \leq (\ 1 + |\ \lambda\ |\ )\eta = \varepsilon\ ; \end{aligned}$$

e, por outro lado, $z_\delta \in S$. Assim, $B_\varepsilon(\ z) \cap S\ \neq \varnothing$. ■

Utilizaremos a noção seguinte:

Definição 4.3.16 (subconjunto denso)**.** *Seja $S \subset V$. Diremos que S é denso em V se e somente se $\overline{S} = V$. Assim, S é denso em V se e somente se*

$$\forall\ x \in V : \forall\ \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\ x) \cap S \neq \varnothing\ .■$$

Assim, é denso em V se e somente se

$$\forall\, x \in V : \forall\, \varepsilon > 0 : \exists s_\varepsilon \in S \quad \text{tal} \quad \text{que} \quad s_\varepsilon \in B_\varepsilon\,(\,x)\ ,$$

ou seja

$$\forall\, x \in V : \forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, s_\varepsilon \in S \ \text{ tal que } \parallel s_\varepsilon - x \parallel \le \varepsilon\ .$$

Também utilizaremos a noção seguinte:

Definição 4.3.17. *Seja $S \subset V$ um conjunto não-vazio. Diremos que S é* compacto *se e somente se toda família de abertos contendo S admite uma subfamília finita que também contém S, isto é, para toda família de abertos $\{\ A_\lambda\ \}_{\lambda\,\in\,\Lambda} \subset \mathcal{P}(V)$*

$$S \subset \bigcup_{\lambda\,\in\,\Lambda} A_\lambda \Longrightarrow \exists\ \{\ \lambda_1, ..., \lambda_n\ \} \subset \Lambda \text{ tal que } S \subset \bigcup_{i\,=\,1}^{n} A_{\lambda_i}\ .\ \blacksquare$$

Temos:

Teorema 4.3.18. *Seja $S \subset V$ um conjunto não- vazio e compacto. Então S é fechado e limitado.* $\blacksquare$

Prova. Mostremos que S é limitado: seja

$$A_k = B_k\,(\,0) = \{\ y \in V\ \mid\ \parallel y \parallel < k\,\}\,.$$

Temos $V = \bigcup_{k\,\in\,\mathbb{N}} A_k$, de modo que $S \subset \bigcup_{k\,\in\,\mathbb{N}} A_k$. Assim, existe uma subfamília finita $\{\ k_1, ..., k_n\ \} \subset \mathbb{N}$ tal que $S \subset \bigcup_{i\,=\,1}^{n} A_{k_i}$. Como $\{\ k_1, ..., k_n\ \}$ é uma cadeia finita, ela temum máximo $r = \max\{\ k_1, ..., k_n\ \}$ (proposição 3.2.13). Assim, $\bigcup_{i\,=\,1}^{n} A_{k_i} = A_r$, de modo que $S \subset A_r = B_r\,(\,0)$ e S é limitado.

Seja $v \in V$ tal que $v \notin S$. Para $s \in V$, definimos

$$r\,(s) = \frac{1}{4} \parallel s - v \parallel\ .$$

Dado que $r\,(s) = 0 \Longleftrightarrow s = v \notin S$, temos $r\,(s) > 0$ para todo $s \in S$. Seja

$$A_s = \{\ y \in V\ \mid\ \parallel y - s \parallel < r\,(s)\}\ .$$

Além disto, $S \subset \bigcup_{s\,\in\,S} A_s$, de forma que existe uma subfamília finita $\{\ s_1, ..., s_n\ \} \subset S$ tal que $S \subset \bigcup_{i\,=\,1}^{n} A_{s_i}$. Como $\{\ r\,(s_1)\,, ..., r\,(s_n)\ \}$ é uma cadeia finita, ela tem um mínimo $r = \min\{\ r(s_1), ..., r(s_n)\ \}$ (proposição 3.2.13). Consideremos $y \in S$. Temos $y \in \bigcup_{i=1}^{n} A_{s_i}$, de modo que existe i tal que $1 \leq i \leq n$ e $y \in A_{s_i}$. Ora,

$$\underbrace{\| v - s_i \|}_{= 4r(s_i)} = \| v - y + y - s_i \| \leq \| v - y \| + \underbrace{\| y - s_i \|}_{\leq r(s_i)},$$

de forma que

$$4r(s_i) \leq \| v - y \| + r(s_i) \Longrightarrow \| v - y \| \geq 3r(s_i) > r$$

e $y \notin B_r(v)$. Logo, $B_r(v) \subset V - S$: resulta que $V - S$ é aberto e, por conseguinte, que S é fechado. ■

N.B. 4.3.19. *A recíproca deste teorema é válida somente se V é um espaço de dimensão finita.* ■

Algumas das propriedades úteis dos compactos são as seguintes:

Lema 4.3.20. *Sejam $S \subset V$ um conjunto compacto não- vazio e $A \subset S$ tal que A é fechado e não-vazio. Então A é compacto.*■

Prova. Seja $\{\ A_\lambda\ \}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{P}(V)$ uma família de abertos tal que $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Como $V - A$ é aberto, $\{\ A_\lambda\ \}_{\lambda \in \Lambda} \cup (S - A)$ é uma família de abertos contendo S. Como S é compacto, existe uma subfamília finita $\mathcal{F} \subset \{\ A_\lambda\ \}_{\lambda \in \Lambda} \cup (S - A)$ que também contém S. Seja $\mathcal{G} = \mathcal{F} - (S - A)$: $\mathcal{G}$ é finita e $\mathcal{G} \subset \{\ A_\lambda\ \}_{\lambda \in \Lambda}$. Além disto, $A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B$, o que prova o resultado enunciado. ■

Lema 4.3.21. *Sejam $S \subset V$ um conjunto compacto não vazio e $\{\ F_\lambda\ \}_{\lambda \in \Lambda} \subset S$ uma família de fechados tal que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \varnothing$. Então existe uma subfamília finita que também é de intersecção vazia, isto é, existe $\{\ \lambda_1, ..., \lambda_n\ \} \subset \Lambda$ tal que $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i} = \varnothing$.* ■

Prova. Seja $A_\lambda = S - F_\lambda$. Temos, das fórmulas de Morgan, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = S - \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = S$, de forma que $\{\ A_\lambda\ \}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de abertos contendo S. Assim, existe uma subfamília finita $\{\ \lambda_1, ..., \lambda_n\ \} \subset \Lambda$ tal que $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i} = S - \bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i}$. Logo, $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i} = \varnothing$. ■

Teorema 4.3.22. *Seja $S \subset V$ um conjunto não vazio. S é compacto se e somente se toda família de fechados $\{ F_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda} \subset S$ tal que toda subfamília finita é de intersecção não-vazia (i. e., $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i} \neq \varnothing$, $\forall \{ \lambda_1, ..., \lambda_n \} \subset \Lambda$) é de intersecção não-vazia (i. e., $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \varnothing$) .* ■

Prova. ($\Longrightarrow$): Seja $\{ F_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda} \subset S$ família de fechados tal que toda subfamília finita é de intersecção não vazia. Suponhamos $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \varnothing$: decorre do Lema 4.3.21 que existe $\{ \lambda_1, ..., \lambda_n \} \subset \Lambda$ tal que $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i} = \varnothing$. Ora, trata-se de uma subfamília finita, de forma que $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i} \neq \varnothing$. Assim, $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i} = \varnothing$ e $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i} \neq \varnothing$, o que é absurdo.

($\Longleftarrow$): Seja $\{ A_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{P}(V)$ uma família de abertos tal que $S \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Suponhamos que nenhuma subfamília finita $\mathcal{F} \subset \{ A_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ contém S :

$$\forall \; \{ \lambda_1, ..., \lambda_n \} \subset \Lambda : \exists \; x \in S \; - \; \bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i} \; .$$

Neste caso, $F_\lambda = S - A_\lambda$ define uma família de fechados tal que toda subfamília finita é de intersecção não vazia (pois $x \in \bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i}$). Logo, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \varnothing$, de modo que

$$\exists \; x \in S \; - \; \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \; .$$

Assim, $S \not\subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ e $S \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, o que é absurdo. ■

Corolário 4.3.23. *Sejam $S \subset V$ um conjunto compacto não-vazio e $\{ F_k \}_{k \in \mathbb{N}} \subset S$ uma família de fechados tal que*

$$\forall \; k \in \mathbb{N} : F_{k+1} \subset F_k \quad e \quad F_k \neq \varnothing.$$

Então $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k \neq \varnothing$. ■

Prova. Notemos inicialmente que $F_p \subset F_k$ se $p \geq k$ (pois $F_p \subset F_{p-1} \subset ... \subset F_k$). Seja $\{ k_1, ..., k_n \} \subset \mathbb{N}$: trata-se de uma cadeia finita e, portanto, tem um máximo $r = \max\{ k_1, ..., k_n \}$ (proposição 3.2.13). Temos $\bigcap_{k=1}^{n} F_{k_i} = F_r$ (pois $F_r \subset F_{k_i}$). Assim, toda subfamília finita é de intersecção não-vazia (pois $F_r \neq \varnothing$) e o resultado decorre do Teorema 4.3.22. ■

4.4 Funcionais Lineares

As aplicações transformando elementos de V em números reais desempenham um papel essencial na teoria da Análise Convexa. Tais aplicações são chamadas *funcionais* e representam, por exemplo, uma energia ou um trabalho. Não desenvolveremos aqui toda a teoria de tais funções, mas somente recordaremos os elementos essenciais.

Definição 4.4.1 (funcional). *Um funcional é uma aplicação* $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$. ■

Definição 4.4.2 (continuidade). *Seja* $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *um funcional. Diremos que* J *é contínuo se e somente se*

$$\forall\ x \in V : \forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ \delta\,(x, \varepsilon) > 0 \ \ \textit{tal que}\ y \in B_\delta\,(\ x) \Longrightarrow |\ J\,(x) - J\,(y)| \leq \varepsilon. \ ■$$

Assim, $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínuo se e somente se

$$\forall\ x \in V : \forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ \delta\,(x, \varepsilon) > 0 \ \text{ tal que }\ \|\ x - y\| \leq \delta\,(x, \varepsilon) \Longrightarrow |\ J\,(x) - J\,(y)| \leq \varepsilon.$$

Esta definição não é de uma grande utilidade prática. Em geral, utilizam-se critérios de continuidade para verificar se uma aplicação é contínua. Por exemplo

Proposição 4.4.3. *Seja* $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *um funcional Lipschitziano, isto é, tal que existe uma constante* $K \in \mathbb{R}$*, independente de* x *e* y*, tal que*

$$|\ J\,(x) - J\,(y)| \leq K\,\|\ x - y\|\,,\ \forall\ x \in V, \quad y \in V.$$

Então J *é contínuo.* ■

Prova. Basta tomar $\delta\,(x, \varepsilon) = \varepsilon / K$. ■

Proposição 4.4.4. *Seja* $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *um funcional. Então as afirmações seguintes são equivalentes:*

(i) J *é contínuo*

(ii) *a pré-imagem de todo aberto é aberta.*

(iii) *a pré-imagem de todo fechado é fechada*

(iv) $J\left(\overline{S}\right) \subset \overline{J\,(S)}$ *para todo* $S \subset V$. ■

Prova. $((i) \Longrightarrow (ii))$: Seja $A \subset \mathbb{R}$ aberto e $x \in J^{-1}(A)$. Então $J(x) = a \in A$. Como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$| \ a - s| \leq \varepsilon \Longrightarrow s \in A.$$

Como J é contínua, existe $\delta(x, \varepsilon) > 0$ tal que

$$\| \ x - y\| \leq \delta(x, \varepsilon) \Longrightarrow | \ a - J(y)| \leq \varepsilon \Longrightarrow J(y) \in A.$$

Assim,

$$\| \ x - y\| \leq \delta(x, \varepsilon) \Longrightarrow y \in J^{-1}(A)$$

e $J^{-1}(A)$ é aberto.

$((ii) \Longrightarrow (iii))$: Seja $A \subset \mathbb{R}$ fechado. Então $\mathbb{R} - A$ é aberto e, por conseguinte, $J^{-1}(\mathbb{R} - A)$ é aberto. Ora,

$$\begin{aligned} x \in V - J^{-1}(-A) \Longleftrightarrow x \notin J^{-1}(-A) \Longleftrightarrow J(x) \notin -A &\Longleftrightarrow J(x) \in A \\ &\Longleftrightarrow x \in J^{-1}(A), \end{aligned}$$

de modo que $V - J^{-1}(-A) = J^{-1}(A)$. Assim, $J^{-1}(A)$ é o complementar de um aberto, logo, $J^{-1}(A)$ é fechado.

$((iii) \Longrightarrow (iv))$: Notemos inicialmente que $J(S) \subset \overline{J(S)}$ e que $S \subset J^{-1}(J(S))$, de modo que $S \subset J^{-1}(J(S)) \subset J^{-1}\left(\overline{J(S)}\right)$. Como $\overline{J(S)}$ é fechado, $J^{-1}\left(\overline{J(S)}\right)$ é também fechado e temos $\overline{S} \subset J^{-1}\left(\overline{J(S)}\right)$, pois $\overline{S}$ é o menor fechado contendo S. Mas então $\overline{S}$ está contido na pré-imagem de $\overline{J(S)}$, de modo que $J\left(\overline{S}\right) \subset \overline{J(S)}$.

$((iv) \Longrightarrow (i))$: Sejam $x \in V$, $a = J(x)$, $\varepsilon > 0$. O conjunto de números reais

$$A(\varepsilon) = \{ \ s \in \mathbb{R} \ | \ | \ s - a \ | < \varepsilon \}$$

é aberto, de modo que $\mathbb{R} - A(\varepsilon)$ é fechado. Temos então

$$J\left(\overline{J^{-1}(\mathbb{R} - A(\varepsilon))}\right) \subset \overline{J\left(J^{-1}(\mathbb{R} - A(\varepsilon))\right)} = \overline{\mathbb{R} - A(\varepsilon)} = \mathbb{R} - A(\varepsilon).$$

Assim, $\overline{J^{-1}(\mathbb{R} - A(\varepsilon))} \subset J^{-1}(\mathbb{R} - A(\varepsilon))$, de modo que $J^{-1}(\mathbb{R} - A(\varepsilon))$ é fechado. Resulta que $V - J^{-1}(\mathbb{R} - A(\varepsilon)) = J^{-1}(A(\varepsilon))$ é aberto. Como $x \in J^{-1}(A(\varepsilon))$, existe $\delta(x, \varepsilon) > 0$ tal que $B_{\delta(x,\varepsilon)}(\ x) \subset J^{-1}(A(\varepsilon))$, isto é:

$$\| \ x - y\| \leq \delta(x, \varepsilon) \Longrightarrow y \in J^{-1}(A(\varepsilon)) \Longrightarrow | \ a - J(y)| < \varepsilon \Longrightarrow | \ a - J(y)| \leq \varepsilon.$$

e J é contínuo. ■

Um dos casos particulares mais úteis é o dos *funcionais lineares*. Lembremos que

Definição 4.4.5. *Seja $\ell : V \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional. ℓ é linear se e somente se*

$$\ell(\alpha x + y) = \alpha \ell(x) + \ell(y) \ \ , \ \ \forall \ x \in V, \ \ y \in V, \ \alpha \in \mathbb{R}. \ ■$$

Para todo funcional ℓ linear, temos $\ell(0) = \ell(0+0) = \ell(0) + \ell(0)$, de modo que $\ell(0) = 0$. Esta propriedade é freqüentemente utilizada. Por exemplo, para o resultado seguinte:

Teorema 4.4.6. *Seja $\ell : V \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear. Então ℓ é contínuo se e somente se*

$$\exists\ M \in \mathbb{R} \text{ tal que } |\ \ell(x)\ | \leq M \|\ x\|,\ \forall\ x \in V. \ \blacksquare$$

Prova. ($\Longrightarrow$) Como ℓ é contínuo:

$$\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ \delta(\varepsilon) > 0 \ \text{ tal que } \|\ x - 0\| \leq \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |\ \ell(x) - \ell(0)\ | \leq \varepsilon,$$

isto é,

$$\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ \delta(\varepsilon) > 0 \ \text{ tal que } \|\ s\| \leq \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |\ \ell(s)| \leq \varepsilon. \tag{4.3}$$

Suponhamos que

$$\forall\ M \in \mathbb{R} : \exists\ x(M) \in V \ \text{ tal que } |\ \ell(x(M))\ | > M \|\ x(M)\|. \tag{4.4}$$

Como $\ell(0) = 0$, temos $x(M) \neq 0$, de modo que $\|\ x(M)\| > 0$. Assim,

$$u(M) = \frac{x(M)}{M \|\ x(M)\|}$$

verifica

$$\|\ u(M)\| = \frac{1}{M} \quad \text{e} \quad |\ \ell(u(M))\ | = \frac{|\ \ell(x(M))\ |}{M \|\ x(M)\|} > 1. \tag{4.5}$$

Ora, para todo $M > \dfrac{1}{\delta(\varepsilon)}$, temos $\dfrac{1}{M} < \delta(\varepsilon)$, de modo que $\|\ u(M)\| < \delta(\varepsilon)$ e a Eq. (4.3) (combinada à Eq. (4.5)) implica que

$$1 < |\ \ell(u(M))| \leq \varepsilon.$$

Resulta que $1 \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, o que é absurdo. Assim, a Eq. (4.4) implica uma contradição e temos o resultado enunciado.

($\Longrightarrow$) Como ℓ é linear, temos

$$|\ \ell(x) - \ell(y)\ | = |\ \ell(x-y)\ | \leq M \|\ x - y\|,\ \forall\ x \in V, \quad y \in V$$

e o resultado segue da proposição 4.4.3. $\blacksquare$

Este teorema sugere a seguinte definição:

Definição 4.4.7. *O dual topológico de V é*

$$V' = \{\ \ell : V \longrightarrow \mathbb{R} : \ell \text{ é linear e contínuo.}\}$$

A norma de um elemento de V' é

$$\|\ \ell\ \| = \sup\{\ |\ \ell(u)\ | \ :\ \|\ u\ \| \leq 1\}. \ \blacksquare$$

Notemos que esta definição nos fornece de fato uma norma: Temos:

- $\| \ell \| \geq 0$
- Se $\| \ell \| = 0$ então $\ell(u) = 0$, $\forall\ u$ tal que $\| u \| \leq 1$. Ora, para todo $x \neq 0$, $u = x/ \| x \|$ verifica $\| u \| = 1$, de modo que

$$\ell(x) = \| x \| \ell(u) = 0 \ .$$

  Como $\ell(0) = 0$, temos $\ell(x) = 0$, $\forall\ x \in V$, de modo que $\ell = 0$.

- $\|\lambda\ \ell \| = \sup\{ \ |\ \lambda\ell(u)\ | \ : \ \| u \| \leq 1\} = |\ \lambda\ | \sup\{ \ |\ \ell(u)\ | \ : \ \| u \| \leq 1\} = |\ \lambda\ | \| \ell \|$
- $\| \ell_1 + \ell_2 \| = \sup\{ \ |\ \ell_1(u) + \ \ell_1(u)\ | \ : \ \| u \| \leq 1\}$. Como $|\ \ell_1(u) + \ \ell_1(u)\ | \leq \| \ell_1 \| + \| \ell_2 \|$ para todo u tal que $\| u \| \leq 1$, temos $\| \ell_1 + \ell_2 \| \leq \| \ell_1 \| + \| \ell_2 \|$.

Temos

Corolário 4.4.8. *Seja $\ell : V \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear. Então $\ell \in V'$ se e somente se $\| \ell \| < \infty$ (i. e., $\| \ell \| \in \mathbb{R}$) . Neste caso, $|\ \ell(x)\ | \leq \| \ell \| \| x \|$, para todo $x \in V$.* ■

Prova. Para a equivalência, basta constatar que $\| \ell \| < \infty$ se e somente se $\exists\ M \in \mathbb{R}$ tal que $|\ \ell(x)\ | \leq M \| x\|$, $\forall\ x \in V$.

$(\Longrightarrow)$: Se $\| \ell \| < \infty$, consideramos $M = \| \ell \|$. Para todo $x \neq 0$, $u = x/ \| x\|$ verifica $\| u \| = 1$, de modo que $|\ \ell(u)\ | \leq M$. Assim, para todo $x \neq 0$:

$$\frac{|\ \ell(x)\ |}{\| x\|} = \left|\ \ell\left(\frac{x}{\| x\|}\right)\ \right| = |\ \ell(u)\ | \leq M \Longrightarrow |\ \ell(x)\ | \leq M \| x\| \, .$$

Para $x = 0$, temos $\ell(0) = 0$, de modo que $|\ \ell(x)\ | \leq M \| x\|$, $\forall\ x \in V$.

$(\Longleftarrow)$: Se $|\ \ell(x)\ | \leq M \| x\|$, $\forall\ x \in V$ então $|\ \ell(u)\ | \leq M$, $\forall\ u$ tal que $\| u \| \leq 1$. Logo

$$\sup\{ \ |\ \ell(u)\ | \ : \ \| u \| \leq 1\} \leq M \Longrightarrow \| \ell \| \leq M < \infty.$$

Se $\| \ell \| < \infty$ a prova dada para $(\Longrightarrow)$ mostra que $|\ \ell(x)\ | \leq \| \ell \| \| x\|$, $\forall\ x \in V$. ■

Podemos caracterizar a norma de um funcional linear de várias maneiras:

Proposição 4.4.9. *Temos*

(i) $\| \ell \| = \sup\{ \ \ell(u) \ : \ \| u \| \leq 1\}$

(ii) $\| \ell \| = \sup \{ \ell(u) : \| u \| = 1\}$

(iii) $\| \ell \| = \sup \{| \ell(u) | : \| u \| = 1\}$

(iv) $\| \ell \| = \sup \left\{ \dfrac{| \ell(u) |}{\| u \|} : u \neq 0 \right\}$

(v) $\| \ell \| = \sup \left\{ \dfrac{\ell(u)}{\| u \|} : u \neq 0 \right\}$ ■

Prova. (i) : Seja $M_1 = \sup \{ \ell(u) : \| u \| \leq 1\}$. Como $\ell(u) \leq | \ell(u) |$, temos

$M_1 \leq \| \ell \|$. Por outro lado, seja v tal que $\| v \| \leq 1$. Como ℓ é linear, temos $\ell(-v) = - \ell(v)$. Assim, $| \ell(v) | = \max \{ \ell(-v), \ell(v)\} \leq M_1$. Logo $\| \ell \| \leq M_1$. Assim, $M_1 \leq \| \ell \|$ e $\| \ell \| \leq M_1$, de modo que $\| \ell \| = M_1$.

(ii) : Seja $M_2 = \sup \{ \ell(u) : \| u \| = 1\}$. É imediato que $M_2 \leq M_1$, de modo que $M_2 \leq \| \ell \|$. Por outro lado, seja v tal que $\| v \| \leq 1$. Se $v = 0$ então $\ell(v) = 0 \leq M_2$. Se $v \neq 0$ então $u = \dfrac{v}{\| v \|}$ verifica $\| u \| = 1$, de modo que

$$\frac{\ell(v)}{\| v \|} = \ell \left(\frac{v}{\| v \|} \right) \leq M_2 \Longrightarrow \ell(v) \leq M_2 \| v \| \leq M_2.$$

Assim, $\ell(v) \leq M_2$ para todo v tal que $\| v \| \leq 1$. Logo $\| \ell \| \leq M_2$ e temos ainda $\| \ell \| = M_2$.

(iii) : Seja $M_3 = \sup \{ | \ell(u) | : \| u \| = 1\}$. É imediato que $M_3 \leq \| \ell \|$. Como $\ell(u) \leq | \ell(u) |$, temos $M_2 \leq M_3$, de modo que $\| \ell \| \leq M_3$ e temos ainda $\| \ell \| = M_3$.

(iv) : Seja $M_4 = \sup \left\{ \dfrac{| \ell(u) |}{\| u \|} : u \neq 0 \right\}$. É imediato que $M_3 \leq M_4$, de modo que $\| \ell \| \leq M_4$. Por outro lado, $| \ell(u) | \leq \| \ell \| \| u \|$, para todo $u \in V$ (Corolário 4.4.8), de modo que $M_4 \leq \| \ell \|$. Assim temos $\| \ell \| = M_4$.

(v) : Seja $M_5 = \sup \left\{ \dfrac{\ell(u)}{\| u \|} : u \neq 0 \right\}$. Como $\ell(u) \leq | \ell(u) |$, temos $M_5 \leq M_4$, de onde $M_5 \leq \| \ell \|$. Por outro lado, seja v tal que $v \neq 0$. Como ℓ é linear, temos $\ell(-v) = - \ell(v)$. Assim, dado que $\| -v \| = \| -v \|$, temos

$$\frac{| \ell(v) |}{\| v \|} = \max \left\{ \frac{\ell(-v)}{\| -v \|}, \frac{\ell(v)}{\| v \|} \right\} \leq M_5.$$

Logo $\| \ell \| \leq M_5$, de forma que $\| \ell \| = M_5$. ■

Corolário 4.4.10. *Seja* $u \in V$ *e* $\ell : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $\ell(x) = (\ u,\ x\ )$. *Então* $\ell \in V'$ *e* $\|\ \ell\ \| = \|\ u\ \|$. ■

Prova. ℓ é linear, pois

$$\ell(\ \alpha x + y\ ) = (\ u,\ \alpha x + y\ ) = \alpha(\ u,\ x\ ) + (\ u,\ y\ ) = \ell(\ x\ ) + \ell(\ y\ )$$

para todos $x \in V$, $y \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Seja $K = \|\ u\ \|$. A desigualdade de Cauchy-Schwarz mostra que, para todo $x \in V$,

$$|\ \ell(\ x\ )\ | = |\ (\ u,\ x\ )\ | \leq K \|\ x\ \|$$

e ℓ é contínuo. Assim, $\ell \in V'$. Além disto, esta desigualdade mostra que

$$\|\ \ell\ \| = \sup\left\{ \frac{|\ \ell(x)\ |}{\|\ x\ \|} : x \neq 0 \right\} \leq K.$$

Ora, do Corolário 4.4.8,

$$K^2 = (\ u,\ u\ ) = \ell(u) \leq |\ \ell(u)\ | \leq \|\ \ell\ \| \|\ u\ \| = K \|\ \ell\ \|,$$

de forma que $K \leq \|\ \ell\ \|$. Assim $\|\ \ell\ \| = K = \|\ u\ \|$. ■

4.5 Seqüências

Definição 4.5.1. *Uma seqüência de elementos de* V *é uma aplicação* $x : \mathbb{N} \to V$. ■

Utilizaremos a notação x_n para $x(n)$: $\{\ x_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset V$ é a imagem é da aplicação e será também utilizado para designar a seqüência.

Definição 4.5.2 (convergência forte)**.** *Seja* $\{\ x_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset V$. *Diremos que* x_n *converge para* $x \in V$ *se e somente se* $\|\ x_n - x\| \to 0$ *quando* $n \to +\infty$, *isto é,*

$$\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ \ n(\varepsilon) \quad \textit{tal que } n \geq n(\varepsilon) \implies \|\ x_n - x\| \leq \varepsilon. \quad ■$$

Utilizaremos a notação $x_n \to x$ ou $\lim x_n = x$ para indicar que x_n converge fortemente para x e diremos que x é o limite forte da seqüência. Quando necessário, indicaremos o espaço, a norma ou o produto escalar dizendo que a convergência ocorre "em V", "segundo a norma $\|\ \bullet\|$"ou "segundo o produto escalar $(\ \bullet\ ,\ \bullet\ )$". Temos

Proposição 4.5.3. *Se* $\lim x_n = x$ *então* $\lim \| x_n\| = \| x\|$ *e* $\lim (x_n, z) = (x, z)$ *para todo* $z \in V$. *Além disto, a seqüência é limitada, isto é, existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $\| x_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. *Enfim, se* $\lim y_n = y$ *então* $\lim (x_n, y_n) = (x, y)$. ■

Prova. Temos

$$| \ \| x_n\| - \| x\| \ | \leq \| x_n - x\| \longrightarrow 0,$$

de modo que $\lim \| x_n\| = \| x\|$. Temos também (desigualdade de Cauchy-Schwarz):

$$| \ (x_n, z) - (x, z) \ | = | \ (x_n - x, z) \ | \leq \| x_n - x\| \, \| z\| \longrightarrow 0,$$

de modo que $\lim (x_n, z) = (x, z)$.

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Então existe $n(\varepsilon)$ tal que

$$n \geq n(\varepsilon) \implies \| x_n\| = \| x + x_n - x\| \leq \| x\| + \| x_n - x\| \leq \| x\| + \varepsilon.$$

Por outro lado, o conjunto de números reais $\{ \ \| x_n\| \ : \ n \leq n(\varepsilon)\}$ é uma cadeia finita e tem um elemento maximal (Cf. proposição 3.2.13). Assim, existe um número real M_1 tal que

$$n \leq n(\varepsilon) \implies \| x_n\| \leq M_1.$$

Para $M = \max\{ M_1, \ \ \| x\| + \varepsilon\}$, temos $\| x_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Enfim, se $\lim y_n = y$ então, por um lado, da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$| \ (x_n - x, y_n - y) \ | \leq \| x_n - x\| \, \| y_n - y\| \longrightarrow 0$$

e, por outro lado, $\lim (x_n - x, y) = \lim (y_n - y, x) = 0$, de modo que

$$| \ (x_n, y_n) - (x, y) \ | = | \ (x_n - x, y_n - y) + (x, y_n - y) + (x_n - x, y) \ | \longrightarrow 0.$$

■

Definição 4.5.4. *Diremos que* $\{ y_k \}_{k \in \mathbb{N}}$ *é uma subseqüência de* $\{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ *se e somente se existir uma bijeção* $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que* n *é estritamente crescente* ($n(k+1) > n(k)$) *e* $y_k = x_{n(k)}$. ■

Utilizaremos freqüentemente a propriedade seguinte:

Lema 4.5.5. *Temos* $k \geq k_0 \iff n(k) \geq n(k_0)$. *Além disto,* $n_k = n(k) \to +\infty$ *quando* $k \to +\infty$. ■

Prova. Se $k \geq k_0$ então $n(k) \geq n(k_0)$, pois n é estritamente crescente. Se $n(k) \geq n(k_0)$ e $k < k_0$ então - utilizando novamente que n é estritamente crescente - $n(k) \geq n(k_0) > n(k)$, o que é absurdo. Assim, $k \geq k_0 \Longleftrightarrow n(k) \geq n(k_0)$.

Seja $N \in \mathbb{N}$. Como $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma bijeção, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n(k_0) = N$. Como $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é estritamente crescente, temos

$$k \geq k_0 \Longrightarrow n(k) \geq n(k_0) \geq N,$$

o que prova o resultado enunciado. ■

O limite de uma seqüência é único e todas suas subseqüências convergem para esse limite:

Proposição 4.5.6. *Seja* $\{\, x_n \,\}_{n \,\in\, \mathbb{N}} \subset V$ *tal que* x_n *converge para* $x \in V$. *Então, por um lado, se* $\left\{\, y_k = x_{n(k)} \,\right\}_{k \,\in\, \mathbb{N}}$ *é uma subseqüência então* $y_k \to x$ *em* V *e, por outro lado,* x *é único.*■

Prova. Mostremos a unicidade: seja z tal que $\| \, x_n - z\| \to 0$ quando $n \to +\infty$. Então

$$\| \, x - z\| = \| \, x - x_n + x_n - z\| \leq \| \, x - x_n\| + \| \, x_n - z\| \to 0,$$

de modo que $\| \, x - z\| = 0$ e as propriedades da norma mostram que $x = z$. Seja $\left\{\, y_k = x_{n(k)} \,\right\}_{k \,\in\, \mathbb{N}}$. Como x_n converge para $x \in V$,

$$\forall \, \varepsilon > 0 : \exists \;\; m(\varepsilon) \;\; \text{tal que} \; m \geq m(\varepsilon) \;\Longrightarrow\; \| \, x_m - x\| \leq \varepsilon.$$

Logo, $n(k) \geq m(\varepsilon) \;\Longrightarrow\; \| \, y_k - x\| \leq \varepsilon$. Como n é bijetiva, existe $k(\varepsilon)$ tal que $n(k(\varepsilon)) = m(\varepsilon)$. Como n é estritamente crescente,

$$k \geq k(\varepsilon) \;\Longrightarrow\; n(k) \geq \; m(\varepsilon) \;\Longrightarrow\; \| \, y_k - x\| \leq \varepsilon$$

e temos $y_k \to x$ em V. ■

A recíproca parcial deste resultado é bastante útil:

Proposição 4.5.7. *Seja* $\{\, x_n \,\}_{n \,\in\, \mathbb{N}} \subset V$ *tal que toda subseqüência converge para um mesmo elemento* $x \in V$, *isto é, se* $\left\{\, y_k = x_{n(k)} \,\right\}_{k \,\in\, \mathbb{N}}$ *então* $y_k \longrightarrow x$ *em* V. *Então* $x_n \longrightarrow x$ *em* V. ■

Prova. Seja $\varepsilon > 0$. Suponhamos que:

$$\forall \; k \in \mathbb{N} : \exists \; n(k) \geq k \;\; \text{tal que} \;\; \left\| \, x_{n(k)} - x \right\| > \varepsilon \; .$$

Então $\{ \ y_k = x_{n(k)} \ \}_{k \ \in \ \mathbb{N}}$ é uma subseqüência de $\{ \ x_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}}$ de modo que, por hipótese, $y_k \to x$ em V e

$$0 = \lim_{k \ \to \ +\infty} \left\| x_{n(k)} - x \right\| \geq \varepsilon \implies \varepsilon \leq 0 \ .$$

Assim, $0 \leq \varepsilon < 0$, o que é absurdo. Logo,

$$\exists \ k\,(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ n \geq k\,(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \| \ x_n - x \| \leq \varepsilon$$

e temos o resultado enunciado. ■

Proposição 4.5.8. *Seja* $\{ \ x_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^p$ *uma subseqüência limitada tal que o limite de toda subseqüência convergente é um mesmo elemento* $x \in \mathbb{R}^p$. *Então,* $x_n \to x$ *em* $\mathbb{R}^p$. ■

Prova. Seja $\varepsilon > 0$. Suponhamos que:

$$\forall \ k \in \mathbb{N} : \exists \ n\,(k) \geq k \ \text{ tal que } \ \left\| \ x_{n(k)} - x \right\| > \varepsilon \ .$$

Então, $\left\{ x_{n(k)} \right\}_{k \ \in \ \mathbb{N}}$ é uma subseqüência de $\{ x_n \}_{n \ \in \ \mathbb{N}}$, de modo que $\left\{ x_{n(k)} \right\}_{k \ \in \ \mathbb{N}}$ é limitada. Assim, existe uma subseqüência convergente $\left\{ \ y_m = x_{n(k(m))} \ \right\}_{m \ \in \ \mathbb{N}}$: por hipótese, $y_m \to x$ em V e

$$0 = \lim_{m \ \to \ +\infty} \left\| x_{n(k(m))} - x \right\| \geq \varepsilon \implies \varepsilon \leq 0 \ .$$

Assim, $0 \leq \varepsilon < 0$, o que é absurdo. Logo,

$$\exists \ k\,(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ n \geq k\,(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \| \ x_n - x \| \leq \varepsilon$$

e temos o resultado enunciado. ■

No que segue, manipularemos também famílias das seguintes formas $\{ \ x_\delta \ \}_{\delta > 0}$ ou $\{ \ x_\delta \ \}_{0 < \delta < \delta_{\max}}$ para $\varepsilon \longrightarrow 0+$. Neste caso,

$$x_\delta \longrightarrow x \ \text{ se, e somente se, } \forall \ \varepsilon > 0 : \exists \ \delta\,(\varepsilon) \ \text{ tal que } 0 < \delta \leq \delta\,(\varepsilon) \Longrightarrow \| \ x_\delta - x \| \leq \varepsilon \ .$$

Também consideraremos famílias da forma $\{ \ y_\lambda \ \}_{\lambda \ > \ \lambda_{\min}}$ para $\lambda \longrightarrow +\infty$. Neste caso,

$$y_\lambda \longrightarrow y \ \text{ se e somente se } \forall \ \varepsilon > 0 : \exists \ \lambda\,(\varepsilon) \ \text{ tal que } \lambda \geq \lambda\,(\varepsilon) \Longrightarrow \| \ y_\lambda - y \| \leq \varepsilon \ .$$

Por extensão, diremos que tais famílias também são seqüências. Temos

Teorema 4.5.9. *$x_\delta \longrightarrow x$ se e somente se $x_{\delta(k)} \rightharpoonup x$ em V quando $k \longrightarrow +\infty$, para toda seqüência de números reais $\{\ \delta(k)\ \}_{k\ \in\ \mathbb{N}}$ tal que $\delta(k) \to 0+$. De maneira análoga, $y_\lambda \longrightarrow y$ se e somente se $y_{\lambda(k)} \longrightarrow y$ em V quando $k \longrightarrow +\infty$, para toda seqüência de números reais $\{\ \lambda(k)\ \}_{k\ \in\ \mathbb{N}}$ tal que $\lambda(k) \longrightarrow +\infty$.* ■

Prova. ($\Longrightarrow$): Para todo $\varepsilon > 0$, existe $k(\varepsilon)$ tal que $k \geq k(\varepsilon) \Longrightarrow \delta(k) \leq \delta(\varepsilon)$ e $\lambda(k) \geq \lambda(\varepsilon)$. Assim,

$$k \geq k(\varepsilon) \Longrightarrow \left\|\ x_{\delta(k)} - x\right\| \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \left\|\ y_{\lambda(k)} - y\right\| \leq \varepsilon\ .$$

($\Longleftarrow$): Suponhamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall\ \eta > 0 : \exists\ \alpha(\eta) \text{ tal que } 0 < \alpha(\eta) \leq \eta \text{ e } \left\|\ x_{\alpha(\eta)} - x\right\| > \varepsilon\ .$$

Seja $\delta(k) = \alpha(1/k)$. Então $\delta(k) \to 0+$, de forma que $x_{\delta(k)} \rightharpoonup x$ em V quando $k \longrightarrow +\infty$. Assim,

$$\left\|\ x_{\alpha(\eta)} - x\right\| = \left\|\ x_{\delta(k)} - x\right\| \longrightarrow 0$$

e temos $\varepsilon \leq 0$, de forma que $0 < \varepsilon \leq 0$, o que é absurdo. De maneira análoga, se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall\ \eta > 0 : \exists\ \alpha(\eta) \text{ tal que } \alpha(\eta) \geq \eta \text{ e } \left\|\ y_{\alpha(\eta)} - y\right\| > \varepsilon\ .$$

Seja $\lambda(k) = \alpha(k)$. Então $\lambda(k) \to +\infty$, de forma que $y_{\lambda(k)} \rightharpoonup y$ em V quando $k \longrightarrow +\infty$. Assim,

$$\left\|\ y_{\alpha(\eta)} - y\right\| = \left\|\ y_{\lambda(k)} - y\right\| \longrightarrow 0$$

e temos novamente $0 < \varepsilon \leq 0$, o que é absurdo. ■

4.5.1 Séries

Uma extensão da definição de seqüência leva à definição de série:

Definição 4.5.10. *A série $\sum\limits_{k\ =\ 0}^{+\ \infty} x_k$ é uma seqüência particular: consideramos a soma parcial $s_n = \sum\limits_{k\ =\ 0}^{n} x_k$ e a seqüência associada $\{\ s_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset V$. Diremos que $\sum\limits_{k\ =\ 0}^{+\ \infty} x_k$ converge para $x \in V$ se e somente se $s_n \to x$ em V.* ■

Utilizaremos a notação $x = \sum\limits_{k\ =\ 0}^{+\ \infty} x_k$ para indicar a convergência da série. Um resultado útil é o teorema da seqüência de restos:

Proposição 4.5.11 (restos). *As afirmações seguintes são equivalentes:*

a) *A série* $\sum\limits_{k\,=\,0}^{+\,\infty} x_k$ *é convergente*

b) $\forall\ n \geq 0$ *:* $r_{n,p} = \sum\limits_{k\,=\,n}^{n\,+\,p} x_k$ *converge em* V *quando* $p \to +\infty$.

c) $r_n = \sum\limits_{k\,=\,n}^{+\,\infty} x_k$ *converge para todo* $n \in \mathbb{N}$.

d) $r_n \to 0$ *em* V *quando* $n \to +\infty$. ■

Prova. ($a) \implies b)$) : Suponhamos a série convergente e sejam $x = \sum\limits_{k\,=\,0}^{+\,\infty} x_k$, $s_n = \sum\limits_{k\,=\,0}^{n} x_k$. Como a série é convergente, temos $s_n \to x$ em V quando $n \to +\infty$. Como $\{\ s_{n+p}\ \}_{p\ \in\ \mathbb{N}}$ é uma subseqüência de $\{\ s_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$, temos $s_{n+p} \to x$ quando $p \to +\infty$. Ora, $r_{n,p} = s_{n+p} - s_{n-1}$, de modo que $r_{n,p} \to x - s_{n-1}$ em V quando $p \to +\infty$.

($b) \implies c)$) : é imediato (definição de convergência).

($c) \implies d)$) : seja $r_n = \sum\limits_{k\,=\,n}^{+\,\infty} x_k$ convergente para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos inicialmente que, pour $m \geq n$ e $p \geq m - n$,

$$s_{n+p} = s_{n-1} + r_{n,p} = s_{m-1} + r_{m,\ n\ +\ p\ -\ m}\ ,$$

de modo que, passando ao limite para $p \to +\infty$:

$$s_{n-1} + r_n = s_{m-1} + r_m\ .$$

Assim, $x = s_{n-1} + r_n$ é independente de n. Como $s_{n+p} = s_{n-1} + r_{n,p}$, temos $s_{n+p} \to x$ em V quando $p \to +\infty$., o que implica $s_n \to x$ em V quando $n \to +\infty$. Temos $r_n \to 0$ em V, pois $\{\ s_{n-1}\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ é uma subseqüência de $\{\ s_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$, de modo que $\|\ r_n\| = \|\ s_{n-1} - x\| \to 0$.

($d) \implies a)$) : Basta repetir a prova de $c) \implies d)$: temos $s_n \to x$ em V quando $n \to +\infty$. ■

4.5.2 Seqüências e conjuntos densos

Outra propriedade útil ligada às seqüências é a seguinte:

Proposição 4.5.12. $\overline{S} = \Big\{\ x \in V\ :\ \exists\ \{\ x_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset S\ \ \textit{tal que}\ x_n \to x\ \textit{em}\ V \Big\}$, *isto é,* $\overline{S}$ *é o conjunto formado pelos limites das seqüências convergentes de elementos de* S. ■

Prova. Da proposição 4.3.14, temos $\overline{S} = \{ x \in V : \forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \cap S \neq \varnothing \}$. Seja $A = \left\{ x \in V : \exists \{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V \text{ tal que } x_n \to x \text{ em} V \right\}$.

Mostremos que $A \subset \overline{S}$: se $x \in A$ então existe $\{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ tal que $x_n \to x$ em$V$. Seja $\varepsilon > 0$: $\exists \ n(\varepsilon)$ tal que $n \geq n(\varepsilon) \implies \| x_n - x \| \leq \varepsilon$, de modo que $\{ x_n \} \subset B_\varepsilon(x) \cap S \neq \varnothing \implies x \in \overline{S}$.

Mostremos que $\overline{S} \subset A$: seja $x \in \overline{S}$. Então, para todo $n > 0$, $B_{1/n}(x) \cap S \neq \varnothing$, de modo que existe $x_n \in S$ tal que $\| x_n - x \| \leq 1/n \to 0$: a seqüência $\{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ satisfaz $x_n \to x$ em$V$ e $x \in A$.

Assim $A \subset \overline{S}$ e $\overline{S} \subset A$, de modo que $\overline{S} = A$. ■

Corolário 4.5.13. *Seja $S \subset V$ um conjunto. Então S é fechado se e somente se $S = \left\{ x \in V : \exists \{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset S \text{ tal que } x_n \to x \text{ em } V \right\}$, isto é, S contém todos os limites das seqüências convergentes de elementos de S.* ■

Prova. Resulta da proposição 4.3.13. ■

Corolário 4.5.14. *Seja $S \subset V$. S é denso em V se e somente se*

$$\forall x \in V : \exists \{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset S \ \text{ tal que } x_n \to x \text{ em } V \ . \blacksquare$$

Prova. Resulta da proposição 4.5.12 e da definição 4.3.16. ■

Temos também:

Teorema 4.5.15 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Seja $S \subset V$ um conjunto não-vazio. S é compacto se e somente se toda seqüência $\{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ tem uma subseqüência convergente para um elemento de S.* ■

Prova. ($\Longrightarrow$): Como S é compacto, S é também fechado (Teorema 4.3.18) e temos $\overline{S} = S$ (proposição 4.3.12).

Seja $X_k = \{ x_n \}_{n \geq k} \subset S$. Temos $\overline{X_k} \subset \overline{S}$ (proposição 4.3.13). Assim, $\overline{X_k} \subset S$. Como $X_k \subset \overline{X_k}$ (proposição 4.3.13), temos também $\overline{X_k} \neq \varnothing$. Assim, decorre do corolário 4.3.23 que $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{X_k} \neq \varnothing$.

Seja $s \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{X_k}$. Então, para todo $k > 0$, existe uma seqüência de elementos de X_k que converge para s. Decorre que:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \, x_{n(k,p)} \in X_k \ \text{ tal que } \left\| x_{n(k,p)} - s \right\| \leq \frac{1}{p}$$

Consideremos a seqüência de números naturais definida por $n\,(1) = n(1,1)$; $n\,(p+1) = n\,(n\,(p)+1, p+1)$ para $p \geq 1$. Então $n\,(p+1) \geq n\,(p)+1 > n\,(p)$, de forma que $\left\{\ x_{n(p)}\ \right\}_{p\ \in\ \mathbb{N}}$ é uma subseqüência de $\{\ x_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$. Além disto,

$$p \geq k \Longrightarrow \left\|\ x_{n(p)} - s\right\| \leq \frac{1}{p}\ \leq \frac{1}{k}\ .$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $p\,(\varepsilon)$ tal que

$$p \geq k \Longrightarrow \left\|\ x_{n(p)} - s\right\| \leq \varepsilon$$

e $x_{n(p)} \longrightarrow s$ quando $p \longrightarrow +\infty$, de onde o resultado enunciado.

($\Longleftarrow$): Seja $\{\ A_\lambda\ \}_{\lambda\ \in\ \Lambda} \subset S$ uma família de abertos tal que $S \subset \bigcup\limits_{\lambda\ \in\ \Lambda} A_\lambda$. Notemos inicialmente que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall\ x \in S : \exists\ \lambda\,(x) \in \Lambda \text{ tal que } B_\varepsilon\,(x) \subset A_{\lambda(x)}.$$

Com efeito, suponhamos o contrário: então, para todo $n > 0$, existe $x_n \in S$ tal que $B_{1/n}\,(x_n) - A_\lambda \neq \varnothing$, $\forall\ \lambda \in \Lambda$. Temos $\{\ x_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset S$, de modo que existe uma subseqüência $\left\{\ x_{n(k)}\ \right\}_{k\ \in\ \mathbb{N}}$ tal que $x_{n(k)} \longrightarrow s \in S$ quando $k \longrightarrow +\infty$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $k\,(\varepsilon)$ tal que

$$k \geq k\,(\varepsilon) \Longrightarrow \left\|\ x_{n(k)} - s\right\| \leq \varepsilon\ .$$

Ora, $s \in S \subset \bigcup\limits_{\lambda\ \in\ \Lambda} A_\lambda$, de modo que existe λ tal que $s \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe $\eta > 0$ tal que $B_\eta\,(s) \subset A_\lambda$. Sejam $\varepsilon = \dfrac{\eta}{4}$ e p tal que $\dfrac{1}{n\,(p)} \leq \dfrac{\eta}{4}$: para todo $z \in B_{1/n(p)}\left(x_{n(p)}\right)$:

$$\|\ z - s\| \leq \left\|\ z - x_{n(p)}\right\| + \left\|\ x_{n(p)} - s\right\| \leq \frac{1}{n\,(k)} + \frac{\eta}{4} \leq \frac{\eta}{2} < \eta\ .$$

Logo, $B_{1/n(p)}\left(x_{n(p)}\right) \subset B_\eta\,(s) \subset A_\lambda$, de forma que $B_{1/n(p)}\left(x_{n(p)}\right) - A_\lambda = \varnothing$, o que é absurdo.

Por outro lado, para todo $\delta > 0$, existe um conjunto finito $X\,(\delta) = \{\ x_1, ..., x_n\} \subset S$ tal que $S \subset \bigcup\limits_{i\ =\ 1}^{n} B_\delta\,(x_i)$. Com efeito, suponhamos o contrário: existe $\delta > 0$ tal que, para todo conjunto finito $\{\ x_1, ..., x_n\} \subset S : S - \bigcup\limits_{i\ =\ 1}^{n} B_\delta\,(x_i) \neq \varnothing$. Neste caso, podemos construir uma seqüência da forma seguinte: tomamos $x_0 \in S$ qualquer. Dados $\{\ x_0, x_1, ..., x_n\} \subset S$, tomamos $x_{n+1} \in S - \bigcup\limits_{i\ =\ 1}^{n} B_\delta\,(x_i)$. Temos

$$\|\ x_{n+1} -\ x_i\| > \delta,\ 1 \leq i \leq n. \tag{4.6}$$

Ora $\{\ x_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset S$, de modo que existe uma subseqüência $\left\{\ x_{n(k)}\ \right\}_{k\ \in\ \mathbb{N}}$ tal que $x_{n(k)} \longrightarrow s \in S$ quando $k \longrightarrow +\infty$. Assim, existe $k\,(\delta) > 0$ tal que

$$k \geq k\,(\delta) \Longrightarrow \left\|\ x_{n(k)} - s\right\| \leq \frac{\delta}{4}\ .$$

Logo,

$$\| x_{n(k)} - x_{n(k+1)}\| \le \| x_{n(k)} - s\| + \| x_{n(k+1)} - s\| \le \frac{\delta}{2}\,. \qquad (4.7)$$

Como $n(k+1) > n(k)$, (4.6) e (4.7) implicam que $\delta \le \delta/2$, de onde $\delta \le 0$. Assim, $0 < \delta \le 0$, o que é absurdo.

Seja $X(\varepsilon) = \{ x_1, ..., x_n\} \subset S$: temos $S \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$. Ora, existe $\lambda_i = \lambda(x_i) \in \Lambda$ tal que $B_\varepsilon(x_i) \subset A_{\lambda_i}$, de modo que $S \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}$. Assim, S é compacto (Cf. definição 4.3.17). ∎

4.5.3 Seqüências e continuidade

Temos

Proposição 4.5.16. *Seja $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Então J é contínuo se e somente se $J(x_n) \longrightarrow J(x)$ em $\mathbb{R}$ para toda seqüência tal que $x_n \to x$ em V.* ∎

Prova. ($\Longrightarrow$) Suponhamos J contínuo e $x_n \to x$. Então, por um lado, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\| x - y\| \le \delta(\varepsilon) \Longrightarrow | J(x) - J(y)| \le \varepsilon.$$

Por outro lado, existe $n(\varepsilon) = n(\delta(\varepsilon))$ tal que

$$n \ge n(\varepsilon) \implies \| x_n - x\| \le \delta(\varepsilon)\,.$$

Assim,

$$n \ge n(\varepsilon) \implies | J(x_n) - J(x)| \le \varepsilon,$$

de modo que $J(x_n) \longrightarrow J(x)$.

($\Longrightarrow$) Suponhamos J não-contínuo: então existem $x \in V$ e $\varepsilon > 0$ tais que para todo $n > 0$, existe x_n verificando

$$\| x - x_n\| \le \frac{1}{n} \ \text{ e } \ | J(x) - J(x_n)| > \varepsilon.$$

Assim, $x_n \to x$, de modo que $J(x_n) \longrightarrow J(x)$ em $\mathbb{R}$. Mas então

$$0 = \lim | J(x) - J(x_n)| \ge \varepsilon > 0,$$

o que é uma contradição. ∎

Esta caracterização dos funcionais contínuos é particularmente útil no caso dos funcionais lineares. Lembremos que o núcleo de um funcional linear é a pré-imagem de zero:

Definição 4.5.17 (núcleo de um funcional linear)**.** *Seja* $\ell : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *um funcional linear. O núcleo de* ℓ *é o conjunto*

$$N(\ell) = \{\ x \in V\ :\ \ell(x) = 0\} = \ell^{-1}(\ \{0\}\ )\ .\ \blacksquare$$

Temos então :

Proposição 4.5.18. *Seja* $\ell : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *um funcional linear. Então* ℓ *é contínuo se e somente se* $N(\ell)$ *é fechado .* $\blacksquare$

Prova. ($\Longrightarrow$) Suponhamos ℓ contínuo e $\{\ x_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset N(\ell)$ tal que $x_n \to x$ em V. Então, da proposição 4.5.16:

$$\ell(x) = \lim\ \ell(x_n) = \lim\ 0 = 0 \Longrightarrow x \in N(\ell)\,,$$

de modo que $N(\ell)$ é fechado.

($\Longleftarrow$) Suponhamos $N(\ell)$ fechado. Se ℓ não é contínuo então $\|\ \ell\| = +\infty$, de modo que

$$\sup\{\ \ell(u)\ :\ \|\ u\ \| = 1\} = +\infty.$$

Assim, existe uma seqüência $\{\ x_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset V$ tal que

$$\|\ x_n\| = 1\ \text{ e }\ \ell(x_n) \geq n^2.$$

Seja $v_n = x_n/\ell(x_n)$. Temos

$$\|\ v_n\| = \frac{1}{|\ell(x_n)|} \leq \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0\ \text{ e } \ell(v_n)\ = \frac{\ell(x_n)}{\ell(x_n)} = 1.$$

Em particular $\ell(v_1) = 1$. Seja $w_n = v_1 - v_n$. Temos

$$\ell(w_n) =\ \ell(v_1) -\ \ell(v_n) = 1 - 1 = 0,$$

de modo que $\{\ w_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset N(\ell)$. Por outro lado, $v_n \longrightarrow 0$ em $V \implies w_n \longrightarrow v_1$. Como $N(\ell)$ é fechado, temos $v_1 \in N(\ell)$, de modo que $\ell(v_1) = 0$. Logo, $\ell(v_1) = 1$ e $\ell(v_1) = 0$, o que é absurdo. $\blacksquare$

4.5.4 Seqüências de Cauchy

A definição de seqüência convergente é pouco operacional, pois exige que o limite x seja conhecido.

Definição 4.5.19 (seqüência de Cauchy). *Diremos que* $\{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ *é de Cauchy se e somente se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists \;\; n(\varepsilon) \;\; \textit{tal que}\; m, n \geq n(\varepsilon) \implies \| x_m - x_n \| \leq \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Algumas das propriedades notáveis das seqüências de Cauchy são as seguintes:

Proposição 4.5.20. *Seja* $\{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ *uma seqüência de Cauchy. Então*

(i) *a seqüência é limitada, isto é, existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $\| x_n \| \leq M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim \| x_n \| = \mu \in \mathbb{R}$

(iii) *Se* $T : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *é linear e contínua então* $\lim T(x_n) = s(T) \in \mathbb{R}$. *Além disto, se* $|\, s(T) \,| \leq \mu \| T \|$, $\forall\, x \in V$.

(iv) $\lim (x_n, z) = \ell(z) \in \mathbb{R}$ *para todo* $z \in V$. *Além disto, a aplicação* $\ell : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *é linear e Lipschitziana de coeficiente* μ, *isto é,* $|\, \ell(z_1 - z_2) | \leq \mu \| z_1 - z_2 \|$ *para todos* $z_1 \in V$, $z_2 \in V$ *(logo,* $\ell : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua e* $\| \ell \| \leq \mu$ *).*

(v) *se* $\{ y_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ *é uma seqüência de Cauchy então* $\lim (x_n, y_n) = \eta \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

Prova. (i) e (ii) : A seqüência $\{ \| x_n \| \}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy, pois

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists \;\; n(\varepsilon) \;\; \text{tal que}\; m, n \geq n(\varepsilon) \implies \| x_m - x_n \| \leq \varepsilon,$$

de modo que

$$|\; \| x_m \| - \| x_n \| \;| \leq \| x_m - x_n \| \leq \varepsilon.$$

Como $\mathbb{R}$ é completo, $\{ \| x_n \| \}_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, de modo que, por uma lado, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\lim \| x_n \| = \mu$ e, por outro lado, $\{ \| x_n \| \}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada (Cf. proposição 4.5.3) e existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\| x_n \| \leq M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(iii) : Seja $s_n = T(x_n) \in \mathbb{R}$. Seja $K = \| T \|$. Como T é linear e contínua, o Teorema 4.4.8 mostra que $K \in \mathbb{R}$ e

$$|\, T(x) \,| \leq K \| x \|, \forall\, x \in V.$$

Então

$$| \ s_m - \ s_n \ | = | \ T \ (\ x_m) - T \ (\ x_n) \ \ | = | \ T \ (\ x_m - x_n) \ \ | \leq K \, \| \ x_m - x_n \| \, .$$

Assim, $\{ \ s_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy, pois, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\eta \, (\varepsilon, K) > 0$ tal que $K\eta \, (\varepsilon, K) \leq \varepsilon$ e, para $m, n \geq n \, (\eta \, (\varepsilon, K))$,

$$| \ s_m - \ s_n \ | \leq K \, \| \ x_m - x_n \| \leq K\eta \, (\varepsilon, K) \leq \varepsilon.$$

Como $\mathbb{R}$ é completo, $\{ \ s_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}}$ é convergente, de modo que existe $s \, (\ T \ ) \in \mathbb{R}$ tal que $\lim T \, (\ x_n \ ) = s \, (\ T \ )$. Temos então

$$| \ s \, (\ T \ ) \ \ | = | \ \ \lim T \, (\ x_n \ ) \ \ | = \lim | \ T \, (\ x_n \ ) \ \ | \leq \lim K \, \| \ x_n \| = K\mu.$$

(iv) : De maneira análoga, $\{ \ \ (\ x_n, \ z \ ) \ \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy, pois, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\eta \, (\varepsilon, z) > 0$ tal que $\eta \, (\varepsilon, z) \, \| \ z \| \leq \varepsilon$. Assim, para $m, n \geq n \, (\eta \, (\varepsilon, z))$,

$$| \ \ (\ x_m, \ z \ ) - (\ x_n, \ z \ ) \ \ | = | \ \ (\ x_m - x_n, \ z \ ) \ \ | \leq \| \ x_m - x_n \| \, \| \ z \| \leq \eta \, (\varepsilon, z) \, \| \ z \| \leq \varepsilon.$$

Como $\mathbb{R}$ é completo, $\{ \ \ (\ x_n, \ z \ ) \ \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}}$ é convergente, de modo que existe $\ell \, (\ z \ ) \in \mathbb{R}$ tal que $\lim (\ x_n, \ z \ ) = \ell \, (\ z \ )$. $\ell : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é linear, pois, para todos $\alpha \in \mathbb{R}$, $z_1 \in V$, $z_2 \in V$,

$$(\ x_n, \ \alpha z_1 + z_2 \ ) = \alpha \, (\ x_n, \ z_1 \ ) + (\ x_n, \ z_2 \ ) \, ,$$

de modo que

$$\ell \, (\alpha z_1 + z_2) = \lim \, (x_n, \ \alpha z_1 + z_2) = \alpha \lim \, (x_n, \ z_1) + \lim \, (x_n, \ z_2) = \alpha \ell \, (z_1) + \ell \, (z_2) \, .$$

Além disto, para todos $z_1 \in V$, $z_2 \in V$,

$$| \ \ (\ x_n, \ z_1 - z_2 \ ) \ \ | \leq \| \ x_n \| \, \| \ z_1 - z_2 \| \, ,$$

de modo que, passando ao limite,

$$| \ \ell \, (\ z_1 - z_2 \ )| \leq \mu \, \| \ z_1 - z_2 \| \, .$$

Temos então $| \ \ell \, (\ z \ )| \leq \mu \, \| \ z \|$, de modo que $\| \ \ell \ \| \leq \mu$

(v) : Como $\{ \ y_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}} \subset V$ é uma seqüência de Cauchy, existe uma constante $N \in \mathbb{R}$ tal que $\|y_n\| \leq N$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$|(x_m, \ y_m) - (x_n, \ y_n)| = |(x_m - x_n, \ y_m - y_n) + (x_n, \ y_m - y_n) + (x_m - x_n, \ y_n)| \ \ ,$$

de modo que

$$|(x_m, \ y_m) - (x_n, \ y_n)| \leq \|x_m - x_n\| \, \|y_m - y_n\| + M \, \|y_m - y_n\| + N \, \|x_m - x_n\| \ \ .$$

Seja $\delta > 0$. Como as duas seqüências são de Cauchy, existem $n_1 \, (\delta) \in \mathbb{N}$ e $n_2 \, (\delta) \in \mathbb{N}$ tais que

$$m, n \geq n_1 \, (\delta) \implies \| \ x_m - x_n \| \leq \delta \ \ ; \quad m, n \geq n_2 \, (\delta) \implies \| \ y_m - y_n \| \leq \delta.$$

Temos então, para $n\,(\delta) = \max\{\ n_1\,(\delta)\,,\, n_2\,(\delta)\ \}$:

$$m, n \geq n\,(\delta) \implies |\ (\ x_m,\, y_m\ ) - (\ x_n,\, y_n\ )\ | \leq \delta^2 + (M + N\ )\,\delta.$$

Ora, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta\,(\varepsilon) > 0$ tal que $\delta\,(\varepsilon)^2 + (M + N\ )\,\delta\,(\varepsilon) \leq \varepsilon$. Assim,

$$m, n \geq n\,(\delta\,(\varepsilon)) \implies |\ (\ x_m,\, y_m\ ) - (\ x_n,\, y_n\ )\ | \leq \varepsilon,$$

de modo que a seqüência $\{\ \ (\ x_n,\, y_n\ )\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy. Como $\mathbb{R}$ é completo, $\lim\,(\ x_n,\, y_n\ ) = \eta \in \mathbb{R}$. ■

Temos

Proposição 4.5.21. *Toda seqüência convergente é de Cauchy.* ■

Prova. Seja $\varepsilon > 0$: $\exists\ \ n\,(\varepsilon)$ tal que $n \geq n\,(\varepsilon) \implies \|\ x_n - x\| \leq \varepsilon/2$, de modo que

$$m, n \geq n\,(\varepsilon) \implies \|\ x_m - x_n\| \leq \|\ x_m - x\| + \|\ x_n - x\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

■

A recíproca deste resultado é, em geral, falsa. Um exemplo de uma seqüência de Cauchy não-convergente é simples de fornecer, basta usar um espaço não-completo, por exemplo o conjunto dos racionais.

4.5.5 Espaços completos

Definição 4.5.22 (espaço completo)**.** *Diremos que V é completo se e somente se toda seqüência de Cauchy de elementos de V converge, isto é,*

$$\{\ x_n\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset V \quad \textit{é de Cauchy} \implies \exists\, x \in V \quad \textit{tal que } x_n \to x \quad \textit{em} \quad V. \qquad ■$$

Definição 4.5.23 (espaço de Hilbert)**.** *Diremos que V é um espaço de Hilbert se e somente se V é um espaço pré-hilbertiano completo.* ■

Um exemplo de espaço completo é $\mathbb{R}^n$(Cf., por exemplo, [Rudin 1974]). Resulta que

Proposição 4.5.24. *Se* $\dim V < \infty$ *então* V *é completo.* ■

Em dimensão infinita, a construção de espaços completos é geralmente feita através do procedimento chamado de *completamento*: considera-se um espaço vetorial $\mathcal{V}$ sobre $\mathbb{R}$ para o qual $(\ \bullet\ ,\ \bullet\ )$ é um produto escalar e constrói-se um outro espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$ tal que

- V é munido de produto escalar $(\ \bullet\ ,\ \bullet\ )_V$
- V é completo
- existe um isomorfismo isométrico I entre $\mathcal{V}$ e uma parte de V
- $(\ I(x)\,,\ I(y)\ )_V = (\ x,\ y\ )$ para todos $x \in \mathcal{V}$ e $y \in \mathcal{V}$

Em seguida, identifica-se x a $I(x)$ e considera-se x como um elemento de V. A construção de V é feita da seguinte forma: nota-se $\mathbb{V}$ o conjunto das seqüências de Cauchy de elementos de $\mathcal{V}$:

$$\mathbb{V} = \left\{\ \mathbb{X} = \{\ x_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset \mathcal{V} \quad |\ \mathbb{X} \text{ é de Cauchy } \right\}\ .$$

Define-se sobre $\mathbb{V}$ a relação :

$$\mathbb{X} \sim \mathbb{Y} \Longleftrightarrow \|\ x_n - y_n\ \| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow +\infty.$$

Temos

$$\mathbb{X} \sim \mathbb{X}, \text{ pois } \|\ x_n - x_n\ \| = 0 \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow +\infty\ ;$$

$$\mathbb{X} \sim \mathbb{Y} \Longrightarrow \mathbb{Y} \sim \mathbb{X}\ ,$$

pois

$$\|\ y_n - x_n\ \| = \ \|\ x_n - y_n\ \| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow +\infty\ ;$$

$$\mathbb{X} \sim \mathbb{Y} \text{ e } \mathbb{Y} \sim \mathbb{Z} \Longrightarrow \mathbb{X} \sim \mathbb{Z}\ ,$$

pois

$$\|\ x_n - z_n\ \| \leq \ \|\ x_n - y_n\ \| + \|\ y_n - z_n\ \| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow +\infty\ .$$

Logo, $\sim$ é uma relação de equivalência. A classe de um elemento de $\mathbb{V}$ é

$$[\ \mathbb{X}\ ] = \{\ \mathbb{Y} \in \mathbb{V} \quad |\ \mathbb{X} \sim \mathbb{Y}\ \}\,.$$

Define-se então:

$$V = \{\ [\ \mathbb{X}\ ]\ :\ \mathbb{X} \in \mathbb{V}\ \}\ .$$

Temos

$$[\,\mathbb{X}\,] \;+ [\,\mathbb{Y}\,] \;= [\,\mathbb{X}+\mathbb{Y}\,] \quad \text{e} \quad \lambda[\,\mathbb{X}\,] \;= [\,\lambda\mathbb{X}\,] \quad ,$$

de modo que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Para todo $s \in \mathcal{V}$, a seqüência $\mathbb{S} = \{\ s\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ (isto é, $s_n = s$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$) é um elemento de $\mathbb{V}$ e $[\,\mathbb{S}\,] = [\ s\ ] \in V$. Além disto, V pode ser munido de um produto escalar derivado do produto escalar sobre $\mathcal{V}$.

Lema 4.5.25. $(\ [\,\mathbb{X}\,],\ [\,\mathbb{Y}\,]\ ) = \lim(x_n,\ y_n\ )$ *é um produto escalar sobre* V. *Além disto, temos* $\|\ \ [\,\mathbb{X}\,]\ \ \| = \lim \|\ x_n\ \|$ ■

Prova. Note-se que $\lim(x_n,\ y_n\ )$ existe (Cf. proposição 4.5.20). Além disto, o limite é o mesmo para todos os elementos das classes consideradas: observemos inicialmente que $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são limitadas : $\|\ x_n\ \| \le M$ e $\|\ y_n\ \| \le N$ (Cf. proposição 4.5.20). Se $\mathbb{X} \sim \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Y} \sim \mathbb{W}$ então

$$(x_n,\ y_n\ ) - (z_n,\ w_n\ ) = (x_n - z_n,\ y_n\ ) + (z_n,\ y_n\ \ - w_n\ )\,,$$

de modo que

$$|(x_n,\ y_n\ ) - (z_n,\ w_n\ )| = |(x_n - z_n,\ y_n\ )| + |(z_n,\ y_n\ \ - w_n\ )|$$

e a desigualdade de Cauchy-Schwarz mostra que

$$|(x_n,\ y_n\ ) - (z_n,\ w_n\ )| = N\,\|\ x_n - z_n\ \| + M\,\|\ y_n - w_n\ \| \longrightarrow 0.$$

Assim, $\lim(x_n,\ y_n\ ) = \lim(z_n,\ w_n\ )$.
$(\ \bullet\,,\ \bullet\ )$ é um produto escalar, pois

$$(x_n + \lambda\ y_n\ ,\ z_n\ ) = (x_n\ ,\ z_n\ ) + \lambda(\ y_n\ ,\ z_n\ )\,,$$

de modo que

$$(\ [\,\mathbb{X}+\lambda\mathbb{Y}\,],\ [\,\mathbb{Z}\,]\ ) = (\ [\,\mathbb{X}\,],\ [\,\mathbb{Z}\,]\ ) + \lambda(\ [\,\mathbb{Y}\,],\ [\,\mathbb{Z}\,]\ )\,.$$

De maneira análoga,

$$(x_n\ ,\ y_n\ ) = (y_n\ ,\ x_n\ ) \Longrightarrow (\ [\,\mathbb{X}\,],\ [\,\mathbb{Y}\,]\ ) = (\ [\,\mathbb{Y}\,],\ [\,\mathbb{X}\,]\ )\,.$$

Temos também

$$(\ [\,\mathbb{X}\,],\ [\,\mathbb{X}\,]\ ) \ge 0 \text{ pois } (x_n,\ x_n\ ) \ge 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ .$$

Como $\lim \|\ x_n\ \| = \mu \in \mathbb{R}$ (proposição 4.5.20), temos

$$\lim \|\ x_n\ \|^2 = (\lim \|\ x_n\ \|)^2 \quad ,$$

de modo que

$$(\ [\ \mathbb{X}\ ]\ ,\ [\ \mathbb{X}\ ]\ ) = 0 \implies \lim \|\ x_n\ \| = 0 \implies [\ \mathbb{X}\ ] = [\ 0\ ]\ .$$

Enfim,

$$\|\ [\ \mathbb{X}\ ]\ \|^2 = (\ [\ \mathbb{X}\ ]\ ,\ [\ \mathbb{X}\ ]\ ) = \lim \|\ x_n\ \|^2 = (\lim \|\ x_n\ \|)^2\ ,$$

de modo que $\|\ [\ \mathbb{X}\ ]\ \| = \lim \|\ x_n\ \|$. ■

Temos

Proposição 4.5.26. *Seja $U = \{\ [\ \mathbb{X}\ ]\ :\ \mathbb{X} \in \mathbb{V}$ e $\mathbb{X}$ é convergente $\}$. Então U é um subespaço vetorial denso de V. Além disto, existe um isomorfismo isométrico I entre $\mathcal{V}$ e U e $(\ I\,(x)\ ,\ I\,(y)\ ) = (\ x,\ y\ )$, para todos $x \in \mathcal{V}$, $y \in \mathcal{V}$.* ■

Prova. É imediato que U é um subespaço vetorial de V. Seja $[\ \mathbb{Y}\ ] \in V$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $\mathbb{Y} \in \mathbb{V}$, existe $n\,(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n\,(\varepsilon) \implies \|\ y_m - y_n\| \leq \varepsilon.$$

Seja $s = y_n$ e $\mathbb{S} = \{\ s\ \}_{k\ \in\ \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ (isto é, $s_k = s$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$). $\mathbb{S}$ é convergente, de modo que $[\ \mathbb{S}\ ] \in U$. Além disto,

$$\|[\ \mathbb{Y}\ ] - \ [\ \mathbb{S}\ ]\ \| = \lim \|\ y_n - s\ \| \leq \varepsilon.$$

e a proposição 4.3.14 mostra que U é denso em V.

Seja $v \in \mathcal{V}$. Consideremos a aplicação $I : \mathcal{V} \longrightarrow U$ tal que $I\,(s) = [\ s\ ]$, (isto é, $I\,(s) = \{\ s_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$, $s_n = s$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$). I é linear, pois, para todos $\alpha \in \mathbb{R}$, $s \in \mathcal{V}$, $t \in \mathcal{V}$:

$$I\,(\alpha s + t) = [\ \alpha s + t\ ] = \alpha\,[\ s\ ] + [\ t\ ]\ .$$

Temos também

$$\|\ I\,(s)\ \| = \lim \|\ s\ \| = \lim \|\ s\ \|\ ,$$

de forma que I é uma isometria. Além disto, I é uma bijeção: por um lado,

$$I\,(s) = I\,(t) \implies \|\ I\,(s) - I\,(t)\ \| = 0 \implies \|\ s - t\ \| = \lim \|\ s - t\ \| = 0 \implies s = t$$

e I é injetiva. Por outro lado, para todo $[\ \mathbb{X}\ ] \in U$, existe $x = \lim x_n$ (pois $\mathbb{X}$ é convergente) e

$$\|\ I\,(x) - [\ \mathbb{X}\ ]\ \| = \lim \|\ x - x_n\ \| = 0 \implies I\,(x) = [\ \mathbb{X}\ ]$$

e I é sobrejetiva. Enfim,

$$(\ I\,(x)\ ,\ I\,(y)\ ) = \lim (\ x,\ y\ ) = (\ x,\ y\ )\ ,$$

o que completa a prova. ■

Teorema 4.5.27 (completamento)**.** *V é completo e existe um isomorfismo isométrico I entre $\mathcal{V}$ e um subespaço vetorial de V tal que $(\ I(x)\ ,\ I(y)\ ) = (\ x,\ y\ )$, para todos $x \in \mathcal{V}$, $y \in \mathcal{V}$.* ■

Prova. Seja $\{\ [\ \mathbb{X}_k\ ]\ \}_{k\ \in\ \mathbb{N}} \subset V$ uma seqüência de Cauchy. Logo, para todo $\eta > 0$, existe $n_1(\eta)$ tal que

$$k, p \geq k_1(\eta) \Longrightarrow \|[\ \mathbb{X}_k\ ] - [\ \mathbb{X}_p\ ]\ \| \leq \eta.$$

A proposição acima mostra que, para todo $k > 0$, existe uma seqüência convergente $\mathbb{Z}_k \in \mathbb{V}$ tal que $\|[\ \mathbb{X}_k\ ] - \ [\ \mathbb{Z}_k\ ]\ \| \leq \dfrac{1}{k}$. Temos então

$$\|[\ \mathbb{Z}_k\ ] - \ [\ \mathbb{Z}_p\ ]\ \| = \|[\ \mathbb{Z}_k\ ] - [\ \mathbb{X}_k\ ] + [\ \mathbb{X}_k\ ] - [\ \mathbb{X}_p\ ] + [\ \mathbb{X}_p\ ] - [\ \mathbb{Z}_p\ ]\ \|,$$

de modo que

$$\|[\ \mathbb{Z}_k\ ] - \ [\ \mathbb{Z}_p\ ]\ \| \leq \|[\ \mathbb{Z}_k\ ] - [\ \mathbb{X}_k\ ]\ \| + \|[\ \mathbb{X}_k\ ] - [\ \mathbb{X}_p\ ]\ \| + \|[\ \mathbb{X}_p\ ] - [\ \mathbb{Z}_p\ ]\ \|$$

e, para $k, p \geq k_1(\eta)$,

$$\|[\ \mathbb{Z}_k\ ] - \ [\ \mathbb{Z}_p\ ]\ \| \leq \frac{1}{k} + \eta + \frac{1}{p}\ .$$

Assim, $\{\ [\ \mathbb{Z}_k\ ]\ \}_{k\ \in\ \mathbb{N}} \subset V$ é de Cauchy: para todo $\varepsilon > 0$, existe $k_2(\varepsilon)$ tal que

$$k, p \geq k_2(\varepsilon) \Longrightarrow \|[\ \mathbb{Z}_k\ ] - \ [\ \mathbb{Z}_p\ ]\ \| \leq \varepsilon\ .$$

Temos $\mathbb{Z}_k = \{\ (z_k)_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$. Como $\mathbb{Z}_k$ é convergente, existe $z_k = \lim\limits_{n\to+\infty}(z_k)_n$. Seja $\mathbb{S}_k = \{\ z_k\}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ (isto é, $(s_k)_n = s$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$). Temos

$$\lim_{n\to+\infty}\|(z_k)_n - (s_k)_n\ \| = \lim_{n\to+\infty}\|(z_k)_n - \ z_k\ \| = 0,$$

de modo que $[\ \mathbb{Z}_k\ ] = [\mathbb{S}_k\ ]$. Além disto, $\|[\ \mathbb{S}_k\ ] - \ [\ \mathbb{S}_p\ ]\ \| = \|z_k - \ z_p\|$, de forma que

$$k, p \geq k_2(\varepsilon) \Longrightarrow \|z_k - \ z_p\| = \|[\ \mathbb{Z}_k\ ] - \ [\ \mathbb{Z}_p\ ]\ \| \leq \varepsilon$$

e a seqüência $\mathbb{Z} = \{\ z_k\ \}_{k\ \in\ \mathbb{N}}$é de Cauchy. Logo, $\mathbb{Z} \in \mathbb{V}$ e $[\ \mathbb{Z}\ ] \in V$. Além disto,

$$k \geq k_2(\varepsilon) \Longrightarrow \|[\ \mathbb{Z}_k\ ] - \ [\ \mathbb{Z}\ ]\ \| = \|[\ \mathbb{S}_k\ ] - \ [\ \mathbb{Z}\ ]\ \| = \lim_{p\to+\infty}\|z_k - \ z_p\ \| \leq \varepsilon.$$

Ora,

$$\|[\ \mathbb{X}_k\ ] - \ [\ \mathbb{Z}\ ]\ \| = \|[\ \mathbb{X}_k\ ] - \ [\ \mathbb{Z}_k\ ]\ + [\ \mathbb{Z}_k\ ] - \ [\ \mathbb{Z}\ ]\|\ ,$$

de modo que

$$\|[\ \mathbb{X}_k\ ] - \ [\ \mathbb{Z}\ ]\ \| \leq \|[\ \mathbb{X}_k\ ] - \ [\ \mathbb{Z}_k\ ]\ \| + \|[\ \mathbb{Z}_k\ ] - \ [\ \mathbb{Z}\ ]\ \|$$

e

$$k \geq k_2(\varepsilon) \Longrightarrow \| [\ \mathbb{X}_k\ ] - [\ \mathbb{Z}\ ]\ \| \leq \frac{1}{k} + \varepsilon.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{k \to +\infty} \| [\ \mathbb{X}_k\ ] - [\ \mathbb{Z}\ ]\ \| \leq \varepsilon.$$

Logo

$$\lim_{k \to +\infty} \| [\ \mathbb{X}_k\ ] - [\ \mathbb{Z}\ ]\ \| = 0.$$

de modo que $\{\ [\ \mathbb{X}_k\ ]\ \}_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente.

O isomorfismo isométrico resulta da proposição precedente. ■

Podemos encontrar na literatura exemplos de completamentos usuais: por exemplo, o completamento de $C^0(\ \Omega\ )$ para construir $L^2(\ \Omega\ )$, assim como vários completamentos de $\mathcal{D}(\ \Omega\ )$ levando aos espaços de Sobolev $H^s(\ \Omega\ )$, ou ainda, o completamento de $C_0^\infty(\ \Omega\ )$ para a construção de $H_0^1(\ \Omega\ )$.

4.5.6 Teorema de Baire

Um dos resultados importantes da Análise em dimensão infinita é o *Teorema de Baire*:

Teorema 4.5.28 (Baire)**.** *Sejam V um espaço de Hilbert e $\{\ S_n\ \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ uma seqüência de subconjuntos* abertos *e* densos em V. *Então $S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$ é denso em V.*■

Prova. Sejam $u \in V$ e $\varepsilon > 0$. Definimos $\varepsilon_0 = \varepsilon$, $x_0 = u$. Vamos construir uma seqüência de bolas tal que

$$\forall\ n \geq 1 : 0 < \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon}{2^n} \ \text{ e } \ B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset S_{n-1} \cap B_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1})\ .$$

Como S_0 é denso em V, existe um elemento $x_1 \in S_0$ tal que $\|\ u - x_1\ \| \leq \varepsilon/2$. Como S_0 é aberto, existe $\eta > 0$ tal que $B_\eta(x_1) \subset S_0$. Assim, tomando $\varepsilon_1 = \min\{\ \varepsilon/2,\ \eta\}$, temos

$$\|\ y - x_1\ \| \leq \varepsilon_1 \Longrightarrow y \in S_0$$

e, para todo $y \in B_{\varepsilon_1}(x_1)$,

$$\|\ y - u\ \| \leq \|\ y - x_1\ \| + \|\ u - x_1\ \| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

isto é,

$$0 < \varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ e } \ B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset S_0 \cap B_\varepsilon(x_0)\ .$$

Suponhamos agora que

$$0 < \varepsilon_n \le \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \text{e} \quad B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset S_{n-1} \cap B_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1}) \ .$$

Como S_{n+1} é denso em V, existe um elemento $x_{n+1} \in S_n$ tal que $\| x - x_n \| \le \varepsilon_n/2$. Como S_n é aberto, existe $\eta > 0$ tal que $B_\eta(x_{n+1}) \subset S_n$. Assim, tomando $\varepsilon_{n+1} = \min\{ \varepsilon_n/2, \eta\}$, temos

$$\| y - x_{n+1} \| \le \varepsilon_{n+1} \Longrightarrow y \in S_n$$

e, para todo $y \in B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})$,

$$\| y - x \| \le \| y - x_{n+1} \| + \| x - x_{n+1} \| \le \varepsilon_n/2 + \varepsilon_n/2 = \varepsilon_n,$$

isto é,

$$0 < \varepsilon_n \le \frac{\varepsilon_n}{2^n} \le \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad \text{e} \quad B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset S_n \cap B_{\varepsilon_n}(x_n) \ .$$

A seqüência $\{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ é de Cauchy, pois

$$m \ge n \Longrightarrow x_m \in B_{\varepsilon_n}(x_n) \Longrightarrow \| x_m - x_n \| \le \frac{\varepsilon}{2^n} \ .$$

Como V é completo, existe $x \in V$ tal que $x_n \to x$ em V. Assim,

$$\forall\, \eta > 0 : \exists\, n_0 > 0 \text{ tal que } m \ge n_0 \Longrightarrow \| x_m - x \| \le \eta \ .$$

Seja n_1 tal que $\dfrac{\varepsilon}{2^{n_1}} \le \eta$. Temos

$$n \ge n_1 \Longrightarrow \frac{\varepsilon}{2^n} \le \eta \Longrightarrow x \in B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset S_{n-1} \cap B_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1})$$

e, por um lado, $x \in B_{\varepsilon_n}(x_n)$ para todo $n \ge n_1$ e, por outro lado - como $B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset B_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1})$ - $x \in B_{\varepsilon_n}(x_n)$ para todo $n \le n_1$: então $x \in B_{\varepsilon_n}(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo $x \in S$. Como, em particular, $x \in B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset S_0 \cap B_{\varepsilon_0}(x_0)$, temos

$$\| x - u \| = \| x - x_0 \| \le \varepsilon_0 = \varepsilon.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in S$ tal que $\| x - u \| \le \varepsilon$, de modo que $u \in \overline{S}$. Como u é qualquer, temos $V \subset \overline{S}$ e S é denso em V. ■

Utilizaremos no que segue o corolário seguinte:

Corolário 4.5.29. *Sejam V um espaço de Hilbert e $\{ S_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ uma seqüência de subconjuntos* fechados *e* de interior vazio. *Então $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ é de interior vazio.*■

Prova. Basta notar que $\{ W_n = V - S_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ é uma seqüência de abertos densos. Com efeito, W_n é aberto para todo $n \in \mathbb{N}$ (pois S_n é fechado para todo $n \in \mathbb{N}$). Sejam $x \in V$ e $\varepsilon > 0$: mostremos que existe $x_n \in W_n$ tal que $\| x - x_n \| \le \varepsilon$. Suponhamos o contrário: $\| x - y \| \le \varepsilon \Longrightarrow y \notin W_n \Longrightarrow y \in S_n$. Neste caso $x \in int(S_n)$, o que é absurdo, pois $int(S_n) = \varnothing$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x_n \in W_n$ tal que $\| x - x_n \| \le \varepsilon$, de modo que $x \in \overline{W_n}$. Como x é qualquer, temos $V \subset \overline{W_n}$ e W_n é denso em V. ■

4.6 Projeção Ortogonal sobre um Subespaço Vetorial

Um dos resultados mais importantes da Análise Convexa é o *teorema da projeção ortogonal*, o qual pode ser enunciado sob a forma seguinte:

Teorema 4.6.1 (projeção sobre subespaço)**.** *Seja V um espaço de Hilbert e $S \subset V$ um subespaço vetorial fechado. Se $u \in V$ então existe um único elemento $Pu \in S$ tal que*

$$\| u - Pu \| = \min\{ \| u - s \| : s \in S\}.$$

Pu é a projeção ortogonal *de u sobre S.* ■

Prova. *Existência*: Como $\| u - s \| \ge 0, \forall\, s \in S$, temos

$$\min\{ \| u - s \| : s \in S\} = d \ge 0.$$

Temos então

$$\min\left\{ \| u - s \|^2 : s \in S\right\} = d^2.$$

Assim, existe uma seqüência $\{ s_k \}_{k \in \mathbb{N}} \subset S$ tal que

$$d^2 \le \| u - s_k \|^2 \le d^2 + \frac{1}{k}. \tag{4.8}$$

Sejam $x = u - s_n$ e $y = u - s_m$. A regra do paralelogramo mostra que

$$\| x + y\|^2 + \| x - y\|^2 = 2\left(\| x\|^2 + \| y\|^2 \right),$$

i. e.,

$$\left\| 2\left(u - \left(\frac{s_n + s_m}{2}\right)\right)\right\|^2 + \| s_m - s_n\|^2 = 2\left(\| u - s_n \|^2 + \| u - s_n \|^2 \right),$$

de modo que

$$\| s_m - s_n\|^2 = 2 \left(\underbrace{\| u - s_n \|^2}_{\le d^2 + \frac{1}{n}} + \underbrace{\| u - s_n \|^2}_{\le d^2 + \frac{1}{m}} - 2 \left\| u - \left(\frac{s_n + s_m}{2} \right) \right\|^2 \right)$$

e

$$\| s_m - s_n\|^2 \le 4 \left(d^2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \left\| u - \left(\frac{s_n + s_m}{2} \right) \right\|^2 \right) .$$

Como S é um subespaço, temos

$$s_n \in S, \; s_m \in S \Longrightarrow \frac{s_n + s_m}{2} \in S \Longrightarrow \left\| u - \left(\frac{s_n + s_m}{2} \right) \right\| \ge d. \qquad (4.9)$$

Assim,

$$- \left\| u - \left(\frac{s_n + s_m}{2} \right) \right\|^2 \le -d^2$$

e

$$\| s_m - s_n\|^2 \le 4 \left(d^2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - d^2 \right) = 4 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) .$$

Seja $\varepsilon > 0$ e $n_0 (\varepsilon)$ tal que $n (\varepsilon) \ge \dfrac{8}{\varepsilon^2}$. Temos então

$$m, n \ge n (\varepsilon) \implies \| s_m - s_n\|^2 \le 4 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) \le \frac{8}{n (\varepsilon)} \le \varepsilon^2,$$

de modo que a seqüência $\{ s_k \}_{k \in \mathbb{N}} \subset S$ é de Cauchy em V. Como V é um espaço de Hilbert, existe um elemento $Pu \in S$ tal que $s_k \to Pu$ em V. Ora, $\{ s_k \}_{k \in \mathbb{N}} \subset S$ e S é fechado, de modo que $Pu \in S$. A desigualdade 4.8 mostra que

$$\| u - Pu \| = d = \min \{ \| u - s \| \, : \, s \in S\} .$$

Unicidade: Seja $Qu \in S$ um elemento tal que $\| u - Qu \| = d$. Sejam $x = u - Pu$ e $y = u - Qu$. A regra do paralelogramo aplicada a $x = u - Pu$ e $y = u - Qu$ mostra que

$$\| Qu - Pu\|^2 = 2 \left(\underbrace{\| u - Pu \|^2}_{= d^2} + \underbrace{\| u - Qu \|^2}_{= d^2} - 2 \left\| u - \left(\frac{Pu + Qu}{2} \right) \right\|^2 \right) .$$

Como S é um subespaço, temos

$$Pu \in S, \; Qu \in S \Longrightarrow \frac{Pu + Qu}{2} \in S \Longrightarrow \left\| u - \left(\frac{Pu + Qu}{2} \right) \right\| \ge d, \qquad (4.10)$$

de modo que

$$-\left\| u - \left(\frac{Pu+Qu}{2}\right)\right\|^2 \leq -d^2$$

e

$$\| Qu - Pu\|^2 \leq 4\left(d^2 - d^2\right) = 0 \ .$$

Assim, $Qu = Pu$, de modo que Pu é único. ■

A expressão *projeção ortogonal* é justificada pela proposição seguinte:

Proposição 4.6.2. *Seja V um espaço de Hilbert e $S \subset V$ um subespaço vetorial. $Pu \in V$ é a projeção ortogonal de u sobre S se e somente se*

$$Pu \in S \quad e \quad u - Pu \perp S,$$

isto é,

$$Pu \in S \quad e \quad (\ u - Pu,\ v) = 0,\ \forall\ v \in S. \ ■$$

A equação acima é uma *equação variacional*: a solução é caracterizada por dois fatos - pertencer a um conjunto e satisfazer uma equação para todo v pertencente ao mesmo conjunto.

Prova. Sejam $v \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Consideremos

$$f(\lambda) = \|\ u - (Pu + \lambda v)\|^2 \ .$$

Temos

$$f(\lambda) = a\lambda^2 + 2b\lambda + c \ ,$$

onde

$$a = \|\ v\ \|^2 \ ,\ b = (\ u - Pu,\ v) \ ,\ c = \|\ u - Pu\|^2 \ .$$

Além disto

$$f'(\lambda) = 2a\lambda + 2b \Longrightarrow f'(0) = 2b.$$

Logo,

$$f'(0) = 0 \iff (\ u - Pu,\ v) = 0.$$

$(\Longrightarrow)$: seja Pu a projeção ortogonal de u sobre S. Como S é um subespaço vetorial, $Pu + \lambda v \in S$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall\ v \in S$. Assim

$$f(0) = \|\ u - Pu\ \|^2 \leq f(\lambda),\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \forall v \in S.$$

Logo, o mínimo de f é atingido em $\lambda = 0$, $\forall v \in S$: $f'(0) = 0, \forall v \in S$ e

$$(\ u - Pu,\ v) = 0, \forall v \in S.$$

Do Teorema 4.6.1: $Pu \in S$.

$(\Longleftarrow)$: seja $Pu \in S$ e $(u - Pu, v) = 0, \forall\, v \in S$. Então $f'(0) = 0, \forall\, v \in S$. Assim, o mínimo de f é atingido em $\lambda = 0, \forall\, v \in S$. Assim

$$f(0) = \| u - Pu \|^2 \leq \| u - (Pu + v) \|^2 = f(1), \forall\, v \in S.$$

Ora, para todo $s \in S$, $v = s - Pu \in S$, de modo que

$$\| u - Pu \|^2 \leq \| u - s \|^2, \forall\, s \in S.$$

Assim, $Pu \in S$ e $\| u - Pu \| = \min\{ \| u - s \| : s \in S\}$. ∎

4.7 Teorema de Representação de Riesz

Uma das conseqüências mais utilizadas do teorema da projeção ortogonal é o *teorema de representação de Riesz:*

Teorema 4.7.1 (Riesz)**.** *Sejam V um espaço de Hilbert e $\ell \in V'$, isto é, $\ell : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo. Então existe um único elemento $u \in V$ tal que $\ell(x) = (u, x)$, $\forall\, x \in V$. Além disto, $\| \ell \| = \| u \|$.* ∎

Prova. Se $\ell = 0$, o resultado é imediato (basta tomar $u = 0$). Seja $\ell \neq 0$. Então

existe $v \in V$ tal que $\ell(v) \neq 0$. Da proposição 4.5.18, $N(\ell)$ é fechado. Como $N(\ell)$ é um subespaço vetorial, o teorema da projeção (Teorema 4.6.1) e a caracterização dada na proposição 4.6.2 mostram que existe um único elemento $Pv \in N(\ell)$ tal que $v - Pv \perp N(\ell)$. Seja $w = v - Pv$. Temos $\ell(w) \neq 0$ e $w \neq 0$: no caso contrário, $0 = \ell(Pv) = \ell(v) \neq 0$, o que é absurdo. Seja

$$u = \ell(w) \frac{w}{\| w\|^2}$$

Temos

$$\ell(u) = \frac{\ell(w)^2}{\| w\|^2} > 0 \; ; \quad (u, u) = \frac{\ell(w)^2}{\| w\|^2} = \ell(u)$$

e

$$\forall\, y \in N(\ell) : (u, y) = \frac{\ell(w)}{\| w\|^2} (w, y) \underbrace{=}_{v - Pv \,\perp\, N(\ell)} 0.$$

Para todo $x \in V$:

$$x = y + h \; , \quad y = x - \frac{\ell(x)}{\ell(u)} u \; , \quad h = \frac{\ell(x)}{\ell(u)} u \; .$$

Ora,

$$\ell(y) = \ell\left(x - \frac{\ell(x)}{\ell(u)}u\right) = \ell(x) - \frac{\ell(x)}{\ell(u)}\ell(u) = \ell(x) - \ell(x) = 0 \Longrightarrow y \in N(\ell),$$

de modo que $(u,\, y) = 0$ e

$$(u,\, x) = (u,\, y + h) = (u,\, h).$$

Além disto,

$$(u,\, h) = \left(u,\, \frac{\ell(x)}{\ell(u)}u\right) = \frac{\ell(x)}{\ell(u)}(u,\, u) = \ell(x),$$

de modo que

$$(u,\, x) = \ell(x), \forall x \in V.$$

Do Corolário 4.4.10, temos $\| \ \ell \ \| = \| \ u \ \|$. ■

O teorema de representação de Riesz estabelece uma correspondência biunívoca entre os funcionais lineares contínuos em V e os elementos de V. Antes de estabelecer as propriedades dessa correspondência, lembremos que $\Pi : V \to V'$ é contínua se e somente se

Definição 4.7.2 (continuidade)**.** *Seja* $\Pi : V \to V'$ *uma aplicação. Diremos que* Π *é contínua se e somente se*

$$\forall\ x \in V : \forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ \delta(x,\varepsilon) > 0 \ \ \textit{tal que}\ y \in B_\delta(x) \Longrightarrow \Pi(y) \in B_\varepsilon(\ \Pi(x)\ ). \ ■$$

Assim, Π é contínua se e somente se

$$\forall\ x \in V : \forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ \delta(x,\varepsilon) > 0 \ \ \text{tal que}\ \|\ x - y\| \le \delta(x,\varepsilon) \Longrightarrow \|\ \Pi(x) - \Pi(y)\| \le \varepsilon. \ ■$$

Como para os funcionais, a propriedade de Lipschitz implica a continuidade:

Proposição 4.7.3. *Seja* $\Pi : V \to V'$ *uma aplicação Lipschitziana, isto é, tal que existe uma constante* $K \in \mathbb{R}$*, independente de* x *e* y*, tal que*

$$\|\ \Pi(x) - \Pi(y)\| \le K \|\ x - y\|,\ \forall\ x \in V, \quad y \in V.$$

Então Π *é contínua.* ■

Prova. Basta tomar $\delta(x,\varepsilon) = \varepsilon/K$. ■

Podemos então definir:

Teorema 4.7.4 (isometria de Riesz). *Seja* $\Pi : V \to V'$ *a aplicação definida por*

$$\Pi\,(u) = \ell \quad ; \quad \ell : V \to R \quad e \quad \forall\; x \in V : \ell\,(x) = (u,\, x)\,.$$

Então Π *é uma bijeção linear contínua. Além disto,* Π *é uma isometria.* ■

Prova. O teorema de representação de Riezs (4.7.1) mostra que Π é uma bijeção.

Mostremos que Π é linear: sejam $u,\ \ v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\ell_{\alpha u+v} = \Pi\,(\alpha u + v)$, $\ell_u = \Pi\,(u)$, $\ell_v = \Pi\,(v)$. Temos, para todo $x \in V$,

$$(\alpha \ell_u + \ell_v)\,(x) = \alpha \ell_u\,(x) + \ell_v\,(x) = \alpha\,(u,\, x) + (v,\, x) = (\alpha u + v,\, x) = \ell_{\alpha u+v}\,(x)\,,$$

de modo que $\alpha \ell_u + \ell_v = \ell_{\alpha u+v}$, isto é, $\Pi\,(\alpha u + v) = \alpha \Pi\,(u) + \Pi\,(v)$.

Mostremos que Π é uma isometria: sejam $u,\ \ v \in V$. Como Π é linear, $\Pi\,(u) - \Pi\,(v) = \Pi\,(u - v)$, de modo que o Teorema de Riesz (4.7.1) mostra que

$$\|\ \Pi\,(u) - \Pi\,(v)\ \| = \|\ \Pi\,(u - v)\ \| = \|\ u - v\ \|\ .$$

A continuidade segue da proposição 4.7.3. ■

Este resultado mostra que é possível duplicar a topologia de V em $V\prime$:

Proposição 4.7.5. *Seja* V *um espaço de Hilbert. Para* ℓ,$m \in V'$, *podemos definir:*

$$(\ell,\, m) = \left(\Pi^{-1}\,(\ell)\,,\, \Pi^{-1}\,(m)\right).$$

Então:

(i) *esta igualdade define um produto escalar sobre* V'.

(ii) *A norma de* V'*, definida em 4.4.7, é a norma associada a este produto escalar:* $\|\ \ell\ \| = \sqrt{\ (\ell,\, \ell)\ }$.

(iii) $\{\ \ell_k\ \}_{k\,\in\,\mathbb{N}} \subset V'$ *converge para* ℓ *em* V' *se e somente se* $\left\{\ \Pi^{-1}\,(\ell_k)\ \right\}_{k\,\in\,\mathbb{N}} \subset V$ *converge para* $\Pi^{-1}\,(\ell)$ *em* V.

(iv) $\{\ \ell_k\ \}_{k\,\in\,\mathbb{N}} \subset V'$ *é de Cauchy em* V' *se e somente se* $\left\{\ \Pi^{-1}\,(\ell_k)\ \right\}_{k\,\in\,\mathbb{N}} \subset V$ *é de Cauchy em* V.

(v) V' *munido deste produto escalar é um espaço de Hilbert.*

(vi) $S \subset V'$ *é fechado se e somente se* $\Pi^{-1}\,(S) \subset V$ *é fechado.*

(vii) $S \subset V'$ *é aberto se e somente se* $\Pi^{-1}\,(S) \subset V$ *é aberto.* ■

Prova.

1) prova de (i): $\Pi^{-1} : V' \to V$ é uma bijeção linear. Resulta que, para todo ℓ, m, $t \in V'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$(\ell,\, m + \alpha t) = \left(\Pi^{-1}(\ell)\,,\, \Pi^{-1}(m + \alpha t)\right) = \left(\Pi^{-1}(\ell)\,,\, \Pi^{-1}(m) + \alpha \Pi^{-1}(t)\right).$$

Assim,

$$(\ell,\, m + \alpha t) = \left(\Pi^{-1}(\ell)\,,\, \Pi^{-1}(m)\right) + \alpha \left(\Pi^{-1}(\ell)\,,\, \Pi^{-1}(t)\right) = (\ell,\, m) + \alpha\,(\ell,\, t)\,.$$

Temos também

$$(\ell,\, m) = \left(\Pi^{-1}(\ell)\,,\, \Pi^{-1}(m)\right) = \left(\Pi^{-1}(m)\,,\, \Pi^{-1}(\ell)\right) = (m,\, \ell)\,;$$

$$(\ell,\, \ell) = \left(\Pi^{-1}(\ell)\,,\, \Pi^{-1}(\ell)\right) \geq 0.$$

$$(\ell,\, \ell) = 0 \Longleftrightarrow \left(\Pi^{-1}(\ell)\,,\, \Pi^{-1}(\ell)\right) = 0 \Longleftrightarrow \Pi^{-1}(\ell) = 0 \Longleftrightarrow \ell = 0,$$

de modo que a igualdade define um produto escalar sobre V'.

2) prova de (ii): O Teorema de Riesz (4.7.1) mostra que

$$\|\, \ell \,\| = \left\|\, \Pi^{-1}(\ell) \,\right\| = \sqrt{\, \left(\Pi^{-1}(\ell)\,,\, \Pi^{-1}(\ell)\right)\,} = \sqrt{\,(\ell,\, \ell)\,}$$

3) prova de (iii): $\ell_k \to \ell$ em V' se e somente se $\|\, \ell_k - \ell \,\| \to 0$ quando $k \to +\infty$. Ora, $\left\|\, \Pi^{-1}(\ell_k) - \Pi^{-1}(\ell) \,\right\| = \|\, \ell_k - \ell \,\|$, de modo que

$$\ell_k \to \ell \text{ em } V' \Longleftrightarrow \Pi^{-1}(\ell_k) \to \Pi^{-1}(\ell) \text{ em } V.$$

4) prova de (iv): seja $\{\, \ell_k \,\}_{k \,\in\, \mathbb{N}} \subset V'$ uma seqüência de Cauchy. Temos,

$$\left\|\, \Pi^{-1}(\ell_m) - \Pi^{-1}(\ell_n) \,\right\| = \|\, \ell_k - \ell_n \,\|\,.$$

Assim,

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \|\, \ell_k - \ell_n \,\| \leq \varepsilon$$

se e somente se

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \left\|\, \Pi^{-1}(\ell_m) - \Pi^{-1}(\ell_n) \,\right\| \leq \varepsilon,$$

de onde o resultado.

5) prova de (v): seja $\{\, \ell_k \,\}_{k \,\in\, \mathbb{N}} \subset V'$ uma seqüência de Cauchy. Então (iv) mostra que $\left\{\, \Pi^{-1}(\ell_k) \,\right\}_{k \,\in\, \mathbb{N}} \subset V$ é de Cauchy: como V é completo, existe $x \in V$ tal que $\Pi^{-1}(\ell_k) \to x$ em V. Mas então $\Pi(x) \in V'$ e, como $\Pi^{-1}(\Pi(x)) = x$, (iii) mostra que $\ell_k \to \Pi(x)$.

6) prova de (vi): para mostrar ($\Longrightarrow$), consideremos $S \subset V'$ fechado e $\{ x_k \}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Pi^{-1}(S) \subset V$ tal que $x_k \to x$. Sejam $\ell_k = \Pi(x_k)$ e $\ell = \Pi(x)$. Temos $\{ \ell_k \}_{k \in \mathbb{N}} \subset S$ (por construção) e $\ell_k \to \ell$ (de (iii)). Como S é fechado, $\ell \in S$, de modo que $x = \Pi^{-1}(\ell) \in \Pi^{-1}(S)$. Assim, $\Pi^{-1}(S)$ é fechado.

Mostremosr ($\Longleftarrow$): sejam $\Pi^{-1}(S)$ é fechado e $\{ \ell_k \}_{k \in \mathbb{N}} \subset S$ tal que $\ell_k \to \ell$. Então $\left\{ \Pi^{-1}(\ell_k) \right\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Pi^{-1}(S)$ e $\Pi^{-1}(\ell_k) \to \Pi^{-1}(\ell)$. Como $\Pi^{-1}(S)$ é fechado, $\Pi^{-1}(\ell) \in \Pi^{-1}(S)$, de modo que $\ell = \Pi\left(\Pi^{-1}(S)\right) \in S$. Assim, S é fechado.

7) prova de (vi): basta notar que $\Pi^{-1}(V' - S) = V - \Pi^{-1}(S)$. Com efeito,

$$x \notin \Pi^{-1}(S) \Longleftrightarrow \Pi(x) \notin S \Longleftrightarrow \Pi(x) \in V - S,$$

isto é

$$x \in V - \Pi^{-1}(S) \Longleftrightarrow x \in \Pi^{-1}(V' - S)\,.$$

Assim, $\Pi^{-1}(V' - S)$ é fechado se e somente $V - \Pi^{-1}(S)$ é fechado. Resulta de (vi) que $V' - S$ é fechado se e somente se $V - \Pi^{-1}(S)$ é fechado, de onde o resultado enunciado.

■

4.8 Topologia Fraca

O teorema de representação de Riesz estabelece uma correspondência biunívoca entre os funcionais lineares contínuos em V e os elementos de V. Nesta seção, vamos explorar esta conexão para definir uma nova noção de convergência, a qual induzirá uma nova topologia, isto é, os conjuntos abertos e fechados de V serão outros. Na verdade, a nova topologia conterá menos fechados e mais seqüência convergentes.

Duplicar a topologia de V em V' é de pouca utilidade, pois nada ganharemos: como indica a proposição 4.7.5 acima, as seqüências convergentes, as seqüências de Cauchy, os abertos e os fechados serão idênticos. Porém, para definir uma topologia diferente, podemos utilizar uma propriedade dos elementos de V', conhecida pelo nome de *limitação uniforme*:

Teorema 4.8.1 (limitação uniforme). *Seja V um espaço de Hilbert e seja*

$$\{\ell_\lambda \in V' : \lambda \in \Lambda\}$$

uma família não-vazia de elementos de V' tal que

$$\forall\ x \in V : \sup\{\ |\ \ell_\lambda(x)\ |: \lambda \in \Lambda\ \} < +\infty\ .$$

Então,

$$\sup\{\ \|\ \ell_\lambda\ \|: \lambda \in \Lambda\ \} < +\infty\ .$$

O teorema da limitação uniforme permite passar da convergência pontual à convergência em norma:

Corolário 4.8.2. *Seja V um espaço de Hilbert e seja $\{ \ell_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V'$ tal que ℓ_n converge pontualmente para $\ell : V \to \mathbb{R}$.*

$$\forall\ x \in V : \ \ell_n (x) \ \to \ell (x) \ \text{em } \mathbb{R}.$$

Então, por um lado,

$$\sup \{ \ \| \ \ell_n \ \| : n \in \mathbb{N} \ \} < +\infty \ .$$

e, por outro lado, $\ell \in V'$.■

prova do teorema 4.8.1. Seja

$$A_n \ = \{ \ x : | \ \ell_\lambda (x) \ | \leq n, \ \forall \ \lambda \in \Lambda \ \} \ .$$

A_n é fechado para todo $n \in \mathbb{N}$: com efeito, seja $\{ \ x_k \ \}_{k \in \mathbb{N}} \subset A_n$ tal que $x_k \to x$ em V. Como $\ell_\lambda \in V'$,

$$\forall \ \lambda \in \Lambda : \ \ | \ \ell_\lambda (x) \ | = \lim_{k \to +\infty} | \ \ell_\lambda (x_k) \ | \leq n,$$

de modo que $x \in A_n$. Por outro lado, $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = V$. Com efeito, para todo $x \in V$,

$$\sup \{ | \ \ell_\lambda (x) \ | : \lambda \in \Lambda \ \} < +\infty \implies \exists \ n \in \mathbb{N} \text{ tal que} | \ \ell_\lambda (x) \ | \leq n, \ \forall \ \lambda \in \Lambda.$$

Resulta que

$$\exists \ n \in \mathbb{N} \text{ tal que } int \, (A_n) \neq \varnothing \ .$$

Com efeito, se $int \, (A_n) = \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então, do Corolário 4.5.29, $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ tem o interior vazio, de modo que $int \, (V) = \varnothing$. Ora V é aberto e $V \subset V$, de modo que $V \subset int \, (V) = \varnothing$. Logo $V = \varnothing$, o que é absurdo, pois $0 \in V$.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ tal que $int \, (A_n) \neq \varnothing$ e $x_n \in int \, (A_n)$: então existe $\varepsilon_n > 0$ tal que

$$\| \ x - x_n \ \| \leq \varepsilon_n \implies x \in A_n \implies | \ \ell_\lambda (x) \ | \leq n, \ \forall \ \lambda \in \Lambda.$$

Assim,

$$\| \ u \ \| \leq \varepsilon_n \implies \ell_\lambda (x_n + u) \leq n, \ \forall \ \lambda \in \Lambda.$$

e

$$\| \ u \ \| \leq \varepsilon_n \implies \ell_\lambda (u) = \ell_\lambda (x_n + u) - \ell_\lambda (x_n) \leq 2n, \ \forall \ \lambda \in \Lambda,$$

de forma que

$$\| \ x \ \| \leq 1 \implies \| \ \varepsilon_n x \ \| \leq 1 \implies | \ \ell_\lambda (x) \ | \leq 2n.$$

e

$$\| \, x \, \| \leq 1 \Longrightarrow \ell_\lambda \left(x \right) = \frac{1}{\varepsilon_n} \ell_\lambda \left(\varepsilon_n x \right) \leq \frac{2n}{\varepsilon_n}.$$

Logo,

$$\forall \; \lambda \in \Lambda : \quad \| \; \ell_\lambda \; \| \leq 2n / \varepsilon_n,$$

de onde o resultado enunciado. ■

prova do Corolário 4.8.2. Como

$$\forall \; x \in V : \; \ell_n \left(x \right) \; \to \ell \left(x \right) \; \text{ em } \mathbb{R},$$

temos

$$\forall \; x \in V : \sup \{ \; | \; \ell_n \left(x \right) \; | : n \in \mathbb{N} \; \} < +\infty$$

e o teorema da limitação uniforme mostra que

$$M = \sup \{ \; \| \; \ell_n \; \| : n \in \mathbb{N} \; \} < +\infty \; .$$

Então

$$\forall \; n \in \mathbb{N} \; \text{ e } \; x \in V : \; | \; \ell_n \left(x \right) \; | \; \leq M \, \| \; x \; \| \, ,$$

Assim,

$$\forall \; x \in V : \; | \; \ell \left(x \right) \; | \; = \lim_{n \; \to \; +\infty} | \; \ell_n \left(x \right) \; | \; \leq M \, \| \; x \; \| \, .$$

Além disto,

$$\ell \left(\alpha x + y \right) = \lim_{n \; \to \; +\infty} \ell_n \left(\alpha x + y \right) = \alpha \lim_{n \; \to \; +\infty} \ell_n \left(x \right) + \lim_{n \; \to \; +\infty} \ell_n \left(y \right) = \alpha \ell \left(x \right) + \ell \left(y \right),$$

de modo que ℓ é linear. Logo, $\| \; \ell \; \| \leq M$ e $\ell \in V'$. ■

O Corolário 4.8.2 sugere que podemos substituir a noção de convergência em norma pela noção mais simples de convergência pontual. Definimos então:

Definição 4.8.3 (convergência fraca)**.** *Seja* $\{ \; x_n \; \}_{n \; \in \; \mathbb{N}} \subset V$ *. Diremos que* x_n *converge fracamente para* $x \in V$ *se e somente se*

$$\forall \; y \in V \; : \; (x_n, \, y) \to (x, \, y) \; \text{ quando } n \to +\infty. \quad ■$$

Utilizaremos a notação $x_n \rightharpoonup x$ para indicar que x_n converge fracamente para x e diremos que x é o limite fraco da seqüência. Quando necessário, indicaremos o espaço, a norma ou o produto escalar dizendo que a convergência ocorre "em V", ou "segundo o produto escalar $(\bullet, \bullet)$".

A convergência fraca pode ser interpretada de duas maneiras: por um lado, ela significa que $\Pi(x_n)$ converge pontualmente para $\Pi(x)$, isto é, $\Pi(x_n)(y) \to \Pi(x)(y)$ para todo $y \in V$; por outro lado, ela significa que $\ell(x_n) \to \ell(x)$ para todo $\ell \in V'$. Esta última propriedade é utilizada para generalizar a convergência fraca a estruturas diferentes dos espaços de Hilbert, caso que não trataremos nessas Notas.

Temos

Proposição 4.8.4. *$x_n \rightharpoonup x$ fracamente se e somente se $L(x_n) \to L(x)$ para todo $L \in V'$.* ■

Prova. Seja $L \in V'$. O Teorema de Riesz mostra que existe $u \in V$ tal que $L(v) = (u, v)$ para todo $v \in V$. Assim,

$$x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow L(x_n) = (u, x_n) \to (u, x) = L(x) \ .$$

Reciprocamente, seja $u \in V$. Então $L(v) = (u, v)$ é um elemento de V' (Cf. proposição 4.4.10). Assim,

$$L(x_n) \to L(x) \quad \text{para todo} \quad L \in V' \Longrightarrow (u, x_n) = L(x_n) \to L(x) = (u, x) \ .$$

■

Proposição 4.8.5. *Se $x_n \rightharpoonup x$ então a seqüência é limitada, isto é, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\| x_n\| \leq M$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Além disto, se $y_n \to y$ fortemente então $\lim (x_n, y_n) = (x, y)$. Enfim, $x_n \to x$ fortemente se e somente se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente e $\| x_n \| \to \| x \|$ em $\mathbb{R}$.* ■

Prova. Seja $\ell_n = \Pi(x_n)$. O Corolário 4.8.2 mostra que

$$M = \sup\{ \ \| \ell_n \| : n \in \mathbb{N} \ \} < +\infty \ .$$

Ora, $\| \ell_n \| = \| x_n \|$, de modo que

$$M = \sup\{ \ \| x_n \| : n \in \mathbb{N} \ \} < +\infty$$

e a seqüência é limitada.

Temos

$$(x_n, y_n) = (x_n, y) + (x_n, y_n - y)$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|\ (\ x_n,\, y_n - y\ )\ | \leq \|\ x_n\|\ \|\ y_n - y\| \leq M\ \|\ y_n - y\| \to 0,$$

de modo que

$$\lim (\ x_n,\, y_n\ ) = \lim (\ x_n,\, y\ ) = (\ x,\, y\ )\,.$$

Suponhamos $x_n \to x$ fortemente. Então, para todo $y \in V$,

$$|\ (\ x_n,\, y\ ) - (\ x,\, y\ )\ | = |\ (\ x_n - x,\, y\ )\ | \leq \|\ x_n - x\|\ \|\ y\| \to 0,$$

de modo que $x_n \rightharpoonup x$ fracamente. Além disto,

$$|\ \|\ x_n\| - \|\ x\|\ | \leq \|\ x_n - x\| \to 0,$$

de maneira que $\|\ x_n\ \| \to \|\ x\ \|$ em $\mathbb{R}$. Suponhamos agora que $x_n \rightharpoonup x$ fracamente e $\|\ x_n\ \| \to \|\ x\ \|$ em $\mathbb{R}$. Como

$$\|\ x_n - x\|^2 = \|\ x_n\|^2 - 2\,(\ x_n,\, x\ ) + \|\ x\|^2\ ,$$

temos

$$\|\ x_n - x\|^2 \to \|\ x\|^2 - 2\,(\ x,\, x\ ) + \|\ x\|^2 = 0\ .$$

de onde o resultado enunciado. ■

O limite fraco de uma seqüência também é único e todas as subseqüências convergem para esse mesmo limite:

Proposição 4.8.6. *Seja* $\{\ x_n\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset V$ *tal que* x_n *converge fracamente para* $x \in V$. *Então, por um lado, se* $\left\{\ y_k = x_{n(k)}\ \right\}_{k\,\in\,\mathbb{N}}$ *é uma subseqüência então* $y_k \rightharpoonup x$ *em* V *e, por outro lado,* x *é único.*■

Prova. Mostremos a unicidade: seja z tal que $x_n \rightharpoonup z$ quando $n \to +\infty$. Então

$$(\ x_n - x,\, z - x\ ) \to (\ z - x,\, z - x\ ) = \|\ z - x\|^2\,.$$

Ora,

$$(\ x_n - x,\, z - x\ ) = (\ x_n,\, z - x\ ) - (\ x,\, z - x\ ) \to 0,$$

de modo que $\|\ x - z\| = 0$ e as propriedades da norma mostram que $x = z$. Seja $\left\{\ y_k = x_{n(k)}\ \right\}_{k\,\in\,\mathbb{N}}$. Consideremos $z \in V$: como x_n converge fracamente para $x \in V$, $\forall\ \varepsilon > 0$:

$$\exists\ m\,(\varepsilon) \quad \text{tal que} \quad m \geq m\,(\varepsilon) \implies |(\ x_n - x,\, z)| \leq \varepsilon.$$

Logo, $n(k) \geq m(\varepsilon) \implies |(\ y_n - x,\ z)| \leq \varepsilon$. Como n é bijetiva, existe $k(\varepsilon)$ tal que $n(k(\varepsilon)) = m(\varepsilon)$. Como n é estritamente crescente,

$$k \geq k(\varepsilon) \implies n(k) \geq m(\varepsilon) \implies |(\ y_n - x,\ z)| \leq \varepsilon \ .$$

Resulta que $(\ y_n,\ z) \to (\ x,\ z)$ e, por conseguinte, $y_k \rightharpoonup x$ em V. ∎

Identicamente ao caso dos limites fortes, temos

Proposição 4.8.7. *Seja* $\{\ x_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset V$ *tal que toda subseqüência converge fracamente para um mesmo elemento* $x \in V$, *isto é, se* $\left\{\ y_k = x_{n(k)}\ \right\}_{k\ \in\ \mathbb{N}}$ *então* $y_k \rightharpoonup x$ *em* V. *Então* $x_n \rightharpoonup x$ *em* V. ∎

Prova. Seja $z \in V$. Consideremos $\varepsilon > 0$ e suponhamos que:

$$\forall\ k \in \mathbb{N} : \exists\ n(k) \geq k \ \text{ tal que } \ \left|\left(x_{n(k)} - x,\ z\right)\right| > \varepsilon \ .$$

Então $\left\{\ y_k = x_{n(k)}\ \right\}_{k\ \in\ \mathbb{N}}$ é uma subseqüência de $\{\ x_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ de modo que, por hipótese, $y_k \to x$ em V e

$$0 = \lim_{k\ \to\ +\infty} \left|\left(x_{n(k)} - x,\ z\right)\right| \geq \varepsilon \implies \varepsilon \leq 0 \ .$$

Assim, $0 \leq \varepsilon < 0$, o que é absurdo. Logo,

$$\exists\ k(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ n \geq k(\varepsilon) \implies |(x_n - x,\ z)| \leq \varepsilon$$

e temos o resultado enunciado. ∎

De maneira análoga à convergência forte, manipularemos também famílias da forma $\{\ x_\delta\ \}_{\delta\ >\ 0}$ ou $\{\ x_\delta\ \}_{0\ <\ \delta\ <\ \delta_{\max}}$ para $\delta \longrightarrow 0+$. Neste caso, $x_\delta \rightharpoonup x$ se e somente se, para todo $z \in V$:

$$\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ \delta(\varepsilon) \ \text{ tal que } 0 < \delta \leq \delta(\varepsilon) \implies |(x_\delta - x,\ z)| \leq \varepsilon \ .$$

Também consideraremos famílias da forma $\{\ y_\lambda\ \}_{\lambda\ >\ \lambda_{\min}}$ para $\lambda \longrightarrow +\infty$. Neste caso, $y_\lambda \rightharpoonup y$ se e somente se, para todo $z \in V$:

$$\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ \lambda(\varepsilon) \ \text{ tal que } \lambda \geq \lambda(\varepsilon) \implies |(y_\lambda - x,\ z)| \leq \varepsilon \ .$$

Como no caso dfa convergência forte, diremos que tais famílias também são seqüências. Temos

Teorema 4.8.8. $x_\delta \rightharpoonup x$ *se e somente se* $x_{\delta(k)} \rightharpoonup x$ *em* V *quando* $k \longrightarrow +\infty$, *para toda seqüência de números reais* $\{\ \delta(k)\ \}_{k\ \in\ \mathbb{N}}$ *tal que* $\delta(k) \to 0+$. *De maneira análoga,* $y_\lambda \rightharpoonup y$ *se e somente se* $y_{\lambda(k)} \rightharpoonup y$ *em* V *quando* $k \longrightarrow +\infty$, *para toda seqüência de números reais* $\{\ \lambda(k)\ \}_{k\ \in\ \mathbb{N}}$ *tal que* $\lambda(k) \to +\infty$. ∎

Prova. ($\Longrightarrow$): Seja $z \in V$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $k(\varepsilon)$ tal que $k \geq k(\varepsilon) \Longrightarrow$ $\delta(k) \leq \delta(\varepsilon)$ e $\lambda(k) \geq \lambda(\varepsilon)$. Assim,

$$k \geq k(\varepsilon) \Longrightarrow \left|\left(x_{\delta(k)} - x,\ z\right)\right| \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \left|\left(y_{\lambda(k)} - x,\ z\right)\right| \leq \varepsilon \ .$$

($\Longleftarrow$): Seja $z \in V$. Suponhamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall\ \eta > 0 : \exists\ \alpha(\eta) \text{ tal que } 0 < \alpha(\eta) \leq \eta \text{ e } \left|\left(x_{\alpha(\eta)} - x,\ z\right)\right| > \varepsilon \ .$$

Seja $\delta(k) = \alpha(1/k)$. Então $\delta(k) \to 0+$, de forma que $x_{\delta(k)} \rightharpoonup x$ em V quando $k \longrightarrow +\infty$. Assim,

$$\left|\left(x_{\alpha(1/k)} - x,\ z\right)\right| = \left|\left(x_{\delta(k)} - x,\ z\right)\right| \longrightarrow 0$$

e temos $\varepsilon \leq 0$, de forma que $0 < \varepsilon \leq 0$, o que é absurdo. De maneira análoga, se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall\ \eta > 0 : \exists\ \alpha(\eta) \text{ tal que } \alpha(\eta) \geq \eta \text{ e } \left|\left(y_{\alpha(\eta)} - y,\ z\right)\right| > \varepsilon \ .$$

Seja $\lambda(k) = \alpha(k)$. Então $\lambda(k) \to +\infty$, de forma que $y_{\lambda(k)} \rightharpoonup y$ em V quando $k \longrightarrow +\infty$. Assim,

$$\left|\left(y_{\alpha(k)} - y,\ z\right)\right| = \left|\left(y_{\lambda(k)} - y,\ z\right)\right| \longrightarrow 0$$

e temos novamente $0 < \varepsilon \leq 0$, o que é absurdo. ■

Uma propriedade útil é dada na seguinte proposição:

Proposição 4.8.9. *Seja $S \subset V$ um subconjunto denso. Se $\{\ x_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset V$ é limitada e*

$$\forall\ y \in S:\ (x_n,\ y) \to (x,\ y) \text{ quando } n \to +\infty$$

então x_n converge fracamente para x em V. ■

Prova. Seja $y \in V$. Seja $k > 0$. Como S é denso em V, então existe $y_k \in S$ tal que $\|\ y - y_k\| \leq \dfrac{1}{k}$. Então:

$$|(\ x_n - x,\ y - y_k)| \leq \|\ x_n - x\|\ \|\ y - y_k\| \leq \frac{1}{k}\left(\|\ x_n\| + \|\ x\|\right)\ .$$

Como $\{\ x_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset V$ é limitada, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que$\|\ x_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$|(\ x_n - x,\ y - y_k)| \leq \frac{1}{k}\left(M + \|\ x\|\right).$$

Por outro lado, como $y_k \in S$,

$$|(\ x_n - x,\ y_k)| \to 0 \ \text{ quando } n \to +\infty \ ,$$

existe n_0 tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |(\ x_n - x,\ y_k)| \leq \frac{1}{k}$$

Ora,

$$\begin{aligned} |(\ x_n - x,\ y)| &= |(\ x_n - x,\ y - y_n) + (\ x_n - x,\ y_n)| \\ &\leq |(\ x_n - x,\ y - y_k)| + |(\ x_n - x,\ y_k)|\,, \end{aligned}$$

de modo que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |(\ x_n - x,\ y)| \leq \frac{1}{k}\,(M + \|\ x\| + 1)\,.$$

Como k é arbitrário, resulta que, para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |(\ x_n - x,\ y)| \leq \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{n \to +\infty} (\ x_n - x,\ y) = 0,$$

o que prova o resultado enunciado. ■

Enfim, notemos que a convergência fraca implica a convergência forte quando ela ocorre em um subespaço de dimensão finita:

Proposição 4.8.10. *Seja $W \subset V$ um subespaço de dimensão finita. Se $\{\ x_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset W$ é tal que x_n converge fracamente para x em V então x_n converge fortemente para x em V.* ■

Prova. Como $\dim W = k < \infty$, podemos considerar uma base ortonormal $E = \{\ e_1,\ ...,\ e_k\}$ de W (corolário 4.2.15). Pondo

$$\alpha_{n,i} = (\ x_n,\ e_i) \quad ; \ \ \alpha_i = (\ x,\ e_i) \ \ ,$$

temos

$$\alpha_{n,i} \longrightarrow \alpha_i \ \text{ em } \mathbb{R} \ \text{ quando } n \longrightarrow +\infty \ .$$

Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $n_0\,(i, \varepsilon) > 0$ tal que

$$n \geq n_0\,(i, \varepsilon) \Longrightarrow |\ \alpha_{n,i} - \alpha_i\ | \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\ k}}.$$

Logo, para

$$n_0\,(\varepsilon) = \max\{\ n_0\,(i, \varepsilon) : 1 \leq i \leq k\ \}\,,$$

temos

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} (\alpha_{n,i} - \alpha_i)^2 \leq \varepsilon^2.$$

Seja

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \ .$$

Temos

$$\| x_n - \overline{x} \|^2 = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_{n,i} - \alpha_i)^2 ,$$

de forma que

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Longrightarrow \| x_n - \overline{x} \| \leq \varepsilon$$

e x_n converge fortemente para $\overline{x}$ em V. Decorre da proposição 4.8.5 que x_n converge fracamente para $\overline{x}$ em V e, por conseguinte, que $\overline{x} = x$ (proposição 4.8.6). Logo, x_n converge fortemente para x em V. ■

Podemos utilizar a convergência fraca para definir uma nova topologia, dita *topologia fraca*, por oposição à topologia definida precedentemente, que é chamada de *topologia forte*. Assim, as definições dadas precedentemente correspondem a bolas da topologia forte (definição 4.3.1) levando a conjuntos *fortemente* abertos (definição 4.3.2) ou fortemente *fechados* (definição 4.3.8) e subconjuntos fortemente densos (definição 4.3.16); seqüências *fortemente* convergentes (definição 4.5.2) ou *fortemente* de Cauchy (definição 4.5.19); funções *fortemente* contínuas (definição 4.4.2).

Para definir uma nova topologia, podemos, por exemplo, redefinir a noção de bola, o que implica uma redefinição dos abertos de V, segundo a definição 4.3.2, dos subconjuntos densos, segundo a definição 4.3.16, e dos funcionais contínuos, segundo a definição 4.4.2). Uma segunda possibilidade consiste em utilizar a caracterização sequencial de fechados, funcionais contínuos e subconjuntos densos: neste caso, basta redefinir a noção de convergência e utilizar o resultado 4.5.13 para redefinir os fechados de V - o que redefine também os abertos de V, os quais são os complementares dos fechados. Da mesma maneira, os subconjuntos densos são redefinidos utilizando o resultado 4.5.14 e os funcionais contínuos são redefinidos utilizando 4.5.16. Utilizaremos este último método com a convergência fraca para definir a topologia fraca e construir conjuntos *fracamente* fechados, subconjuntos *fracamente* densos, ou funcionais *fracamente* contínuos:

Definição 4.8.11 (fracamente fechado). *Seja V um espaço de Hilbert e seja $S \subset V$. Diremos que S é* fracamente fechado*, ou fechado para a topologia fraca de V, se e somente se para toda seqüência $\{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ tal que x_n converge fracamente para $x \in V$ temos $x \in S$.* ■

Definição 4.8.12 (aderência fraca). *Seja V um espaço de Hilbert e seja $S \subset V$. A* aderência fraca *de S é* $\overline{S} = \left\{ x \in V : \exists \ \{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset S \text{ tal que } x_n \rightharpoonup x \right\}$. ■

Definição 4.8.13 (fracamente denso). *Seja V um espaço de Hilbert e seja $S \subset V$. Diremos que S é* fracamente denso *ou denso para a topologia fraca de V se e somente*

a aderência fraca de S verifica $\overline{S} = V$, isto é, para todo $x \in V$, existe uma seqüência $\{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ tal que x_n converge fracamente para x. ■

Definição 4.8.14 (fracamente contínuo). *Seja $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Então J é* fracamente contínuo *se e somente para toda seqüência $\{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ tal que*

x_n converge fracamente para $x \in V$ temos $J(x_n) \longrightarrow J(x)$ em $\mathbb{R}$. ■

Como já indicamos, a topologia associada a esta definiçãotem mais seqüências convergentes (Cf. proposição 4.8.5), menos fechados e menos aplicações contínuas:

Proposição 4.8.15. *Seja $S \subset V$ fracamente fechado. Então S é fortemente fechado. Analogamente, seja $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional fracamente contínuo. Então J é fortemente contínuo.* ■

Prova. Seja $\{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ tal que x_n converge fortemente para $x \in V$. A proposição 4.8.5 mostra que x_n converge fracamente para x. Assim, se S é fracamente fechado, $x \in S$, de modo que S é também fortemente fechado. De maneira análoga, se $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é fracamente contínuo, então $J(x_n) \longrightarrow J(x)$ em $\mathbb{R}$, de modo que J é fortemente contínuo. ■

Temos também:

Proposição 4.8.16. *Seja $W \subset V$ um subespaço de dimensão finita. Então W é fracamente fechado em V.* ■

Prova. É uma conseqüência imediata da proposição 4.8.10. ■

4.9 Espaços Separáveis

Uma das conseqüências do teorema da projeção ortogonal é que, em certos espaços, é possível representar os elementos sob a forma de uma série. Lembremos inicialmente que

Definição 4.9.1 (família total enumerável). *Sejam V um espaço de Hilbert e $F = \{ \varphi_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ uma família* enumerável. *F é uma família* total *se e somente se F é* linearmente independente *e o conjunto das combinações lineares finitas dos elementos de F é* denso *em V, isto é,*

$$[F] = \left\{ v \in V : v = \sum_{n=1}^{k} a_n \varphi_{n_k} \ , \ a_n \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{N} \right\}$$

verifica $\overline{[F]} = V$. F é uma base hilbertiana de V *se e somente se, além disto, F é* ortonormal. ■

Definição 4.9.2 (espaço separável). *Seja V um espaço de Hilbert. V é separável se e somente se V tem uma família total* enumerável. ■

A noção de base hilbertiana é uma generalização da noção de base de um espaço vetorial (definição 4.2.6), onde os elementos são representados por combinações lineares finitas dos elementos da base: na base hilbertiana, os elementos são representados como limites de seqüências de tais combinações lineares. Todo espaço vetorial tem uma base (Teorema 4.2.7). De maneira análoga, todo espaço de Hilbert possue uma família total ortonormal - eventualmente não-enumerável - mas nem todo espaço vetorial tem uma base hilbertiana.

Num espaço separável, podemos considerar somente bases hilbertianas: basta aplicar o procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt a uma família total enumerável qualquer.

Teorema 4.9.3. *Sejam V um espaço de Hilbert separável e $G = \{ \psi_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ uma família total. Seja $F = \{ \varphi_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ definida por*

$$\varphi_n = \frac{\phi_n}{\| \phi_n \|} \quad ;$$

$$\phi_0 = \psi_0 \quad ; \quad \phi_n = \psi_n - \sum_{i=0}^{n-1} (\psi_n, \varphi_i) \varphi_i \ , \ para \ n \geq 1.$$

Então F é uma base hilbertiana de V. ■

Mostremos inicialmente o seguinte lema:

Lema 4.9.4. *Sejam V um espaço de Hilbert separável e $G = \{ \psi_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ uma família total. Seja $F = \{ \varphi_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ uma família linearmente independente tal que $\psi_n \in [\{ \varphi_0, ..., \varphi_n \}]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então F é uma família total.*■

Prova. Basta notar que $[G] \subset [F]$: temos

$$\psi_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,n}\varphi_i \Longrightarrow \sum_{n=1}^{k} a_n \psi_{n_k} = \sum_{n=1}^{k} a_n \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_{i,n_k}\varphi_i \in F$$

Assim

$$v \in G \Longrightarrow v = \sum_{n=1}^{k} a_n \psi_{n_k} \Longrightarrow v \in F.$$

Logo $V = \overline{[G]} \subset \overline{[F]} \subset V$, de modo que $\overline{[F]} = V$. ■

prova do teorema. Mostremos por indução que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi_n \neq 0, \; \psi_n \in [\{ \varphi_0, ..., \varphi_n \}] \; \text{ e } \; (\varphi_n, \varphi_j) = \delta_{j,n} \; \text{ para } j \leq n \; ,$$

onde

$$\delta_{j,n} = 0, \text{ se } j \neq n \; ; \; \delta_{j,n} = 1, \text{ se } j = n \; .$$

1) Seja $n = 0$.

a) Como a família G é total, temos $\psi_0 \neq 0$, pois G é linearmente independente. Assim, $\phi_0 = \psi_0 \neq 0$.

b) Além disto,

$$\varphi_0 = \frac{\psi_0}{\| \psi_0 \|} \Longrightarrow \psi_0 = \| \psi_0 \| \varphi_0 \in [\{ \varphi_0 \}] .$$

c) Enfim,

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \frac{(\phi_0, \phi_0)}{\| \phi_0 \|^2} = 1 = \delta_{0,0} \; .$$

Assim, a propriedade é válida para $n = 1$.

2) Suponhamos agora

$$\phi_n \neq 0,\ \psi_n \in [\ \{\ \varphi_0,\ ...,\ \varphi_n\ \}]\quad \text{e}\ \ (\ \varphi_n,\ \varphi_j\ ) = \delta_{j,n}\quad \text{para}\ j \leq n$$

e mostremos

$$\phi_{n+1} \neq 0,\ \ \psi_{n+1} \in [\ \{\ \varphi_0,\ ...,\ \varphi_{n+1}\ \}]\quad \text{e}\ \ (\ \varphi_{n+1},\ \varphi_j\ ) = \delta_{j,n+1}\quad \text{para}\ j \leq n{+}1\ .$$

a) Temos $\phi_{n+1} \neq 0$, pois

$$\phi_{n+1} = 0 \Longleftrightarrow \psi_{n+1} = \sum_{i\,=\,0}^{n} (\ \psi_{n+1},\ \varphi_i\ )\,\varphi_i\ \ \in [\ \{\ \psi_0,\ ...,\ \psi_n\ \}]\,.$$

Assim, se $\phi_{n+1} = 0$, então ψ_{n+1} é uma combinação linear de ψ_0, ..., ψ_n e G não é linearmente independente, o que é absurdo, pois G é total, logo linearmente independente.

b) Temos

$$\psi_{n+1} = \phi_{n+1} + \sum_{i\,=\,0}^{n} (\ \psi_n,\ \varphi_i\ )\,\varphi_i\ ,$$

de modo que

$$\psi_{n+1} = \|\ \psi_{n+1}\ \|\,\varphi_{n+1} + \sum_{i\,=\,0}^{n} (\ \psi_n,\ \varphi_i\ )\,\varphi_i\ , \in [\ \{\ \varphi_0,\ ...,\ \varphi_{n+1}\ \}]\,.$$

Para $j < n+1$,

$$(\ \phi_{n+1},\ \varphi_j\ ) = (\ \psi_{n+1},\ \varphi_j\ ) - \sum_{i\,=\,0}^{n} (\ \psi_{n+1},\ \varphi_i\ )\,\delta_{i,j},$$

isto é,

$$(\ \phi_{n+1},\ \varphi_j\ ) = (\ \psi_{n+1},\ \varphi_j\ ) - (\ \psi_{n+1},\ \varphi_j\ ) = 0.$$

Logo, para $j < n+1$:

$$(\ \varphi_{n+1},\ \varphi_j\ ) = \frac{(\ \phi_{n+1},\ \varphi_j\ )}{\|\ \phi_{n+1}\ \|}\ = 0$$

Por outro lado,

$$(\ \varphi_{n+1},\ \varphi_{n+1}\ ) = \frac{(\ \phi_{n+1},\ \phi_{n+1}\ )}{\|\ \phi_{n+1}\ \|^2}\ = 1.$$

e a propriedade é válida para o índice $n+1$.

Temos então:

(i) F é uma família ortonormal

(ii) F é uma família linearmente independente: se $\sum_{i\,=\,1}^{k} a_i \varphi_{n_i} = 0$ então a ortonormalidade mostra que

$$a_j = \left(\sum_{i\,=\,1}^{k} a_i \varphi_{n_i} ,\, \varphi_{n_j} \right) = \left(\, 0,\, \varphi_{n_j} \, \right) = 0 \text{ para } 1 \leq j \leq k \; .$$

(ii) $\psi_n \in [\ \{\ \varphi_0, \ldots, \varphi_n\ \}]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resultado do Lema 4.9.4 que F é uma base hilbertiana. ■

Temos também:

Teorema 4.9.5 (base hilbertiana incompleta)**.** *Sejam V um espaço de Hilbert separável e $\Delta = \{\ \delta_0, \ldots, \delta_k\ \} \subset V$ um conjunto finito ortonormal. Então existe uma base hilbertiana $F = \{\ \varphi_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ tal que $\varphi_n = \delta_n$ para $n \leq k$.* ■

Prova. Sejam $\Omega = \{\ \omega_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset V$ uma família total e $G = \{\ \psi_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ dada por

$$\psi_n = \delta_n \text{ , se } n \leq k \quad ; \quad \psi_n = \omega_{n-k} \text{ , se } n > k \quad .$$

Como $\Omega \subset G$, G é uma família total. Aplicando o procedimento do Teorema 4.9.3, $F = \{\ \varphi_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ é uma base hilbertiana. Além disto, $\varphi_n = \delta_n$ para $n \leq k$. ■

Corolário 4.9.6 (seqüência crescente de subespaços)**.** *Sejam V um espaço de Hilbert separável e $\Psi = \{\ \psi_0, \ldots, \psi_k\ \} \subset V$ um conjunto finito e linearmente independente. Então existe uma seqüência de subespaços vetoriais $\{\ V_n\ \}_{n\ \geq\ k}$ tal que $V_k = [\ \Psi\ ]$, $\overline{\bigcup_{n\ \geq\ k} V_n} = V$ e, para todo $n \geq k$: $\dim(V_n) = n$ e $V_n \subset V_{n+1}$.* ■

Prova. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt (Cf. Teorema 4.9.3), podemos construir um conjunto finito e ortonormal $\Delta = \{\ \delta_0, \ldots, \delta_k\ \}$ tal que $[\ \Psi\ ] = [\ \Delta\ ]$. Decorre do teorema da base hilbertiana incompleta (4.9.5) que existe uma base hilbertiana $F = \{\ \varphi_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ tal que $\varphi_n = \delta_n$ para $n \leq k$. Seja $V_n = [\ \{\ \varphi_0, \ldots, \varphi_n\ \}\ ]$. Temos $\dim(V_n) = n$ e $V_n \subset V_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disto, $V_k = [\ \Delta\ ] = [\ \Psi\ ]$. Enfim, $\overline{\bigcup_{n\ \geq\ k} V_n} = \overline{[\ F\ ]} = V$. ■

Num espaço separável, é possível representar cada elemento por uma série, como mostra o seguinte teorema:

Teorema 4.9.7. *Sejam V um espaço de Hilbert separável e $F = \{ \varphi_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ uma base hilbertiana de V. Então*

(i) $S = [\ \{ \varphi_0, \ ..., \ \varphi_k \ \}]$ *é um subespaço vetorial fechado*

(ii) *para todo $u \in V$, a projeção ortogonal de u sobre S é* $P_k u = \sum\limits_{n=0}^{k} (\ u, \ \varphi_n \ ) \varphi_n$

(iii) *para todo $u \in V$,* $u = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\ u, \ \varphi_n \ ) \varphi_n$ *, isto é, $P_k u \longrightarrow u$ fortemente em V quando $k \longrightarrow +\infty$;*

(iv) $\| \ u \ \|^2 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} | \ (\ u, \ \varphi_n \ ) \ |^2$.

(v) $u = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi_n \Longrightarrow a_n = (\ u, \ \varphi_n \ ), \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ *e* $\| \ u \ \|^2 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ *;*

(vi) $(\ u, \ v \ ) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\ u, \ \varphi_n \ ) (\ v, \ \varphi_n \ )$ *;*

(vii) $u = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi_n \in V$ *se e somente se* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ *converge.* ■

Prova.

1) Seja $S = [\ \{ \varphi_0, \ ..., \ \varphi_k \ \}]$. Então

$$v \in S \Longleftrightarrow v = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \varphi_i.$$

Como F é ortonormal, temos

$$\alpha_i = (\ v, \ \varphi_i \ ) \quad \text{e} \quad \| \ v \ \|^2 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^2 = \sum_{i=0}^{k} \ | \ (\ v, \ \varphi_i \ ) \ |^2 \ . \tag{4.11}$$

De maneira análoga, se $w = \sum\limits_{j=0}^{k} \beta_j \varphi_j$, então, por um lado, $\beta_j = (\ w, \ \varphi_j \ )$ e, por outro lado,

$$(\ v, \ w \ ) = \sum_{i, \ j=0}^{k} \alpha_i \beta_j (\ \varphi_i, \ \varphi_j \ ) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \beta_i = \sum_{i=0}^{k} (\ u, \ \varphi_i \ ) (\ w, \ \varphi_i \ ) \tag{4.12}$$

2) Prova de (i): Seja $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ uma seqüência tal que $u_n \to u$ em V. Como $u_n \in S$, temos da Eq. (4.11):

$$u_n = \sum_{i=0}^{k} (u_n, \varphi_i) \varphi_i \; .$$

A proposição 4.8.5 mostra que

$$(u_n, \varphi_i) \to (u, \varphi_i) \; .$$

Seja $P_k u = \sum\limits_{i=0}^{k} (u, \varphi_i) \varphi_i$. Temos

$$P_k u - u_n = \sum_{i=0}^{k} [\, (u, \varphi_i) - (u_n, \varphi_i) \,] \varphi_i \quad ,$$

de modo que, da Eq. (4.11),

$$\| P_k u - u_n \|^2 = \sum_{i=0}^{k} [\, (u, \varphi_i) - (u_n, \varphi_i) \,]^2 \to 0 \; .$$

Assim

$$\| P_k u - u \|^2 = \lim \| P_k u - u_n \|^2 = 0$$

e temos $u = P_k u \in S$, de modo que S é fechado.

3) Prova de (ii): Temos $P_k u \in S$ e, para todo $v = \sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i \varphi_i$, a Eq. (4.12) mostra que

$$(u - P_k u, v) = \sum_{i=0}^{k} (u - P_k u, \varphi_i) (v, \varphi_i) \, .$$

Ora,

$$(u - P_k u, \varphi_j) = (u, \varphi_j) - (u, \varphi_j) = 0, \text{ para } 1 \le j \le k,$$

de modo que $(u - P_k u, v) = 0$. Assim, a proposição 4.6.2 mostra que $P_k u$ é a projeção ortogonal de u sobre S.

4) Prova de (iii): como $P_k u \in S$, temos

$$(u - P_k u, P_k u) = 0 \Longrightarrow \| P_k u \|^2 = (u, P_k u) \, ,$$

de maneira que a desigualdade de Cauchy-Schwarz mostra que

$$\| P_k u \|^2 = (u, P_k u) \le \| P_k u \| \, \| u \| \; .$$

Assim, notando que $u = 0 \Longrightarrow P_k u = 0$, temos

$$\| P_k u \| \leq \| u \| \Longrightarrow \| P_k u \|^2 \leq \| u \|^2 .$$

Resulta que

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : \sum_{i\,=\,0}^{k} |\ (\ u, \varphi_i\ )\ |^2 \leq \| u \|^2 \quad .$$

Logo, a série de números reais $\sum\limits_{i\,=\,0}^{+\infty} |\ (\ u, \varphi_i\ )\ |^2$ é convergente. Resulta que a série de restos $R_k = \sum\limits_{i\,=\,k+1}^{+\infty} |\ (\ u, \varphi_i\ )\ |^2$ converge e que $R_k \to 0$ quando $k \to +\infty$. Assim,

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, k_0 > 0 \text{ tal que } k \geq k_0 \Longrightarrow R_k \leq \varepsilon^2 .$$

Ora, para $n > k$:

$$\| P_n u - P_k u \|^2 = \sum_{i\,=\,k+1}^{n} |\ (\ u, \varphi_i\ )\ |^2 \leq R_k .$$

Logo,

$$n \geq k \geq k_0 \Longrightarrow \| P_n u - P_k u \|^2 \leq \varepsilon^2 \Longrightarrow \| P_n u - P_k u \| \leq \varepsilon ,$$

de modo que $\{ P_k u \}_{k\,\in\,\mathbb{N}} \subset V$ é de Cauchy. Como V é completo, existe $U \in V$ tal que $P_k u \to U$ quando $k \to +\infty$.

Seja $\varphi_i \in F$. Para todo $k \geq i$, temos $\varphi_i \in S$, de modo que a proposição 4.6.2 mostra que

$$\forall\, k \geq i\ :\ (\ u - P_k u, \varphi_i\ ) = 0.$$

Assim, passando ao limite para $k \to +\infty$, temos $(\ u - U, \varphi_i\ ) = 0$ (Cf. proposição 4.8.5). Como i é arbitrário, resulta que

$$\forall\, i \in \mathbb{N}\ :\ (\ u - U, \varphi_i\ ) = 0 \Longrightarrow (\ u - U, v) = 0, \forall\, v \in [\ F\ ]\ .$$

Seja $v \in V$. Como $[\ F\ ]$ é denso em V, existe uma seqüência $\{ v_k \}_{k\,\in\,\mathbb{N}} \subset [\ F\ ]$ tal que $v_k \to v$. Temos então (Cf. proposição 4.8.5):

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\ :\ (\ u - U, v_k) = 0 \Longrightarrow (\ u - U, v) = 0\ .$$

Como v é arbitrário, temos

$$(\ u - U, v) = 0, \forall\, v \in V \quad .$$

Ora, $v = u - U \in V$, de modo que

$$\| \ u - U \ \| = 0 \Longrightarrow u = U = \sum_{i\,=\,0}^{+\infty} (\ u,\ \varphi_i\ )\,\varphi_i\ .$$

5) Prova de (iv): Da proposição 4.5.3, temos $\| \ P_k u \ \| \to \| \ U \ \| = \| \ u\|$ quando $k \to +\infty$. Assim,

$$\| \ u\|^2 = \lim_{k\to+\infty} \ \| \ P_k u \ \|^2 = \sum_{n\,=\,0}^{+\infty} |\ (\ u,\ \varphi_n\ )\ |^2\ .$$

6) Prova de (v): se $u = \sum\limits_{n\,=\,0}^{+\infty} a_n \varphi_n$, então

$$(\ u,\ \varphi_i\ ) = \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{n\,=\,0}^{k} a_n \varphi_n,\ \varphi_i \right) = a_i\ .$$

Assim, (iv) mostra que

$$\sum_{n\,=\,0}^{+\infty} a_n^2 = \| \ u \ \|^2\ .$$

7) Prova de (vi): Temos $P_k u \to u$ e $P_k v \to v$ quando $k \to +\infty$. Assim, da proposição 4.5.3, temos

$$(\ u,\ v\ ) = \lim_{k\to+\infty} (\ P_k u,\ P_k v\ )$$

Utilizando (ii) e a Eq. (4.12), temos

$$(\ u,\ v\ ) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n\,=\,0}^{k} (\ u,\ \varphi_n\ )(\ v,\ \varphi_n\ )\,,$$

o que prova o resultado enunciado.

8) Prova de (vii): Mostremos $(\Longrightarrow)$: se $u \in V$, (v) mostra que

$$\sum_{n\,=\,0}^{+\infty} a_n^2 = \| \ u \ \|^2\ ,$$

de modo que a série é convergente.

Mostremos ($\Longleftarrow$) :se a série $\sum\limits_{j\,=\,0}^{+\,\infty} a_j^2$ converge, então a série de restos $R_k = \sum\limits_{i\,=\,k+1}^{+\,\infty} a_j^2$ também converge e $R_k \to 0$ quando $k \to +\infty$. Assim,

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\; k_0 > 0 \text{ tal que } k \geq k_0 \Longrightarrow R_k \leq \varepsilon^2 \ .$$

Seja $u_k = \sum\limits_{j\,=\,0}^{k} a_j \varphi_j$. Temos

$$\| \ u_m - u_k \ \|^2 = \sum_{i\,=\,k+1}^{n} a_j^2 \leq R_k \ .$$

Logo,

$$n \geq k \geq k_0 \Longrightarrow \| \ u_m - u_k \ \|^2 \leq \varepsilon^2 \Longrightarrow \| \ u_m - u_k \ \| \leq \varepsilon \ ,$$

de modo que $\{ \ u_k \ \}_{k\,\in\,\mathbb{N}} \subset V$ é de Cauchy. Como V é completo, existe $u \in V$ tal que $u_k \to u$ quando $k \to +\infty$. Assim,

$$u = \sum_{j\,=\,0}^{+\,\infty} \alpha_j \varphi_j \in V$$

e temos o resultado enunciado.

■

Um dos resultados interessantes sobre os espaços separáveis é o seguinte:

Teorema 4.9.8. *Toda seqüência limitada em um espaço de Hilbert separável admite uma subseqüência fracamente convergente, isto é, se* V *é um espaço de Hilbert separável e* $\{ \ u_n \ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset V$ *é uma seqüência tal que* $\| \ u_n \ \| \leq M$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então existem* $\{ \ u_{n_k} \ \}_{k\,\in\,\mathbb{N}} \subset \{ \ u_n \ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ *e* $u \in V$ *tais que* $u_{n_k} \rightharpoonup u$ *em* V.■

Corolário 4.9.9. *Toda família limitada em um espaço de Hilbert separável admite uma subseqüência fracamente convergente, isto é, se* V *é um espaço de Hilbert separável e* $\{ \ u_\delta \ \}_{0\,<\,\delta\,<\,\delta_{\max}}$ *é uma seqüência tal que* $\| \ u_\delta \ \| \leq M$ *para todo* δ *tal que* $0 < \delta < \delta_{\max}$ *então existem* $\left\{ \ u_{\delta(k)} \ \right\}_{k\,\in\,\mathbb{N}} \subset \{ \ u_\delta \ \}_{0\,<\,\delta\,<\,\delta_{\max}}$ *e* $u \in V$ *tais que* $\delta\,(k) \to 0+$ *e* $u_{\delta(k)} \rightharpoonup u$ *em* V *quando* $k \longrightarrow +\infty$*. De maneira análoga, se* $\{ \ u_\lambda \ \}_{\lambda\,>\,\lambda_0}$ *é uma seqüência tal que* $\| \ u_\lambda \ \| \leq M$ *para todo* λ *tal que* $\lambda > \lambda_0$ *então existem* $\left\{ \ u_{\lambda(k)} \ \right\}_{k\,\in\,\mathbb{N}} \subset \{ \ u_\lambda \ \}_{\lambda > \lambda_0}$ *e* $u \in V$ *tais que* $\lambda\,(k) \to +\infty$ *e* $u_{\lambda(k)} \rightharpoonup u$ *em* V *quando* $k \longrightarrow +\infty$. ■

prova do Teorema 4.9.8. Seja $F = \{ \varphi_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ uma base hilbertiana de V.

1) Vamos construir, por indução uma subseqüência tal que

$$\forall\, i \in \mathbb{N} : (\, u_{n_k},\, \varphi_i \,) \to \alpha_i \ \text{ em } \mathbb{R}.$$

Para tanto, mostremos por indução que, para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\exists\ \{ u_{i,k} \}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} : (\, u_{i,k},\, \varphi_j \,) \to \alpha_j \ \text{ em } \mathbb{R} \text{ para todo } j \leq i.$$

a) Consideremos $\alpha_{0,n} = (\, u_n,\, \varphi_0 \,)$. Temos, da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\ (\, u_n,\, \varphi_0 \,)\ | \leq \|\ u_n\ \|\ \|\ \varphi_0\ \| \leq M,$$

de modo que $\{ \alpha_{0,n} \}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é uma seqüência de números reais limitada. Assim, ela admite uma subseqüência convergente:

$$\{ \alpha_{0,n_k} \}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{ \alpha_{0,n} \}_{n \in \mathbb{N}} \ \text{ tal que } \ (\, u_{n_k},\, \varphi_0 \,) = \alpha_{0,n_k} \to \alpha_0 \ \text{ em } \mathbb{R}.$$

Assim, definindo $u_{0,k} = u_{n_k}$, temos

$$\{ u_{0,k} \}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} : (\, u_{0,k},\, \varphi_0 \,) \to \alpha_0 \ \text{ em } \mathbb{R}$$

e a propriedade é válida para $i = 0$.

b) Suponhamos a propriedade válida para o índice i:

$$\exists\ \{ u_{i,k} \}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} : (\, u_{i,k},\, \varphi_j \,) \to \alpha_j \ \text{ em } \mathbb{R} \text{ para todo } j \leq i.$$

Consideremos $\alpha_{i+1,n} = (\, u_{i,n},\, \varphi_{i+1} \,)$. Temos, da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\ (\, u_{i,n},\, \varphi_{i+1} \,)\ | \leq \|\ u_{i,n}\ \|\ \|\ \varphi_{i+1}\ \| \leq M,$$

de modo que $\{ \alpha_{i+1,n} \}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é uma seqüência de números reais limitada. Assim, ela admite uma subseqüência convergente

$$\{ \alpha_{i+1,n_k} \}_{k \in \mathbb{N}} \ \text{ tal que } \ (\, u_{i,n_k},\, \varphi_{i+1} \,) = \alpha_{i+1,n_k} \to \alpha_{i+1} \ \text{ em } \mathbb{R}.$$

Definindo $u_{i+1,k} = u_{i,n_k}$, temos

$$\{ u_{i+1,k} \}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{ u_{i,k} \}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\{ u_{i+1,k} \}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{ u_{i,k} \}_{k \in \mathbb{N}} \Longrightarrow (\, u_{i+1,k},\, \varphi_j \,) \to \alpha_j \ \text{ em } \mathbb{R} \text{ para todo } j \leq i.$$

$$(\, u_{i+1,k},\, \varphi_{i+1} \,) = \ (\, u_{i,n_k},\, \varphi_{i+1} \,) = \alpha_{i+1,n_k} \to \alpha_{i+1} \ \text{ em } \mathbb{R}.$$

Assim, a propriedade é válida para o índice $i + 1$.

c) Resulta, por indução, que, para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\exists \ \{ \ u_{i,k} \ \}_{k \ \in \ \mathbb{N}} \subset \{ \ u_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}} : (\ u_{i,k}, \ \varphi_j \ ) \to \alpha_j \quad \text{em } \mathbb{R} \text{ para todo } j \leq i.$$

2) Seja $u_{n(p)} = u_{p,p}$. Por construção, $\left\{ \ u_{n(k)} \ \right\}_{k \ \in \ \mathbb{N}} \subset \{ \ u_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}}$. Seja $j \in \mathbb{N}$:

$$p \geq j \Longrightarrow u_{n(p)} \in \{ \ u_{j,k} \ \}_{k \ \in \ \mathbb{N}} \Longrightarrow \left(\ u_{n(p)}, \ \varphi_j \ \right) \to \alpha_j \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

3) Mostremos que $u = \sum\limits_{j \ = \ 0}^{+ \ \infty} \alpha_j \varphi_j \in V$. Para tanto, basta mostrar que a série de números reais $\sum\limits_{j \ = \ 0}^{+ \ \infty} \alpha_j^2$ é convergente (Cf. Teorema 4.9.7).(vii)).

a) Seja $U_k = \sum\limits_{j \ = \ 0}^{k} \alpha_j \varphi_j$. Temos

$$(\ U_k, \ \varphi_j \ ) = \alpha_j \quad ; \quad \| \ U_k \ \|^2 = \sum_{j \ = \ 0}^{k} \alpha_j^2 \quad .$$

Além disto,

$$\left(\ u_{n(p)}, \ U_k \ \right) = \sum_{j \ = \ 0}^{k} \left(\ u_{n(p)}, \ \varphi_j \ \right) (\ U_k, \ \varphi_j \ ) = \sum_{j \ = \ 0}^{k} \alpha_j \left(\ u_{n(p)}, \ \varphi_j \ \right) \quad ,$$

de modo que

$$\left(\ u_{n(p)}, \ U_k \ \right) \to \| \ U_k \ \|^2 \quad \text{quando } p \to +\infty \ .$$

b) Assim, existe $p_0 \, (\varepsilon) > 0$ tal que

$$p \geq p_0 \, (\varepsilon) \Longrightarrow \left| \ \left(\ u_{n(p)}, \ U_k \ \right) - \| \ U_k \ \|^2 \ \right| \leq \varepsilon \ . \tag{4.13}$$

Como

$$\| \ U_k \ \|^2 = \left| \ \| \ U_k \ \|^2 - \left(\ u_{n(p)}, \ U_k \ \right) + \left(\ u_{n(p)}, \ U_k \ \right) \ \right| \ ,$$

temos

$$\| \ U_k \ \|^2 \leq \left| \ \left(\ u_{n(p)}, \ U_k \ \right) - \| \ U_k \ \|^2 \ \right| + \left| \ \left(\ u_{n(p)}, \ U_k \ \right) \ \right| \ , \tag{4.14}$$

Por outro lado, $\left\{ u_{n(p)} \right\}_{p \in \mathbb{N}} \subset \{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}}$, de modo que

$$\forall\, p \in \mathbb{N} : \left\| u_{n(p)} \right\| \leq M$$

e a desigualdade de Cauchy_Schwarz mostra que

$$\left| \left(u_{n(p)}, U_k \right) \right| \leq \left\| u_{n(p)} \right\| \| U_k \| \leq M \| U_k \| .$$

Assim, as desigualdades (4.13) e (4.14) mostram que

$$\| U_k \|^2 \leq M \| U_k \| + \varepsilon \ .$$

Como $\varepsilon > 0$ é qualquer, temos

$$\| U_k \|^2 \leq M \| U_k \| \Longrightarrow \| U_k \| \leq M \ .$$

c) Logo, a série de números reais $\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j^2$ é convergente.

5) Do Teorema 4.9.7.(v), temos $(u, \varphi_j) = \alpha_j$, de modo que

$$\left(u_{n(p)}, \varphi_j \right) \to (u, \varphi_j) \quad \text{quando } p \to +\infty \ .$$

Resulta que

$$\forall\, v \in [\, F \,] : \left(u_{n(p)}, v \right) \to (u, v)$$

Como $\left\| u_{n(p)} \right\| \leq M$ para todo $p \in \mathbb{N}$ e $[\, F \,]$ é denso em V, a proposição 4.8.9 mostra que $u_{n(p)} \rightharpoonup u$ em V.

■

prova do Corolário 4.9.9. Basta considerar a seqüência $\{ v_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $v_n = u_{1/n}$ (para a família $\{ u_\delta \}_{0 < \delta < \delta_{\max}}$) ou $v_n = u_n$ (para a família $\{ u_\lambda \}_{\lambda > \lambda_0}$). $\{ v_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada e, por conseguinte, admite uma subseqüência fracamente convergente. ■

Capítulo 5

Conjuntos Convexos

5.1 Hiperplanos

Certas classes de subconjuntos desempenham um papel essencial na teoria que vamos desenvolver. Uma delas é a classe dos *hiperplanos*.No que segue, V é um espaço de Hilbert de produto escalar $(\bullet , \bullet)$ e norma $\| \bullet \|$.

Definição 5.1.1 (hiperplano). *Seja $H \subset V$. H é um hiperplano se e somente se existem $u \in H$ e $\varphi \in V$ tais que*

$$\begin{aligned} W &= H - u = \{ w = h - u : \; h \in H\} \text{ é um subespaço vetorial de } V \, ; \\ V &= W + \mathbb{R}\varphi = \{ w + \alpha\varphi : w \in W, \; \alpha \in \mathbb{R}\} \, , \; W \neq V \; . \; \blacksquare \end{aligned}$$

Assim, um hiperplano é uma translação de um subespaço vetorial (primeira condição) de codimensão 1 (segunda condição). Temos também

Lema 5.1.2. *Sejam H um hiperplano, $u \in H$, $\varphi \in V$ tal que $V = (H - u) + \mathbb{R}\varphi$, $H - u \neq V$. Então, $\varphi \notin H$, $\varphi \neq 0$, $\varphi \notin H - u$. Além disto, para todo $v \in V$, existe um único par $(h, \alpha) \in H \times \mathbb{R}$ tal que $v = h - u + \alpha\varphi$.* $\blacksquare$

Prova. Suponhamos $\varphi \in H$: então $H + \mathbb{R}\varphi = H$, de modo que $(H - u) + \mathbb{R}\varphi = H - u$ e $V = H - u$, o que contradiz a hipótese $H - u \neq V$.

Suponhamos $\varphi \in H - u$. Analogamente, $(H - u) + \mathbb{R}\varphi = H - u$, de modo que $V = H - u$, o que contradiz a hipótese $H - u \neq V$.

Suponhamos $\varphi = 0$. Neste caso, $\mathbb{R}\varphi = 0$, de modo que $V = (H - u) + \mathbb{R}\varphi = H - u$, o que também contradiz a hipótese $H - u \neq V$.

Como $V = (H - u) + \mathbb{R}\varphi$, a existência de (h, α) é imediata. Mostremos a unicidade: sejam (h_1, α_1) e (h_2, α_2) dois pares tais que

$$h_1 - u + \alpha_1\varphi = v = h_2 - u + \alpha_2\varphi \ .$$

Então $h_1 - h_2 = (\alpha_2 - \alpha_1)\,\varphi$. Como $W = H - u$ é um subespaço vetorial de V, temos $h_1 - h_2 = (h_1 - u) - (h_2 - u) \in W$. Se $\alpha_2 \neq \alpha_1$, então

$$\varphi = \frac{h_1 - h_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \in W = H - u \ ,$$

o que é absurdo (pois $\varphi \notin H - u$). Assim, $\alpha_2 = \alpha_1 \implies h_1 - h_2 = 0$, o que estabelece a unicidade de (h, α). ■

Os hiperplanos podem ser caracterizados através das aplicações lineares:

Proposição 5.1.3. *H é um hiperplano se e somente se existem $\eta \in \mathbb{R}$ e uma aplicação linear L: $V \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$L \neq 0 \quad e \quad H = L^{-1}(\eta) = \{\ v \in V \ \text{tal que} \ L(v) = \eta\} \ .$$

Além disto, $\forall\ u \in H \ : \ H - u = N(L)$. ■

Prova. ($\implies$) : Seja H um hiperplano. Então $V = W + \mathbb{R}\varphi$, $W = H - u \neq V$. O Lema 5.1.2 mostra que todo $v \in V$ se decompõe de maneira única sob a forma $v = h - u + \alpha\varphi$. Seja L: $V \longrightarrow \mathbb{R}$ a aplicação definida por $L(v) = L(h - u + \alpha\varphi) = \alpha$. Temos

$$\begin{aligned} L(\ \lambda(h_1 - u + \alpha_1 v_1) + (h_2 - u + \alpha_2 v_2)) &= \lambda\alpha_1 + \alpha_2 = \lambda L(\ h_1 - u + \alpha_1 v_1) \\ &\quad + L(\ h_2 - u + \alpha_2 v_2) \ , \end{aligned}$$

de modo que L é linear. Como $L(\varphi) = 1$, temos $L \neq 0$ e $v = h - u + L(v)\,\varphi$.

Temos $W \subset N(L)$: se $w \in W$, então existe $h \in H$ tal que $w = h - u = h - u + 0 \times \varphi$. Assim $L(w) = 0$. Reciprocamente, $N(L) \subset W$: seja $w \in V$ tal que $L(w) = 0$. Então existe $h \in H$ tal que $w = h - u + L(w)\,\varphi = h - u \in W$.

Seja $\eta = L(\ u)$. Temos

$$h \in H \iff h - u \in W \iff L(\ h - u) = 0 \iff L(\ h) = L(\ u) = \eta,$$

($\Longleftarrow$) : Seja H tal que existem $a \in \mathbb{R}$ e uma aplicação linear L: $V \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$L \neq 0, \ \text{e} \ H = \{\ v \in V \ \text{tal que} \ L(v) = \eta\} \ .$$

Como $L \neq 0$, existe pelo menos um elemento $v_0 \in V$ tal que $L(v_0) = \alpha_0 \neq 0$. Assim, $W = N(L) \neq V$.

Seja $\varphi = v_0/\alpha_0$. Temos $L(\varphi) = 1$ e, para todo $v \in V$, $L(\ v - L(v)\,\varphi) = L(\ v) - L(v)\,L(\varphi) = 0$. Assim, $V \subset W + \mathbb{R}\varphi \implies V = W + \mathbb{R}\varphi$.

Enfim, de maneira análoga àquela utilizada na prova da implicação direta

$$h \in H \iff L(\ h) = L(\ u) = \eta \iff L(\ h - u) = 0 \iff h - u \in W.$$

■

Temos também

Proposição 5.1.4. *Seja $\eta \in \mathbb{R}$ e $H = L^{-1}(\eta)$ um hiperplano. Então as condições seguintes são equivalentes*

a) H é fechado;

b) $A = \{\ v \in V$ tal que $L(v) < \eta\}$ satisfaz $int(\ A) \neq \varnothing$

c) $B = \{\ v \in V$ tal que $L(v) > \eta\}$ satisfaz $int(\ B) \neq \varnothing$

d) $L : V \to \mathbb{R}$ é contínua

e) $N(L)$ é fechado. ■

Prova. $(\ a) \implies b)\ )$: Temos $A \neq \varnothing$: como H é um hiperplano, existe $u \in H$ e, por outro lado, $H \neq V$: $\exists\ z \in V$ tal que $z \notin H$, isto é, $L(\ z\ ) \neq \eta$. Seja $a = (\ 1 - L(\ u\ )\ )\,u - L(\ z\ )\,z$. Temos $L(\ a\ ) = \eta - \left(\eta^2 + [L(\ z\ )]^2\right)$. Ora, $L(\ z\ ) \neq \eta$, de modo que $\eta^2 + [L(\ z\ )]^2 \neq 0$. Assim, $L(\ a) < \eta$ e $a \in A$.

Mostremos por absurdo que $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset A$: suponhamos que $\forall\ n > 0$: $\exists\ x_n \notin A$ tal que $\|\ x_n - a\| \leq 1/n$. Como $x_n \notin A$, temos $L\ (\ x_n) \geq \eta$, de modo que $L(\ x_n) \geq \eta > L(\ a)$. Assim, $0 < \eta - L(\ a\ ) < L(\ x_n\ ) - L(\ a\ )$ e

$$\theta_n = \frac{\eta - L(\ a\ )}{L(\ x_n\ ) - L(\ a\ )} \implies 0 < \theta_n < 1\ .$$

Seja $y_n = \theta_n x_n + (1 - \theta_n)\,a$. Como L é linear, temos $L(\ y_n\ ) = L(\ a\ ) + \theta_n\,(L(\ x_n\ ) - L(\ a\ )) = \eta$, de modo que $y_n \in H$. Ora, $\|\ y_n - a\| = \theta_n \|\ x_n - a\| \leq \theta_n/n \leq 1/n \to 0$. Resulta que $y_n \to a$ e, por conseguinte, $a \in \overline{H} = H$ (pois H é fechado). Temos então $a \in H \implies \eta = L(\ a\ ) < \eta$, o que é absurdo. Logo, $\exists\ \varepsilon = 1/n > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset A$.

$(\ b) \implies c)\ )$: Como H é um hiperplano, existe $u \in H$. Seja $y = 2u - x$. Temos $L(\ y\ ) - \eta = 2L(\ u\ ) - L(\ x\ ) - \eta = \eta - L(\ x\ )$. Assim, $L(\ y\ ) > \eta \iff L(\ x\ ) < \eta$, isto é, $x \in A \iff y \in B$.

Como $int(\ A) \neq \varnothing$, existem $a \in A$, $\varepsilon > 0$, tais que $B_\varepsilon(a) \subset A$. Seja $b = 2u - a$: como vimos acima, $b \in B$. Mostremos que $B_\varepsilon(b) \subset B$: seja $y \in B_\varepsilon(b)$ e $x = 2u - y$. Temos $\|\ x - a\ \| = \|\ (2u - y) - (2u - b)\ \| = \|\ y - b\ \| \leq \varepsilon$, de modo que $x \in B_\varepsilon(a) \subset A$. Assim, $x \in A$, o que - como vimos acima - implica que $y \in B$. Temos então $B_\varepsilon(b) \subset B$, de modo que $b \in int(\ B)$.

(c) $\Longrightarrow$ d)) : Como $int\,(B) \neq \varnothing$, existem $b \in B$, $\varepsilon > 0$, tais que $B_\varepsilon(b) \subset B$. Suponhamos $\| L \| = +\infty$. Então existe uma seqüência $\{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ tal que $\| x_n \| \leq 1/n$ e $L(x_n) \to +\infty$. Seja $b_n = b - x_n$. Temos então $\| b_n - b \| \leq 1/n$, de modo que $n \geq 1/\varepsilon \Longrightarrow b_n \in B_\varepsilon(b) \subset B$. Logo, $n \geq 1/\varepsilon \Longrightarrow L(b_n) > \eta$. Mas então $L(b) - L(x_n) \geq \eta$, de modo que $L(b) - \eta \geq L(x_n) \to +\infty$. Assim, $L(b) - \eta \geq +\infty$, o que é absurdo.

(d) $\Longrightarrow$ e)) : Como L é contínua, temos $\| L \| < \infty$. Seja $\{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset N(L)$ tal que $x_n \to x$ em V. Então $L(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\| L(x) \| = \| L(x) - L(x_n) \| \leq \| L \| \, \| x_n - x \| \to 0$$

e $L(x) = 0 \Longrightarrow x \in N(L)$. Assim, $N(L)$ é fechado.

(e) $\Longrightarrow$ a)) : Como H é um hiperplano, existe $u \in H$ tal que $H = u + N(L)$. Assim, H é fechado. ■

A proposição 5.1.4 implica o resultado seguinte:

Corolário 5.1.5. *Seja $\eta \in \mathbb{R}$ e $H = L^{-1}(\eta) \subset V$ um hiperplano. Então temos a alternativa seguinte: ou H é fechado ou H é denso em V.* ■

Prova. Suponhamos que H não é denso. Então $\overline{H} \neq V$, de modo que existe $x \in V - \overline{H}$. Temos $x \notin H$, de modo que $L(x) \neq \eta$. Assim, $L(x) < \eta$ ou $L(x) > \eta$. Suponhamos, sem perda de generalidade que $L(x) < \eta$. Seja $A = \{ v \in V \text{ tal que } L(v) < \eta \}$. Mostremos que $x \in int\,(A)$, de modo que $int\,(A) \neq \varnothing$ e o resultado decorrerá da proposição 5.1.4.

Como $\overline{H}$ é fechado, $V - \overline{H}$ é aberto, de modo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset V - \overline{H}$. Basta mostrar que $B_\varepsilon(x) \subset A$, isto é, que

$$\forall \ y \in B_\varepsilon(x) \quad : \quad L(y) < \alpha \, .$$

Com efeito, se $y \in B_\varepsilon(x)$ e $L(y) \geq \alpha$, então $L(y) \geq \alpha > L(x)$, de modo que $L(y) - L(x) \geq \alpha - L(x) > 0$ e

$$\theta = \frac{\alpha - L(x)}{L(y) - L(x)} \Longrightarrow 0 \leq \theta < 1.$$

Assim, a convexidade de $B_\varepsilon(x)$ (proposição 5.2.5) mostra que $z = \theta y + (1-\theta)\,x \in B_\varepsilon(x)$. Ora,

$$L(z) = L(x) + \theta\,(L(y) - L(x)) = \alpha,$$

de modo que $z \in H$. Como $z \in B_\varepsilon(x)$, temos $z \in H \cap B_\varepsilon(x)$, o que é absurdo, pois $B_\varepsilon(x) \subset V - \overline{H} \Longrightarrow H \cap B_\varepsilon(x) = \varnothing$. Logo $B_\varepsilon(x) \subset A$ e, por conseguinte, $x \in int\,(A)$. ■

Outra caracterização bastante útil dos hiperplanos é baseada na noção de subespaço afim:

Definição 5.1.6 (subespaço afim)**.** *Seja* V *um espaço de Hilbert real.* $S \subset V$ *é um subespaço afim se e somente se*

$$\forall\ u \in S \quad e \quad v \in S\ :\ \{\ \lambda u + (1-\lambda)\, v\ :\lambda \in \mathbb{R}\ \} \subset S\ .\ \blacksquare$$

Temos

Proposição 5.1.7. *H é um hiperplano se e somente se H é um subespaço afim e existem $u \in H$ e $\varphi \in V$ tais que $H - u \neq V$ e $V = H - u + \mathbb{R}\varphi$.* $\blacksquare$

Prova. $(\Longrightarrow)$: A existência de u e φ decorre da definição de hiperplano. Mostremos que H é um subespaço afim: sejam h_1 e h_2 dois elementos de H e $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos $h_1 - u \in W$ e $h_2 - u \in W$. Como W é um subespaço vetorial, $\lambda\,(h_1 - u) + (1-\lambda)\,(h_2 - u) = \lambda h_1 + (1-\lambda)\,h_2 - u \in W$. Logo, $\lambda h_1 + (1-\lambda)\,h_2 \in W + u = H$ e H é um subespaço afim.

$(\Longleftarrow)$: Basta mostrar que $W = H - u$ é um subespaço vetorial:

1) Temos $0 \in W$, pois $u \in H \implies u - u \in H - u = W$.

2) Sejam $w_1 \in W$ e $w_2 \in W$. Temos $w_1 = h_1 - u$, $w_2 = h_2 - u$, onde $h_1 \in H$ e $h_2 \in H$. Como H é um subespaço afim, $2h_1 + (1-2)u = 2h_1 - u \in H$ e, de maneira análoga, $2h_2 - u \in H$. Assim

$$w_1 + w_2 + u = h_1 + h_2 - u = \frac{1}{2}\,(2h_1 - u) + \frac{1}{2}\,(2h_2 - u) \in H\ .$$

Assim, $w_1 + w_2 = (w_1 + w_2 + u) - u \in W = H - u$.

3) Sejam $w \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos $w = h - u$, onde $h \in H$. Como H é um subespaço afim, $\lambda h + (1-\lambda)\,u \in H$, de modo que $\lambda w = [\lambda h + (1-\lambda)\,u] - u \in H - u = W$.

$\blacksquare$

Notemos que um hiperplano $H = L^{-1}(\eta)$ separa o espaço vetorial em semi-espaços:

Definição 5.1.8. *$W \subset V$ é um semi-espaço de V se e somente se existem $\eta \in \mathbb{R}$ e um funcional linear $L : V \to \mathbb{R}$ tais que*

$$W = \ \{\ u \in V\ \mid L\,(u) \geq \eta\ \}\quad .\blacksquare$$

Assim, para

$$H^{+} = \{ u \in V \mid L(u) \geq \eta \}$$

e

$$H^{-} = \{ u \in V \mid -L(u) \geq -\eta \} = \{ u \in V \mid L(u) \leq \eta \},$$

temos $H^{-} \cup H^{+} = V$; $H^{-} \cap H^{+} = H$. Temos

Teorema 5.1.9. *Seja* $W = \{ u \in V \mid L(u) \geq \eta \}$ *um semi-espaço de* V*. Então são equivalentes:*

(i) $L \in V'$

(ii) W *é fechado.*

(iii) $S = \{ u \in V \mid L(u) \leq \eta \}$ *é fechado.*■

Prova.

1) (i) $\Longrightarrow$ (ii): basta utilizar que $L(u_n) \to L(u)$ quando $u_n \to u$ em V. Seja $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset W$ tal que $u_n \to u$ em V. Então

$$L(u) = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{L(u_n)}_{\geq \eta} \geq \eta,$$

de modo que $u \in W$.

2) (ii) $\Longrightarrow$ (i): Seja $A = \{ u \in V \mid L(u) < \eta \}$. Temos $A = V - W$. Se $A = \varnothing$ então $W = V$ e W é fechado. Suponhamos $A \neq \varnothing$. Como W é fechado, A é aberto. Assim, $int(A) = A$ (Cf. Corolário 4.3.7). Logo $int(A) \neq \varnothing$ e o resultado decorre da proposição 5.1.4.

3) (i) $\Longrightarrow$ (iii): basta utilizar novamente que $L(u_n) \to L(u)$ quando $u_n \to u$ em V. Seja $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ tal que $u_n \to u$ em V. Então

$$L(u) = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{L(u_n)}_{\leq \eta} \leq \eta,$$

de modo que $u \in S$.

4) (iii) $\Longrightarrow$ (i): Seja $B = \{ u \in V \mid L(u) > \eta \}$. Temos $B = V - W$. Se $B = \varnothing$ então $S = V$ e S é fechado. Suponhamos $B \neq \varnothing$. Como S é fechado, B é aberto. Assim, $int(B) = B$ (Cf. Corolário 4.3.7). Logo $int(B) \neq \varnothing$ e o resultado decorre da proposição 5.1.4.

■

Temos também:

Proposição 5.1.10. *Seja* $W = \{ u \in V \mid L(u) \geq \eta \}$ *um semi-espaço de* V. *Então* $W = V$ *se e somente se* $L = 0$ *e* $\eta \leq 0$. ■

Prova. Se $L = 0$ e $\eta \leq 0$, então

$$u \in V \Longrightarrow L(u) = 0 \geq \eta \Longrightarrow u \in W .$$

Assim, $V \subset W$. Como $W \subset V$, temos $W = V$.
Suponhamos $W = V$. Seja $u \in V$. Então

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : nL(u) = L(nu) \geq \eta \Longrightarrow L(u) \geq \frac{1}{n}\eta .$$

Tomando o limite para $n \to +\infty$, temos $L(u) \geq 0$. De maneira análoga,

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : -nL(u) = L(-nu) \geq \eta \Longrightarrow L(u) \leq -\frac{1}{n}\eta .$$

Assim, tomando o limite para $n \to +\infty$, temos $L(u) \leq 0$. Logo, $L(u) = 0$ para todo $u \in V$ e temos $L = 0$. Assim, temos também $\eta \leq 0 = L(u)$. ■

5.2 Conjuntos Convexos

Definição 5.2.1 (segmento de u a v)**.** *Sejam* V *um espaço de Hilbert real,* $u \in V$, $v \in V$. *O segmento fechado de* u *a* v *é o conjunto*

$$[\, u,\ v] = \{ \theta u + (1-\theta) v \ : \theta \in [\, 0, 1] \} \subset V.$$

Definimos de maneira análoga os segmentos semi-fechados

$$[\, u, v\, [= \{ \theta u + (1-\theta) v \ : \theta \in [\, 0, 1\, [\} , \quad]\, u, v] = \{ \theta u + (1-\theta) v \ : \theta \in]\, 0, 1]\}$$

e o segmento aberto $]\, u, v[= \{ \theta u + (1-\theta) v \ : \theta \in [\, 0, 1\, [\}$. ■

Definição 5.2.2 (conjunto convexo)**.** *Seja* $S \subset V$ *um conjunto. Diremos que* S *é convexo se e somente* $\forall\, u \in S,\ \ v \in S : [\, u,\ v] \subset S$, *isto é,* $\forall\, u \in S,\ \ v \in S$, $\theta \in [\, 0, 1] \ :\ \theta u + (1-\theta) v \in S$. ■

Existem conjuntos convexos. Por exemplo,

Proposição 5.2.3. *Se* $S \subset V$ *é um subespaço afim então* S *é convexo.* ■

Prova. Basta notar que

$$\forall\, u \in S \ \text{ e } \ v \in S \ : [\, u,\ v] \subset \{ \lambda u + (1-\lambda) v \ : \lambda \in \mathbb{R} \} \subset S .$$

■

Proposição 5.2.4. *Seja $H = L^{-1}(\eta)$ um hiperplano separando o espaço vetorial em dois semi-espaços :*

$$H^- = \{ \ u \in V \ \mid L(u) \leq \eta \ \} \quad ; \ H^+ = \{ \ u \in V \ \mid L(u) \geq \eta \ \} \ .$$

Então H, H^- e H^+ são convexos. Além disto, $L : V \to R$ é contínua se e somente se H, H^- e H^+ são fechados ■

Prova. Convexidade: basta notar que $L(\theta u + (1-\theta) v) = \theta L(u) + (1-\theta) L(v)$. Por exemplo, sejam $u \in H^+$, $v \in H^+$, $\theta \in (0,1)$. temos então:

$$L(\theta u + (1-\theta) v) = \theta \underbrace{L(u)}_{\geq \eta} + (1-\theta) \underbrace{L(v)}_{\geq \eta} \geq \theta\eta + (1-\theta)\eta = \eta,$$

de modo que $\theta u + (1-\theta) v \in H^+$. A prova é análoga para H e H^-.

A última propriedade resulta do Teorema 5.1.9 e da proposição 5.1.4. ■

Proposição 5.2.5. *Seja $x \in V$ e $r \geq 0$. Então $B_r(x) \subset V$ é convexo.* ■

Prova. Sejam $u \in B_r(x)$, $u \in B_r(x)$, $\theta \in [\,0,1]$. Temos

$$\theta u + (1-\theta) v - x = \theta (u - x) + (1-\theta)(v - x) \ ,$$

de modo que

$$\| \ \theta u + (1-\theta) v - x \| \leq \theta \| \ u - x \| + (1-\theta) \| \ v - x \| \leq \theta r + (1-\theta) r = r.$$

■

Proposição 5.2.6. *A intersecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo, isto é, se $\{ \ C_\lambda \ \}_{\lambda \in \Lambda} \subset V$ é uma família de conjuntos tal que C_λ é convexo, $\forall \ \lambda \in \Lambda$ então $C = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ é convexo.* ■

Prova.

Sejam $u \in C$, $v \in C$, $\theta \in [\,0,1]$. Para todo $\lambda \in \Lambda$: $u \in C_\lambda$, $v \in C_\lambda$. Como C_λ é convexo, $\theta u + (1-\theta) v \in C_\lambda$.Assim, $\theta u + (1-\theta) v \in C$. ■

Proposição 5.2.7. *A reunião de uma cadeia de conjuntos convexos é um conjunto convexo, isto é, se $\{ \ C_\lambda \ \}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{P}(\ V\ )$ é uma cadeia de $(\ \mathcal{P}(\ V\ ),\ \subset)$ tal que C_λ é convexo, $\forall \ \lambda \in \Lambda$ então $C = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ é convexo.* ■

Prova.

Sejam $u \in C$, $v \in C$, $\theta \in [\,0,1]$. Como $u \in C$ e $v \in C$, existem dois índices $\alpha \in \Lambda$ e $\beta \in \Lambda$ tais que: $u \in C_\alpha$, $v \in C_\beta$. Como $\{\, C_\lambda \,\}_{\lambda \,\in\, \Lambda}$ é uma cadeia, C_α e C_β são comparáveis: $C_\alpha \subset C_\beta$ ou $C_\beta \subset C_\alpha$. Suponhamos, sem perda de generalidade que $C_\alpha \subset C_\beta$. Então $u \in C_\beta$ e $v \in C_\beta$. A convexidade de C_β mostra que $\theta u + (1-\theta)\, v \in C_\beta$. Como $C_\beta \subset C$, temos $\theta u + (1-\theta)\, v \in C$. Logo C é convexo. ■

Proposição 5.2.8. *A soma de dois conjuntos convexos é um conjunto convexo, isto é, se $A \subset V$ e $B \subset V$ são convexos, então $C = A + B \subset V$ é convexo.* ■

Prova.

Sejam $u \in C$, $v \in C$, $\theta \in [\,0,1]$. Então existem $a_0 \in A$, $a_1 \in A$, $b_0 \in B$, $b_1 \in B$ tais que $u = a_0 + b_0$ e $v = a_1 + b_1$. Temos

$$\theta u + (1-\theta)\, v = [\theta a_0 + (1-\theta)\, a_1] + [\theta b_0 + (1-\theta)\, b_1]\,.$$

Como A é convexo, $a = \theta a_0 + (1-\theta)\, a_1 \in A$. Analogamente, a convexidade de B mostra que $b = \theta b_0 + (1-\theta)\, b_1 \in B$. Por conseguinte, existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $\theta u + (1-\theta)\, v = a + b$, de modo que $\theta u + (1-\theta)\, v \in A + B$. ■

Proposição 5.2.9. *Se A é convexo então $\overline{A}$ é convexo.* ■

Prova.

Sejam $u \in \overline{A}$, $v \in \overline{A}$, $\theta \in [\,0,1]$, $w\,(\theta) = \theta u + (1-\theta)\, v$. Então existem $\{\, u_n\}_{n \,\in\, \mathbb{N}} \subset A$ e $\{\, v_n\}_{n \,\in\, \mathbb{N}} \subset A$ tais que $u_n \to u$ em$V$ e $v_n \to v$ em$V$. A convexidade de A mostra que $w_n = \theta u_n + (1-\theta)\, v_n \in A$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Além disto, Temos

$$w\,(\theta) - w_n = \theta\,(u - w_n) + (1-\theta)\,(v - w_n)\,,$$

de modo que

$$\|\ w\,(\theta) - w_n\| \leq \theta \underbrace{\|\ u - w_n\|}_{\to\, 0} + (1-\theta) \underbrace{\|\ v - w_n\|}_{\to\, 0} \to 0.$$

Assim, existe $\{\, w_n\}_{n \,\in\, \mathbb{N}} \subset A$ tal que $w_n \to w\,(\theta)$, de modo que $w\,(\theta) \in \overline{A}$. ■

Proposição 5.2.10. *Seja $C \subset V$ um conjunto convexo. Sejam $u \in int\,(\ C\ )$ e $v \in \overline{C}$. Então $[\ u,\ v\ [\ \subset int\,(\ C\ )$. Em conseqüência, $int\,(\ C\ )$ é convexo.* ■

Prova.

Sejam $u \in int\,(\ C\ )$ e $v \in \overline{C}$. Consideremos $w = \theta u + (1-\theta)\, v$, avec $0 < \theta < 1$. Mostremos que $w \in int\,(\ C\ )$: devemos mostrar que existe $\eta > 0$ tal que $B_\eta\,(w) \subset C$.

Dado que $u \in int(\ C\ )$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(u) \subset C$. Sejam $\eta = \theta\varepsilon/2 > 0$ e $s \in B_\eta(w)$.

Como $v \in \overline{C}$, existe uma seqüência $\{\ c_n\ \}_{n>0} \subset C$ tal que $\|\ c_n - v\| \to 0$. Assim, existe n_0 tal que $n \geq n_0 \implies \|\ c_n - v\| \leq \dfrac{\theta\varepsilon}{2(1-\theta)}$. Então

$$\left\| \frac{s-(1-\theta)\,c_n}{\theta} - u \right\| = \frac{1}{\theta}\,\|\ s - w + (1-\theta)(v-c_n)\|\,,$$

de modo que

$$\left\| \frac{s-(1-\theta)\,c_n}{\theta} - u \right\| \leq \frac{1}{\theta}\,\|\ s-w\| + \frac{1-\theta}{\theta}\,\|\ v-c_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Assim,

$$\frac{s-(1-\theta)\,c_n}{\theta} \in B_\varepsilon(u) \subset C.$$

Em conseqüência, existe um elemento $a \in C$ tal que

$$\frac{s-(1-\theta)\,c_n}{\theta} = a \in C.$$

Mas então

$$s = \theta a + (1-\theta)\,c_n \in [\ a,\ c_n]\ .$$

Como C é convexo, $a \in C$ e $c_n \in C$, temos $[\ a,\ c_n] \subset C$, de modo que $s \in C$. Logo, $B_\eta(w) \subset C$ e $w \in int(\ C\ )$. Assim, $]\ u, v[\ \subset int(\ C\ )$.Como $u \in int(\ C\ )$, temos $[\ u,\ v\ [\ \subset int(\ C\ )$, o que completa a prova da primeira afirmação.

Se $v \in int(\ C\ )$, temos $[\ u,\ v\ [\ \subset\ int(\ C\ )$ e $v \in int(\ C\ )$, de modo que $[\ v, u] \subset int(\ C\ )$. Logo, $int(\ C\ )$ é convexo. ■

Corolário 5.2.11. *Seja $C \subset V$ um conjunto convexo tal que $int(\ C\ ) \neq \varnothing$. Então $\overline{C} = \overline{int(\ C\ )}$.* ■

Prova. Temos $int(\ C\ ) \subset C \subset \overline{C}$, de modo que $\overline{int(\ C\ )} \subset \overline{C}$. Mostremos que $\overline{C} \subset \overline{int(\ C\ )}$: $int(\ C\ ) \neq \varnothing$, de modo que existe $u \in int(\ C\ )$. Seja $v \in \overline{C}$: $[\ u,\ v\ [\ \subset int(\ C\ )$ (Cf. proposição 5.2.10). Sejam $v(\theta) = \theta u + (1-\theta)\,v$; $\theta_{\min} = \min\{\ \theta \in [\ 0,1] : v(\theta) \in int(\ C\ )\ \}$. Este conjunto é não-vazio, pois $v(1) = u \in int(\ C\ )$. Se $\theta_{\min} > 0$, então, para todo θ tal que $0 < \theta < \theta_{\min}$, $v(\theta) \notin int(\ C\ )$. Mas $v(\theta) \in [\ u,\ v\ [\ \subset int(\ C\ )$, de modo que $v(\theta) \notin int(\ C\ )$ e $v(\theta) \in int(\ C\ )$, o que é absurdo. Assim, $\theta_{\min} = 0$. Seja $v_n = v\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Então $\{\ v_n\ \}_{n>0} \subset int(\ C\ )$ e $v_n \to v$, de modo que $v \in \overline{int(\ C\ )}$. Assim $\overline{C} \subset \overline{int(\ C\ )}$, o que completa a prova. ■

5.3 Envelopes Convexos

Definição 5.3.1 (envelope convexo)**.** *Seja $S \subset V$ um conjunto. O envelope convexo de S é o menor conjunto convexo contendo S :*

$$co\,(S) = \cap\{\ A : S\ \in\ P\,(\ A)\ \ e\ A\ \ convexo\} \quad \blacksquare$$

Proposição 5.3.2. *Seja $S \subset V$ um conjunto. Então*

(i) *$co\,(S)$ é um convexo.*

(ii) *$B \subset co\,(S)$ e $co\,(B) \subset co\,(S)$ para todo $B \subset S$.* $\blacksquare$

Prova. $co\,(S)$ é um convexo, pois a intersecção de toda família de convexos é um

convexo (Cf. proposição 5.2.6).

Seja $B \subset S$. Seja A um convexo contendo S. Temos então $B \subset S \subset A$, de modo que $B \subset \cap\{\ A : S\ \in\ P\,(\ A)$ e A convexo$\} = co\,(S)$. Resulta que $co\,(S)$ é um convexo contendo B. Logo, $co\,(B) = \cap\{\ A : B\ \in\ P\,(\ A)$ e A convexo$\} \subset co\,(S)$. $\blacksquare$

O envelope convexo de um conjunto pode ser caracterizado utilizando as combinações lineares convexas finitas de seus elementos, isto é:

$$conv\,(S) = \left\{\ \sum_{i\,=\,1}^{n} \lambda_i x_i : x_i \in S \text{ e } \lambda_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq n \ \text{ e } \sum_{i\,=\,1}^{n} \lambda_i = 1\ \right\}.$$

Temos :

Proposição 5.3.3 (combinações convexas)**.** *Seja $S \subset V$ um conjunto. Então $co\,(S)$ é o conjunto das combinações convexas finitas de elementos de S:*

$$co\,(S) = conv\,(S)\,.\blacksquare$$

A demonstração utiliza o seguinte lema:

Lema 5.3.4. *Seja $S \subset V$ um conjunto. Então*

(i) *$conv\,(S)$ é um convexo.*

(ii) *$S \subset conv\,(S)$*

(iii) *S é convexo se e somente se*

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,:\, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 1;\, x_i \in S \text{ e } \lambda_i \geq 0,\, 1 \leq i \leq n \;\; ; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

(iv) $B \subset conv\,(S)$ *e* $conv\,(B) \subset conv\,(S)$ *para todo* $B \subset S$. ■

Prova.

1) Mostremos que $conv\,(S)$ é um convexo: sejam x e y dois elementos de $conv\,(S)$: então existem x_1, ..., x_n elementos de S e y_1, ..., y_m, também elementos de S, λ_1, ..., λ_n reais não negativos e μ_1, ..., μ_m, também reais não negativos tais que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;,\; y = \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i \;,\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \;,\; \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1.$$

Então, para $\theta \in (0,1)$:

$$\theta x + (1-\theta)\, y = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i z_i \;,$$

onde $k = m + n$ e, para $1 \leq i \leq n$,

$$\gamma_i = \theta \lambda_i \geq 0,\; z_i = x_i \in S \;;$$

enquanto que, para $n + 1 \leq i \leq k$,

$$\gamma_i = \theta \mu_{i-n} \geq 0,\; z_i = y_{i-n} \in S.$$

Além disto,

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i = \theta \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + (1-\theta) \sum_{i=1}^{m} \mu_i = \theta + 1 - \theta = 1,$$

de modo que $\theta x + (1-\theta)\, y \in conv\,(S)$ e $conv\,(S)$ é convexo.

2) É imediato que $S \subset conv\,(S)$: para $x \in S$, basta tomar $n = 1$, $\lambda_1 = 1$, $x_1 = x$ e temos $x \in conv\,(S)$.

3) É imediato que $conv\,(S) = S$ implica S convexo, pois $conv\,(S)$ é convexo. Mostremos a recíproca: suponhamos S convexo. Como $S \subset conv\,(S)$, basta mostrar que $conv\,(S) \subset S$. Ora,

$$conv\,(S) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \quad , \quad C_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,:\, x_i \in S \text{ e } \lambda_i \geq 0,\, 1 \leq i \leq n \;\; ; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\},$$

de modo que basta mostrar que $C_n \subset S$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 1$. A prova desta inclusão é feita por indução finita: temos $C_1 = S \subset conv\,(S)$. Suponhamos $C_n \subset S$ e mostremos $C_{n+1} \subset S$: seja $x \in C_{n+1}$. Então existem x_1, ..., x_{n+1} elementos de S e λ_1, ..., λ_{n+1} reais não negativos tais que

$$x = \sum_{i\,=\,1}^{n+1} \lambda_i x_i \ , \ \sum_{i\,=\,1}^{n+1} \lambda_i = 1 \ .$$

Se $\lambda_{n+1} = 1$, então $x = x_{n+1} \in S$. Suponhamos $\lambda_{n+1} \neq 1$. Então $\lambda_{n+1} < 1$ e temos

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} \geq 0, \ \sum_{i\,=\,1}^{n} \mu_i = 1 \ , \ \theta = 1 - \lambda_{n+1} \in (0, 1)\,.$$

Assim, por um lado, $\sum\limits_{i\,=\,1}^{n} \mu_i x_i \in C_n \subset S$ (hipótese de indução) e, por outro lado, dado que S é convexo,

$$x = (1 - \theta) \sum_{i\,=\,1}^{n} \mu_i x_i + \theta x_{n+1} \in S.$$

Logo, $conv\,(S) \subset S$, de modo que $conv\,(S) = S$.

4) Seja $B \subset S$. Como $S \subset conv\,(S)$, é imediato que $B \subset conv\,(S)$. Por outro lado, toda combinação convexar finita de elementos de B é também uma combinação convexa finita de elementos de S, de modo que $conv\,(B) \subset conv\,(S)$.

■

prova da proposição das combinações convexas.

$conv\,(S)$ é convexo e $S \subset conv\,(S)$, de modo que $co\,(S) \subset conv\,(S)$.

Mostremos que $conv\,(S) \subset co\,(S)$: como $S \subset co\,(S)$, temos $conv\,(S) \subset conv\,(co\,(S))$. Mas $co\,(S)$ é convexo, de modo que $conv\,(co\,(S)) = co\,(S)$. Logo, $conv\,(S) \subset co\,(S)$.

■

É interessante notar que os envelopes convexos podem ser interpretados em termos probabilísticos: seja λ uma probabilidade discreta e finita sobre S tal que $\lambda\,(\{\ x_i\ \}) = \lambda_i$, $i = 1, ..., n$. Então temos $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$ e $\sum\limits_{i\,=\,1}^{n} \lambda_i = 1$. Além disto, a média associada a esta distribuição é $E\,(X) = \sum\limits_{i\,=\,1}^{n} \lambda_i x_i$. Assim, $conv\,(S)$ pode ser interpretado como o conjunto formado pela médias de todas as probabilidades discretas e finitas definidas sobre S.

Utilizaremos por vezes a extensão seguinte:

Definição 5.3.5 (envelope convexo fechado)**.** *Seja $S \subset V$ um conjunto. O envelope convexo fechado de S é o menor conjunto convexo fechado contendo S :*

$$\overline{co}\,(S) = \cap\{\ A : S\ \in\ P(\ A)\ \ e\ A\ \ \text{convexo fechado}\} \quad \blacksquare$$

Proposição 5.3.6. *Seja $S \subset V$ um conjunto. Então*

(i) *$\overline{co}\,(S)$ é um convexo fechado.*

(ii) *$B \subset \overline{co}\,(S)$ e $\overline{co}\,(B) \subset \overline{co}\,(S)$ para todo $B \subset S$.* $\blacksquare$

Prova. $\overline{co}\,(S)$ é um convexo, pois a intersecção de toda família de convexos é um

convexo (Cf. proposição 5.2.6) e a intersecção de toda família de fechados é fechada (Cf. proposição 4.3.10).

Seja $B \subset S$. Seja A um convexo fechado contendo S. Temos então $B \subset S \subset A$, de modo que $B \subset \cap\{\ A : S\ \in\ P(\ A)$ e A convexo fechado$\} = \overline{co}\,(S)$. Resulta que $\overline{co}\,(S)$ é um convexo fechado contendo B.

Logo, $\overline{co}\,(B) = \cap\{\ A : B\ \in\ P(\ A)$ e A convexo fechado$\} \subset \overline{co}\,(S)$. $\blacksquare$

O envelope convexo fechado de um conjunto pode ser caracterizado utilizando o envelope convexo (ou, o que é equivalente, o conjunto de suas combinações convexas finitas):

Proposição 5.3.7. *Seja $S \subset V$ um conjunto. Então o envelope convexo fechado de S coincide com a aderência do envelope convexo de S: $\overline{co}\,(S) = \overline{co\,(S)}$.* $\blacksquare$

Prova. $\overline{co\,(S)}$ é um convexo fechado, pois $co\,(S)$ é convexo (Cf. proposição 5.2.9). Temos $S \subset co\,(S) \subset \overline{co\,(S)}$, de modo que $\overline{co\,(S)}$ é um convexo fechado contendo S. resulta que $\overline{co}\,(S) \subset \overline{co\,(S)}$.

Por outro lado, como $S \subset co\,(S)$, $\overline{co}\,(S)$ é um convexo contendo S. Temos então $co\,(S) \subset \overline{co}\,(S)$, pois $co\,(S)$ é o menor convexo contendo S. Assim, $\overline{co}\,(S)$ é também um fechado contendo $co\,(S)$, de modo que $\overline{co\,(S)} \subset \overline{co}\,(S)$, pois $\overline{co\,(S)}$ é o menor fechado contendo $co\,(S)$. $\blacksquare$

Usaremos por vezes os resultados seguintes:

Proposição 5.3.8. *Seja $S \subset V$ um conjunto. S é convexo se e somente se $S = co\,(S)$. S é convexo fechado se e somente se $S = \overline{co}\,(S)$.* $\blacksquare$

Prova. A primeira afirmação resulta do Lema 5.3.4. A segunda afirmação resulta da proposição precedente: se S é convexo, então $S = co\,(S)$. Como S é fechado, $S = \overline{S} = \overline{co\,(S)} = \overline{co}\,(S)$. A recíproca é imediata. ■

Proposição 5.3.9. *Seja $S \subset V$ um conjunto não-vazio.*

(i) *se $A \subset co\,(S)$, então $co\,(A \cup S) = co\,(S)$.*

(ii) *se $A \subset \overline{co}\,(S)$, então $\overline{co}\,(A \cup S) = \overline{co}\,(S)$.* ■

Prova. Temos $co\,(S) \subset co\,(A \cup S)$, pois $co\,(A \cup S)$ é um convexo que contém S. Por outro lado, $A \cup S \subset co\,(S)$, de modo que $co\,(A \cup S) \subset co\,(co\,(S)) = co\,(S)$, dado que $co\,(S)$ é convexo (Cf. proposição precedente). Assim, $co\,(S) \subset co\,(A \cup S)$ e $co\,(A \cup S) \subset co\,(S)$, o que prova a primeira afirmação. A prova da segunda é inteiramente análoga. ■

5.4 Projeção Ortogonal sobre um Convexo

O *teorema da projeção ortogonal* se estende ao caso de um convexo fechado sob a forma seguinte:

Teorema 5.4.1 (projeção sobre convexo)**.** *Seja V um espaço de Hilbert e $C \subset V$ um conjunto convexo não-vazio e fechado. Se $u \in V$ então existe um único elemento $Pu \in C$ tal que*

$$\| \, u - \; Pu \, \| = \min \{ \; \| \, u - \; c \, \| \; : c \in C \} \,.$$

Pu é a projeção ortogonal *de u sobre C.*

Prova. A prova é idêntica à do Teorema 4.6.1 (projeção sobre um subespaço vetorial): (4.9) contínua válida, pois

$$s_n \in C, \; s_m \in C \Longrightarrow \frac{s_n + s_m}{2} \in C.$$

De maneira análoga, (4.10) contínua válida, pois

$$Pu \in C, \; Qu \in C \Longrightarrow \frac{Pu + Qu}{2} \in C.$$

■

No caso de um conjunto convexo, a ortogonalidade se exprime através de uma *inequação variacional*:

Proposição 5.4.2. *Seja V um espaço de Hilbert e $C \subset V$ um convexo fechado não-vazio. $Pu \in V$ é a projeção ortogonal de u sobre C se e somente se*

$$Pu \in C \quad e \quad u - Pu \perp C,$$

isto é,

$$Pu \in C \quad e \quad (\ u - Pu,\ v - Pu) \leq 0,\ \forall\ v \in C.\ \blacksquare$$

Prova. Sejam $v \in S$ e $\theta \in [0,1]$. Consideremos

$$f(\theta) = \|\ u - Pu + \theta (Pu - v)\|^2\ .$$

Temos

$$f(\theta) = a\theta^2 + 2b\theta + c\ ,$$

onde

$$a = \|\ Pu - v\ \|^2\ ,\ b = (\ u - Pu,\ Pu - v)\ ,\ c = \|\ u - Pu\|^2\ .$$

Além disto

$$f'(\theta) = 2a\theta + 2b \Longrightarrow f'(0) = 2b.$$

Logo, por um lado,

$$f'(0) \geq 0 \iff (\ u - Pu,\ v - Pu) \leq 0;$$

e, por outro lado,

$$f''(\theta) = 2a \geq 0 \Longrightarrow f'(\theta) \geq f'(0) \text{ sobre } [0,1]\,.$$

$(\Longrightarrow)$: seja Pu a projeção ortogonal de u sobre C. Como C é convexo $(1-\theta)\,Pu + \theta v \in C$, $\forall\ \theta \in [0,1]$ e $\forall\ v \in C$. Assim

$$f(0) = \|\ u - Pu\ \|^2 \leq f(\theta)\,,\ \forall\ \theta \in [0,1] \text{ e } \forall\ v \in C.$$

Logo,

$$\frac{f(\theta) - f(0)}{\theta} \geq 0,\ \forall\ \theta \in]0,1] \text{ e } \forall\ v \in C.$$

Tomando o limite para $\theta \longrightarrow 0+$, temos $f'(0) \geq 0, \forall\ v \in C$ e

$$(\ u - Pu,\ v - Pu) \leq 0, \forall\ v \in C.$$

Do Teorema 5.4.1: $Pu \in C$.

$(\Longleftarrow)$: seja $Pu \in C$ e $(\ u - Pu,\ v - Pu) \leq 0,\ \forall\ v \in C$. Então $f'(0) \geq 0, \forall\ v \in C$. Assim,

$$f'(\theta) \geq f'(0) \geq 0 \text{ sobre } [0,1]\,,$$

de modo que f é crescente sobre sobre $[0,1]$: o mínimo de f sobre $[0,1]$ é atingido em $\theta = 0$, $\forall\ v \in C$. Assim

$$f(0) = \|\ u - Pu\ \|^2 \leq \|\ u - v\ \|^2 = f(1)\,, \forall\ v \in C.$$

Ora, para todo $c \in C$, $v = s - Pu \in S$, de modo que

$$\| \; u - Pu \; \|^2 \leq \| \; u - \; s \; \|^2 , \forall \; s \in S.$$

■

No caso particular de um subespaço afim, a inequação variacional volta a ser uma equação:

Corolário 5.4.3. *Seja V um espaço de Hilbert e $S \subset V$ um subespaço afim fechado. $Pu \in V$ é a projeção ortogonal de u sobre C se e somente se*

$$Pu \in S \;\; e \;\; u - Pu \perp S,$$

isto é,

$$Pu \in S \;\; e \;\; (\; u - Pu, \; v - Pu) = 0, \; \forall \; v \in S. \; ■$$

Prova. Todo subespaço afim é um convexo (Cf. proposição 5.2.3), de modo que $Pu \in V$ é a projeção ortogonal de u sobre S se e somente se

$$Pu \in C \;\; \text{e} \;\; (\; u - Pu, \; v - Pu) \leq 0, \; \forall \; v \in S.$$

Ora, para todo $v \in S$, $\lambda v + (1 - \lambda) \, Pu \in S$, $\; \forall \; \lambda \in \mathbb{R}$, de modo que $Pu \in V$ é a projeção ortogonal de u sobre S se e somente se

$$Pu \in S \;\; \text{e} \;\; (\; u - Pu, \; \lambda v + (1 - \lambda) \, Pu - Pu) \leq 0, \; \forall \; v \in S, \; \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

isto é,

$$Pu \in S \;\; \text{e} \;\; \lambda (\; u - Pu, \; v - Pu) \leq 0, \; \forall \; v \in S, \; \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

o que é equivalente a

$$Pu \in S \;\; \text{e} \;\; (\; u - Pu, \; v - Pu) = 0, \; \forall \; v \in S.$$

■

Temos também

Proposição 5.4.4. *Sejam $u_1 \in V$, $u_2 \in V$ e $C \subset V$ um convexo fechado não-vazio. Então*

$$\| \; Pu_1 - Pu_2 \| \leq \| \; u_1 - u_2 \| \, . \; ■$$

Prova. Como $Pu_1 \in C$ e $Pu_2 \in C$:

$$(u_1 - Pu_1, Pu_2 - Pu_1) \leq 0 \quad ; \quad (u_2 - Pu_2, Pu_1 - Pu_2) \leq 0 \ .$$

Logo

$$(u_1 - Pu_1, Pu_2 - Pu_1) \leq 0 \quad ; \quad (Pu_2 - u_2, Pu_2 - Pu_1) \leq 0 \ ,$$

de modo que

$$(u_1 - Pu_1 + Pu_2 - u_2, Pu_2 - Pu_1) \leq 0 \ .$$

Assim

$$(Pu_2 - Pu_1, Pu_2 - Pu_1) \leq (u_2 - u_1, Pu_2 - Pu_1) \ .$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\|Pu_2 - Pu_1\|^2 \leq \|u_2 - u_1\| \ \|Pu_2 - Pu_1\|$$

e temos o resultado enunciado. ■

Utilizaremos no que segue a noção seguinte:

Definição 5.4.5 (distância a um convexo)**.** *Seja S um convexo e $u \in V$. A distância de x a S é*

$$dist(u, S) = \inf \{ \ \| u - s \| \ : S \in S\} . \ ■$$

Temos:

Proposição 5.4.6. *Seja S um convexo fechado e $u \in V$. Seja U a projeção ortogonal de u sobre S.*

$$dist(u, S) = \| u - U \| . \ ■$$

Prova. É uma conseqüência imediata do teorema da projeção sobre um convexo (Teorema 5.4.1).

■

Proposição 5.4.7. *Sejam $C \subset V$ e $S \subset V$ dois conjuntos convexos fechados e não-vazios tais que C é compacto. Então existe $x \in C$ tal que*

$$dist(x, S) = \inf \{ \ dist(c, S) \ : \ c \in C\} \ . \ ■$$

Prova. Seja $c \in C$. A proposição 5.4.6 mostra que

$$dist(c, S) = \| c - P_S(c) \| ,$$

où $P_S(c)$ é a projeção ortogonal de c sobre S. Seja

$$d = \inf \{ \, dist\,(\, c, S) \; : \; c \in C \} \, .$$

Logo, existe uma seqüência $\{ \, c_n \, \}_{n \, \in \, \mathbb{N}} \subset C$ tal que

$$d \leq \; dist\,(\, c_n, S) \; \leq d + \frac{1}{n}.$$

Como C é compacto, existe uma subseqüência $\{ \, c_{n_k} \, \}_{k \, \in \, \mathbb{N}} \subset \{ \, c_n \, \}_{n \, \in \, \mathbb{N}} \subset C$ tal que $c_{n_k} \longrightarrow x \in C$. Temos então:

$$d \leq \; dist\,(\, c_{n_k}, S) \; \leq d + \frac{1}{n_k} \longrightarrow d,$$

de modo que $dist\,(\, c_{n_k}, S) \longrightarrow d$. Ora,

$$| \; \|x - P_S(x)\| - \| \, c_{n_k} - \; P_S(c_{n_k}) \; \| \; | \leq \|x - c_{n_k} + P_S(c_{n_k}) - P_S(x)\| \, ,$$

de maneira que

$$| \; \|x - P_S(x)\| - \| \, c_{n_k} - \; P_S(c_{n_k}) \; \| \; | \leq \|x - c_{n_k}\| + \|P_S(c_{n_k}) - P_S(x)\| \, ,$$

Da proposição 5.4.4:

$$\| \, P_S(x) \; - P_S\,(\, c_{n_k}) \; \| \leq \|x - c_{n_k}\| \; .$$

Logo,

$$| \; \|x - P_S(x)\| - \| \, c_{n_k} - \; P_S(c_{n_k}) \; \| \; | \leq 2 \, \|x - c_{n_k}\| \longrightarrow 0$$

e temos

$$\|x - P_S(x)\| = \lim \| \, c_{n_k} - \; P_S(c_{n_k}) \; \| \; = d.$$

Assim, $dist\,(\, x, S) = \inf \{ \, dist\,(\, c, S) \; : \; c \in C \}$. ■

Também utilizaremos o resultado seguinte:

Proposição 5.4.8. *Seja $S \subset V$ um conjunto não-vazio e compacto. Seja $u \in V$. Então existe $Pu \in S$ tal que*

$$dist\,(\, u, S) = \|u - Pu\| = \inf \{ \; \|u - s\| \; : \; s \in S \} \; .$$

Além disto, a aplicação $u \longrightarrow dist\,(\, u, S)$ é contínua.■

Prova. Seja

$$d = dist\,(\, u, S) = \inf \{ \; \|u - s\| \; : \; s \in S \} \, .$$

Logo, existe uma seqüência $\{ \ s_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}} \subset S$ tal que

$$d \leq \ \ \|u - s_n\| \ \ \leq d + \frac{1}{n}.$$

Como S é compacto, existe uma subseqüência $\left\{ \ s_{n(k)} \ \right\}_{k \ \in \ \mathbb{N}} \subset \{ \ s_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}} \subset S$ tal que $s_{n(k)} \longrightarrow Pu \in S$. Temos então:

$$d \leq \ \ \left\|u - s_{n(k)}\right\| \ \ \leq d + \frac{1}{n\,(k)} \longrightarrow d,$$

de modo que $\left\|u - s_{n(k)}\right\| \longrightarrow d$ e temos $\|u - Pu\| = d$.

Seja $\{ \ u_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}} \subset V$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em V. Seja

$$\lambda_n = dist\,(\ u_n, \ S) = \|u_n - Pu_n\|\,.$$

S é limitado (Teorema 4.3.18) e $\{ \ u_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}}$ é limitada (proposição 4.5.3), de modo que $\{ \ \lambda_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é limitada. Logo, existe ume subseqüência $\left\{ \ \lambda_{n(k)} \ \right\}_{k \ \in \ \mathbb{N}} \subset \{ \ \lambda_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}}$ tal que $\lambda_{n(k)} \longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. Como $\left\{ \ Pu_{n(k)} \ \right\}_{k \ \in \ \mathbb{N}} \subset S$ e S é compacto, existe també uma subseqüência $\left\{ \ Pu_{n(k(p))} \ \right\}_{p \ \in \ \mathbb{N}} \subset \left\{ \ Pu_{n(k)} \ \right\}_{k \ \in \ \mathbb{N}} \subset S$ tal que $Pu_{n(k(p))} \longrightarrow Q \in S$. Temos então $u_{n(k(p))} \longrightarrow u$ (proposição 6.3.16) e

$$\left\|u_{n(k(p))} - Pu_{n(k(p))}\right\| \longrightarrow \|u - Q\|\,.$$

Seja $s \in S$. Temos

$$\forall \ p \in \mathbb{N} : \left\|u_{n(k(p))} - Pu_{n(k(p))}\right\| \leq \left\|u_{n(k(p))} - s\right\|.$$

Tomando o limite para $p \longrightarrow +\infty$ nesta desigualdade, vem

$$\|u - Q\| \leq \|u - s\|\,.$$

Assim,

$$\|u - Q\| = \inf \{ \ \ \|u - s\| \ : \ \ s \in S\} = dist\,(\ u, \ S)\,.$$

Como $\lambda_{n(k(p))} = \left\|u_{n(k(p))} - Pu_{n(k(p))}\right\|$, temos também $\lambda = \|u - Q\|$, de forma que

$$\lambda = dist\,(\ u, \ S)\,.$$

Assim, a proposição 4.5.8 mostra que

$$\lambda_n \longrightarrow dist\,(\ u, \ S)$$

e temos o resultado enunciado. ■

5.5 Teoremas de Separação

Uma das noções mais importantes da análise é a de *separação*, a qual conduz a um dos resultados fundamentais associados ao nome de Banach: o *Teorema de Hahn-Banach*, que é um dos resultados fundamentais não somente da Análise Convexa, mas também da Análise em geral:

Definição 5.5.1 (separação). *Sejam* $A \subset V$, $B \subset V$, $H = \{ v \in V$ *tal que* $L(v) = \eta\}$ *um hiperplano. Diremos que*

a) H ***separa fracamente*** A *e* B *se e somente se:* $\forall\, a \in A,\ \ b \in B : L(a) \leq \eta \leq L(b)$.

b) H ***separa propriamente*** A *e* B *se e somente se: por um lado,* H ***separa fracamente*** A *e* B *e, por outro lado,* $\exists\ \ x \in A \cup B$ *tal que* $x \notin H$ *(isto é,* $A \cup B$ *não está contida em* H*).*

c) H ***separa fortemente*** A *e* B *se e somente se:* $\forall\, a \in A,\ \ b \in B : L(a) < \eta < L(b)$. ■

Esta definição pode ser interpretada da maneira seguinte: na separação fraca, o hiperplano H divide o espaço vetorial V em dois semi-espaços

$$H^- = \{ u \in V \mid L(u) \leq \eta \} \ \ ; \ \ H^+ = \{ u \in V \mid L(u) \geq \eta \} \ ,$$

tais que $A \subset H^-$ e $B \subset H^+$. Na separação própria, há uma condição a mais: pelo menos um dos conjuntos não está contido em H, isto é, $A \cup B \not\subset H$. Enfim, a separação forte consiste em exigir ainda mais: a intersecção entre H e cada um dos conjuntos é vazia, isto é $H \cap A = H \cap B = \varnothing$.

Os dois teoremas fundamentais que recebem a designação de Hahn-Banach são os seguintes:

Teorema 5.5.2 (separação própria). *Seja* $C \subset V$ *um conjunto convexo tal que* $int\,(\ C\ ) \neq \varnothing$. *Seja* $S \subset V$ *um subespaço afim tal que* $S \neq \varnothing$ *e* $S \cap int\,(\ C\ ) = \varnothing$. *Então existe um hiperplano fechado* $H \subset V$ *que separa propriamente* S *e* C.■

Teorema 5.5.3 (separação forte). *Sejam* $C \subset V$ *e* $S \subset V$ *dois conjuntos convexos fechados e não-vazios tais que* C *é compacto e* $C \cap S = \varnothing$. *Então existe um hiperplano fechado* $H \subset V$ *que separa fortemente* C *e* S.■

A demonstração destes dois resultados repousa sobre o lema seguinte:

Lema 5.5.4 (da separação)**.** *Sejam $A \subset V$ e $B \subset V$ dois conjuntos convexos tais que $A \neq \varnothing$, $int(\ B\ ) \neq \varnothing$, $A \cap int(\ B\ ) = \varnothing$. Então existe um hiperplano fechado que separa propriamente A e B.*■

O Lema da separação é uma conseqüência do Lema de Zorn (3.3.1), através do resultado auxiliar seguinte:

Lema 5.5.5 (dois convexos)**.** *Sejam $A \subset V$ e $B \subset V$ dois conjuntos convexos tais que $A \cap B = \varnothing$. Então existem dois conjuntos convexos $\mathcal{A} \subset V$, $\mathcal{B} \subset V$ tais que $A \subset \mathcal{A}$, $B \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = V$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$.* ■

Prova.
Seja

$$S = \{\ s = (\ C,\ D) \subset V \times V\ \mid A \subset C,\ B \subset D,\ C \cap D = \varnothing,\ C \text{ convexo},\ D \text{ convexo}\ \}\ .$$

$S \neq \varnothing$, pois $s = (\ A,\ B) \in S$. Sejam $s_1 = (\ C_1,\ D_1) \in S$, $s_2 = (\ C_2,\ D_2) \in S$. Definimos

$$s_1 \leq s_2 \iff C_1 \subset C_2 \text{ e } D_1 \subset D_2\ .$$

$(\ S,\ \leq\ )$ é parcialmente ordenado. Notemos que $s_1 = s_2 \iff C_1 = C_2$ e $D_1 = D_2$.

Seja $\mathcal{C} = \{\ s_\lambda = (\ C_\lambda,\ D_\lambda)\ \}_{\lambda\ \in\ \Lambda} \subset S$ uma cadeia de $(\ S,\ \leq\ )$. Mostremos que $\mathcal{C}$ tem um majorante em S: seja $s = (\ C,\ D)$, onde

$$C\ =\ \underset{\lambda\ \in\ \Lambda}{\cup} C_\lambda\ ,\quad D\ =\ \underset{\lambda\ \in\ \Lambda}{\cup} D_\lambda\ .$$

1) s é um majorante de $\mathcal{C}$: com efeito, $\forall\ \lambda \in \Lambda : C_\lambda \subset C$ e $D_\lambda \subset D$. Assim $\forall\ \lambda \in \Lambda : s_\lambda \leq s$.

2) $s \in S$. Com efeito:

- **a)** A proposição 5.2.7 mostra que C e D são convexos.
- **b)** Como $A \subset C_\lambda$ e $B \subset D_\lambda$, $\forall\ \lambda \in \Lambda$, temos $A \subset C$ e $B \subset D$.
- **c)** Mostremos por absurdo que $C \cap D = \varnothing$: suponhamos que $\exists\ u \in C \cap D$. Então existem dois índices $\alpha \in \Lambda$ e $\beta \in \Lambda$ tais que: $s_\alpha = (\ C_\alpha,\ D_\alpha) \in \mathcal{C}$, $s_\beta = (\ C_\beta,\ D_\beta) \in \mathcal{C}$, $u \in C_\alpha$ e $u \in D_\beta$. Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia, s_α e s_β são comparáveis: $s_\alpha \leq s_\beta$ ou $s_\beta \leq s_\alpha$. Suponhamos, sem perda de generalidade que $s_\alpha \leq s_\beta$. Então $C_\alpha \subset C_\beta$ e $D\alpha \subset D_\beta$, de modo que $u \in C_\beta$ e $u \in D_\beta$ e $u \in C_\beta \cap D_\beta$. Assim, $C_\beta \cap D_\beta \neq \varnothing$. Mas $s_\beta = (\ C_\beta,\ D_\beta) \in \mathcal{C}$, de modo que $C_\beta \cap D_\beta = \varnothing$ e $C_\beta \cap D_\beta \neq \varnothing$, o que é absurdo.

Assim, toda cadeia de $(\ S,\ \le\ )$ possue um majorante em S e o Lema de Zorn mostra que S tem um elemento maximal. Seja $\mathfrak{s} = (\ \mathcal{A},\ \mathcal{B})$ um elemento maximal de S. Então $A \subset \mathcal{A}$, $B \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$, $\mathcal{A}$ convexo, $\mathcal{B}$ convexo.

Mostremos por absurdo que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = V$: suponhamos que $\exists\ u \in V$, $u \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$: sejam $\mathcal{A}_1 = co(\ \mathcal{A} \cup \{\ u\ \})$, $\mathcal{B}_1 = co(\ \mathcal{B} \cup \{\ u\ \})$.

3) Temos $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B} = \varnothing$ ou $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1 = \varnothing$.

a) Suponhamos o contrário: então, existem dois elementos $x \in V$, $y \in V$ tais que $x \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}$ e $y \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1$. Assim

$$\begin{array}{lll} \exists\ \theta_1 & \in & [\ 0,1] \ \text{ e } a \in \mathcal{A} \ \text{ tal que } \theta_1 u + (1-\theta_1)\, a = x \in \mathcal{B}; \\ \exists\ \theta_2 & \in & [\ 0,1] \ \text{ e } b \in \mathcal{B} \ \text{ tal que } \theta_2 u + (1-\theta_2)\, b = y \in \mathcal{A}. \end{array}$$

b) Temos $0 < \theta_1 < 1$. Com efeito, suponhamos o contrário: então $\theta_1 = 0$ ou $\theta_1 = 1$. Mas, por um lado, $\theta_1 = 0 \implies x = a$, de modo que $x \in \mathcal{A}$. Como $x \in \mathcal{B}$, temos $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, o que é absurdo, pois $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$. Por outro lado, $\theta_1 = 1 \implies x = u$. Como $x \in \mathcal{B}$, temos $u \in \mathcal{B}$, de modo que $u \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, o que é absurdo, pois $u \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

c) De maneira análoga, temos $0 < \theta_2 < 1$: $\theta_2 = 0 \implies y = b \implies \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \varnothing$, o que é absurdo; $\theta_2 = 1 \implies y = u \implies u \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, o que é absurdo.

d) Temos então $\theta_1 - \theta_1\theta_2 > 0$, de modo que $\eta = \theta_1 + \theta_2 - \theta_1\theta_2 > 0$. Sejam

$$\eta = \theta_1 + \theta_2 - \theta_1\theta_2 \ \ ; \ \ \gamma = \frac{\theta_1}{\eta} \ \ ; \ \ \lambda = \frac{\theta_2}{\eta} \ .$$

Temos $\eta > 0$, $0 < \gamma < 1$ e $0 < \lambda < 1$:

i) Suponhamos $\eta \le 0$. Então $\theta_1 + \theta_2 - \theta_1\theta_2 \le 0$. Como $\theta_1 > 0$, esta desigualdade implica que $\theta_2 - \theta_1\theta_2 < 0$. Dividindo esta desigualdade por $\theta_2 > 0$, obtemos $\theta_1 > 1$, o que é absurdo. Logo $\eta > 0$.

ii) $\gamma \le 0 \implies \eta \le 0$ (pois $\theta_1 > 0$), o que é absurdo. Logo $\gamma > 0$.

iii) $\gamma \ge 1 \implies \theta_1 \ge \eta$. Temos então $\theta_1 \ge \theta_1 + \theta_2 - \theta_1\theta_2$, de modo que $\theta_2\,(1-\theta_1) \le 0$ e $\theta_2 < 0$ (pois $\theta_1 < 1$), o que é absurdo. Logo $\gamma < 1$.

iv) De maneira análoga, $\lambda > 0$ e $\lambda < 1$.

e) Ora, temos

$$u = \frac{1}{\theta_1}x - \left(\frac{1-\theta_1}{\theta_1}\right) a \quad \text{e} \quad u = \frac{1}{\theta_2}y - \left(\frac{1-\theta_2}{\theta_2}\right) b,$$

de modo que

$$\frac{1}{\theta_1}x + \left(\frac{1-\theta_2}{\theta_2}\right) b = \frac{1}{\theta_2}y \ + \left(\frac{1-\theta_1}{\theta_1}\right) a \ .$$

Multiplicando esta equação por $\theta_1\theta_2/\eta > 0$, temos

$$\lambda x + (1-\lambda)\, b = \gamma y \ + (1-\gamma)\, a \ .$$

f) Como $x \in \mathcal{B}$, $b \in \mathcal{B}$, $\lambda \in (0,\, 1)$ e $\mathcal{B}$ é convexo, temos $\lambda x + (1-\lambda)\, b \in \mathcal{B}$. De maneira análoga, $y \in \mathcal{A}$, $a \in \mathcal{A}$, $\gamma \in (0,\, 1)$ e $\mathcal{A}$ é convexo, temos $\gamma y + (1-\gamma)\, a \in \mathcal{A}$. Assim, $z = \lambda x + (1-\lambda)\, b = \gamma y + (1-\gamma)\, a \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, de modo que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \varnothing$, o que é absurdo. Logo, $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B} = \varnothing$ ou $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1 = \varnothing$.

4) Suponhamos, sem perda de generalidade que $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B} = \varnothing$. Seja $\mathfrak{s}_1 = (\ \mathcal{A}_1,\, \mathcal{B})$. Temos $s_1 \in S$. Com efeito, $\mathcal{A}_1$ é convexo (Cf. proposição 5.3.2), $\mathcal{B}_1$ é convexo, $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B} = \varnothing$, $B \subset \ \mathcal{B}$, $A \subset \mathcal{A} \ \subset \ \mathcal{A}_1$(Cf. proposição 5.3.2). Além disto, $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{s}_1$. Como $\mathfrak{s} = (\ \mathcal{A},\, \mathcal{B})$ é maximal, temos $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1$ e, por conseguinte, $\mathcal{A} \ = \mathcal{A}_1$. Assim, $\{\ u\ \} \subset co(\ \mathcal{A} \cup \{\ u\ \}) \subset \ \mathcal{A}$ (Cf. proposição 5.3.2), de modo que $u \in \mathcal{A} \implies u \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, o que é absurdo, pois $u \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Assim, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = V$ e a prova da proposição está completada.

■

A proposição 5.5.5 (teorema dos dois convexos) nos leva ao seguinte teorema:

Teorema 5.5.6 (do hiperplano de fronteira)**.** *Sejam $A \subset V$ e $B \subset V$ dois conjuntos convexos não-vazios tais que $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = V$. Seja $H = \overline{A} \cap \overline{B}$, Então temos a alternativa seguinte: ou H é um hiperplano ou $H = V$.* ■

Prova.

1) Como $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = V$, temos $V - A = B$ e $V - B = A$.

2) Seja $x \in V$ tal que $x \notin \overline{A}$. Então $x \in int\,(B)$, isto é, $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon\,(x) \subset B$. Com efeito, suponhamos que: $x \notin \overline{A}$ e $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ x_\varepsilon \in B_\varepsilon\,(x)$ tal que $x_\varepsilon \notin B$. Então $x_\varepsilon \in V - B = A$. Seja $a_n = x_{1/n}$. Temos $\{\ a_n\}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset A$ e $\|\ a_n - x\| \leq \dfrac{1}{n} \to 0$, de modo que $a_n \to x$. Mas então $x \in \overline{A}$, o que contradiz $x \notin \overline{A}$.

3) Temos $int\,(A) \cap H = int\,(B) \cap H = \varnothing$. Com efeito, suponhamos $int\,(A) \cap \overline{B} \neq \varnothing$. Então $\exists\ a \in int\,(A)$ tal que $a \in \overline{B}$. Como $a \in int\,(A)$, $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon\,(a) \subset A$. Por outro lado, $a \in \overline{B}$, de modo que existe uma seqüencia $\{\ b_n\}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset B$ tal que $b_n \to a$. Assim, para n suficientement grande, temos $\|\ b_n - a\| \leq \varepsilon$, de modo que $b_n \in B_\varepsilon\,(a) \subset A$. Logo, $b_n \in A \cap B = \varnothing$, o que é absurdo. Supor $int\,(B) \cap \overline{A} \neq \varnothing$ leva a uma contradição análoga.

4) Sejam $u \in H$ e $v \in H$, $\ S = \{\alpha u + (1-\alpha)\,v :\ \ \alpha \in \mathbb{R}\}$.Mostremos que $S \subset H$. Suponhamos o contrário : $\exists\ x \in S$ tal que $x \notin H$.

a) A proposição 5.2.6 mostra que H é convexo, pois $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são convexos (Cf. proposição 5.2.9). Logo, $[\ u,\ v\ ] \subset H$.

b) Temos $u \neq v$. Com efeito, $u = v \implies S = \{\ v\} \implies x = v \implies x \in H$.

c) Como $x \in S$, $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x = \alpha u + (1-\alpha)\,v$. Para $\alpha \in [\ 0,\ 1\ ]$, $x \in [\ v,\ u\ ] \subset H$. Como $x \notin H$, temos $\alpha \notin [\ 0,\ 1\ ]$.

d) Suponhamos $\alpha < 0$. Seja $\theta = \dfrac{1}{1-\alpha} \in [\ 0,\ 1\ ]$. Temos $\theta x + (1-\theta)\,u = v$, de modo que $v \in [\ x,\ u\ ]$. Como $u \neq v$, temos $v \in [\ x,\ u\ [$.
Por outro lado, $x \notin H$, de modo que $x \notin \overline{A}$ ou $x \notin \overline{B}$. Suponhamos $x \notin \overline{A}$: então $x \in int\,(B)$. Ora, $u \in H = \overline{A} \cap \overline{B}$, de modo que a proposição 5.2.10 mostra que $[\ x,\ u\ [\ \subset int\,(B)$. Temos então $v \in int\,(B)$, de modo que $v \in int\,(B) \cap H$, o que é absurdo. Se $x \notin \overline{B}$, então $x \in int\,(A)$ e $[\ x,\ u\ [\ \subset\ int\,(A)$. Resulta então $v \in int\,(A) \cap H$, o que também é absurdo.

e) Suponhamos $\alpha > 1$. Seja $\theta = \dfrac{1}{\alpha} \in [\ 0, 1\ ]$. Temos $\theta x + (1-\theta)\,v = u$, de modo que $u \in [\ x,\ v\ ]$. Como $u \neq v$, temos $u \in [\ x,\ v\ [$. De maneira inteiramente análoga à precedente, temos $u \in int\,(A) \cap H$ ou $u \in int\,(B) \cap H$, o que é absurdo.

5) Mostremos que H é não-vazio: como A e B são não vazios, existem $a \in A$, $b \in B$. Como $A \cap B = \varnothing$, temos $b \neq a$ e, em conseqüência, $\|\ b - a\| > 0$. Seja

$$f\,(\theta, a, b) = \theta a + (1-\theta)\,b\ , \quad \Theta\,(a,b) = \max\{\ \theta \in [\ 0,1]\ \ |\ f\,(\theta,a,b) \in A\ \ \}\,.$$

a) $\Theta\,(a,b) = 0 \implies a \in H$. Com efeito,

$$\Theta\,(a,b) = 0 \implies f\,(\theta,a,b) \in B,\ \forall\ \theta \in\ ]\ 0,1] \implies\ ]\ a,b] \subset B$$

Seja ε tal que $0 < \varepsilon < \|\ b - a\|$. Assim, para $\theta_\varepsilon = \varepsilon\ /\ \|\ b-a\|$, $b_\varepsilon = f\,(\theta_\varepsilon, a, b)$ satisfaz $b_\varepsilon \in B$ e $\|\ b_\varepsilon - a\| \leq \varepsilon$. Assim, $a \in \overline{B}$. Como $a \in A \subset \overline{A}$, temos $a \in \overline{A} \cap \overline{B} = H$.

b) De maneira analoga, $\Theta\,(a,b) = 1 \implies b \in H$, pois

$$\Theta\,(a,b) = 0 \implies f\,(\theta,a,b) \in A,\ \forall\ \theta \in [\ 0,1[\ \implies [\ a,b[\ \subset A.$$

c) Suponhamos $0 < \Theta(a,b) < 1$. Seja $\lambda = \Theta(a,b)$. Temos $w = f(\lambda, a, b) \in H$: com efeito, seja $k > 0$ un entier tal que $\frac{1}{k} < \min\{\lambda, 1-\lambda\}$. Temos $w \in \overline{A}$, pois $\forall\, n \geq 0 : 0 \leq \lambda - \frac{1}{n+k} \leq \lambda$, $w_n = f\left(\lambda - \frac{1}{n+k}, a, b\right) \in A$ e $\| w_n - w\| \leq \frac{1}{n+k} \| v - u + x\| \to 0$. De maneira análoga, $w \in \overline{B}$, pois $\forall\, n \geq 0 : 0 \leq \lambda + \frac{1}{n+k} \leq 1$, $z_n = f\left(\lambda + \frac{1}{n+k}, a, b\right) \notin A \implies z_n \in B$ e $\| z_n - w\| \leq \frac{1}{n+k} \| v - u + x\| \to 0$.

6) Suponhamos $H \neq V$. Como H é não-vazio, existe $u \in H$. Temos $H - u \neq V$: no caso contrário, $H = (H-u) + u = V + u = V$, o que contradiz $H \neq V$.

7) Consideremos $x \in V$ tal que $x \notin H$ e mostremos que $V = H - u + \mathbb{R}(x-u)$: basta mostrar que $v \in H - u + \mathbb{R}(x-u)$, $\forall\, v \in V$. Inicialmente, notemos que $2u - x \notin H$: caso contrário, para $\alpha = -1$, $\alpha(2u-x) + (1-\alpha)u = u \in H$. Além disto, como $x \notin H$, temos $x \notin \overline{A}$ ou $x \notin \overline{B}$. De maneira análoga, $2u - x \notin \overline{A}$ ou $2u - x \notin \overline{B}$.

a) Suponhamos $x \notin \overline{B}$: então $x \in int(A)$. Além disto, $2u - x \notin \overline{A}$: se $2u - x \notin \overline{B}$, então $2u - x \in int(A)$, de modo que $[\, x, 2u - x\,] \subset int(A)$ e $\frac{1}{2}(2u-x) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)x = u \in int(A)$, o que é absurdo, pois $int(A) \cap H = \varnothing$. Logo, $2u - x \notin \overline{A} \implies 2u - x \in int(B)$. Temos $v + u \in V = A \cup B$, de modo que $v + u \in A$ ou $v + u \in B$.

i) Suponhamos $v + u \in A$. Seja $\lambda = \Theta(v+u, 2u-x)$. Como acima, $\lambda = 0 \implies v + u \in H$, de modo que $v \in H - u$, o qual é um subconjunto de $H - u + \mathbb{R}(x-u)$. Se $\lambda > 0$, $w = f(\lambda, v+u, 2u-x) \in H$, de modo que

$$v = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)(x-u) + \frac{1}{\lambda}(w-u)$$

$$v = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)(x-u) + \frac{1}{\lambda}(w-u)$$

e $v \in H - u + \mathbb{R}(x-u)$.

ii) Suponhamos $v + u \in B$. Seja $\lambda = \Theta(x, v+u)$. De maneira análoga à precedente, $\lambda = 1 \implies v + u \in H$ e $v \in H - u$, o qual é um subconjunto de $H - u + \mathbb{R}(x-u)$. Se $\lambda < 1$, $w = f(\lambda, x, v+u) \in H$, de modo que

$$v = \left(\frac{1}{1-\lambda} - 1\right)(u-x) + \frac{1}{1-\lambda}(w-u)$$

e $v \in H - u + \mathbb{R}(x-u)$.

b) Suponhamos $x \notin \overline{A}$: de maneira análoga, $x \in int\,(\ B\ )$ e $2u - x \in int\,(\ A\ )$. Se $v + u \in A$ e $\lambda = \Theta\,(v + u, x) > 0$, $w = f\,(\lambda, v + u, x) \in H$ e satisfaz

$$v = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)(u - x) + \frac{1}{\lambda}\,(w - u)$$

Se $v + u \in B$ e $\lambda = \Theta\,(2u - x, v + u) > 0$, $w = f\,(\lambda, 2u - x, v + u) \in H$ e satisfaz

$$v = \left(\frac{1}{1 - \lambda} - 1\right)(x - u) + \frac{1}{1 - \lambda}\,(w - u)$$

8) Assim, $H \neq V \implies V = H - u + \mathbb{R}\,(x - u)$, e o teorema decorre da proposição 5.1.7.

$\blacksquare$

Prova do Lema da separação (5.5.4).

O Lema dos dois convexos (5.5.5) mostra que existem dois conjuntos convexos $\mathcal{A} \subset V$, $\mathcal{B} \subset V$ tais que $A \subset \mathcal{A}$, $int\,(\ B\ ) \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = V$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$.

1) Temos $int\,(\ B\ ) \cap \overline{\mathcal{A}} = \varnothing$: se $b \in int\,(\ B\ ) \cap \overline{\mathcal{A}}$ então, por um lado, $b \in \overline{\mathcal{A}}$, de modo que existe uma seqüência $\{\ a_n\}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ tal que $\{\ a_n\}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ e $\|\ a_n - b\| \to 0$ quando $n \to +\infty$. Por outro lado, $b \in int\,(\ B\ )$, de modo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon\,(b) \subset B$. Ora, existe $n_0\,(\varepsilon) > 0$ tal que $n \geq n_0\,(\varepsilon) \implies \|\ a_n - b\| \leq \varepsilon/2$, de modo que $n \geq n_0\,(\varepsilon) \implies a_n \in B_{\varepsilon/2}\,(b) \subset int\,(\ B\ ) \subset \mathcal{B}$. Mas então $a_n \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$, o que é absurdo.

2) Temos também $\overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}} \neq V$: suponhamos o contrário, isto é, $\overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}} = V$. Como $int\,(\ B\ ) = \varnothing$, existe $b \in int\,(\ B\ )$. Mas $\overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}} = V$, de modo que $b \in \overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}} \implies b \in \overline{\mathcal{A}}$. Assim, $b \in int\,(\ B\ ) \cap \overline{\mathcal{A}} = \varnothing$, o que é absurdo.

3) O teorema do hiperplano de fronteira (5.5.6) mostra que $H = \overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}}$ é um hiperplano. Da proposição 5.1.3, existe uma aplicação linear ℓ: $V \to \mathbb{R}$ tal que

$$\ell \neq 0 \ \text{ e } \ H = \{\ v \in V \ \text{ tal que } \ \ell\,(v) = \gamma\}\ .$$

Como $int\,(\ B\ ) \cap \overline{\mathcal{A}} = \varnothing$, temos $int\,(\ B\ ) \cap H = \varnothing$, de modo que existe $b \in int\,(\ B\ )$ tal que $\ell\,(\ b\ ) \neq \eta$. Se $\ell\,(\ b\ ) > \gamma$, definimos $L = \ell$ e $\eta = \gamma$. Senão, definimos $L = -\ell$ e $\eta = -\gamma$. Em qualquer dos casos, $L : V \to \mathbb{R}$ é linear, $L\,(\ b\ ) > \eta$ e $H = \{\ v \in V \ \text{ tal que } \ L\,(v) = \eta\}$.

4) Mostremos que $L\,(\ x\ ) \geq \eta$, $\forall\ x \in B$. Suponhamos o contrário: $\exists\ x \in B$ tal que $L\,(\ x\ ) < \eta$. Então $L\,(\ x\ ) < \eta < L\,(\ b\ )$, de modo que $0 < \eta - L\,(\ x\ ) < L\,(\ b\ ) - L\,(\ x\ )$. Assim

$$\theta = \frac{\eta - L\,(\ x\ )}{L\,(\ b\ ) - L\,(\ x\ )} \implies 0 < \theta < 1\ .$$

Seja $x_\theta = \theta x + (1-\theta) b$. Como L é linear, temos $L(x_\theta) = L(b) + \theta(L(b) - L(x)) = \eta$, de modo que $x_\theta \in H$.

Por outro lado, a proposição 5.2.6 mostra que $]x, b] \subset int(B)$. Ora, $0 < \theta < 1 \implies x_\theta \in]x, b]$, de modo que $x_\theta \in int(B)$. Mas então $x_\theta \in int(B) \cap H = \varnothing$, o que é absurdo.

5) Mostremos que $L(x) \leq \eta, \ \forall x \in A$. Suponhamos o contrário: $\exists x \in A$ tal que $L(x) > \eta$. Seja

$$f(\theta, x, b) = \theta x + (1-\theta) b \ , \quad \Theta(x, b) = \max\{\ \theta \in [0, 1] \ \mid f(\theta, x, b) \in B \ \} .$$

Temos $0 < \Theta(x, b) < 1$: por um lado, $\Theta(x, b) = 0 \implies b \in \overline{B}$ (argumento análogo ao utilizado na prova do teorema do hiperplano de fronteira 5.5.6, § 5a) $\implies b \in int(B) \cap H = \varnothing$, o que é absurdo; por outro lado, $\Theta(x, b) = 1 \implies x \in H$ (argumento análogo ao utilizado na prova do teorema do hiperplano de fronteira 5.5.6, § 5b) $\implies \eta = L(x) > \eta$, o que é absurdo.

Seja $y = f(\Theta(x, b), x, b)$. Como $L(\Theta(x, b) x) = \Theta(x, b) L(x) > \Theta(x, b) \eta$, temos $L(y) = \Theta(x, b) L(x) + (1 - \Theta(x, b)) L(b) > \Theta(x, b) \eta + (1 - \Theta(x, b)) \eta = \eta$. Mas $y \in H$ (argumento análogo ao utilizado na prova do teorema do hiperplano de fronteira 5.5.6, § 5c). Logo $\eta = L(y) > \eta$, o que é absurdo.

6) Assim, H separa fracamente A e B. Como $L(b) > \eta$, $b \notin H$, de modo que H separa propriamente A e B.

7) Temos $int(B) \subset \{\ v \in V \ \text{ tal que } \ L(v) > \eta\}$, de modo que o Teorema 5.1.4 mostra que H é fechado.

■

Prova do teorema da separação própria(5.5.2).
Basta aplicar o Lema da separação (5.5.4) com $A = S$, $B = C$: A é convexo (proposição 5.2.3) e B é convexo, $A \neq \varnothing$, $int(B) \neq \varnothing$, $A \cap int(B) = \varnothing$. ■

Prova do teorema da separação forte(5.5.3).
Este teorema também resulta do Lema da separação (5.5.4): a proposição 5.4.7 mostra que existe $x \in C$ tal que $x \notin S$ e

$$0 < d = dist(x, S) = \inf\{\ dist(c, S) \ : \ c \in C\} \ .$$

Seja ε tal que $0 < \varepsilon < d/2$. Consideremos

$$A = S + int(B_\varepsilon(0)) \quad ; B = C + int(B_\varepsilon(0)) \quad .$$

Temos

1) $int(A) \neq \emptyset$. Com efeito, $S \subset int(A)$: seja $\delta = \varepsilon/2$. Temos $B_\delta(0) \subset int(B_\varepsilon(0))$, de modo que para todo $s \in S$: $s + B_\delta(s) \subset S + int(B_\varepsilon(0)) \subset A$.

2) $int(B) \neq \emptyset$. De maneira análoga, $C \subset int(A)$.

3) A é convexo: S é convexo e $int(B_\varepsilon(0))$ (proposições 5.2.5 e 5.2.6), de modo que $S + int(B_\varepsilon(0))$ é convexo (proposição 5.2.8).

4) B é convexo: de maneira análoga, B é a soma dos convexos C e $int(B_\varepsilon(0))$.

5) $A \cap int(B) = \emptyset$. Suponhamos o contrário. Então existe $x \in A$ tal que $x \in int(B) \subset B$. Assim, existem $s \in S$, $c \in C$, $y_0 \in int(B_\varepsilon(0))$, $y_1 \in int(B_\varepsilon(0))$ tais que $x = s + y_0$ e $x = c + y_1$. Então

$$\| s - c\| = \| y_0 - y_1\| \leq \| y_0\| + \| y_1\| \leq 2\varepsilon < d \ .$$

Mas $s \in S$ e $c \in C$, de modo que

$$\| s - c\| \geq dist(c, S) \geq d$$

e $d > d$, o que é absurdo.

6) Assim, A é convexo, B é convexo, $A \neq \emptyset$, $int(B) \neq \emptyset$, $A \cap int(B) = \emptyset$. O Lema da separação mostra que existe um hiperplano fechado $H = L^{-1}(\eta)$ que separa propriamente A e B.

7) Mostremos que $L(s) < \eta$, $\forall\ s \in S$. Para todo $s \in S$, $L(s) \leq \eta$, pois $L(a) \leq \eta \leq L(b)$, $\forall\ a \in A$, $b \in B$. Suponhamos $s \in S$ e $L(s) = \eta$. Como $L \neq 0$, existe $u \in V$ tal que $L(u) \neq 0$. Temos $\| u\| > 0 : u = 0 \Longrightarrow L(u) = 0$. Seja

$$x_n = \frac{u}{nL(u)} \quad ; \quad \alpha = \frac{\| u\|}{| L(u)|} > 0 \ .$$

Então

$$L(x_n) = \frac{L(u)}{nL(u)} = \frac{1}{n} > 0 \quad ; \quad \| x_n\| = \frac{1}{n}\frac{\| u\|}{| L(u)|} = \frac{\alpha}{n} \to 0 \ .$$

Assim, existe $k > \alpha/\varepsilon > 0$ tal que $x_n \in int(B_\varepsilon(0))$ e $L(x_n) > 0$. Mas então:

$$a = s + x_k \in A \quad \text{e} \quad L(a) = L(s) + L(x_n) = \eta + \frac{1}{n} > \eta,$$

de modo que $\eta < L(a) \leq \eta$, o que é absurdo.

8) De maneira análoga, $L(s) > \eta$, $\forall\ c \in C$: para todo $c \in C$, $L(c) \geq \eta$, pois $L(a) \leq \eta \leq L(b)$, $\forall\ a \in A$, $b \in B$. Se $c \in C$ e $L(c) = \eta$, então

$$b = c - x_k \in B \quad \text{e} \quad L(\ b) = L(\ c) - L(\ x_n) = \eta - \frac{1}{n} < \eta,$$

de modo que $\eta \leq L(\ b) < \eta$, o que é absurdo.

■

Duas das conseqüências do Teorema de Hahn-Banach são as seguintes

Corolário 5.5.7. *: Seja $W \subset V$ um subespaço vetorial. Então*

a) se W não é denso em V, então existe um hiperplano fechado H tal que $W \subset \overline{W} \subset H$.

b) W é denso em V se e somente se toda aplicação linear contínua $L : V \to \mathbb{R}$ que se anula em W é nula em V (isto é, $L \in V'$ e $L = 0$ em $W \implies L = 0$). ■

Prova. Notemos que W é não-vazio, pois $0 \in W$.

a): Como W não é denso, temos $\overline{W} \neq V$, de modo que existe $x \in V$ tal que $x \notin \overline{W}$. Sejam $S = \overline{W}$ e $C = \{\ x\}$. Como W é um subespaço vetorial, S é un convexo fechado e C é um convexo compacto. Assim, o teorema da separação forte mostra que existe um hiperplano fechado $\mathcal{H} = L^{-1}(\eta)$ tal que

$$L(w) < \eta < L(x), \quad \forall\ \ w \in \overline{W}.$$

Temos $\overline{W} \subset N(L)$: suponhamos $w \in \overline{W}$ e $L(w) \neq 0$. Seja $n > 0$ tal que $n > \eta$. Como $\overline{W}$ é um subespaço vetorial (proposição 4.3.15),

$$w_n = n\frac{w}{L(w)} \in \overline{W} \implies n = L(w_n) < \eta,$$

de modo que $\eta > \eta$, o que é absurdo. Assim, $\overline{W} \subset H = N(L)$, que é um hiperplano. Temos $\mathcal{H}$ fechado, de modo que H é fechado (proposição 5.1.4).

b) Suponhamos W denso em V. Seja $L \in V'$ tal que $L(w) = 0$, $\forall\ w \in W$. Para todo $v \in V$, existe uma seqüência $\{\ w_n\}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset W$ tal que $w_n \to v$ em$V$. Como L é contínua, temos $L(w_n) \to L(v)$, de modo que $L(v) = 0$ (pois $L(w_n) = 0$, $\forall\ n$). Assim, $L = 0$.

Suponhamos que toda aplicação linear continue $L : V \to \mathbb{R}$ que se anula sobre W é nula sobre V. Se W não é denso em V, então $\overline{W} \neq V$, de modo que existe $x \in V$ tal que $x \notin \overline{W}$. De maneira análoga à utilizada na demonstração da afirmação de a), o teorema da separação forte mostra que existe um hiperplano fechado $\mathcal{H} = L^{-1}(\eta)$ tal que

$$L(w) < \eta < L(x), \quad \forall\ \ w \in W.$$

e temos $W \subset H = N(L)$. Mas então $L(w) = 0$, $\forall\, w \in W$, de modo que $L = 0$ e $0 < \eta < 0$, o que é absurdo. $\blacksquare$

Uma das conseqüências mais importantes dos teoremas de separação é a seguinte:

Teorema 5.5.8 (semi-espaços fechados). *Seja $S \subset V$ um conjunto não-vazio. Então $\overline{co}\,(S)$ é a intersecção de todos os semi-espaços fechados que contêm S, isto é, se*

$$\mathcal{H} = \bigcap \{\ W : W \text{ é um semi-espaço fechado de } V \text{ e } S \subset W\},$$

então $\mathcal{H} = \overline{co}\,(S)$. $\blacksquare$

Prova.

1) Notemos inicialmente que sempre existe pelo menos um subespaço fechado que contém S: com efeito, se $L = 0$ e $\eta = 0$, então $H^- = \{\ u \in V \mid L(u) \le \eta\ \} = V$, de modo que $S \subset H^-$.

2) $\mathcal{H}$ é fechado, pois trata-se da intersecção de uma família de fechados (Cf. proposição 4.3.10). Além disto, $\mathcal{H}$ é convexo, pois trata-se da intersecção de uma família de convexos (Cf. proposição 5.2.6), dado que cada semi-espaço W é convexo (proposição 5.2.4). Assim, $\mathcal{H}$ é um convexo fechado contendo S. Temos então $\overline{co}\,(S) \subset \mathcal{H}$, pois $\overline{co}\,(S)$ é o menor convexo fechado contendo S.

3) Mostremos que $\mathcal{H} \subset \overline{co}\,(S)$: suponhamos que existe $x \in \mathcal{H}$ tal que $x \notin \overline{co}\,(S)$. Como $\{\ x\ \}$ é um convexo compacto e $\overline{co}\,(S)$ é um convexo fechado não vazio, o teorema da separação forte mostra a existência de um hiperplano fechado que separa estritamente $\overline{co}\,(S)$ e $\{\ x\ \}$: existem $\eta \in \mathbb{R}$ e um funcional linear contínuo $L : V \to \mathbb{R}$ tais que

$$L(y) < \eta < L(x)\,,\ \forall\, y \in \overline{co}\,(S)\,.$$

Como $S \subset \overline{co}\,(S)$, temos $L(y) < \alpha$, $\forall\, y \in S$. Resulta que $S \subset H^- = \{\ u \in V \mid L(u) \le \eta\ \}$. Como $L : V \to \mathbb{R}$ é contínuo, H^- é fechado (proposição 5.2.4). Assim, H^- é um hiperplano fechado contendo S, de modo que $\mathcal{H} \subset H^-$. Ora, $x \in \mathcal{H}$: temos então $x \in H^-$, de modo que $L(x) \le \eta$. Mas então $\eta < L(x) \le \eta$, o que é absurdo.

$\blacksquare$

Enfim, temos:

Teorema 5.5.9. *Seja $S \subset V$ um convexo fechado não-vazio. Então S é fracamente fechado.* ■

Este resultado, combinado à proposição 4.8.15 mostra que *um convexo é fechado se e somente se ele é fracamente fechado.*

Prova. Seja $S \subset V$ um convexo fechado. Suponhamos que S não é fracamente fechado. Então existe $\{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset C$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ e $x \notin C$. Seja $C = \{ x \}$. Como S é um convexo fechado e C é um convexo compacto, o teorema da separação forte mostra que existe um hiperplano fechado $\mathcal{H} = L^{-1}(\eta)$ tal que

$$L(s) < \eta < L(x), \quad \forall \ s \in S.$$

Assim,

$$L(x_n) < \eta < L(x), \quad \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Da proposição 4.8.4, temos $L(x_n) \to L(x)$, de modo que

$$L(x) \leq \eta < L(x) \ ,$$

o que é absurdo. ■

5.6 Cones Convexos

Definição 5.6.1. *Seja $K \subset V$ um conjunto* não-vazio. *K é um cone se e somente se: $\forall \ x \in K$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0 \Longrightarrow \lambda x \in K$. K é um cone convexo se e somente se K é um cone e K é um convexo. Analogamente, K é um cone fechado se e somente se K é um cone e K é fechado. Enfim, K é um cone convexo fechado se e somente se K é um cone convexo e K é um cone fechado.* ■

Proposição 5.6.2. *Seja $K \subset V$ um cone. Então K é um cone convexo se e somente se: $\forall \ x \in K$, $y \in K : x + y \in K$.* ■

Prova. $(\Longrightarrow)$: Como K é um convexo, temos, para $x \in K$ e $y \in K$: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in K$. Por outro lado, K é um cone, de modo que $2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) = x + y \in K$.

$(\Longleftarrow)$: Como K é um cone, temos, para $\theta \in (0, 1)$, $x \in K$ e $y \in K$: $\theta x \in K$ e $(1-\theta)\, y \in K$. Assim $\theta x + (1-\theta)\, y \in K$, assim K é um convexo. ■

Definição 5.6.3. *Seja $K \subset V$ um cone. O cone normal à K é*

$$K^* = \{ \ p \in V \ \mid \ (p, \ x) \leq 0, \ \forall x \in K \} .$$

O cone binormal é $K^{**} = \{ \ x \in V \ \mid \ (p, \ x) \leq 0, \ \forall \ p \in K^* \}$. ■

Proposição 5.6.4. *Seja $K \subset V$ um cone. Então K^* é um cone convexo fechado.* ■

Prova.

1) K^* é um cone: com efeito, se $\lambda \geq 0$ e $(p,\ x) \leq 0$, então

$$(\lambda p,\ x) = \underbrace{\lambda}_{\geq 0}\underbrace{(p,\ x)}_{\leq 0} \leq 0,$$

de modo que $(p,\ x) \leq 0,\ \forall\ x \in K \Longrightarrow (\lambda p,\ x) \leq 0,\ \forall\ x \in K$. Assim, $p \in K^* \Longrightarrow \lambda p \in K^*$.

2) K^* é um convexo: com efeito, se $\theta \in (0,1)\,,\ (p_1,\ x) \leq 0$ e $(p_2,\ x) \leq 0$, então

$$(\theta p_1 + (1-\theta)\, p_2,\ x) = \underbrace{\theta}_{\geq 0}\underbrace{(p_1,\ x)}_{\leq 0} + \underbrace{(1-\theta)}_{\geq 0}\underbrace{(p_2,\ x)}_{\leq 0} \leq 0,$$

de modo que, para todo $\theta \in (0,1)$: $(p_1,\ x) \leq 0$ e $(p_2,\ x) \leq 0,\ \forall\ x \in K \Longrightarrow (\theta p_1 + (1-\theta)\, p_2,\ x) \leq 0,\ \forall\ x \in K$. Assim, $p_1 \in K^*$, $p_2 \in K^*$, $\theta \in (0,1)$ $\Longrightarrow \theta p_1 + (1-\theta)\, p_2 \in K^*$.

3) K^* é fechado: seja $\{\ p_n\}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset K^*$ tal que $p_n \to p$ em V. Consideremos $x \in K$. Então, por um lado, $(p,\ x) = \lim\,(p_n,\ x)$ e, por outro lado, $(p_n,\ x) \leq 0,\ \forall$ $n \in \mathbb{N}$, de modo que $(p,\ x) \leq 0$. Como $x \in K$ é arbitrário, resulta que $p \in K^*$. Assim K^* é fechado.

4) K^* é não-vazio, pois $0 \in K^*$.

■

Corolário 5.6.5. *Seja $K \subset V$ um cone. Então*

(i) $K^{**} = (K^*)^*$,

(ii) *K^{**} é um cone convexo fechado,*

(iii) *$K \subset K^{**}$ e $\overline{K} \subset K^{**}$.*

(iv) *Se K é um cone convexo então $\overline{K} = K^{**}$.*

(v) *K é um cone convexo fechado se e somente se $K = K^{**}$.* ■

Prova.

1) A igualdade $K^{**} = (K^*)^*$ é imediata, pois

$$(K^*)^* = \{\ x \in V\ \mid\ (p,\ x) \leq 0,\ \forall\ p \in K^*\}\,.$$

2) Resulta da proposição precedente que K^{**} é um cone convexo fechado não-vazio.

3) É imediato que $K \subset K^{**}$: se $x \in K$, então, $(p,\ x) \leq 0$, $\forall\ p \in K^*$.

4) Como K^{**} é fechado, temos $\overline{K} \subset K^{**}$($\overline{K}$ é o menor fechado contendo K).

5) Suponhamos K convexo e $\overline{K} \neq K^{**}$. Então existe $x \in K^{**}$ tal que $x \notin \overline{K}$. Como $\overline{K}$ é um convexo fechado (Cf. proposição 5.2.9), não-vazio (pois $K \subset \overline{K}$) e $\{\ x\ \}$ é um convexo compacto, resulta do teorema da separação forte a existência de um hiperplano que separa estritamente os dois conjuntos: existem $\alpha \in \mathbb{R}$ e um funcional linear contínuo $L : V \to \mathbb{R}$ tais que

$$L\,(y) < \alpha < L\,(x)\,,\ \forall\ y \in \overline{K}$$

Temos $L\,(y) \leq 0$ para todo $y \in K$: com efeito, K é um cone e $K \subset \overline{K}$, de modo que $ny \in \overline{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : L\,(ny) < \alpha \Longrightarrow L\,(y) < \alpha/n \to 0, \text{ para } n \to +\infty.$$

Temos também $\alpha \geq 0$, pois, de maneira análoga, $y/n \in \overline{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : \alpha > L\,(y/n) \Longrightarrow \alpha > L\,(y)\,/n \to 0, \text{ para } n \to +\infty.$$

Do teorema de representação de Riesz (4.7.1), existe um elemento $p \in V$ tal que $L\,(v) = (\ p,\ v)$, para todo $v \in V$. Temos então $(\ p,\ y) \leq 0$ para todo $y \in K$, de modo que $p \in K^*$. Assim, como $x \in K^{**}$, temos $(\ p,\ x) \leq 0$. Logo, $L\,(x) = (\ p,\ x) \leq 0$. Resulta que $\alpha < L\,(x) \leq 0$, de modo que $\alpha \geq 0$ e $\alpha < 0$, o que é absurdo.

6) Enfim, K é um cone convexo fechado se e somente se K é um cone convexo e $K = \overline{K}$. Assim, K é um cone convexo fechado se e somente se $K = K^{**}$.

■

Utilizaremos também as noções seguintes:

Definição 5.6.6 (vetor tangente)**.** *Sejam $S \subset V$ um conjunto não-vazio e $x \in S$. Seja $h \in V$. Diremos que h é tangente a S no ponto x (ou simplesmente "em x") se e somente se existem duas seqüências $\{\ \alpha_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ e $\{\ x_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset S$ tais que*

(i) $\alpha_n \geq 0$ *e* $\alpha_n \to 0$ *em* $\mathbb{R}$,

(ii) $x_n \to x$ *em* V,

(iii) $\dfrac{x_n - x}{\alpha_n} \to h$ *em* V.■

Definição 5.6.7 (cone tangente)**.** *Seja $S \subset V$ um conjunto não-vazio e seja $x \in S$. O cone tangente a S em x é a reunião de todos os vetores tangentes à S em x.*

$$TC\,(S,x) = \{\ h \in V\ \mid h \text{ é tangente à } S \text{ em } x\ \}\ .\ \blacksquare$$

Temos:

Proposição 5.6.8. *Seja $S \subset V$ um conjunto não vazio e seja $x \in S$. O cone tangente a S em x é um cone fechado.*$\blacksquare$

Prova.

1) $TC\,(S,x)$ é não-vazio, pois $0 \in TC\,(S,x)$ (tomar, por exemplo, $x_n = x$ e $\alpha_n = 1/n$).

2) Sejam $h \in TC\,(S,x)$ e $\lambda \geq 0$. Sejam $\{\ \alpha_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ e $\{\ x_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset S$ as seqüências associadas à h. Tomando $\widetilde{\alpha}_n = \alpha_n/\lambda$, $\widetilde{x}_n = x_n$, temos $\{\ \widetilde{\alpha}_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$

$\subset \mathbb{R}$ e $\{\ \widetilde{x}_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset S$, $\widetilde{\alpha}_n \geq 0$ e $\widetilde{\alpha}_n \to 0$ em $\mathbb{R}$, $\widetilde{x}_n \to x$ em V e $\dfrac{\widetilde{x}_n - x}{\widetilde{\alpha}_n} \to \lambda h$ em V, de modo que $\lambda h \in TC\,(S,x)$.

3) Seja $\{\ h_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset TC(S,x)$ tal que $h_n \to h$ em V. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem duas seqüências $\{\ \alpha_{n,k}\ \}_{k\ \in\ \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ e $\{\ x_{n,k}\ \}_{k\ \in\ \mathbb{N}} \subset S$ tais que $\alpha_{n,k} \geq 0$; $\alpha_{n,k} \to 0$ em $\mathbb{R}$, $x_{n,k} \to x$ em V e $\dfrac{x_{n,k} - x}{\alpha_{n,k}} \to h_n$ quando $k \to +\infty$. Assim, para $n > 0$, existe $k(n)$ tal que

$$\left|\alpha_{n,k(n)}\right| \leq \frac{1}{n}\ ;\ \left\|x_{n,k(n)} - x\right\| \leq \frac{1}{n}\ ;\ \left\|\frac{x_{n,k(n)} - x}{\alpha_{n,k(n)}} - h_n\right\| \leq \frac{1}{n}\ ;\ \|h_n - h\| \leq \frac{1}{n}\ .$$

Sejam $\widetilde{x}_n = x_{n,k(n)}$ e $\widetilde{\alpha}_n = \alpha_{n,k(n)}$. Temos: $\widetilde{\alpha}_n \geq 0$ e

$$|\ \widetilde{\alpha}_n\ | \leq \frac{1}{n},$$

de modo que $\widetilde{\alpha}_n \to 0$ em $\mathbb{R}$;

$$\|\ \widetilde{x}_n - x\ \| \leq \frac{1}{n},$$

de modo que $\widetilde{x}_n \to x$ em V;

$$\left\|\ \frac{\widetilde{x}_n - x}{\widetilde{\alpha}_n} - h\ \right\| \leq \left\|\ \frac{\widetilde{x}_n - x}{\widetilde{\alpha}_n} - h_n\ \right\| + \|\ h_n - h\ \| \leq \frac{2}{n},$$

de modo que $\dfrac{\widetilde{x}_n - x}{\widetilde{\alpha}_n} \to h$ em V. Assim $h \in TC(S,x)$. Logo, $TC(S,x)$ é fechado.

■

Temos também

Proposição 5.6.9. *Seja $S \subset V$ um conjunto convexo não vazio e seja $x \in S$. Então*

$$TC\,(S,x) = \overline{\bigcup_{\lambda\,\geq\,0} \lambda\,(\;S - \{\;x\;\})}\quad ,$$

isto é,

$$TC\,(S,x) = \overline{\mathbb{R}_+\,(S - \{x\})}\ ;\ \mathbb{R}_+\,(S - \{x\}) = \{h \in V\,|h = \lambda\,(y - x)\,,\,y \in S,\,\lambda \geq 0\}\,.$$

Assim, $TC\,(S,x)$ é um cone convexo fechado. ■

Prova.

1) Notemos inicialmente que $S - \{\;x\;\} \subset TC\,(S,x)$: com efeito, seja $y \in S$. Consideremos $\alpha_n = 1/n$ e $x_n = (1-\alpha_n)\,x + \alpha_n y$. Como S é convexo, $\{\;x_n\;\}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset S$. Além disto, $\alpha_n \geq 0$ e $\alpha_n \to 0$ em $\mathbb{R}$; $x_n \to x$ em V ; $\dfrac{x_n - x}{\alpha_n} \to y - x$ em V.

2) Como $TC\,(S,x)$ é um cone, resulta que $\mathbb{R}_+\,(\;S - \{\;x\;\}) \subset TC\,(S,x)$. Mas $TC\,(S,x)$ é fechado, de modo que $\overline{\mathbb{R}_+\,(\;S - \{\;x\;\})} \subset TC\,(S,x)$.

3) Consideremos agora $h \in TC\,(S,x)$. Sejam $\{\;\alpha_n\;\}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ e $\{\;x_n\;\}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset S$ as seqüências associadas à h. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{x_n - x}{\alpha_n} = \underbrace{\frac{1}{\alpha_n}}_{\geq\,0}\left(\underbrace{x_n}_{\in\,S} - x\right) \in \mathbb{R}_+\,(\;S - \{\;x\;\})\,,$$

de modo que $h \in \overline{\mathbb{R}_+\,(\;S - \{\;x\;\})}$. Assim $TC\,(S,x) \subset \overline{\mathbb{R}_+\,(\;S - \{\;x\;\})}$.

4) Logo, $TC\,(S,x) = \overline{\mathbb{R}_+\,(\;S - \{\;x\;\})}$, que é convexo: com efeito, se $u \in \mathbb{R}_+\,(\;S - \{\;x\;\})$ e $v \in \mathbb{R}_+\,(\;S - \{\;x\;\})$, então existem dois elementos $y \in S$ e $z \in S$, assim como dois reais $\lambda \geq 0$ e $\eta \geq 0$, tais que $u = \lambda\,(y - x)$ e $v = \eta\,(z - x)$. Logo,

$$u + v = (\lambda + \eta)\,(\;\theta y + (1-\theta)\,z - x\;)\quad ;\quad \theta = \frac{\lambda}{\lambda + \eta} \in (0,1)\quad .$$

Ora, S é convexo, de modo que $\theta y + (1-\theta)\,z \in S$ e, por conseguinte, $u + v \in \mathbb{R}_+\,(\;S - \{\;x\;\})$. Resulta da proposição 5.6.2 que $\mathbb{R}_+\,(\;S - \{\;x\;\})$ é um cone convexo. Logo, $\overline{\mathbb{R}_+\,(\;S - \{\;x\;\})}$ também é convexo (Cf. proposição 5.2.9). O resultado é completado pela proposição 5.6.8.

■

Por vezes é útil utilizar a caracterização seguinte dos vetores tangentes:

Proposição 5.6.10. *Sejam $S \subset V$ um conjunto não-vazio e $x \in S$. Seja $h \in V$. Então h é tangente a S no ponto x se e somente se existem três seqüências $\{ \alpha_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $\{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ e $\{ h_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ tais que*

(i) $\alpha_n \geq 0$ *e* $\alpha_n \to 0$ *em* $\mathbb{R}$*,*

(ii) $x_n \to x$ *em* V*,*

(iii) $\dfrac{x_n - x}{\alpha_n} \to 0$ *em* V*,*

(iv) $h_n \to h$ *em* V*,*

(v) $\forall\ n \in \mathbb{N} : x_n + \alpha_n h_n \in S$.■

Prova. ($\Longrightarrow$) Basta considerar $h_n = \dfrac{x_n - x}{\alpha_n}$ e $\widetilde{x}_n = x$. Temos $\widetilde{x}_n \to x$ em V, $\dfrac{\widetilde{x}_n - x}{\alpha_n} = 0 \to 0$ em V, $h_n \to h$ em V, $\forall\ n \in \mathbb{N} : \widetilde{x}_n + \alpha_n h_n = x_n \in S$.

($\Longleftarrow$) Basta considerar $\widetilde{x}_n = x_n + \alpha_n h_n$. Temos $\{ \widetilde{x}_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ e

$$\widetilde{x}_n = x_n + \alpha_n h_n \to x + 0h = x \text{ em } V \ ; \ \frac{\widetilde{x}_n - x}{\alpha_n} = \frac{x_n - x}{\alpha_n} + h_n \to 0 + h = h \text{ em } V.$$

■

Definição 5.6.11 (vetor normal)**.** *Seja $S \subset V$ um conjunto não-vazio e seja $x \in S$. Seja $p \in V$. Diremos que p é normal a S no ponto x (ou simplesmente "em x") se e somente se h é um elemento do cone normal a $TC(S,x)$:*

$$p \in TC(S,x)^* .$$

A reunião de todos os vetores normais a S em x é o cone normal a S em x:

$$NC(S,x) = TC(S,x)^* . \ \blacksquare$$

Temos:

Proposição 5.6.12. *Seja* $S \subset V$ *um conjunto não vazio e seja* $x \in S$*. Então* $NC(S,x)$ *é um cone convexo fechado e* $\overline{TC(S,x)} \subset NC(S,x)^*$*. Se, além disto,* S *é convexo, então* $TC(S,x) = NC(S,x)^*$ *e* $NC(S,x) = (\ S - \{\ x\ \}\ )^*$*, isto é,*

$$NC(S,x) = \{\ p \in V \ \mid \ (p,\, y - x) \leq 0,\ \forall\ y \in S\ \ \}\ . \ \blacksquare$$

Prova.

1) A proposição 5.6.4 mostra que $NC(S,x)$ é um cone convexo fechado. $\overline{TC(S,x)} \subset NC(S,x)^*$ resulta da proposição 5.6.5.

2) Se S é convexo, a proposição 5.6.9 mostra que $TC(S,x)$ é um cone convexo fechado e a proposição 5.6.5 mostra que $TC(S,x) = NC(S,x)^*$.

3) Seja $p \in NC(S,x)$. Então $(p,\, h) \leq 0$, para todo $h \in TC(S,x)$. Para $h \in \mathbb{R}_+(\ S - \{\ x\ \})$, temos

$$\lambda\,(p,\, y - x) \leq 0,\ \forall\ y \in S,\ \lambda \geq 0.$$

Utilizando esta desigualdade com $\lambda = 1$, obtemos $(p,\, y - x) \leq 0$, $\forall\ y \in S$, de modo que

$$NC(S,x) \subset \{\ p \in V \ \mid \ (p,\, y - x) \leq 0,\ \forall\ y \in S\ \ \}\ \ .$$

4) Reciprocamente, seja $p \in V$ tal que $(p,\, y - x) \leq 0$, $\forall\ y \in S$. Temos então

$$\lambda\,(p,\, y - x) \leq 0,\ \forall\ y \in S,\ \lambda \geq 0,$$

de modo que $(p,\, h) \leq 0$, $\forall\ h \in \mathbb{R}_+(\ S - \{\ x\ \})$. Ora, para todo $h \in TC(S,x)$, existe uma seqüência $\{\ h_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+(\ S - \{\ x\ \})$ tal que $h_n \to h$ em V. Como $(p,\, h_n) \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(p,\, h_n) \to (p,\, h)$, temos $(p,\, h) \leq 0$. Assim

$$\{\ p \in V \ \mid \ (p,\, y - x) \leq 0,\ \forall\ y \in S\ \ \} \subset NC(S,x)\ \ .$$

5) As duas inclusões mostram que $NC(S,x) = \{\ p \in V \ \mid \ (p,\, y - x) \leq 0,\ \forall\ y \in S\ \ \}$.

$\blacksquare$

Capítulo 6

Funcionais em Espaços de Hilbert

A noção de *funcional* é central na Análise Convexa e já foi introduzida em 4.4, onde estudamos as propriedades dos *funcionais lineares* e demonstramos um dos resultados fundamentais - *o teorema de representação de Riesz.* Neste capítulo, retomaremos o estudo dos funcionais, explorando as conexões entre a teoria dos conjuntos - sobretudo convexos - e os funcionais. A conexão essencial é obtida associando a cada funcional um conjunto particular: seu *epigrafo.* Veremos então que as propriedades do epigrafo definem as propriedades do funcional, o que será obtido usando os resultados do capítulo precedente. Lembremos que um funcional é uma aplicação transformando os elementos de V em números reais. Como já observamos, tais funcionais representam uma energia ou um trabalho e desempenham um papel essencial em nossa teoria.

Por comodidade - sugerida pela prática - consideraremos também valores infinitos e utilizaremos as notações

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, \ -\infty\} \ ; \ \overline{\mathbb{R}}^{+} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

e consideraremos doravante que um funcional é uma aplicação $J : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Este artifício permitirá unificar o tratamento dos funcionais, considerando sempre que p domínio é V.Para os funcionais definidos somente sobre uma parte de V, digamos em $S \subset V$ e $J : S \rightarrow \mathbb{R}$, podemos considerar sua extensão a todo espaço V dada por

$$J_e(u) = J(u) \ , \ \text{se} \ \ u \in S \quad ; \quad J_e(u) = +\infty \ , \ \text{se} \ \ u \notin S \quad . \tag{6.1}$$

Uma tal extensão preserva todas as minorações de J, assim como seus pontos e valores de mínimos locais sobre S. Veremos que ela traz também outras vantagens, tais como a determinação de multiplicadores de Lagrange ou de forças em vínculos. Quando necessário, retomaremos a restrição de J_e a S através da noção de *domínio efetivo*, isto é, da parte de V onde J_e toma valores finitos.

A introdução de valores infinitos nos obriga a definir regras de operação para esses valores:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \;\text{ e }\; x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : x - (+\infty) = -\,(+\infty) + x = -\infty \;\text{ e }\; x - (-\infty) = -\,(-\infty) + x = +\infty$$

$$\forall\, x > 0 : x.\,(+\infty) = (+\infty)\,.x = +\infty \;\text{ e }\; x.\,(-\infty) = (-\infty)\,.x = -\infty$$

$$\forall\, x < 0 : x.\,(+\infty) = (+\infty)\,.x = -\infty \;\text{ e }\; x.\,(-\infty) = (-\infty)\,.x = +\infty$$

$$0.\,(+\infty) = 0.\,(-\infty) = (+\infty)\,.0 = (-\infty)\,.0 = 0$$

$$(+\infty)\,.\,(+\infty) = +\infty \;;\; (-\infty)\,.\,(-\infty) = +\infty \;;\; (-\infty)\,.\,(+\infty) = (+\infty)\,.\,(-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \;;\; (-\infty) + (-\infty) = -\infty \;.$$

As expressões $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$ são indeterminadas. Utilizaremos também as relações de ordem:

$$-\infty < +\infty \;\; ; \;\; \forall\, x \in \mathbb{R} : x < +\infty \text{ e } x > -\infty \;.$$

6.1 Noções Fundamentais

No que segue, manipularemos subconjuntos de $V \times \mathbb{R}$. Não examinaremos aqui todas as propriedades deste último conjunto. Lembremos somente que, para $\alpha \in \mathbb{R}$; $(u,\, \lambda) \in V \times \mathbb{R}$ e $(v,\, \eta) \in V \times \mathbb{R}$, definimos

$$(u,\, \lambda) + (v,\, \eta) = (u + v,\, \lambda + \eta)\,;\;\; \alpha\,(u,\, \lambda) = (\alpha u,\, \alpha\lambda) \;\;.$$

De maneira análoga, se $(u,\, v)$ é o produto escalar entre u e v, definido em V,

$$(\;(u,\, \lambda)\,,\; (v,\, \eta)\;) = (u,\, v) + \lambda\eta$$

é o produto escalar sobre $V \times \mathbb{R}$. Se V é um espaço de Hilbert, então estas definições tornam $V \times \mathbb{R}$ um espaço de Hilbert. Por exemplo, temos:

Lema 6.1.1. *Seja V um espaço de Hilbert. Então $L : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um funcional linear e contínuo se e somente se existem $p \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $L\,((v,\, \eta)) = (p,\, v) + \alpha\eta$ para todo $(v,\, \eta) \in V \times \mathbb{R}$.* ■

Prova. Basta aplicar o teorema de representação de Riesz. ■

Como observamos precedentemente, a conexão fundamental entre os funcionais e os conjuntos é feita através da noção de epigrafo:

Definição 6.1.2 (epigrafo). *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. O epigrafo de J é o conjunto*

$$epi\,(J) = \{ \ (u,\, \lambda) \in V \times \mathbb{R} \ \mid J\,(u) \leq \lambda \ \} \,. \ \blacksquare$$

Lembremos que

Definição 6.1.3. *Sejam $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ e $I : V \to \overline{\mathbb{R}}$ dois funcionais. Diremos que $I \leq J$, isto é, que I é um minorante de J, se e somente se $I\,(u) \leq J\,(u)$ para todo $u \in V$.* $\blacksquare$

Uma das propriedades úteis do epigrafo é a seguinte:

Lema 6.1.4. *Sejam $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ e $I : V \to \overline{\mathbb{R}}$ dois funcionais. Então $I \leq J$ se e somente se $epi\,(J) \subset epi\,(I)$.* $\blacksquare$

Prova. ($\Longrightarrow$): suponhamos que $epi\,(J) \not\subset epi\,(I)$. Então existe $(u,\, \lambda) \in epi\,(J)$ tal que $(u,\, \lambda) \notin epi\,(I)$. Temos então

$$J\,(u) \leq \lambda \ \text{ e } \ \ \lambda < I\,(u)\,.$$

Como $I\,(u) \leq J\,(u)$, temos $\lambda < I(u) \leq J\,(u) \leq \lambda$. Assim, $\lambda < \lambda$, o que é absurdo. ($\Longleftarrow$): suponhamos que existe $u \in V$ tal que $J\,(u) < I\,(u)$. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $J\,(u) \leq \lambda < I\,(u)$. Mas então $(u,\, \lambda) \in epi\,(J)$. Como $epi\,(J) \subset epi\,(I)$, $(u,\, \lambda) \in epi\,(I)$, de modo que $I\,(u) \leq \lambda$. Mas então $\lambda < I(u) \leq \lambda$ e $\lambda < \lambda$, o que é absurdo. $\blacksquare$

Uma outra propriedades útil é a seguinte:

Lema 6.1.5. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. Seja $u \in V$. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(u,\, \lambda) \in epi\,(J)$ se e somente se $J\,(u) < +\infty$.* $\blacksquare$

Prova. ($\Longrightarrow$): suponhamos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(u,\, \lambda) \in epi\,(J)$. Então $J\,(u) \leq \lambda \in \mathbb{R}$, de modo que $J\,(u) < +\infty$. ($\Longleftarrow$): suponhamos que $J\,(u) < +\infty$. Então $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $J\,(u) \leq \lambda$, o que implica $(u,\, \lambda) \in epi\,(J)$. $\blacksquare$

Utilizaremos também os resultados seguintes :

Lema 6.1.6. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. Seja $u \in V$. Então $(u,\, \lambda) \in epi\,(J)$ se e somente se $(u,\, \eta) \in epi\,(J)$ para todo $\eta > \lambda$.* $\blacksquare$

Prova. ($\Longrightarrow$): suponhamos $(u,\, \lambda) \in epi\,(J)$ e $\eta > \lambda$. Então $J\,(u) \leq \lambda < \eta$, de modo que $(u,\, \eta) \in epi\,(J)$. ($\Longleftarrow$): $(u,\, \eta) \in epi\,(J)$ para todo $\eta > \lambda$. Então $\left(u,\, \lambda + \dfrac{1}{n}\right) \in epi\,(J)$ para todo $n > 0$. Assim,

$$\forall\ n > 0 :\ J\,(u) \leq \lambda + \frac{1}{n}$$

e, para $n \to +\infty$, temos $J\,(u) \leq \lambda$, de modo que $(u,\, \lambda) \in epi\,(J)$. ■

Lema 6.1.7. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. Então*

$$epi\,(J) = \varnothing \Longleftrightarrow J = +\infty \quad ; \quad epi\,(J) = V \times \mathbb{R} \Longleftrightarrow J = -\infty \quad . \ ■$$

Prova. A primeira equivalência resulta do Lema 6.1.5. A segunda resulta de:

$$J\,(x) = -\infty \Longleftrightarrow J\,(x) \leq \lambda,\, \forall\ \lambda \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow (x,\, \lambda) \in epi\,(J)\,,\, \forall\ \lambda \in \mathbb{R}\ .$$

Assim, $J\,(x) = -\infty$ se e somente se $\{x\} \times \mathbb{R} \subset epi\,(J)$, de onde o resultado enunciado. ■

Enfim, utilizaremos a seguinte caracterização dos epigrafos:

Lema 6.1.8. *Seja $S \subset V \times \mathbb{R}$ um conjunto. Então $S = epi\,(J)$ se e somente se*

$$\forall\ u \in V \ \ :\ \ S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) \ \ \in \{\ \{u\} \times [a,\ +\infty[\, : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\ \varnothing,\ \{u\} \times \mathbb{R}\}\,.$$

Neste caso,

$$J\,(u) = +\infty \text{ se e somente se } S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \varnothing \quad ;$$

$$J\,(u) = -\infty \text{ se e somente se } S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \{u\} \times \mathbb{R} \quad ;$$

$$J\,(u) = a \text{ se e somente se } S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \{u\} \times [a,\ +\infty[\quad . \ ■$$

Prova. ($\Longrightarrow$): suponhamos que $S = epi\,(J)$. Então

$$S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \{\ (u,\, \lambda) \ \mid \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } J\,(u) \leq \lambda\ \}\,.$$

Se $J\,(u) = +\infty$, então não existe nenhum $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $J\,(u) \leq \lambda$, de modo que $S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \varnothing$. Reciprocamente, se $S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \varnothing$, então $J\,(u) > \lambda$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que $J\,(u) = +\infty$. Assim,

$$J\,(u) = +\infty \iff S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \varnothing \quad .$$

Se $J(u) = -\infty$, então $J(u) \leq \lambda$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que $S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \{u\} \times \mathbb{R}$. Reciprocamente, se $S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \{u\} \times \mathbb{R}$, então $J(u) \leq \lambda$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que $J(u) = -\infty$. Assim,

$$J(u) = -\infty \iff S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \{u\} \times \mathbb{R} \quad .$$

Se $J(u) = a \in \mathbb{R}$, então $J(u) \leq \lambda \iff a \leq \lambda$, de modo que $S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \{u\} \times [a, +\infty[$. Reciprocamente, se $S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \{u\} \times [a, +\infty[$ então, por um lado, $J(u) \leq a$, e, por outro lado, $\eta < a \Longrightarrow (u, \eta) \notin \mathit{epi}(J) \Longrightarrow J(u) > \eta$. Assim, $\eta < J(u) \leq a$, para todo $\eta < a$. Tomando o limite $\eta \to a$, resulta que $J(u) = a$. Assim,

$$J(u) = a \iff S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \{u\} \times [a, +\infty[\quad .$$

$(\Longleftarrow)$: suponhamos que

$$\forall\, u \in V \ : \ S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) \ \in \{\ \{u\} \times [a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\} \cup \{\ \varnothing,\ \{u\} \times \mathbb{R}\} .$$

Neste caso, podemos definir $J : V \to \mathbb{R}$ como indicado no enunciado, isto é,

$$J(u) = +\infty \ \text{ se e somente se } S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \varnothing \ ;$$

$$J(u) = -\infty \ \text{ se e somente se } S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \{u\} \times \mathbb{R} \ ;$$

$$J(u) = a \ \text{ se e somente se } S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \{u\} \times [a, +\infty[\quad .$$

Seja $(u, \lambda) \in S$. Então $S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) \neq \varnothing$. Se $J(u) = -\infty$, então $\lambda \geq J(u)$ e $(u, \lambda) \in \mathit{epi}(J)$. Se $J(u) = a \in \mathbb{R}$, então $S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \{u\} \times [a, +\infty[$, de modo que $\lambda \in [a, +\infty[$: assim, $\lambda \geq a = J(u)$ e $(u, \lambda) \in \mathit{epi}(J)$. Logo, $S \subset \mathit{epi}(J)$.

Seja $(u, \lambda) \in \mathit{epi}(J)$. Então $\lambda \geq J(u)$, de modo que $J(u) < +\infty$ e $S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) \neq \varnothing$. Se $J(u) = -\infty$, então $S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \{u\} \times \mathbb{R}$ e $(u, \lambda) \in S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) \subset S$. Se $J(u) = a \in \mathbb{R}$, então $\lambda \geq a$ e $S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \{u\} \times [a, +\infty[$, de modo que $(u, \lambda) \in S \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) \subset S$. Logo, $\mathit{epi}(J) \subset S$.

Assim, $S \subset \mathit{epi}(J)$ e $\mathit{epi}(J) \subset S$, de modo que $\mathit{epi}(J) = S$. ■

Também é possível definir um funcional a partir de seu epigrafo:

Definição 6.1.9 (S-funcional)**.** *Seja $S \subset V \times \mathbb{R}$ um conjunto. Seja*

$$S(u) = \{\ \lambda \in \mathbb{R} : (u, \lambda) \in S\ \} .$$

Para todo $u \in V$, $S(u)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$, eventualmente vazio. O S-funcional *é o funcional $J_S : V \to \overline{\mathbb{R}}$ definido por*

$$J_S(u) = \inf\ S(u)\ ,\ \mathit{se}\ S(u) \neq \varnothing \quad ; \qquad J_S(u) = +\infty\ ,\ \mathit{se}\ S(u) = \varnothing \quad .$$

Temos então:

Proposição 6.1.10. *Seja* $S \subset V \times \mathbb{R}$ *um conjunto e* $J_S : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *o* S-funcional. *Então* J_S *é um funcional. Além disto*

(i) $S \subset epi(J_S)$.

(ii) $J_S\,(u) < +\infty \Longleftrightarrow S\,(u) \neq \varnothing$

(iii) $epi(J_S) = \{(u,\,\lambda) \in V \times \mathbb{R} :\ S\,(u) \neq \varnothing \text{ e } \lambda \geq \inf\ S\,(u)\ \}$.

(iv) *Se* S *é convexo, então* J_S *é convexo (Cf. definição 6.2.1).*

(v) *Se* $I : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *é um funcional tal que* $S \subset epi(I)$ *então* $I \leq J_S$.

(vi) *Se* $I : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *é um funcional tal que* $S \subset epi(I)$ *então* $epi(J_S) \subset epi(I)$.

(vii) $dom\,(J_S) = \{\ u \in V :\ S\,(u) \neq \varnothing\ \}$. ■

Prova.

1) J_S é evidentemente um funcional, pois toma valores em $\overline{\mathbb{R}}$.

2) Prova de (i): seja $(u,\,\lambda) \in S$. Então $\lambda \in S\,(u)$, de modo que, por um lado, $S\,(u) \neq \varnothing$ e, por outro lado, $\lambda \geq \inf\ S\,(u) = J_S\,(u)$. Assim, $(u,\,\lambda) \in epi(J_S)$.

3) Prova de (ii): Suponhamos $J_S\,(u) < +\infty$. Se $S\,(u) = \varnothing$, a definição de $J_S\,(u)$ mostra que $J_S\,(u) = +\infty$. Temos então $J_S\,(u) < +\infty$ e $J_S\,(u) = +\infty$, o que é absurdo.Assim, $J_S\,(u) < +\infty \Longrightarrow S\,(u) \neq \varnothing$.

Suponhamos $S\,(u) \neq \varnothing$. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \in S\,(u)$. Logo, inf $S\,(u) \leq \lambda$, isto é, $J_S\,(u) \leq \lambda$. Então $(u,\,\lambda) \in epi\,(J_S)$ e $J_S\,(u) < +\infty$ (Cf. Lema 6.1.5). Temos então $S\,(u) \neq \varnothing \Longrightarrow J_S\,(u) < +\infty$.

4) Prova de (iii): É imediato que

$$\{(u,\,\lambda) \in V \times \mathbb{R} :\ S\,(u) \neq \varnothing \text{ e } \lambda \geq \inf\ S\,(u)\ \} \subset epi(J_S).$$

Seja $(u,\,\lambda) \in epi(J_S)$. Então $J_S\,(u) < +\infty$(Cf. Lema 6.1.5) e (ii) mostra que $S\,(u) \neq \varnothing$. Assim,

$$epi(J_S) \subset \{(u,\,\lambda) \in V \times R :\ S\,(u) \neq \varnothing \text{ e } \lambda \geq \inf\ S\,(u)\ \}.$$

5) Prova de (iv): sejam $u,\, v \in V$; $M,\, N \in \mathbb{R}$ tais que $J_S\,(u) < M$ e $J_S\,(v) < N$. Então $S\,(u) \neq \varnothing$ e $S\,(v) \neq \varnothing$. Se $\lambda \geq M$ para todo $\lambda \in S\,(u)$ então temos $J_S\,(u) \geq M$, de modo que $M > M$, o que é absurdo. Logo, existe $\lambda \in S\,(u)$ tal que $J_S\,(u) \leq \lambda < M$. De maneira análoga, existe $\lambda \in S\,(v)$ tal que $J_S\,(v) \leq \eta < M$. Assim, $(u,\, \lambda) \in S$ e $(v,\, \eta) \in S$. Como S é convexo:

$$\forall\ \theta \in (0,1):\quad (\theta u + (1-\theta)\,v,\, \theta\lambda + (1-\theta)\,\eta) \in S\ .$$

Resulta que, por um lado, $S\,(\theta u + (1-\theta)\,v) \neq \varnothing$ (pois $\theta\lambda + (1-\theta)\,\eta \in \mathbb{R}$) e, por outro lado,

$$\forall\ \theta \in (0,1):\ J_S\,(\theta u + (1-\theta)\,v) \leq \theta\lambda + (1-\theta)\,\eta < \theta M + (1-\theta)\,N\ ,$$

de modo que J_S é convexo.

6) Prova de (v): sejam J_S é um funcional tal que $S \subset epi(I)$. Seja $u \in V$. Se $S\,(u) \neq \varnothing$, então $J_S\,(u) = +\infty \geq I\,(u)$. Suponhamos agora que $S\,(u) \neq \varnothing$. Então

$$\lambda \in S\,(u) \Longrightarrow (u,\, \lambda) \in S\ \Longrightarrow (u,\, \lambda) \in epi(I) \Longrightarrow I\,(u) \leq \lambda.$$

Assim, $I\,(u)$ é um minorante de $S\,(u)$ e temos

$$I\,(u) \leq \inf\ S\,(u) = J_S\,(u)\,.$$

7) (vi) resulta do Lema 6.1.4.

8) (vii) resulta de (ii).

■

Os itens (v) e (vi) do teorema mostram que J_S é o maior funcional cujo epigrafo contém S.

Outras noções importantes são as seguintes:

Definição 6.1.11 (domínio efetivo)**.** *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. O domínio efetivo de J é o conjunto*

$$dom\,(J) = \{\ u \in V\ \mid J\,(u) < +\infty\ \}\,.\quad ■$$

Notemos que $dom\,(J)$ pode conter pontos onde J assuma o valor $-\infty$.

Definição 6.1.12 (funcional próprio)**.** *Seja* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *um funcional.* J *é próprio se e somente se* J *não assume o valor* $-\infty$ *e* $dom\,(J) \neq \varnothing$. ■

Notemos que um funcional próprio não assume o valor $-\infty$. *A classe dos funcionais próprios apresenta um interesse particular*: *podemos interpretar um funcional próprio como sendo a extensão a* $\overline{\mathbb{R}}^{+}$ *de um funcional definido sobre uma parte de* V, *como* J_e *acima definido (Eq. (6.1)).* Temos

Lema 6.1.13. *Seja* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *um funcional.* J *é próprio se e somente se* $dom\,(J) \neq \varnothing$ *e* $J\,(u) \in \mathbb{R}$ *para todo* $u \in dom\,(J)$. ■

Prova. Basta notar que J não assume o valor $-\infty \iff J\,(u) \in \mathbb{R}$ para todo $u \in dom\,(J)$. ■

6.2 Funcionais Convexos

A classe dos funcionais convexos desempenha um papel central em nossa teoria:

Definição 6.2.1 (funcional convexo)**.** *Seja* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *um funcional. Diremos que* J *é convexo se e somente se*

$$\begin{gathered}\forall\ u,\ v \in V\ ;\ M,\ N \in \mathbb{R} \text{ tais que } J\,(u) < M \text{ e } J\,(v) < N\ ; \\ \theta \in (0,1)\ :\ J\,(\theta u + (1-\theta)\,v) < \theta M + (1-\theta)\,N.\end{gathered}$$ ■

Quando J toma somente valores finitos, utilizaremos também a definição seguinte:

Definição 6.2.2 (funcional estritamente convexo)**.** *Seja* $J : V \to \mathbb{R}$ *um funcional. Diremos que* J *é estritamente convexo se e somente se*

$$\forall\ u,\ v \in V\ ;\ \theta \in (0,1)\ :\ J\,(\theta u + (1-\theta)\,v) < \theta J\,(u) + (1-\theta)\,J\,(v)\ .$$ ■

Temos:

Proposição 6.2.3. *Seja* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *um funcional que não assume o valor* $-\infty$ *(por exemplo, um funcional próprio). Então* J *é convexo se e somente se*

$$\forall\ u,\ v \in V\ ;\ \theta \in (0,1)\ :\ J\,(\theta u + (1-\theta)\,v) \leq \theta J\,(u) + (1-\theta)\,J\,(v)\,.$$ ■

Prova. Como J não assume o valor $-\infty$, $J(u) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ para todo $u \in V$.

1) Suponhamos J convexo. Em todo ponto onde $J(u)$ e $J(v)$ são finitos, podemos tomar $M = J(u) + 1/n$ e $N = J(v) + 1/n$. Temos então

$$\forall\ \theta \in (0,1) \ \ : \ J(\theta u + (1-\theta)v) < \theta J(u) + (1-\theta)J(v) + 1/n\ .$$

Passando ao limite para $n \to +\infty$, resulta

$$\forall\ \theta \in (0,1) \ \ : \ J(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta J(u) + (1-\theta)J(v)\ \ .$$

Se $J(u)$ ou $J(v)$ é infinito, então $\theta J(u) + (1-\theta)J(v) = +\infty$, de modo que

$$\forall\ \theta \in (0,1) \ \ : \ J(\theta u + (1-\theta)v) \leq +\infty = \theta J(u) + (1-\theta)J(v)\ \ .$$

Assim,

$$\forall\ u,\, v \in V\ ;\ \theta \in (0,1) \ \ : \ J(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta J(u) + (1-\theta)J(v)\,.$$

2) Suponhamos

$$\forall\ u,\, v \in V\ ;\ \theta \in (0,1) \ \ : \ J(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta J(u) + (1-\theta)J(v)\,.$$

Sejam $u,\, v \in V$; $M,\, N \in \mathbb{R}$ tais que $J(u) < M$ e $J(v) < N$ e $\theta \in (0,1)$. Então

$$J(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta J(u) + (1-\theta)J(v) < \theta M + (1-\theta)N.$$

■

Temos também :

Proposição 6.2.4.

(i) *Se $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é convexo próprio e $u = \sum_{i\,=\,1}^{n} \lambda_i u_i$ é uma combinação convexa finita de elementos de V, então $J\left(\sum_{i\,=\,1}^{n} \lambda_i u_i\right) \leq \sum_{i\,=\,1}^{n} \lambda_i J(u_i)$.*

(ii) *Se $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é convexo próprio e $\alpha \geq 0$, então αJ é convexo próprio.*

(iii) *Toda soma finita de funcionais convexos próprios é convexo.*

(iv) *Se* $\{ J_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ *é uma seqüência de funcionais convexos tal que* $\forall\, u \in V : J_n(u) \to J(u)$ *então* J *é convexo.*

(v) *Se* $\{ J_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ *é uma família de funcionais convexos, então* $J(u) = \sup\{J_\lambda(u) : \lambda \in \Lambda\}$ *é convexo.*

(vi) *Se* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *é convexo então* $dom(J)$ *é convexo.*

(vii) *Se* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *é convexo e não é próprio, então* $J = -\infty$ *sobre* $int(dom(J))$.

(viii) *Se* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *é convexo e existem* $u \in V$ *e* $\varepsilon > 0$ *tais que* $J(u) > -\infty$ *e* $\sup\{ J(v) : v \in B_\varepsilon(u)\} < +\infty$ *então*

a) J *é próprio;*

b) $int(dom(J)) \neq \varnothing$*;*

c) *para todo* $v \in int(dom(J))$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\sup\{ J(w) : w \in B_\delta(v)\} < +\infty$*;*

d) J *é contínuo em cada ponto de* $int(dom(J))$. ■

Prova.

(i) A prova é feita por indução, de maneira análoga à do Lema 5.3.4 (indução finita): a desigualdade é imediata para $n = 1$, pois neste caso $\lambda_1 = 1$ (lembremos que temos $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ em toda combinação convexa). Suponhamos a desigualdade válida para toda combinação convexa de n elementos de V e consideremos uma combinação convexa de $n+1$ elementos de V:

$$u = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i \ , \ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \ , \ \lambda_i \geq 0 \ \ (i = 1, ..., n+1) \ .$$

Se $\lambda_{n+1} = 1$, então $u = u_{n+1}$ e a desigualdade é imediata.Suponhamos $\lambda_{n+1} \neq 1$. Então $\lambda_{n+1} < 1$ e temos

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1 \ , \ \theta = 1 - \lambda_{n+1} \in (0,1) \, .$$

Assim, por um lado (hipótese de indução),

$$J\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i J(u_i)$$

e, por outro lado, dado que J é convexo,

$$J\left((1-\theta)\sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i + \theta u_{n+1}\right) \leq (1-\theta)\, J\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i\right) + \theta J(u_{n+1}) \, .$$

Logo,

$$J\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i u_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i J\left(u_i\right)\ ,$$

o que prova a desigualdade para toda combinação convexa de de $n+1$ elementos de V.

(ii) Seja $u \in V$. Se $u \in dom\left(J\right) \neq \varnothing$, então $J\left(u\right) < +\infty$. Como J é próprio, $J\left(u\right) > -\infty$. Assim, $J\left(u\right) \in \mathbb{R}$ e $\left(\alpha J\right)\left(u\right) = \alpha J\left(u\right) \in \mathbb{R}$. Logo $dom\left(J\right) \subset dom\left(\alpha J\right)$. Se $u \notin dom\left(J\right)$, então $J\left(u\right) = +\infty$ e $\left(\alpha J\right)\left(u\right) = \alpha J\left(u\right) = +\infty$. Assim,

$$\left(\alpha J\right)\left(u\right)\in\mathbb{R}, \text{se } u\in dom\left(J\right)\quad ;\quad \left(\alpha J\right)\left(u\right)=+\infty, \text{se } u\notin dom\left(J\right).$$

Logo αJ é próprio.

(iii) Sejam J_1, ..., J_n n funcionais convexos próprios e $J = \sum\limits_{i=1}^{n} J_i$. Notemos inicialmente que

$$\forall\ u\in V,\ 1\leq i\leq n:\ J_i\left(u\right)>-\infty\Longrightarrow J\left(u\right)=\sum_{i=1}^{n}J_i\left(u\right)>-\infty.$$

Sejam $u, v \in V$ e $\theta \in (0,1)$. Então, para $1 \leq i \leq n$,

$$J_i\left(\theta u+\left(1-\theta\right)v\right)\leq\theta J_i\left(u\right)+\left(1-\theta\right)J_i\left(v\right)\ ,$$

de modo que

$$\sum_{i=1}^{n}J_i\left(\theta u+\left(1-\theta\right)v\right)\leq\theta\sum_{i=1}^{n}J_i\left(u\right)+\left(1-\theta\right)\sum_{i=1}^{n}J_i\left(v\right),$$

isto é,

$$J\left(\theta u+\left(1-\theta\right)v\right)\leq\theta J\left(u\right)+\left(1-\theta\right)J\left(v\right)$$

e o resultado segue da proposição 6.2.3.

(iv) Sejam $u, v \in V$; $\theta \in (0,1)$; M, $N \in \mathbb{R}$ tais que $J\left(u\right) < M$ e $J\left(v\right) < N$. Consideremos $\varepsilon > 0$ tal que $J\left(u\right) < M - \varepsilon < M$ e $J\left(v\right) < N - \varepsilon < N$. Então

$$\exists\ n_0\in\mathbb{N}:\ n\geq n_0\Longrightarrow J_n\left(u\right)<M-\varepsilon\ \text{ e }\ J_n\left(v\right)<N-\varepsilon\ .$$

Assim

$$n\geq n_0\Longrightarrow J_n\left(\theta u+\left(1-\theta\right)v\right)<\theta M+\left(1-\theta\right)N\ -\varepsilon.$$

Passando ao limite para $n \to +\infty$, vem

$$J\left(\theta u+\left(1-\theta\right)v\right)\leq\theta M+\left(1-\theta\right)N\ -\varepsilon<\theta M+\left(1-\theta\right)N.$$

(v) Sejam $u, v \in V$; $\theta \in (0,1)$; $M,\ N \in \mathbb{R}$ tais que $J(u) < M$ e $J(v) < N$. Consideremos $\varepsilon > 0$ tal que $J(u) < M - \varepsilon < M$ e $J(v) < N - \varepsilon < N$. Então

$$\forall\ \lambda \in \Lambda :\ J_\lambda(u) < M - \varepsilon \ \text{ e } \ J_\lambda(v) < N - \varepsilon\ .$$

Assim

$$\forall\ \lambda \in \Lambda :\ J_\lambda(\theta u + (1-\theta)v) < \theta M + (1-\theta)N\ - \varepsilon.$$

Tomando o supremo para $\lambda \in \Lambda$:

$$J(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta M + (1-\theta)N\ - \varepsilon < \theta M + (1-\theta)N.$$

(vi) Sejam $u, v \in dom(J)$; $\theta \in (0,1)$. Então existem $M, N \in \mathbb{R}$ tais que $J(u) < M$ e $J(v) < N$. Assim,

$$J(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta M + (1-\theta)N\ < +\infty\ ,$$

de modo que $\theta u + (1-\theta)v \in dom(J)$.

(vii) Para que J não seja próprio, ele deve satisfazer uma das duas condições seguintes: $dom(J) = \varnothing$ ou existe $u \in V$ tal que $J(u) = -\infty$. O resultado é imediato se $dom(J) = \varnothing$. Suponhamos que existe $u \in dom(J)$ tal que $J(u) = -\infty$. Seja $v \in int(dom(J))$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(v) \subset int(dom(J))$. Ora, existe $n_0 > 0$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \frac{1}{n} \parallel v - u \parallel \leq \varepsilon\ .$$

Assim, para $t_0 = \dfrac{1}{n_0}$, $w_0 = v + t_0(v-u)$ verifica

$$\parallel w_0 - u \parallel \leq \varepsilon \Longrightarrow w_0 \in B_\varepsilon(v) \subset int(dom(J))\,.$$

Seja $\theta = \dfrac{t_0}{1+t_0} \in (0,1)$. Então $v = \theta u + (1-\theta)w_0$. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $M > J(v)$. Como $-n > J(v)$, a definição de convexidade mostra que

$$J(v) = J(\theta u + (1-\theta)v) \leq -\theta n + (1-\theta)M\ .$$

Fazendo $n \to +\infty$, obtemos $J(v) = -\infty$. Assim, $J = -\infty$ sobre $int(dom(J))$.

(viii.a) Suponhamos que J não é próprio. Como $u \in dom(J)$, temos $dom(J) \neq \varnothing$. Mas então (vii) mostra que $J(u) = -\infty$, o que é absurdo, pois $J(u) > -\infty$. Assim, J é próprio.

(viii.b) Seja $M = \sup\{ J(w) : w \in B_\varepsilon(u)\}$. Temos

$$v \in B_\varepsilon(u) \Longrightarrow J(v) \leq M < +\infty \Longrightarrow v \in dom(J) \ .$$

Resulta que $B_\varepsilon(u) \subset dom(J)$ e $u \in int(dom(J))$. Assim, $int(dom(J)) \neq \varnothing$.

(viii.c) Seja $F(v) = J(v+u)$. Então $F : V \to \mathbb{R}$ é um funcional convexo e $dom(F) = dom(J) - \{ u \}$. Além disto, $\sup\{ F(w) : w \in B_\varepsilon(0)\} = M < +\infty$, de modo que $B_\varepsilon(0) \subset dom(F)$ e $0 \in int(dom(F))$. Seja $v \in int(dom(J))$. Então $\tilde{v} = v - u \in int(dom(F))$ e existe $\gamma > 0$ tal que $B_\gamma(\tilde{v}) \subset int(dom(F))$. O Lema 6.1.13 mostra que $J(v) \in \mathbb{R}$, de modo que $F(\tilde{v}) \in \mathbb{R}$. Seja

$$\eta = \min\{ \gamma, \varepsilon\} .$$

Existe $n_0 > 0$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \frac{1}{n} \| \tilde{v} \| \leq \eta \ .$$

Assim, para $t_0 = \dfrac{1}{n_0}$, $\tilde{w}_0 = (1+t_0)\tilde{v}$ verifica

$$\| \tilde{w}_0 - \tilde{v} \| \leq \eta \Longrightarrow \tilde{w}_0 \in B_\eta(\tilde{v}) \subset int(dom(F)) .$$

Sejam $\theta = \dfrac{1}{1+t_0} \in (0,1)$, $\delta = (1-\theta)\eta < \eta$. Então $B_\delta(\tilde{v}) \subset B_\eta(\tilde{v}) \subset int(dom(J))$. Além disto, para todo $w \in V$, temos

$$w = \theta\tilde{w}_0 + (1-\theta)s, \ \ s = \frac{w - \tilde{v}}{(1-\theta)}.$$

Ora,

$$\| w - \tilde{v} \| \leq \delta \Longrightarrow \ \| s \| \leq \frac{\delta}{(1-\theta)} = \eta \leq \varepsilon$$

Assim, $F(s) \leq M$ e

$$\| w - \tilde{v} \| \leq \delta \Longrightarrow \ F(w) = F(\theta\tilde{w}_0 + (1-\theta)s) \leq \theta F(\tilde{w}_0) + (1-\theta)F(s),$$

de onde

$$\| w - \tilde{v} \| \leq \delta \Longrightarrow \ F(w) \leq \theta F(\tilde{w}_0) + (1-\theta)M$$

e

$$\sup\{ F(w) : w \in B_\delta(\tilde{v})\} \leq \theta F(\tilde{w}_0) + (1-\theta)M < +\infty \ .$$

Resulta que $\tilde{w}_0 + u \in int(dom(J))$ (pois $\tilde{w}_0 \in int(dom(F))$) e

$$\sup\{ J(w) : w \in B_\delta(v)\} \leq \theta J(\tilde{w}_0 + u) + (1-\theta)M < +\infty \ .$$

(viii.d) Basta mostrar que F é contínua em 0. Resulta que J é contínua em u e, de (viii.c), em todo $v \in int\,(dom\,(J))$. Sejam $\nu > 0$ e $\theta \in (0,1)$ tal que $2\theta M \leq \nu$, $\delta = \theta\varepsilon < \varepsilon$. Então, para todo $w \in V$,

$$w = \theta s, \quad s = \frac{w}{\theta}.$$

Assim,

$$\| \, w \, \| \leq \delta \Longrightarrow \quad \| \, s \, \| \leq \frac{\delta}{\theta} = \varepsilon \Longrightarrow F\,(s) \leq M$$

Utilizando que $w = (1-\theta)\,0 + \theta s$, temos

$$\| \, w \, \| \leq \delta \Longrightarrow \; F\,(w) \leq (1-\theta)\,F\,(0) + \theta F\,(s) \leq (1-\theta)\,F\,(0) + \theta M,$$

de modo que

$$\| \, w \, \| \leq \delta \Longrightarrow \; F\,(w) - F\,(0) \leq \theta\,(M - F\,(0)) \leq 2\theta M \leq \nu.$$

Por outro lado, seja

$$\alpha = \frac{1}{1+\theta} \in (0,1) \quad ; \quad 0 = \alpha w + (1-\alpha)\,(-s) \quad ; \quad \| \, -s \, \| = \| \, s \, \| \leq \varepsilon,$$

de maneira que

$$F\,(0) \leq \alpha F\,(w) + (1-\alpha)\,F\,(s) \leq \alpha F\,(w) + (1-\alpha)\,M$$

e

$$F\,(0) - F\,(w) \leq (1-\alpha)\,(F\,(0) - M) \leq 2\,(1-\alpha)\,M = 2\frac{\theta}{1+\theta}M \leq 2\theta M.$$

Logo,

$$\| \, w \, \| \leq \delta \Longrightarrow \quad | \; F\,(w) - F\,(0) \; | \leq 2\theta M \leq \nu$$

e F é contínua em 0.

■

Enfim, existe uma relação entre a convexidade do epigrafo e a do funcional:

Teorema 6.2.5. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. Então são equivalentes:*

(i) *J é convexo*

(ii) *$epi\,(J)$ é convexo.*

(iii) *$S = \{\ (u,\ \lambda) \in V \times \mathbb{R} \ :\ J\,(u) < \lambda\ \}$ é convexo.* ■

Prova.

1) Mostremos que (i) $\Longrightarrow$ (ii): Suponhamos J convexo. Sejam $(u,\lambda) \in epi\,(J)$, $(v,\mu) \in epi\,(J)$, $\theta \in (0,1)$. Temos então, para todo $\eta > 0$

$$J\,(u) \leq \lambda < \lambda{+}\eta \text{ e } J\,(v) \leq \mu < \mu{+}\eta \Longrightarrow J\,(\theta u + (1-\theta)\,v) < \theta\lambda{+}(1-\theta)\,\mu{+}\eta.$$

Assim, $(\theta u + (1-\theta)\,v,\, \theta\lambda + (1-\theta)\,\mu + \eta) \in epi\,(J)$ para todo $\eta > 0$. Logo, $(\theta u + (1-\theta)\,v,\, \theta\lambda + (1-\theta)\,\mu) \in epi\,(J)$(Cf. Lema 6.1.6).

2) Mostremos que (ii) $\Longrightarrow$ (i): Suponhamos $epi\,(J)$ convexo. Sejam $u,\ v \in V$; $\theta \in (0,1)$; $M,\ N \in \mathbb{R}$ tais que $J\,(u) < M$ e $J\,(v) < N$. Então existe $n_0 > 0$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow J\,(u) \leq M - \frac{1}{n} < M \quad \text{e} \quad J\,(v) \leq N - \frac{1}{n} < N.$$

Assim,

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \left(u,\, M - \frac{1}{n}\right) \in epi\,(J)\,, \quad \left(v,\, N - \frac{1}{n}\right) \in epi\,(J)\ .$$

Como $epi\,(J)$ é convexo, temos

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \left(\theta u + (1-\theta)\,v,\, \theta M + (1-\theta)\,N\ - \frac{1}{n}\right) \in epi\,(J)\ .$$

Logo

$$n \geq n_0 \Longrightarrow J\,(\theta u + (1-\theta)\,v) \leq \theta M + (1-\theta)\,N - \frac{1}{n} < \theta M + (1-\theta)\,N\ ,$$

de modo que J é convexa.

3) Mostremos que (i) $\Longrightarrow$ (iii): Sejam $(u,\ M) \in S$ e $(v,\ N) \in S$. A definição 6.2.1 mostra que:

$$\forall\ \theta \in (0,1): \ J\,(\theta u + (1-\theta)\,v) < \theta M + (1-\theta)\,N.$$

Logo,

$$\forall\ \theta \in (0,1): \ (\theta u + (1-\theta)\,v,\, \theta M + (1-\theta)\,N) \in S$$

e S é convexo.

4) Mostremos que (iii) $\Longrightarrow$ (i): sejam $u,\ v \in V$; $M,\ N \in \mathbb{R}$ tais que $J\,(u) < M$ e $J\,(v) < N$. Então $(u,\ M) \in S$ e $(v,\ N) \in S$. Como S é convexo,

$$\forall\ \theta \in (0,1): \ (\theta u + (1-\theta)\,v,\, \theta M + (1-\theta)\,N) \in S\ ,$$

isto é

$$\forall\ \theta \in (0,1): \ J\,(\theta u + (1-\theta)\,v) < \theta M + (1-\theta)\,N$$

e J satisfaz à definição 6.2.1.

■

Utilizaremos também as noções seguintes:

Definição 6.2.6. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. Diremos que J é côncavo se e somente se $-J$ é convexo.* ■

6.3 Funcionais Semicontínuos

Outra classe fundamental é aquela dos funcionais semicontínuos.

Definição 6.3.1 (lim inf e lim sup)**.** *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional e seja $u \in V$. Para $\varepsilon > 0$, consideramos*

$$B_\varepsilon^0(u) = B_\varepsilon(u) - \{\ u\ \} = \{\ v \in V \ \mid 0 < \|\ v - u\ \| < \varepsilon\}$$

e definimos

$$\liminf\ J(u) = \sup\left\{\ \inf\left\{\ J(v) : v \in B_\varepsilon^0(u)\right\}\ : \varepsilon > 0\ \right\},$$

$$\limsup\ J(u) = \inf\left\{\ \sup\left\{\ J(v) : v \in B_\varepsilon^0(u)\right\}\ : \varepsilon > 0\ \right\}. \ ■$$

Temos:

Proposição 6.3.2. *Sejam*

$$J_{\text{inf}}(\varepsilon) = \inf\left\{\ J(v) : v \in B_\varepsilon^0(u)\right\} \quad ; \ J_{\text{sup}}(\varepsilon) = \sup\left\{\ J(v) : v \in B_\varepsilon^0(u)\right\}.$$

Então

$$\liminf\ J(u) = \lim_{\varepsilon \to 0+} J_{\text{inf}}(\varepsilon) \ , \quad \limsup\ J(u) = \lim_{\varepsilon \to 0+} J_{\text{sup}}(\varepsilon) \ . \ ■$$

Prova. Basta notar que $0 < \eta \leq \varepsilon \Longrightarrow B_\eta^0(u) \subset B_\varepsilon^0(u)$. Assim $\varepsilon \to J_{\text{inf}}(\varepsilon)$ é decrescente enquanto que $\varepsilon \to J_{\text{sup}}(\varepsilon)$ é crescente. Resulta que

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} J_{\text{inf}}(\varepsilon) = \sup\{\ J_{\text{inf}}(\varepsilon)\ : \varepsilon > 0\ \} \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \to 0+} J_{\text{sup}}(\varepsilon) = \inf\{\ J_{\text{sup}}(\varepsilon)\ : \varepsilon > 0\ \} \ .$$

■

Proposição 6.3.3. *Seja* $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ *uma seqüência tal que* $u_n \to u$ *em* V *e* $u_n \neq u$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. *Então,*

$$\begin{aligned} \liminf\ J(u) &\leq \lim_{n \to +\infty} (\inf\{ J(u_k)\ :\ k \geq n \}) \\ &\leq \lim_{n \to +\infty} (\sup\{ J(u_k)\ :\ k \geq n \}) \leq \limsup\ J(u)\ . \end{aligned}$$

Se, além disto, $J(u_n) \to M$, *então*

$$\liminf\ J(u) \leq M \leq \limsup\ J(u)\ .\ \blacksquare$$

Prova. Como $u_n \to u$ em V, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow 0 < \| u_n - u \| < \varepsilon\ .$$

Resulta que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow J_{\inf}(\varepsilon) \leq J(u_n) \leq J_{\sup}(\varepsilon)\,. \tag{6.2}$$

Assim,

$$n \geq n_0 \Longrightarrow J_{\inf}(\varepsilon) \leq \inf\{ J(u_k)\ :\ k \geq n \} \leq \sup\{ J(u_k)\ :\ k \geq n \} \leq J_{\sup}(\varepsilon)\,,$$

de modo que,

$$\begin{aligned} \forall\ \varepsilon > 0 : J_{\inf}(\varepsilon) &\leq \lim_{n \to +\infty} (\inf\{ J(u_k)\ :\ k \geq n \}) \\ &\leq \lim_{n \to +\infty} (\sup\{ J(u_k)\ :\ k \geq n \}) \leq J_{\sup}(\varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos

$$\begin{aligned} \liminf\ J(u) &\leq \lim_{n \to +\infty} (\inf\{ J(u_k)\ :\ k \geq n \}) \\ &\leq \lim_{n \to +\infty} (\sup\{ J(u_k)\ :\ k \geq n \}) \leq \limsup\ J(u)\ . \end{aligned}$$

Se $J(u_n) \to M$, então podemos passar ao limite na Eq. (6.2), obtendo:

$$\forall\ \varepsilon > 0 : J_{\inf}(\varepsilon) \leq M \leq J_{\sup}(\varepsilon)\,.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos

$$\liminf\ J(u) \leq M \leq \limsup\ J(u)\ .$$

$\blacksquare$

Algumas propriedades úteis de $\liminf$ e do $\limsup$ são dadas no lema abaixo:

Lema 6.3.4. **(i)** $\limsup\ J(u) = -\liminf\ (-J(u))$.

(ii) *Se* $\alpha \geq 0$, *então* $\liminf\ \alpha J(u) = \alpha \liminf\ J(u)$.

(iii) *Se* $\alpha \geq 0$, *então* $\limsup\ \alpha J(u) = \alpha \limsup\ J(u)$.

(iv) $\liminf \left(\sum_{i=1}^{n} J_i \right)(u) \geq \sum_{i=1}^{n} \liminf\ J_i(u)$.

(v) $\limsup \left(\sum_{i=1}^{n} J_i \right)(u) \leq \sum_{i=1}^{n} \limsup\ J_i(u)$.

(vi) *para todo* $\varepsilon > 0$: $\inf\{\ J(v)\ :\ \|\ v-u\ \| \leq \varepsilon\ \} = \min\{\ J(u)\ ,\ J_{\inf}(\varepsilon)\ \} \leq \min\{\ J(u)\ ,\ \liminf\ J(u)\ \}$.

(vii) *para todo* $\varepsilon > 0$: $\sup\{\ J(v)\ :\ \|\ v-u\ \| \leq \varepsilon\ \} = \max\{\ J(u)\ ,\ J_{\sup}(\varepsilon)\ \} \geq \max\{\ J(u)\ ,\ \limsup\ J(u)\ \}$.

(viii) $\liminf\ J(u) \leq \limsup\ J(u)$.

(ix) *Se* $I(v) \leq J(v)$ *para todo* $v \in V$ *então* $\liminf I(u) \leq \liminf J(u)$ *e* $\limsup I(u) \leq \limsup J(u)$ *para todo* $u \in V$. ■

Prova.

(i) Temos

$$\inf\left\{\ -J(v) : v \in B_\varepsilon^0(u)\right\} = -\sup\left\{\ J(v) : v \in B_\varepsilon^0(u)\right\},$$

de modo que

$$\inf\left\{\ \sup\left\{\ J(v) : v \in B_\varepsilon^0(u)\right\}\ :\ \varepsilon > 0\ \right\}$$

$$= \inf\left\{\ -\inf\left\{\ -J(v) : v \in B_\varepsilon^0(u)\right\}\ :\ \varepsilon > 0\ \right\}.$$

Ora,

$$\inf\left\{\ -\inf\left\{\ -J(v) : v \in B_\varepsilon^0(u)\right\}\ :\ \varepsilon > 0\ \right\}$$

$$= -\sup\left\{\ \inf\left\{\ J(v) : v \in B_\varepsilon^0(u)\right\}\ :\ \varepsilon > 0\ \right\}.$$

Assim,

$$\inf\left\{\ \sup\left\{\ J(v) : v \in B_\varepsilon^0(u)\right\}\ :\ \varepsilon > 0\ \right\}$$

$$= -\sup\left\{\ \inf\left\{\ J(v) : v \in B_\varepsilon^0(u)\right\}\ :\ \varepsilon > 0\ \right\},$$

de onde o resultado enunciado.

(ii) Como $\alpha \geq 0$, temos $\inf \left\{ \alpha J(v) : v \in B_\varepsilon^0(u) \right\} = \alpha \inf \left\{ J(v) : v \in B_\varepsilon^0(u) \right\}$, de modo que

$$\liminf \; J(u) = \sup \left\{ \alpha \inf \left\{ J(v) : v \in B_\varepsilon^0(u) \right\} \; : \varepsilon > 0 \right\}$$

Utilizando novamente que $\alpha \geq 0$:

$$\liminf \; J(u) = \alpha \sup \left\{ \inf \left\{ J(v) : v \in B_\varepsilon^0(u) \right\} \; : \varepsilon > 0 \right\} = \alpha \liminf \; J(u).$$

(iii) Temos $\liminf \; (-\alpha J(u)) = \alpha \liminf \; (-J(u))$, de onde o resultado enunciado.

(iv) A prova é feita por indução finita: a desigualdade é imediata para $n = 1$. Suponhamos então a desigualdade válida para $n > 0$ e mostremos a validade para $n + 1$. Sejam

$$I_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} J_i \;\; ; \;\; I_n = \sum_{i=1}^{n} J_i \quad .$$

Temos

$$\begin{aligned} \inf \left\{ I_n(v) + J_{n+1}(v) : v \in B_\varepsilon^0(u) \right\} \quad \geq \quad & \inf \left\{ I_n(v) : v \in B_\varepsilon^0(u) \right\} \\ & + \inf \left\{ J_{n+1}(v) : v \in B_\varepsilon^0(u) \right\} \;, \end{aligned}$$

de modo que

$$I_{n+1,\inf}(\varepsilon) \geq I_{n,\inf}(\varepsilon) + J_{n+1,\inf}(\varepsilon).$$

Passando ao limite para $\varepsilon \to 0+$ nesta expressão, obtemos:

$$\liminf \; I_{n+1}(u) \geq \liminf \; I_n(u) + \liminf \; J_{n+1}(u) \quad .$$

Ora, a hipótese de indução mostra que

$$\liminf \; I_n(u) \geq \sum_{i=1}^{n} \liminf J_i(u),$$

de maneira que

$$\liminf \; I_{n+1}(u) \geq \sum_{i=1}^{n+1} \liminf J_i(u).$$

(v) Temos
$$\liminf \left(-\sum_{i\,=\,1}^{n} J_i \right)(u) \geq \sum_{i\,=\,1}^{n} \liminf \;\; (-J_i\,(u))\,,$$
de onde o resultado enunciado.

(vi) Basta notar que $B_\varepsilon\,(u) = B_\varepsilon^0\,(u) \cup \{\ u\ \}$. Assim,
$$\inf \{\ J\,(v)\ :\ \|\ v - u\ \| \leq \varepsilon\ \} = \min \{\ J\,(u)\,,\ J_{\text{inf}}\,(\varepsilon)\ \}\,.$$
Como $\varepsilon \to J_{\text{inf}}\,(\varepsilon)$ é decrescente, temos $J_{\text{inf}}\,(\varepsilon) \leq \liminf\ J\,(u)$, de onde o resultado enunciado.

(vii) De maneira análoga,
$$\sup \{\ J\,(v)\ :\ \|\ v - u\ \| \leq \varepsilon\ \} = \max \{\ J\,(u)\,,\ J_{\text{sup}}\,(\varepsilon)\ \}\,.$$
Como $\varepsilon \to J_{\text{sup}}\,(\varepsilon)$ é crescente, obtemos o resultado enunciado.

(viii) Temos
$$\forall\ \varepsilon > 0 : \inf \left\{\ J\,(v) : v \in B_\varepsilon^0\,(u) \right\} \leq \sup \left\{\ J\,(v) : v \in B_\varepsilon^0\,(u) \right\}\ ,$$
de modo que
$$\forall \varepsilon > 0 : J_{\text{inf}}\,(\varepsilon) \leq J_{\text{sup}}\,(\varepsilon)\quad .$$
Tomando o limite para $\varepsilon \to 0+$ nesta desigualdade, obtemos o resultado enunciado.

(ix) Temos
$$\forall\ \varepsilon > 0 : \inf \left\{\ I\,(v) : v \in B_\varepsilon^0\,(u) \right\} \leq \inf \left\{\ J\,(v) : v \in B_\varepsilon^0\,(u) \right\}\ ,$$
de modo que
$$\forall \varepsilon > 0 : I_{\text{inf}}\,(\varepsilon) \leq J_{\text{inf}}\,(\varepsilon)\quad .$$
Assim, $\liminf\ I\,(u) \leq \liminf\ J\,(u)$. De maneira análoga,
$$\forall\ \varepsilon > 0 : \sup \left\{\ I\,(v) : v \in B_\varepsilon^0\,(u) \right\} \leq \sup \left\{\ J\,(v) : v \in B_\varepsilon^0\,(u) \right\}\ ,$$
de modo que
$$\forall \varepsilon > 0 : I_{\text{sup}}\,(\varepsilon) \leq J_{\text{sup}}\,(\varepsilon)$$
e $\limsup\ I\,(u) \leq \limsup\ J\,(u)$.

■

Definição 6.3.5 (funcional sci ou scs). *Seja* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *um funcional e sejam* $u \in V$, $S \subset V$.

(i) *J é semicontínuo inferiormente no ponto u (abreviadamente, sci em u) se e somente se* $J(u) \leq \liminf\ J(u)$*;*

(ii) *J é semicontínuo superiormente no ponto u (abreviadamente, scs em u) se e somente se* $J(u) \geq \limsup\ J(u)$*;*

(iii) *J é semicontínuo inferiormente sobre S (abreviadamente, sci sobre S) se e somente se J é semicontínuo inferiormente em todo ponto de S.*

(iv) *J é semicontínuo superiormente sobre S (abreviadamente, scs sobre S) se e somente se J é semicontínuo superiormente em todo ponto de S.*

(v) *J é semicontínuo inferiormente (abreviadamente, sci) se e somente se J é semicontínuo inferiormente sobre V.*

(vi) *J é semicontínuo superiormente (abreviadamente, scs) se e somente se J é semicontínuo superiormente sobre V.*■

Temos

Proposição 6.3.6. *J é contínuo em u se e somente se J é ao mesmo tempo sci e scs em u.* ■

Prova. Suponhamos J contínua em u. Seja $\eta > 0$: existe $\delta > 0$ tal que

$$\| v - u \| \leq \delta \Longrightarrow |\ J(v) - J(u)\ | \leq \eta\ .$$

Assim,

$$\| v - u \| \leq \delta \Longrightarrow J(u) - \eta \leq J(v) \ \leq J(u) + \eta\ .$$

Resulta que:

$$0 < \varepsilon \leq \delta \Longrightarrow J(u) - \eta \leq J_{\text{inf}}(\varepsilon) \leq J_{\text{sup}}(\varepsilon) \leq J(u) + \eta\ .$$

Assim, passando ao limite para $\varepsilon \to 0+$:

$$J(u) - \eta \leq \liminf\ J(u) \leq \limsup\ J(u) \leq J(u) + \eta\ .$$

Como $\eta > 0$ é arbitrário, temos

$$J(u) \leq \liminf\ J(u) \leq \limsup\ J(u) \leq J(u)\ \ ,$$

de modo que $J(u) = \liminf\ J(u) = \limsup\ J(u)$.

Suponhamos J ao mesmo tempo sci e scs em u. Então

$$J(u) = \lim_{\varepsilon \to 0+} J_{\inf}(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} J_{\sup}(\varepsilon) \ .$$

Seja $\eta > 0$. Da igualdade acima, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < \varepsilon \leq \delta_1 \Longrightarrow |\ J(u) - J_{\inf}(\varepsilon)\ | \leq \eta \Longrightarrow J(u) \leq J_{\inf}(\varepsilon) + \eta$$

e também existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < \varepsilon \leq \delta_2 \Longrightarrow |\ J(u) - J_{\sup}(\varepsilon)\ | \leq \eta \Longrightarrow J_{\sup}(\varepsilon) - \eta \leq J(u) \ .$$

Tomando $\delta = \min\{\ \delta_1,\ \delta_2\ \}$, temos

$$0 < \varepsilon \leq \delta \Longrightarrow J_{\sup}(\delta) - \eta \leq J(u) \leq J_{\inf}(\delta) + \eta \ .$$

Seja $\{\ u_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset V$ tal que $u_n \to u$ em V. Então existe $n_0 > 0$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \|\ u_n - u\ \| \leq \delta \Longrightarrow J_{\inf}(\delta) \leq J(u_n) \leq J_{\sup}(\delta) \ .$$

Assim,

$$n \geq n_0 \Longrightarrow J(u_n) - \eta \leq J(u) \leq J(u_n) + \eta \ ,$$

isto é,

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |\ J(u) - J(u_n)\ | \leq \eta.$$

Assim, $J(u_n) \to J(u)$ e J é contínua em u. ■

Podemos caracterizar a semicontinuidade utilizando seqüências:

Definição 6.3.7 (lim inf e lim sup seqüenciais)**.** *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional e seja $\{\ u_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset V$ uma seqüência. Definimos*

$$\liminf\ J(u_n) = \lim_{n\ \to\ +\infty} (\inf\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \}) \ ,$$

$$\limsup\ J(u_n) = \lim_{n\ \to\ +\infty} (\sup\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \}) \ . \ ■$$

Observemos que $\{\ a_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ definida por $a_n = \inf\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \}$ é uma seqüência crescente de números reais. Assim, seja $\{\ a_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ é limitada e $a_n \to a \in \mathbb{R}$, seja $\{\ a_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ não é limitada e temos $a_n \to +\infty$ ou $a_n \to -\infty$. De maneira análoga, $\{\ b_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ definida por $b_n = \sup\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \}$ é uma seqüência decrescente. Assim, seja $\{\ b_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ é limitada e $b_n \to b \in \mathbb{R}$, seja $\{\ b_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ não é limitada e temos $b_n \to +\infty$ ou $b_n \to -\infty$. O resultado seguinte é bastante útil:

Proposição 6.3.8. *Seja* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *um funcional e seja* $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ *uma seqüência. Então*

$$J(u_n) \to m \Longleftrightarrow \liminf J(u_n) = \limsup J(u_n) = m. \blacksquare$$

Prova. $(\Longrightarrow)$: Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $n_0 > 0$ tal que

$$k \geq n_0 \Longrightarrow |\ J(u_k) - m\ | \leq \varepsilon \ \Longrightarrow m - \varepsilon \leq \ J(u_k) \leq m + \varepsilon\ .$$

Assim,

$$n \geq n_0 \Longrightarrow m - \varepsilon \leq \ \inf\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \leq \sup\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \leq m + \varepsilon\ .$$

Passando ao limite para $k \to +\infty$, temos

$$\forall\ \varepsilon > 0 : m - \varepsilon \leq \ \liminf J(u_n) \leq \limsup J(u_n) \leq m + \varepsilon\ .$$

Fazendo $\varepsilon \to 0+$, obtemos o resultado enunciado.
$(\Longleftarrow)$: Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $p_0 > 0$ tal que

$$n \geq p_0 \Longrightarrow m - \varepsilon \leq \ \inf\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \leq m + \varepsilon\ .$$

Também existe $q_0 > 0$ tal que

$$n \geq q_0 \Longrightarrow m - \varepsilon \leq \ \sup\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \leq m + \varepsilon\ .$$

Assim, tomando $n_0 = \max\{\ p_0,\ q_0\ \}$, temos

$$n \geq n_0 \Longrightarrow m - \varepsilon \leq \ \inf\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \leq \sup\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \leq m + \varepsilon\ .$$

Ora,

$$\inf\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \leq J(u_n) \leq \sup\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \},$$

de modo que temos também:

$$n \geq n_0 \Longrightarrow m - \varepsilon \leq \ J(u_n) \leq m + \varepsilon$$

e $J(u_n) \to m$. $\blacksquare$

Temos:

Proposição 6.3.9. *Seja* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *um funcional e seja* $u \in V$. *Então*

(i) *J é sci em u se e somente se*

$$J(u) \leq \liminf\ J(u_n)$$

para toda seqüência $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ *de elementos de* V *tal que* $u_n \to u$ *em* V.

(ii) *J é scs em u se e somente se*

$$J(u) \geq \limsup \ J(u_n)$$

para toda seqüência $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de V tal que $u_n \to u$ em V.■

Prova.

(i) $(\Longrightarrow)$: Sejam $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ tal que $u_n \to u$ em V e $a_n = \inf \{ J(u_k) \ : \ k \geq n \}$. Como J é sci, temos $J_{\text{inf}}(\varepsilon) \to J(u) = \liminf \ J(u)$ quando $\varepsilon \to 0+$. Dado que $\varepsilon \to J_{\text{inf}}(\varepsilon)$ é decrescente, temos :

$$\forall \ \varepsilon > 0 : J_{\text{inf}}(\varepsilon) \leq J(u) \ .$$

Assim

$$\forall \ \varepsilon > 0 : \min \{ \ J(u) \, , \ J_{\text{inf}}(\varepsilon) \ \} = J_{\text{inf}}(\varepsilon) \ .$$

Além disto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \| \ u_n - u \ \| \leq \varepsilon \ .$$

Assim, decorre da proposição 6.3.4 que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow a_n \geq \min \{ \ J(u) \, , \ J_{\text{inf}}(\varepsilon) \ \} = J_{\text{inf}}(\varepsilon) \ .$$

Logo,

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ : \ \lim_{n \to +\infty} a_n \ \geq \ J_{\text{inf}}(\varepsilon) \Longrightarrow \liminf \ J(u_n) \geq J_{\text{inf}}(\varepsilon) \ .$$

Passando ao limite para $\varepsilon \to 0+$, obtemos o resultado enunciado.

$(\Longleftarrow)$: suponhamos que J não é sci em u. Então $J(u) > \liminf \ J(u)$. Logo, $J(u) > -\infty$ e $\liminf \ J(u) < +\infty$. Assim, existem M, $N \in \mathbb{R}$ tais que $\liminf$ $J(u) \leq M$ e $J(u) \geq N$.

a) Mostremos que que $\liminf \ J(u) \in \mathbb{R}$: como $\liminf \ J(u) \leq M$, temos $\liminf \ J(u) < +\infty$. Resta mostrar que $\liminf J(u) > -\infty$. Suponhamos o contrário: $\liminf \ J(u) = -\infty$. Temos $J_{\text{inf}}(\varepsilon) \to \liminf \ J(u)$ quando $\varepsilon \to 0+$. Dado que $\varepsilon \to J_{\text{inf}}(\varepsilon)$ é decrescente, temos :

$$\forall \ \varepsilon > 0 : J_{\text{inf}}(\varepsilon) \leq \liminf \ J(u) = -\infty \ ,$$

de modo que $J_{\text{inf}}(\varepsilon) = -\infty$ para todo $\varepsilon > 0$. Assim

$$\inf \left\{ \ J(v) : v \in B^0_\varepsilon(u) \right\} = J_{\text{inf}}(\varepsilon) = -\infty$$

e existe

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : \exists\ u_n \in B^0_{1/n}(u) \quad \text{tal que} \quad J(u_n) \leq -n.$$

$\{\ u_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset V$ verifica

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : \inf\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} = -\infty \Longrightarrow \liminf\ J(u_n) = -\infty.$$

Por outro lado, $u_n \to u$ em V, de modo que

$$J(u) \leq \liminf\ J(u_n) = -\infty.$$

Assim, $J(u) = -\infty$, de modo que $N \in \mathbb{R}$ e $N \leq -\infty$, o que é absurdo. Logo, $\liminf\ J(u) > -\infty$, de modo que $\liminf\ J(u) \in \mathbb{R}$.

b) Mostremos que $J(u) \in \mathbb{R}$: como $J(u) \geq N$, temos $J(u) > -\infty$. Resta mostrar que $J(u) < +\infty$. Temos $J_{\text{inf}}(\varepsilon) \to \liminf J(u)$ quando $\varepsilon \to 0+$. Dado que $\varepsilon \to J_{\text{inf}}(\varepsilon)$ é decrescente, temos :

$$\forall\ \varepsilon > 0 : J_{\text{inf}}(\varepsilon) \leq \liminf J(u) \leq M\ .$$

Seja $\eta > 0$. Como $J_{\text{inf}}(\varepsilon) = \inf\left\{\ J(v) : v \in B^0_\varepsilon(u)\right\}$, existe $u_n \in B^0_{1/n}(u)$ tal que $J(u_n) \leq M + \eta$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe um elemento u_n tal que

$$0 < \|\ u_n - u\ \| \leq \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad J(u_n) \leq M + \eta\ .$$

Temos então $u_n \to u$ em V, de modo que

$$J(u) \leq \liminf\ J(u_n) \leq M + \eta.$$

Assim, $J(u) \in \mathbb{R}$.

c) Como $J(u) > \liminf\ J(u)$, existe $\eta > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$:

$$J(u) > \liminf\ J(u) + \eta > \liminf\ J(u) \geq J_{\text{inf}}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Como $J_{\text{inf}}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \inf\left\{\ J(v) : v \in B^0_{1/n}(u)\right\}$,

$$\exists\ \ u_n \in B^0_{1/n}(u) \quad \text{e}\ J_{\text{inf}}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\eta}{2} > J(u_n) \geq J_{\text{inf}}\left(\frac{1}{n}\right)\ .$$

Assim,

$$\liminf\ J(u) \geq J(u_n) - \frac{\eta}{2}$$

e

$$J(u) > \liminf\ J(u) + \eta > J(u_n) + \frac{\eta}{2} \geq \frac{\eta}{2} + \inf\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \}\ ,$$

de modo que

$$0 < \|\ u_n - u\ \| \leq \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad J(u) > \frac{\eta}{2} + \inf\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \}\ .$$

Assim, a seqüência $\{\ u_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset V$ verifica $u_n \to u$ em V e

$$J(u) \geq \frac{\eta}{2}\ +\ \liminf\ J(u_n)\,.$$

Assim

$$\liminf\ J(u_n) \geq J(u) \geq \frac{\eta}{2}\ +\ \liminf\ J(u_n)\,. \tag{6.3}$$

Como $\eta > 0$, esta desigualdade é impossível a não ser que

$$\liminf\ J(u_n) \in \{-\infty, +\infty\}\,.$$

Ora, por um lado, se o valor desse limite é $-\infty$, a desigualdade (6.3) implica que $J(u) = -\infty \notin \mathbb{R}$; por outro lado, se o valor desse limite é $+\infty$, a desigualdade (6.3) implica que $J(u) = +\infty \notin \mathbb{R}$. Nos dois casos, $J(u) \notin \mathbb{R}$, o que é absurdo, pois $J(u) \in \mathbb{R}$.

(ii) ($\Longrightarrow$): Sejam $\{\ u_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset V$ tal que $u_n \to u$ em V e $b_n = \sup\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \}$. Como J é scs, temos $J_{\text{sup}}(\varepsilon) \to J(u) = \limsup\ J(u)$ quando $\varepsilon \to 0+$. Dado que $\varepsilon \to J_{\text{sup}}(\varepsilon)$ é crescente, temos:

$$\forall\ \varepsilon > 0 : J_{\text{sup}}(\varepsilon) \geq J(u)\ \ .$$

Assim

$$\forall\ \varepsilon > 0 : \max\{\ J(u)\,,\ J_{\text{sup}}(\varepsilon)\ \ \} = J_{\text{sup}}(\varepsilon)\ \ .$$

Além disto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \|\ u_n - u\ \| \leq \varepsilon\ .$$

Assim, decorre da proposição 6.3.4 que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow b_n \leq \max\{\ J(u)\,,\ J_{\text{sup}}(\varepsilon)\ \ \} = J_{\text{sup}}(\varepsilon)\ \ .$$

Logo,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ :\ \lim_{n\ \to\ +\infty} b_n\ \leq\ J_{\text{sup}}(\varepsilon) \Longrightarrow \limsup\ J(u_n)\ \ \leq\ J_{\text{sup}}(\varepsilon)\,.$$

Passando ao limite para $\varepsilon \to 0+$, obtemos o resultado enunciado.

($\Longleftarrow$): analogamente a (i), suponhamos que J não é scs em u. Então $J(u) < \limsup\ J(u)$. Logo, $J(u) < +\infty$ e $\limsup\ J(u) > -\infty$. Assim, existem M, $N \in \mathbb{R}$ tais que $\limsup\ J(u) \geq M$ e $J(u) \leq N$.

a) Mostremos que que $\limsup\ J(u) \in \mathbb{R}$: como $\limsup\ J(u) \geq M$, temos $\limsup\ J(u) > -\infty$. Resta mostrar que $\limsup J(u) < +\infty$. Suponhamos o contrário: $\limsup\ J(u) = +\infty$. Temos $J_{\sup}(\varepsilon) \to \limsup\ J(u)$ quando $\varepsilon \to 0+$. Dado que $\varepsilon \to J_{\sup}(\varepsilon)$ é crescente, temos :

$$\forall\ \varepsilon > 0 : J_{\inf}(\varepsilon) \geq \limsup J(u) = +\infty\ ,$$

de modo que $J_{\sup}(\varepsilon) = +\infty$ para todo $\varepsilon > 0$. Assim

$$\sup\left\{\ J(v) : v \in B^0_\varepsilon(u)\right\} = J_{\sup}(\varepsilon) = +\infty$$

e

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : \exists\ u_n \in B^0_{1/n}(u) \quad \text{tal que} \quad J(u_n) \geq n.$$

Temos

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : \sup\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} = +\infty \Longrightarrow \limsup\ J(u_n) = +\infty.$$

Por outro lado, $u_n \to u$ em V, de modo que

$$J(u) \geq \limsup\ J(u_n) = +\infty.$$

Assim, $J(u) = +\infty$, de modo que $N \in \mathbb{R}$ e $N \geq +\infty$, o que é absurdo. Logo, $\limsup\ J(u) < +\infty$, de modo que $\limsup\ J(u) \in \mathbb{R}$.

b) Mostremos que $J(u) \in \mathbb{R}$: como $J(u) \leq N$, temos $J(u) < +\infty$. Resta mostrar que $J(u) > -\infty$. Temos $J_{\sup}(\varepsilon) \to \limsup\ J(u)$ quando $\varepsilon \to 0+$. Dado que $\varepsilon \to J_{\sup}(\varepsilon)$ é crescente, temos

$$\forall\ \varepsilon > 0 : J_{\sup}(\varepsilon) \geq \limsup J(u) \geq M\ .$$

Seja $\eta > 0$. Como $J_{\sup}(\varepsilon) = \sup\left\{\ J(v) : v \in B^0_\varepsilon(u)\right\}$, existe $u_n \in B^0_{1/n}(u)$ tal que $J(u_n) \geq M - \eta$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe um elemento u_n tal que

$$0 < \|\ u_n - u\ \| \leq \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad J(u_n) \geq M - \eta\ .$$

Temos então $u_n \to u$ em V, de modo que

$$J(u)\ \ \geq\ \ \limsup\ J(u_n) \geq M - \eta.$$

Assim, $J(u) \in \mathbb{R}$.

c) Como $J(u) < \limsup J(u)$, , existe $\eta > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$:

$$J(u) < \limsup\ J(u) - \eta < \limsup\ J(u) \leq J_{\sup}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Como $J_{\sup}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sup\Big\{ \ J\left(v\right) : v \in B^0_{1/n}\left(u\right)\Big\}$,

$$\exists \ \ u_n \in B^0_{1/n}\left(u\right) \ \ \text{ e } J_{\sup}\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\eta}{2} < J\left(u_n\right) \leq J_{\sup}\left(\frac{1}{n}\right) \quad .$$

Assim,

$$\limsup \ J\left(u\right) \leq J\left(u_n\right) + \frac{\eta}{2}$$

e

$$\limsup \ J\left(u\right) - \eta < J\left(u_n\right) - \frac{\eta}{2} \ ,$$

de modo que

$$0 < \| \ u_n - u \ \| \leq \frac{1}{n} \ \text{ e } \ J\left(u\right) < J\left(u_n\right) - \frac{\eta}{2}$$

e

$$J\left(u\right) < \limsup \ J\left(u\right) - \eta < J\left(u_n\right) - \frac{\eta}{2} \leq -\frac{\eta}{2} + \sup\left\{ \ J\left(u_k\right) \ : \ k \geq n \ \right\} \ ,$$

de modo que

$$0 < \| \ u_n - u \ \| \leq \frac{1}{n} \ \text{ e } \ J\left(u\right) < -\frac{\eta}{2} + \inf\left\{ \ J\left(u_k\right) \ : \ k \geq n \ \right\} \ .$$

Assim, a seqüência $\{ \ u_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}} \subset V$ verifica $u_n \to u$ em V e

$$J\left(u\right) \leq -\frac{\eta}{2} \ + \ \limsup \ J\left(u_n\right).$$

Assim

$$\limsup \ J\left(u_n\right) \leq J\left(u\right) \leq -\frac{\eta}{2} \ + \ \limsup \ J\left(u_n\right) \ . \tag{6.4}$$

Como $\eta > 0$, esta desigualdade é impossível a não ser que

$$\limsup \ J\left(u_n\right) \in \{-\infty, +\infty\}.$$

Assim, se o valor desse limite é $-\infty$, a desigualdade (6.4) implica que $J\left(u\right) = -\infty \notin \mathbb{R}$. Se o valor desse limite é $+\infty$, a desigualdade (6.4) implica que $J\left(u\right) = +\infty \notin \mathbb{R}$. Nos dois casos, $J\left(u\right) \notin \mathbb{R}$, o que é absurdo, pois $J\left(u\right) \in \mathbb{R}$.

■

Utilizaremos também as propriedades seguintes:

Proposição 6.3.10. *Seja* $\{ \ \lambda_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *uma seqüência tal que* $\lambda_n \to \lambda$ *em* $\mathbb{R}$. *Então, para toda seqüência* $\{ \ u_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}}$ *de elementos de* V *tal que* $u_n \to u$ *em* V*:*

$$\limsup \ \left(\lambda_n + J\left(u_n\right)\right) = \lambda + \limsup \ J\left(u_n\right) \quad e \quad \liminf \ \left(\lambda_n + J\left(u_n\right)\right) = \lambda + \liminf \ J\left(u_n\right) \ . \ \blacksquare$$

Prova. Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $n_0(\varepsilon)$ tal que

$$n \geq n_0(\varepsilon) \implies \lambda + \varepsilon \geq \lambda_n \geq \lambda - \varepsilon \quad .$$

Assim,

$$n \geq n_0(\varepsilon) \implies \lambda + \varepsilon + J(u_n) \geq \lambda_n + J(u_n) \geq \lambda - \varepsilon + J(u_n) \quad .$$

Logo, para $n \geq n_0(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \lambda + \varepsilon + \inf\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} &\geq \inf\{\ \lambda_k + J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \\ &\geq \lambda - \varepsilon + \inf\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda + \varepsilon + \liminf\ J(u_n) &\geq \liminf\ (\lambda_n + J(u_n)) \\ &\geq \lambda - \varepsilon + \liminf\ J(u_n) \quad . \end{aligned}$$

Tomando o limite para $\varepsilon \to 0+$, resulta

$$\liminf\ (\lambda_n + J(u_n)) = \lambda + \liminf\ J(u_n) \quad .$$

De maneira análoga, para $n \geq n_0(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \lambda + \varepsilon + \sup\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} &\geq \sup\{\ \lambda_k + J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \\ &\geq \lambda - \varepsilon + \sup\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda + \varepsilon + \limsup\ J(u_n) &\geq \limsup\ (\lambda_n + J(u_n)) \\ &\geq \lambda - \varepsilon + \limsup\ J(u_n) \quad . \end{aligned}$$

Tomando mais uma vez o limite para $\varepsilon \to 0+$, vem

$$\limsup\ (\lambda_n + J(u_n)) = \lambda + \limsup\ J(u_n)$$

e temos o resultado enunciado. ■

Proposição 6.3.11. *Seja* $\{\ \mu_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *uma seqüência tal que* $\mu_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\mu_n \to \mu > 0$ *em* $\mathbb{R}$. *Então, para toda seqüência* $\{\ u_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ *de elementos de* V *tal que* $J(u_n) \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $u_n \to u$ *em* V*:*

$$\limsup\ (\mu_n J(u_n)) = \mu \limsup\ J(u_n) \quad e \quad \liminf\ (\mu_n J(u_n)) = \mu \liminf\ J(u_n) \quad . \ ■$$

Prova. Para todo ε tal que $0 < \varepsilon < \mu$, existe $n_0(\varepsilon)$ tal que

$$n \geq n_0(\varepsilon) \implies \mu + \varepsilon \geq \mu_n \geq \mu - \varepsilon > 0 \quad .$$

Assim,

$$n \geq n_0(\varepsilon) \implies (\mu+\varepsilon)\, J(u_n) \geq \mu_n J(u_n) \geq (\mu-\varepsilon)\, J(u_n) \quad .$$

Logo, para $n \geq n_0(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}(\mu+\varepsilon)\inf\{\ J(u_k)\ :\ k\geq n\ \} &\geq \inf\{\ \mu_k J(u_k)\ :\ k\geq n\ \}\\ &\geq (\mu-\varepsilon)\inf\{\ J(u_k)\ :\ k\geq n\ \}\end{aligned}$$

e, tomando o limite para $n \to +\infty$

$$\begin{aligned}(\mu+\varepsilon)\liminf\ J(u_n) &\geq \liminf\ (\mu_n J(u_n))\\ &\geq (\mu-\varepsilon)\liminf\ J(u_n)\ .\end{aligned}$$

Tomando o limite para $\varepsilon \to 0+$, resulta

$$\liminf\ (\mu_n J(u_n)) = \mu \liminf\ J(u_n)\ .$$

De maneira análoga, para $n \geq n_0(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}(\mu+\varepsilon)\sup\{\ J(u_k)\ :\ k\geq n\ \} &\geq \sup\{\ \mu_k J(u_k)\ :\ k\geq n\ \}\\ &\geq (\mu-\varepsilon)\sup\{\ J(u_k)\ :\ k\geq n\ \}\end{aligned}$$

e

$$(\mu+\varepsilon)\limsup\ J(u_n) \geq \limsup\ (\mu_n J(u_n)) \geq (\mu-\varepsilon)\limsup\ J(u_n)\ ,$$

de modo que temos também, para $\varepsilon \to 0+$,

$$\limsup\ (\mu_n J(u_n)) = \mu \limsup\ J(u_n)\ ,$$

o que prova o resultado enunciado. ■

Proposição 6.3.12. *Seja* $\{\ \mu_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *uma seqüência tal que* $\mu_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\mu_n \to 0$ *em* $\mathbb{R}$*. Então, para toda seqüência* $\{\ u_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ *de elementos de* V *tal que tal que* $J(u_n) \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $u_n \to u$ *em* V*:*

(i) *Se* $\liminf\ (J(u_n)) \in \mathbb{R}$ *então* $\liminf\ (\mu_n J(u_n)) \leq 0$ *e* $\limsup\ (\mu_n J(u_n)) \geq 0$.

(ii) *Se* $\limsup\ (J(u_n)) \in \mathbb{R}$ *então* $\liminf\ (\mu_n J(u_n)) \geq 0$ *e* $\limsup\ (\mu_n J(u_n)) \leq 0$.

(iii) *Se* $\liminf\ (J(u_n)) \in \mathbb{R}$ *e* $\limsup\ (J(u_n)) \in \mathbb{R}$ *então* $\limsup\ (\mu_n J(u_n)) = 0$ *e* $\liminf\ (\mu_n J(u_n)) = 0$ *.* ■

Prova. Para todo ε tal que $0 < \varepsilon < \mu$, existe $n_0(\varepsilon)$ tal que

$$n \geq n_0(\varepsilon) \implies \varepsilon \geq \mu_n \geq -\varepsilon \quad .$$

Assim,

$$n \geq n_0(\varepsilon) \implies \varepsilon J(u_n) \geq \mu_n J(u_n) \geq -\varepsilon J(u_n) \quad .$$

Logo, para $n \geq n_0(\varepsilon)$:

$$\varepsilon \inf\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \geq \inf\{\ \mu_k J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \geq \varepsilon \inf\{\ -J(u_k)\ :\ k \geq n\ \},$$

isto é,

$$\varepsilon \inf\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \geq \inf\{\ \mu_k J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \geq -\varepsilon \sup\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \},$$

Assim, tomando o limite para $n \to +\infty$

$$\varepsilon \liminf\ J(u_n) \geq \liminf\ (\mu_n J(u_n)) \geq -\varepsilon \limsup\ J(u_n) \quad . \tag{6.5}$$

De maneira análoga, para $n \geq n_0(\varepsilon)$:

$$\varepsilon \sup\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \geq \sup\{\ \mu_k J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \geq \varepsilon \sup\{\ -J(u_k)\ :\ k \geq n\ \},$$

isto é,

$$\varepsilon \sup\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \geq \sup\{\ \mu_k J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \geq -\varepsilon \inf\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \},$$

e

$$\varepsilon \limsup\ J(u_n) \geq \limsup\ (\mu_n J(u_n)) \geq -\varepsilon \liminf\ J(u_n) \quad . \tag{6.6}$$

Os resultados enunciados são obtidos para $\varepsilon \to 0+$ em (6.5) e (6.6). ■

Proposição 6.3.13. *Se $I(v) \leq J(v)$ para todo $v \in V$ então $\liminf\ I(u_n) \leq \liminf\ J(u_n)$ e $\limsup I(u_n) \leq \limsup J(u_n)$ para toda seqüência $\{\ u_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ de elementos de V tal que $u_n \to u$ em V.* ■

Prova. Temos

$$\inf\{\ I(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \leq \inf\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \quad \text{e}$$
$$\sup\{\ I(u_k)\ :\ k \geq n\ \} \leq \sup\{\ J(u_k)\ :\ k \geq n\ \}$$

e o resultado é obtido tomando o limite para $n \to +\infty$ nestas desigualdades. ■

O primeiro resultado enunciado no Lema 6.3.4 mostra que

Teorema 6.3.14. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. Então J é sci em u se e somente se $-J$ é scs em u.* ■

Prova. $J(u) \leq \liminf\ J(u) \iff -J(u) \geq -\liminf\ J(u) = \limsup\ (-J(u))$. ■

Corolário 6.3.15. *Seja $L : V \to \overline{\mathbb{R}}$ linear então L é sci se e somente se L é scs.* ■

Prova. Temos $-L(-u) = L(u)$, de modo que

$$\liminf L(u) = \liminf (-L(-u)) = -\limsup L(-u) \ .$$

Assim,

$$L(u) \leq \liminf \ L(u) \Longleftrightarrow L(u) \leq -\limsup L(-u) \Longleftrightarrow -L(u) \geq \limsup L(-u)$$

de forma que a linearidade de L mostra que

$$L(u) \leq \liminf \ L(u) \Longleftrightarrow L(-u) \geq \limsup L(-u) \ .$$

Como u é arbitrário, temos o resultado enunciado. ■

O Teorema 6.3.14 justifica que passemos a limitar nosso estudo aos funcionais sci: estudar um funcional scs é equivalente a estudar o oposto de um funcional sci. Além disto, como mostra o Lema 6.3.4, calcular o lim sup de um funcional é também equivalente a calcular o lim inf de seu oposto. Assim, a partir de agora consideraremos somente os funcionais sci.

Proposição 6.3.16.

(i) *Se $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é sci e $\alpha \geq 0$, então αJ é sci.*

(ii) *Toda soma finita de funcionais sci é sci.*

(iii) *Se $\{ \ J_\lambda \ \}_{\lambda \ \in \ \Lambda}$ é uma família de funcionais sci então*

$$J(u) = \sup \{ \ J_\lambda(u) \ : \lambda \ \in \ \Lambda \ \}$$

é sci.

(iv) *Se $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é convexa sci então dom(J) é um convexo fechado.* ■

Prova.

(i) Basta utilizar o Lema 6.3.4: $\liminf \alpha J(u) = \alpha \liminf \ J(u)$, de modo que

$$J(u) \leq \liminf \ J(u) \Longrightarrow \alpha J(u) \leq \liminf \alpha J(u) \,.$$

(ii) Basta utilizar o Lema 6.3.4: $\liminf \left(\sum_{i=1}^{n} J_i \right)(u) \geq \sum_{i=1}^{n} \liminf J_i(u)$, de modo que

$$J_i(u) \leq \liminf \ J_i(u)\,,\ 1 \leq i \leq n \Longrightarrow \liminf \left(\sum_{i=1}^{n} J_i \right)(u) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} J_i \right)(u)\,.$$

(iii) Temos, $\forall\ \lambda \in \Lambda$ e $u \in V$: $J_\lambda(u) \leq J(u)$, de modo que

$$\forall\ \lambda \in \Lambda,\ \varepsilon > 0 : \inf \left\{\ J_\lambda(v) : v \in B_\varepsilon^0(u) \right\} \leq \inf \left\{\ J(v) : v \in B_\varepsilon^0(u) \right\}\ .$$

Assim,

$$\forall\ \lambda \in \Lambda : \liminf\ J_\lambda(u) \leq \liminf\ J(u)\ .$$

Por outro lado, J_λ é sci para todo $\lambda \in \Lambda$, de modo que

$$\forall\ \lambda \in \Lambda : J_\lambda(u) \leq \liminf\ J_\lambda(u) \leq \liminf\ J(u)\ .$$

Temos então

$$J(u) = \sup \{\ J_\lambda(u)\ :\ \lambda\ \in\ \Lambda\ \} \leq \liminf\ J(u)$$

e J é sci.

(iv) A proposição 6.2.4 mostra que $dom\,(J)$ é convexo. Seja $u \in dom\,(J)$. Suponhamos $J(u) = -\infty$. Se existe $v \in dom\,(J)$ tal que $J(v) \in \mathbb{R}$,

■

A relação entre o epigrafo e a semicontinuidade inferior do funcional é dada por:

Teorema 6.3.17. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. Então as afirmações seguintes são equivalentes:*

(i) *J é sci*

(ii) *para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in V\ :\ J(u) > \lambda \Longrightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ tal que $J(v) > \lambda$ para todo $v \in B_\varepsilon(u)$.*

(iii) *$A(\lambda) = \{\ u \in V\ :\ J(u) > \lambda\ \}$ é aberto para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(iv) *$S(\lambda) = \{\ u \in V\ :\ J(u) \leq \lambda\ \}$ é fechado para todo $\lambda \in \mathbb{R}$*

(v) *$epi\,(J)$ é fechado.*

(vi) *para todo* $u \in V$ *:* $J(u) \leq \liminf J(u)$. ■

Prova.

1) Mostremos inicialmente que (i) $\Longrightarrow$ (ii): suponhamos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in V$ para os quais $J(u) > \lambda$ e

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad : \ \exists\, u_\varepsilon \in B_\varepsilon(u) \text{ tal que } J(u_\varepsilon) \leq \lambda\ .$$

Então

$$\forall\, \varepsilon > 0 : J_{\text{inf}}(\varepsilon) \leq \lambda \Longrightarrow \liminf\ J(u) \leq \lambda.$$

Como J é sci, temos

$$\lambda < J(u) \leq \liminf\ J(u) \leq \lambda.$$

Assim, $\lambda < \lambda$, o que é absurdo.

2) Mostremos agora que (ii) $\Longrightarrow$ (i): suponhamos que existe $u \in V$ tal que $J(u) > \liminf J(u)$. Temos então $J(u) > -\infty$, pois no caso contrário, $\liminf J(u) \geq J(u)$.

Seja $\lambda < J(u)$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $J(v) > \lambda$ para todo $v \in B_\varepsilon(u)$. Resulta que

$$J_{\text{inf}}(\varepsilon) \geq \lambda \Longrightarrow \liminf\ J(u) \geq \lambda.$$

Assim

$$\forall\, \lambda < J(u) : \liminf\ J(u) \geq \lambda.$$

Suponhamos $J(u) = +\infty$, esta desigualdade mostra que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \liminf\ J(u) \geq n \Longrightarrow \liminf\ J(u) = +\infty,$$

de modo que $+\infty > +\infty$, o que é absurdo. Se $J(u) \in \mathbb{R}$,a desigualdade mostra que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \liminf\ J(u) \geq J(u) - \frac{1}{n} \Longrightarrow \liminf\ J(u) \geq J(u)\,,$$

de modo que $J(u) > J(u)$, o que é absurdo.

3) Mostremos que (ii) $\Longrightarrow$ (iii): se $u \in A(\lambda)$ então $J(u) > \lambda$ e existe $\varepsilon > 0$ tal que $J(v) > \lambda$ para todo $v \in B_\varepsilon(u)$. Logo $B_\varepsilon(u) \subset A(\lambda)$ e $A(\lambda)$ é aberto

4) Mostremos que (iii) $\Longrightarrow$ (ii): Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in V$ tais que $J(u) > \lambda$. Então $u \in A(\lambda)$. Como $A(\lambda)$ é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(u) \subset A(\lambda)$: temos então $J(v) > \lambda$ para todo $v \in B_\varepsilon(u)$.

5) Mostremos que (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv): basta notar que $S\,(\lambda) = V - A\,(\lambda)$, de modo que $S\,(\lambda)$ é fechado se e somente se $A\,(\lambda)$ é aberto.

6) Mostremos que (iv) $\Longrightarrow$ (v): Seja $I\,(u,\lambda) = J\,(u) - \lambda$. Temos $epi\,(J) = \{\ (u,\,\lambda) \in V \times \mathbb{R} : I\,(u,\lambda) \leq 0\ \}$. Ora, (iv) implica que J é sci (pois já mostramos que (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv)). Logo, $I : V \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ é sci: seja $\{\ (u_n,\,\lambda_n)\}_{n\,\in\,N}$ uma seqüência tal que $u_n \to u$ em V e $\lambda_n \to \lambda$ em $\mathbb{R}$. Seja $\eta > 0$: então existe $n_0 > 0$ tal que

$$k \geq n_0 \Longrightarrow |\ \lambda_k - \lambda\ | \leq \eta \Longrightarrow -\eta - \lambda \leq -\lambda_k \leq \eta - \lambda\ .$$

Resulta que

$$k \geq n_0 \Longrightarrow J\,(u_k) - \lambda - \eta\ . \leq J\,(u_k) - \lambda_k \leq J\,(u_k) - \lambda + \eta\ .$$

Assim,

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \inf\{\ J\,(u_k)\ :\ k \geq n\ \} - \lambda - \eta\ \leq \inf\{\ J\,(u_k) - \lambda_k\ :\ k \geq n\ \}$$

e, dado que J é sci (Cf. proposição 6.3.9)

$$J\,(u) - \lambda - \eta \leq \liminf\ J\,(u_n) - \lambda - \eta \leq \liminf\ I\,(u_n,\,\lambda_n)\ .$$

Ora, $\eta > 0$ é arbitrário, de modo que

$$I\,(u,\,\lambda) = J\,(u) - \lambda \leq \liminf\ I\,(u_n,\,\lambda_n)$$

e a proposição 6.3.9 mostra que I é sci. Logo, (iv) implica também que $\{\ (u,\,\lambda) \in V \times \mathbb{R} : I\,(u,\lambda) \leq 0\ \}$, isto é, $epi\,(J)$ é fechado.

7) Mostremos que (v) $\Longrightarrow$ (iv):
Sejam $I\,(u,\lambda) = J\,(u) - \lambda$ e $S\,(\eta) = \{\ (u,\,\lambda) \in V \times \mathbb{R} : I\,(u,\lambda) \leq \eta\ \}$. Mostremos que $S\,(\eta)$ é fechado: seja $\{\ (u_n,\,\lambda_n)\}_{n\,\in\,N} \subset S\,(\eta)$ uma seqüência tal que $u_n \to u$ em V e $\lambda_n \to \lambda$ em $\mathbb{R}$. Então

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : J\,(u_n) - \lambda_n \leq \eta \Longrightarrow J\,(u_n) \leq \lambda_n + \eta\ .$$

Assim, $\{\ (u_n,\,\eta + \lambda_n)\}_{n\,\in\,N} \subset epi\,(J)$ verifica $u_n \to u$ em V e $\eta{+}\lambda_n \to \eta{+}\lambda$ em $\mathbb{R}$. Como $epi\,(J)$ é fechado, $(u,\,\eta + \lambda) \in epi\,(J)$ e temos

$$J\,(u) \leq \lambda + \eta \Longrightarrow J\,(u) - \lambda \leq \eta \Longrightarrow (u,\,\lambda) \in S\,(\eta)\ .$$

Logo, $S\,(\eta)$ é fechado para todo $\eta \in \mathbb{R}$, o que implica que I é sci (já mostramos que (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv)). Logo, J é sci: seja $\{\ u_n\}_{n\,\in\,N}$ uma seqüência tal que $u_n \to u$ em V. Consideremos a seqüência $\{\ (u_n,\,\lambda_n)\}_{n\,\in\,N}$

tal que $\lambda_n = \lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$.Temos evidentemente $\lambda_n \to \lambda$ em $\mathbb{R}$ e, além disto,

$$\inf \{ \ I(u_k,\lambda_k) \ : \ k \geq n \ \} = \inf \{ \ J(u_k) \ : \ k \geq n \ \} - \lambda \ ,$$

de modo que

$$\liminf \ I(u_n, \ \lambda_n) = \liminf \ J(u_n) - \lambda \ .$$

Como I é sci :

$$I(u,\lambda) \leq \liminf \ I(u_n, \ \lambda_n) \ \ ,$$

de maneira que

$$J(u) - \lambda \leq \liminf \ J(u_n) - \lambda$$

e

$$J(u) \leq \liminf \ J(u_n) \, .$$

Assim, a proposição 6.3.9 mostra que J é sci.

8) É imediato que (i) $\Longrightarrow$ (vi). Mostremos que (vi) $\Longrightarrow$ (i). Para tanto, basta mostrar que (vi) $\Longrightarrow$ (ii), pois já estabelecemos que (i) $\Longleftrightarrow$ (ii). Suponhamos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in V$ para os quais $J(u) > \lambda$ e

$$\forall \ \varepsilon > 0 \quad : \ \exists \ u_\varepsilon \in B_\varepsilon(u) \ \text{ tal que } J(u_\varepsilon) \leq \lambda \ .$$

Então

$$\forall \ \varepsilon > 0 : J_{\text{inf}}(\varepsilon) \leq \lambda \ \Longrightarrow \liminf \ J(u) \leq \lambda.$$

Como $J(u) \leq \liminf \ J(u)$, temos

$$\lambda < J(u) \leq \liminf \ J(u) \leq \lambda.$$

Assim, $\lambda < \lambda$, o que é absurdo.

■

No que segue, utilizaremos o resultado seguinte:

Lema 6.3.18. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional convexo sci. Se existe $u \in V$ tal que $J(u) = -\infty$ então $J(v) = -\infty$, $\forall \ v \in dom(J)$.* ■

Prova. Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $J(u) < -n$. Seja $v \in dom(J)$, $v \neq u$. Se $J(v) = \alpha \in \mathbb{R}$ então, para todo $\theta \in (0,1)$ e $\lambda > \alpha$, a convexidade de J mostra que :

$$J(\theta u + (1-\theta) v) \leq -\theta n + (1-\theta) \lambda \ .$$

Tomando o limite para $n \to +\infty$, temos:

$$\forall\ \theta \in (0,1) : J(\theta u + (1-\theta) v) = -\infty\ .$$

Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $\theta_\varepsilon \in (0,1)$ tal que $0 < \theta_\varepsilon \| v - u \| < \varepsilon$. Assim, $v_\varepsilon = \theta_\varepsilon u + (1-\theta_\varepsilon) v \in B^0_\varepsilon(v)$ e temos $J_{\text{inf}}(\varepsilon) = -\infty$. Resulta que $\liminf J(v) = -\infty$. Como J é sci, temos $J(v) = -\infty$. ■

Enfim, temos:

Teorema 6.3.19. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional convexo. Então J é sci se e somente se J é fracamente sci.* ■

Prova. Como J é convexo, *epi* (J) é convexo. Assim, decorre do Teorema 5.5.9 que *epi* (J) é fechado se e somente se *epi* (J) é fracamente fechado. ■

Corolário 6.3.20. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional convexo e fortemente contínuo. Então J é fracamente sci.*■

Prova. Como J é convexo e fortemente contínuo, *epi* (J) é convexo e fortemente fechado (Cf. 6.3.17). Assim, J é fortemente sci e o Teorema 6.3.19 mostra que J é fracamente sci. ■

6.4 Funcionais Afins

Os funcionais afins desempenham um papel importante na Análise Convexa. Lembremos que

Definição 6.4.1. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. Diremos que J é afim se e somente se*

$$\forall\ u, v \in V,\ \ \lambda \in \mathbb{R} :\ J(\lambda u + (1-\lambda) v) = \lambda J(u) + (1-\lambda) J(v)\ .■$$

Então

Proposição 6.4.2. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional afim. Então $-J$ é afim. Além disto, J é simultaneamente convexo e côncavo.* ■

Prova. Sejam $u, v \in V$; $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

$$-J(\lambda u + (1-\lambda)v) = -\lambda J(u) - (1-\lambda) J(v)$$

e $-J$ é afim.

Sejam $u,\ v \in V$; $\theta \in (0,1)$. Consideremos $M,\ N \in \mathbb{R}$ tais que $J(u) < M$ e $J(v) < N$. Então

$$J(\theta u + (1-\theta)v) = \theta J(u) + (1-\theta) J(v) < \theta M + (1-\theta) N$$

e J é convexo. Sejam agora $M,\ N \in \mathbb{R}$ tais que $-J(u) < M$ e $-J(v) < N$. Então

$$-J(\theta u + (1-\theta)v) = -\theta J(u) - (1-\theta) J(v) < \theta M + (1-\theta) N$$

e -J é convexo. ■

Temos

Proposição 6.4.3. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional afim. Então existem $L : V \to \overline{\mathbb{R}}$ linear e $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ tais que*

$$\forall\ v \in V : \ J(v) = L(v) + \alpha. ■$$

Prova. Seja $L(v) = J(v) - J(0)$. Então, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$J(\lambda u) = \ J(\lambda u + (1-\lambda)\,0) = \lambda J(u) + (1-\lambda) J(0) \Longrightarrow L(\lambda v) = \lambda L(v) \ . \quad (6.7)$$

Por outro lado,

$$J(u+v) = \ J\left(\frac{1}{2}(2u) + \frac{1}{2}(2v)\right) = \frac{1}{2} J(2u) + \frac{1}{2} J(2v) \ ,$$

de modo que

$$L(u+v) = \ \frac{1}{2}(J(2u) - J(0)) + \frac{1}{2}(J(2v) - J(0)) \ ,$$

isto é, usando a igualdade (6.7),

$$L(u+v) = \ \frac{1}{2} L(2u) + \frac{1}{2} L(2v) = L(u) + L(u) \ .$$

Assim, $L : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é linear. Pondo $\alpha = J(0) \in \overline{\mathbb{R}}$, temos $J(v) = L(v) + \alpha$ para todo $v \in V$. ■

Corolário 6.4.4. *Seja $J : V \to \mathbb{R}$ um funcional. Então J é afim e contínuo se e somente se existem $p \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\forall\ v \in V :\ \ J(v) = (p,\ v) + \alpha. \blacksquare$$

Prova. ($\Longrightarrow$) A proposição precedente mostra que $J(v) = L(v) + \alpha$, com $L : V \to \overline{\mathbb{R}}$ linear e $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Como J não toma valores infinitos, temos $\alpha = J(0) \in \mathbb{R}$. Como J é contínuo, $L : V \to \mathbb{R}$ é contínuo, de modo que $L \in V'$ e o resultado decorre do Teorema de Riesz.

($\Longleftarrow$) Seja $L : V \to \mathbb{R}$ dada por $L(v) = (p,\ v)$. Como $L \in V'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, J é contínuo. $L : V \to \mathbb{R}$ é também linear, de modo que

$$L(\lambda u + (1-\lambda) v) = \lambda L(u) + (1-\lambda) L(v)$$

e

$$L(\lambda u + (1-\lambda) v) + \alpha = \lambda (L(u) + \alpha) + (1-\lambda)(L(v) + \alpha),$$

de onde o resultado enunciado. $\blacksquare$

Uma das propriedades importantes destes funcionais é a seguinte:

Teorema 6.4.5. *Seja $J : V \to \mathbb{R}$ um funcional convexo sci próprio. Sejam $x \in V$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma < J(x)$. Então existe um funcional afim contínuo $A : V \to \mathbb{R}$ tal que $A(x) = \gamma$ e $A < J$.* $\blacksquare$

Prova. Se $epi(J) = \varnothing$, então $J = +\infty$ (Cf. proposição 6.1.7). Assim, para todo $p \in V$, $A : V \to \mathbb{R}$ dado por

$$A(v) = (\ p,\ v) + (\gamma - (\ p,\ x))$$

é um funcional afim contínuo tal que $A < J$ e $A(x) = \gamma$.

Se $epi(J) \neq \varnothing$, então existe $(w,\ \mu) \in epi(J)$. Temos $\mu \geq J(w)$, de modo que $J(w) < +\infty$. Como J é próprio, temos $J(w) \in \mathbb{R}$. Assim,

$$w \in D = \{\ v \in V : J(v) \in \mathbb{R}\} \neq \varnothing\ .$$

Seja $u \in D$ e $\delta < J(u)$. Então $(u,\ \delta) \notin epi(J)$. Mostremos que existe um funcional afim contínuo $B_u : V \to \mathbb{R}$ tal que $B_u(u) = \delta$ e $B_u < J$: $epi(J)$ é um convexo (Cf. Teorema 6.2.5) fechado (Cf. Teorema 6.3.17) não-vazio e $\{\ (u,\ \delta)\ \}$ é um convexo compacto. Resulta do teorema da separação forte que existe um hiperplano fechado separando fortemente esses dois conjuntos. Assim, existem $L : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\eta \in \mathbb{R}$ tais que

$$L((u,\ \delta)) < \eta < L((v,\ \lambda)),\ \ \forall\ (v,\ \lambda) \in epi(J)\,.$$

O Lema 6.1.1 mostra que existem $p \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$(p,\, u) + \alpha\delta < \eta < (p,\, v) + \alpha\lambda, \;\; \forall \;\, (v,\, \lambda) \in epi\,(J)\,. \tag{6.8}$$

Tomando $v = u$ e $\lambda > J\,(u)$, temos $(u,\, \lambda) \in epi\,(J)$, de modo que a desigualdade (6.9) mostra que

$$(p,\, u) + \alpha\delta < (p,\, u) + \alpha\lambda \;\Longrightarrow \alpha\,(\lambda - \delta) > 0\;.$$

Como $\lambda > J\,(u) > \delta$, temos $\alpha > 0$. Seja então

$$B_u\,(v) = \frac{1}{\alpha}\,(p,\, u - v) + \delta = \Big(-\frac{p}{\alpha},\, v\Big) + \Big(\delta + \frac{1}{\alpha}\,(p,\, u)\Big)\;.$$

Temos

$$-\frac{p}{\alpha} \in V \quad \text{ e } \;\; \delta + \frac{1}{\alpha}\,(p,\, w) \in \mathbb{R},$$

de modo que $B_u : V \to \mathbb{R}$ é um funcional afim e contínuo (Cf. proposição 6.4.4) tal que $B_u\,(u) = \delta$. Além disto, a desigualdade (6.9) mostra que

$$(v,\, \lambda) \in epi\,(J) \Longrightarrow B_u\,(v) < \lambda, \Longrightarrow B_u\,(v) < J\,(v)\;\;.$$

Para $v \notin D$, temos $J\,(v) = +\infty > B_u\,(v)$. Assim, $B_u\,(v) < J\,(v)$, $\forall\; v \in D$, isto é, $B_u < J$.

Se $x \in D$, basta tomar $A = B_x$. Suponhamos que $x \notin D$. Como $D \neq \varnothing$, existe $u \in D$. Consideremos $\delta < J\,(u)$. Seja $C = B_u$. Se $C\,(x) \geq \gamma$, tomamos $A\,(u) = C(u) - C\,(x) + \gamma$. Então $A\,(x) = \gamma$. Temos também $A \leq C = B_u < J$.

Se $C\,(x) < \gamma$: como $(x,\, \gamma) \notin epi\,(J)$, $epi\,(J)$ é um convexo (Cf. Teorema 6.2.5) fechado (Cf. Teorema 6.3.17) não vazio e $\{\; (x,\, \gamma)\;\}$ é um convexo compacto, uma nova aplicação do teorema da separação forte mostra que existe um hiperplano fechado separando fortemente estes dois conjuntos. Assim, existem $M : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\rho \in \mathbb{R}$ tais que

$$M\,((x,\, \gamma)) < \rho < M\,((v,\, \lambda))\,, \;\; \forall \;\, (v,\, \lambda) \in epi\,(J)\,.$$

e o Lema 6.1.1 mostra que também neste caso existem $q \in V$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(q,\, x) + \beta\gamma < \rho < (q,\, v) + \beta\lambda, \;\; \forall \;\, (v,\, \lambda) \in epi\,(J)\,. \tag{6.9}$$

Como $(u,\, J\,(u)) \in epi\,(J)$, temos, para todo $\lambda > J\,(u)$:

$$\rho < (q,\, v) + \beta\lambda.$$

Resulta que $\beta \geq 0$: se $\beta < 0$, o limite desta desigualdade para $\lambda \to +\infty$ mostra que $\rho = -\infty$, o que é absurdo, pois $\rho \in \mathbb{R}$.

Se $\beta > 0$, podemos tomar

$$A\,(v) = \frac{1}{\beta}\,(p,\, x - v) + \gamma = \Big(-\frac{p}{\beta},\, v\Big) + \Big(\gamma + \frac{1}{\beta}\,(p,\, u)\Big)\;.$$

A Eq. (6.9) mostra que

$$(v,\, \lambda) \in epi\,(J) \Longrightarrow A\,(v) < \lambda, \Longrightarrow A\,(v) < J\,(v)\ \ .$$

Para $v \notin D$, temos $J\,(v) = +\infty > A\,(v)$. Assim, $A\,(v) < J\,(v)$, $\forall\ v \in D$, isto é, $A < J$.

Se $\beta = 0$, a Eq. (6.9) se escreve

$$(q,\, x) < \rho < (q,\, v)\,,\ \ \forall\ \ (v,\, \lambda) \in epi\,(J)\,.$$

Assim, $\rho - (q,\, x) > 0$ e podemos tomar

$$A\,(v) = C\,(v) + \theta\,(\rho - (q,\, v)) \quad ; \quad \theta = \frac{\gamma - C\,(x)}{\rho - (q,\, x)} > 0$$

Temos então $A\,(x) = \gamma$. Além disto, $\rho - (q,\, v) < 0$ para todo $(v,\, \lambda) \in epi\,(J)$, de modo que

$$(v,\, \lambda) \in epi\,(J) \Longrightarrow A\,(v) < C\,(v) < J\,(v) \Longrightarrow A\,(v) < J\,(v)\ \ .$$

Para $v \notin D$, temos $J\,(v) = +\infty > A\,(v)$. Assim, $A\,(v) < J\,(v)$, $\forall\ v \in D$, isto é, $A < J$. ■

6.5 Convexificação e Regularização sci

Consideremos agora um funcional $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ arbitrário. Podemos definir o S-funcional associado ao conjunto $S = co\,(epi\,(J))$:

Definição 6.5.1 (convexificado)**.** *Seja* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *um funcional. O* convexificado $co\,(J)$ *de* J *é o S-funcional associado ao conjunto* $S = co\,(epi\,(J))$*, isto é,* $co\,(J) : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *é o funcional definido por*

$$co\,(J)\,(u) = \inf\ \ S\,(u)\ \ ,\ se S\,(u) \neq \varnothing \quad ;$$

$$co\,(J)\,(u) = +\infty\ ,\ se\ S\,(u) = \varnothing\ \ ,\ S\,(u) = \{\ \lambda \in \mathbb{R} : (u,\, \lambda) \in co\,(epi\,(J))\ \ \}\,.\blacksquare$$

Notemos que $co\,(J)$ pode ser interpretada em termos probabilísticos: seja μ uma probabilidade discreta e finita sobre $epi\,(J)$ tal que $\mu\,(\{\ (u_i,\, \lambda_i)\ \}) = \mu_i$, $i = 1,\, ...,\, n$. Então temos $\mu_i \geq 0$, $i = 1,\, ...,\, n$ e $\sum\limits_{i\,=\,1}^{n} \mu_i = 1$. Neste caso $E\,((U,\, \Lambda)) = \left(\sum\limits_{i\,=\,1}^{n} \mu_i u_i,\ \sum\limits_{i\,=\,1}^{n} \mu_i \lambda_i \right)$. Assim, $co\,(epi\,(J))$ é o conjunto formado pela médias de todas as probabilidades discretas e finitas definidas sobre $epi\,(J)$. Se J

é própria, podemos considerar uma probabilidade discreta e finita sobre V tal que $\mu(\{\ u_i\ \}) = \mu_i,\ i = 1,\ ...,\ n$. Neste caso, as médias da forma $E((U,\ J(U))) = \left(\sum_{i\,=\,1}^{n} \mu_i u_i,\ \sum_{i\,=\,1}^{n} \mu_i J(u_i)\right)$ podem ser utilizadas para definir $co(J)(u)$.

Também podemos definir o S-funcional associado ao conjunto $S = \overline{epi(J)}$:

Definição 6.5.2 (regularizado sci)**.** *Seja* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *um funcional. O* regularizado sci $\overline{J}$ *de* J *é o S-funcional associado ao conjunto* $S = \overline{epi(J)}$*, isto é,* $\overline{J} : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *é o funcional definido por*

$$\overline{J}(u) = \inf\ S(u)\ \ ,\ se\ S(u) \neq \varnothing \quad ;$$

$$\overline{J}(u) = +\infty\ ,\ se\ S(u) = \varnothing\ \ ,\ S(u) = \left\{\ \lambda \in \mathbb{R} : (u,\ \lambda) \in \overline{epi(J)}\ \right\}. \blacksquare$$

Enfim, podemos aplicar o mesmo procedimento ao conjunto $S = \overline{co}(epi(J))$:

Definição 6.5.3 (convexificado fechado)**.** *Seja* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *um funcional. O* convexificado fechado $\overline{co}(J)$ *de* J *é o S-funcional associado ao conjunto* $S = \overline{co}(epi(J))$*, isto é,* $\overline{co}(J) : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *é o funcional definido por*

$$\overline{co}(J)(u) = \inf\ S(u)\ \ ,\ se\ S(u) \neq \varnothing \quad ;$$

$$\overline{co}(J)(u) = +\infty\ ,\ se\ S(u) = \varnothing\ \ ,\ S(u) = \{\ \lambda \in \mathbb{R} : (u,\ \lambda) \in \overline{co}(epi(J))\ \}. \blacksquare$$

Temos

Teorema 6.5.4. *$co(J) : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é um funcional. Além disto*

(i) $epi(J) \subset co(epi(J)) \subset epi(co(J))$.

(ii) $(u,\ \lambda) \in epi(co(J))$ *e* $\lambda > co(J)(u) \Longrightarrow (u,\ \lambda) \in co(epi(J))$.

(iii) $co(J)$ *é convexo.*

(iv) *Se* $I : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *é um funcional tal que* $co(epi(J)) \subset epi(I)$ *então,* $I \leq co(J)$ *e* $epi(co(J)) \subset epi(I)$.

(v) *Se* $I : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *é um funcional convexo tal que* $epi(J) \subset epi(I)$ *então* $I \leq co(J)$ *e* $epi(co(J)) \subset epi(I)$.

(vi) $co(J) \leq J$.

(vii) *J é convexo se e somente se $J = co\,(J)$.*

(viii) $\inf\limits_V J = \inf\limits_V co\,(J)$.

(ix) $dom\,(co\,(J)) = \{\ u \in V :\ \ S\,(u) \neq \varnothing\ \},\ S\,(u) = \{\ \lambda \in \mathbb{R} : (u,\ \lambda) \in co\,(epi\,(J))\ \ \}$. ■

Teorema 6.5.5. *$co\,(J) : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é um funcional. Além disto*

(i) $epi\,(J) \subset \overline{epi\,(J)} = epi\left(\overline{J}\right)$.

(ii) *$\overline{J}$ é sci.*

(iii) *Se $I : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é um funcional tal que $\overline{epi\,(J)} \subset epi(I)$ então, $I \leq \overline{J}$ e $epi\left(\overline{J}\right) \subset epi\,(I)$.*

(iv) *Se $I : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é um funcional sci tal que $epi\,(J) \subset epi(I)$ então $I \leq \overline{J}$ e $epi\left(\overline{J}\right) \subset epi\,(I)$.*

(v) $\overline{J} \leq J$.

(vi) *J é sci se e somente se $J = \overline{J}$.*

(vii) $\inf\limits_V J = \inf\limits_V \overline{J}$.

(viii) *Para todo $u \in V$: $\overline{J}\,(u) = \min\{\ J\,(u)\,,\ \liminf\ \ J\,(u)\ \ \}$.*

(ix) $dom\left(\overline{J}\right) = \{\ u \in V :\ \ S\,(u) \neq \varnothing\ \},\ S\,(u) = \left\{\ \lambda \in \mathbb{R} : (u,\ \lambda) \in \overline{epi\,(J)}\ \right\}$. ■

Teorema 6.5.6. *$\overline{co}\,(J) : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é um funcional. Além disto*

(i) $epi\,(J) \subset \overline{co}\,(epi\,(J)) = epi\,(\overline{co}\,(J))$.

(ii) *$\overline{co}\,(J)$ é convexo sci.*

(iii) *Se $I : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é um funcional tal que $\overline{co}\,(epi\,(J)) \subset epi(I)$ então, por um lado, $I \leq \overline{co}\,(J)$ e, por outro lado, $epi\,(\overline{co}\,(J)) \subset epi\,(I)$.*

(iv) *Se $I : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é um funcional convexo sci tal que $epi\,(J) \subset epi(I)$ então $I \leq \overline{co}\,(J)$ e $epi\,(\overline{co}\,(J)) \subset epi\,(I)$.*

(v) $\overline{co}\,(J) \leq co\,(J) \leq J$ *e* $\overline{co}\,(J) \leq \overline{J} \leq J$.

(vi) *J é convexo sci se e somente se $J = \overline{co}\,(J)$.*

(vii) $\inf\limits_V J = \inf\limits_V \overline{co}\,(J)$.

(viii) $dom\,(\overline{co}\,(J)) = \{\ u \in V :\ S\,(u) \neq \varnothing\ \}$, $S\,(u) = \{\ \lambda \in \mathbb{R} : (u,\ \lambda) \in \overline{co}\,(epi\,(J))\ \}$. ■

prova do Teorema 6.5.4.

1) Da proposição 6.1.10, temos que $co\,(J)$ é um funcional.

2) Prova de (i): $epi\,(J) \subset co\,(epi\,(J))$ resulta da proposição 5.3.2. Da proposição 6.1.10.(i), temos $co\,(epi\,(J)) \subset epi\,(co\,(J))$.

3) Prova de (ii): Seja $(u,\ \lambda) \in epi\,(co\,(J))$ tal que $\lambda > co\,(J)\,(u)$. Seja

$$S\,(u) = \{\ \eta \in \mathbb{R} : (u,\ \eta) \in co\,(epi\,(J))\ \} .$$

A definição do funcional convexificado mostra que, por um lado $S\,(u) \neq \varnothing$, e por outro lado

$$\lambda > \inf\ S\,(u) .$$

Assim, existe $\eta \leq \lambda$ tal que $\eta \in S\,(u)$. Logo, $(u,\ \eta) \in co\,(epi\,(J))$, de maneira que existem u_1, ..., u_n elementos de V, η_1, ..., η_n reais e α_1, ..., α_n reais não negativos tais que

$$u = \sum_{i\,=\,1}^{n} \alpha_i u_i\ ,\ \eta = \sum_{i\,=\,1}^{n} \alpha_i \eta_i\ ,\ \sum_{i\,=\,1}^{n} \alpha_i = 1,\quad (u_i,\ \eta_i) \in epi\,(J)\,,\ \text{para } 1 \leq i \leq n.$$

Seja $\varepsilon = \lambda - \eta \geq 0$. Temos $\eta_i + \varepsilon \geq \eta_i$, de modo que $(u_i,\ \eta_i + \varepsilon) \in epi\,(J)$, para $1 \leq i \leq n$ (Cf. Lema 6.1.6). Logo, para $1 \leq i \leq n$,

$$u = \sum_{i\,=\,1}^{n} \alpha_i u_i\ ,\ \lambda = \sum_{i\,=\,1}^{n} \alpha_i\,(\eta_i + \varepsilon)\ ,\ \sum_{i\,=\,1}^{n} \alpha_i = 1,\quad (u_i,\ \eta_i + \varepsilon) \in epi\,(J)\,,$$

de modo que $(u,\ \lambda) \in co\,(epi\,(J))$.

4) (iii) e (iv) resultam da proposição 6.1.10.

5) Prova de (v): como I é convexo, $epi(I)$ é convexo (Cf. Teorema 6.2.5). Assim

$$epi\,(J) \subset epi(I) \Longrightarrow co\,(epi\,(J)) \subset epi(I),$$

pois $co\,(epi\,(J))$ é o menor convexo contendo $epi\,(J)$ (Cf. definição 5.3.1). Assim, podemos aplicar (iv), de onde o resultado.

6) Prova de (vi) : de (i), temos $epi\,(J) \subset epi\,(co\,(J))$. O resultado segue do Lema 6.1.4.

7) Prova de (vii) : Suponhamos J convexo e seja $u \in V$: (v) mostra que $J\,(u) \leq co\,(J)\,(u)$, enquanto que (vi) mostra que $co\,(J)\,(u) \leq J\,(u)$. Logo $co\,(J)\,(u) = J\,(u)$ para todo $u \in V$. A recíproca resulta de (iii).

8) Prova de (viii) : Seja $m = \inf\limits_{V} J$. Se $m = +\infty$, então $J\,(v) = +\infty$ para todo $v \in V$, de modo que $epi\,(J) = \varnothing$ e $co\,(J)\,(v) = +\infty$ para todo $v \in V$, o que implica o resultado.

Suponhamos agora que $m < +\infty$. (vi) mostra que $\inf\limits_{V} co\,(J) \leq m$. Logo, basta mostrar que $\inf\limits_{V} co\,(J) \geq m$.

Seja $(u,\, \lambda) \in co\,(epi\,(J))$: então existem u_1, ..., u_n elementos de V, λ_1, ..., λ_n reais e α_1, ..., α_n reais não negativos tais que

$$u = \sum_{i\,=\,1}^{n} \alpha_i u_i \ ,\ \lambda = \sum_{i\,=\,1}^{n} \alpha_i \lambda_i \ ,\ \sum_{i\,=\,1}^{n} \alpha_i = 1, \quad (u_i,\, \lambda_i) \in epi\,(J)\,,\ \text{para } 1 \leq i \leq n.$$

Temos então

$$\lambda_i \geq J\,(u_i) \geq m, \text{ para } 1 \leq i \leq n \Longrightarrow \lambda \geq m$$

de modo que

$$(u,\, \lambda) \in co\,(epi\,(J)) \Longrightarrow \lambda \geq m$$

e

$$\forall\ u \in V : \inf\ S\,(u) \geq m\ ;\ S\,(u) = \{\ \lambda \in \mathbb{R} : (u,\, \lambda) \in co\,(epi\,(J))\ \}\,.$$

Logo,

$$\forall\ u \in V : co\,(J)\,(u) \geq m\ \Longrightarrow\ \inf_{V} co\,(J) \geq m,$$

o que prova o resultado enunciado.

9) (ix) resulta da proposição 6.1.10.

■

prova do Teorema 6.5.5.

1) Da proposição 6.1.10, temos que $\overline{J}$ é um funcional.

2) Prova de (i): A proposição 4.3.13 mostra que $epi\,(J) \subset \overline{epi\,(J)}$.

Mostremos que $\overline{epi\,(J)} = epi\,(\overline{J})$. A proposição 6.1.10 mostra que $\overline{epi\,(J)} \subset epi\,(\overline{J})$, de modo que basta mostrar que $epi\,(\overline{J}) \subset \overline{epi\,(J)}$. Consideremos $(u,\, \lambda) \in epi\,(\overline{J})$. Então $\overline{J}\,(u) < +\infty$ (Cf. Lema 6.1.5), de modo que

$$S\,(u) = \left\{ \ \lambda \in \mathbb{R} : (u,\, \lambda) \in \overline{epi\,(J)} \ \right\} \neq \varnothing$$

e existe uma seqüência $\{(u_n,\, \lambda_n)\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset \overline{epi\,(J)}$ tal que $u_n \to u$ em V e $\lambda_n \to \lambda$ em $\mathbb{R}$. Como $\overline{epi\,(J)}$ é fechado (Cf. proposição 4.3.12), $(u,\, \lambda) \in \overline{epi\,(J)}$. Temos então $epi\,(\overline{J}) \subset \overline{epi\,(J)}$, o que prova o resultado enunciado.

3) (ii) e (iii) resultam da proposição 6.1.10 e do Teorema 6.3.17.

4) Prova de (iv): como I é sci, $epi(I)$ é fechado (Cf. Teorema 6.3.17). Assim

$$epi\,(J) \subset epi(I) \Longrightarrow \overline{epi\,(J)} \subset epi\,(I)\,,$$

pois $\overline{epi\,(J)}$ é o menor fechado contendo $epi\,(J)$ (Cf. definição 4.3.11). Assim, $epi\,(\overline{J}) \subset epi\,(I)$ e podemos aplicar (iii), de onde o resultado.

5) Prova de (v): $epi\,(J) \subset \overline{epi\,(J)} = epi\,(\overline{J})$, de modo que o Lema 6.1.4 mostra o resultado.

6) Prova de (vi) : Suponhamos J sci: então $epi\,(J)$ é fechado (Cf. Teorema 6.3.17), de modo que $epi\,(J) = \overline{epi\,(J)}$ (Cf. proposição 4.3.12). Temos então $epi\,(\overline{J}) \subset epi\,(J)$, de modo que $J\,(u) \leq \overline{J}\,(u)$ para todo $u \in V$ (Cf. Lema 6.1.4). Ora, (v) mostra que $\overline{J}\,(u) \leq J\,(u)$. Logo $\overline{J}\,(u) = J\,(u)$ para todo $u \in V$. A recíproca resulta de (ii).

7) Prova de (vii) : Seja $m = \inf\limits_V J$. Se $m = +\infty$, então $J\,(v) = +\infty$ para todo $v \in V$, de modo que $epi\,(J) = \varnothing$ e $\overline{J}\,(v) = +\infty$ para todo $v \in V$, o que implica o resultado.

Suponhamos $m < +\infty$. (v) mostra que $\inf\limits_V \overline{J} \leq m$. Logo, basta mostrar que $\inf\limits_V \overline{J} \geq m$. Seja $\{(u_n,\, \lambda_n)\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset epi\,(J)$ tal que $u_n \to u$ em V e $\lambda_n \to \lambda$ em $\mathbb{R}$. Temos

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : \lambda_n \geq J\,(u_n) \geq m\ .$$

Assim, passando ao limite para $n \to +\infty$, resulta que $\lambda \geq m$. Por conseguinte,

$$\forall\ u \in V : \inf\ S\,(u) \geq m\ .$$

Logo,

$$\forall\ u \in V : \overline{J}\,(u) \geq m \implies \inf\limits_V \overline{J} \geq m,$$

o que prova o resultado enunciado.

8) Prova de (viii): Temos $\overline{J}(u) \leq J(u)$, para todo $u \in V$ (Cf. (v)), de modo que, para todo $u \in V$,

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \inf\left\{\ \overline{J}(v) : v \in B^0_\varepsilon(u)\right\} \ \leq\ \inf\left\{\ J(v) : v \in B^0_\varepsilon(u)\right\}$$

e

$$\sup\left\{\ \inf\left\{\ \overline{J}(v) : v \in B^0_\varepsilon(u)\right\}\ :\ \varepsilon > 0\ \right\} \leq \sup\left\{\ \inf\left\{\ J(v) : v \in B^0_\varepsilon(u)\right\}\ :\ \varepsilon > 0\ \right\}.$$

Assim,

$$\overline{J}(u) = \liminf\ \overline{J}(u) \leq \liminf\ J(u)\,.$$

e, utilizando (v) novamente,

$$\overline{J}(u) \leq \min\{\ J(u)\,,\ \liminf\ J(u)\ \}$$

Seja $m = \min\{\ J(u)\,,\ \liminf\ J(u)\ \}$. Temos então $\overline{J}(u) \leq m$.

Se $m = -\infty$, a desigualdade $\overline{J}(u) \leq m$ implica $\overline{J}(u) = -\infty = m$.

Se $m = +\infty$, então $J(u) = +\infty$, de modo que $S(u) = \varnothing$ e $\overline{J}(u) = +\infty = m$.

Suponhamos $m \in \mathbb{R}$: então a desigualdade $\overline{J}(u) \leq m$ mostra que $\overline{J}(u) \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$. Se $\overline{J}(u) < m$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{J}(u) < \lambda < m$. Logo, $(\ u,\, \lambda) \in epi\left(\overline{J}\right) = \overline{epi\,(J)}$, de maneira que existe uma seqüência $\{(u_n,\, \lambda_n)\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset epi\,(J)$ tal que $u_n \to u$ em V e $\lambda_n \to \lambda$ em $\mathbb{R}$. Assim,

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : (u_n,\, \lambda_n) \in epi\,(J) \Longrightarrow \lambda_n \geq J(u_n)\ \ .$$

Resulta da proposição 6.3.4.(vi) que

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : \lambda_n \geq m \Longrightarrow \lambda \geq m.$$

Temos então $\lambda < m \leq \lambda$, o que é absurdo. Logo, $\overline{J}(u) \geq m$ e, como $\overline{J}(u) \leq m$, temos também neste caso $\overline{J}(u) = m$.

9) (ix) resulta da proposição 6.1.10.

■

prova do Teorema 6.5.6.

1) Da proposição 6.1.10, temos que $\overline{co}\,(J)$ é um funcional.

2) Prova de (i): A proposição 5.3.6 mostra que $epi\,(J) \subset \overline{co}\,(epi\,(J))$.

Mostremos que $\overline{co}\,(epi\,(J)) = epi\,(\overline{co}\,(J))$. Para $u \in V$, seja

$$S(u) = \{\ \lambda \in \mathbb{R} : (u,\, \lambda) \in \overline{co}\,(epi\,(J))\ \}\,.$$

Temos

$$(u,\,\lambda) \in \overline{co}\,(epi\,(J)) \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) \Leftrightarrow (u,\,\lambda) \in \{u\} \times S\,(u)\,.$$

Assim

$$\overline{co}\,(J)\,(u) = +\infty \Longleftrightarrow S\,(u) = \varnothing \Longleftrightarrow \overline{co}\,(epi\,(J)) \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \varnothing\ . \quad (6.10)$$

Suponhamos que $\overline{co}\,(J)\,(u) = -\infty$. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$: como $\overline{co}\,(J)\,(u) = \inf S\,(u) = -\infty$, existe $\eta < \lambda$ tal que $\eta \in S\,(u)$. Assim, existe uma seqüência $\{(u_n,\,\eta_n)\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset co\,(epi\,(J))$ tal que $u_n \to u$ em V e $\eta_n \to \eta$ em $\mathbb{R}$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\eta < \eta + \varepsilon < \lambda$. A convergência mostra que existe $k > 0$ tal que

$$\|\ u_k - u\ \| \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad |\ \eta_k - \eta\ | \leq \varepsilon\ .$$

Temos então $\eta_k \leq \eta + \varepsilon < \lambda$. Por outro lado, $(u_k,\,\eta_k) \in co\,(epi\,(J))$, de modo que existem $u_{k,1}$, ..., $u_{k,m}$ elementos de V, $\eta_{k,1}$, ..., $\eta_{k,m}$ reais e $\alpha_{k,1}$, ..., $\alpha_{k,n}$ reais não negativos tais que, para $1 \leq i \leq m$,

$$u_k = \sum_{i\,=\,1}^{m} \alpha_{i,k} u_{i,k}\ ,\ \eta = \sum_{i\,=\,1}^{m} \alpha_{i,k} \eta_{i,k}\ ,\ \sum_{i\,=\,1}^{m} \alpha_{i,k} = 1, \ \ (u_{i,k},\,\eta_{i,k}) \in epi\,(J)\,.$$

Seja $\delta = \lambda - \eta_k \geq 0$. Temos $\eta_{i,k} + \delta \geq \eta_{i,k}$, de modo que $(u_{i,k},\,\eta_{i,k} + \delta) \in epi\,(J)$, para $1 \leq i \leq m$ (Cf. Lema 6.1.6). Logo,

$$u_k = \sum_{i\,=\,1}^{m} \alpha_{i,k} u_{i,k}\ ,\ \lambda = \sum_{i\,=\,1}^{m} \alpha_{i,k}\,(\eta_{i,k} + \delta)\ \ ,\ \sum_{i\,=\,1}^{m} \alpha_{i,k} = 1,$$

$$(u_{i,k},\,\eta_{i,k} + \delta) \in epi\,(J)\,, \text{ para } 1 \leq i \leq m,$$

de modo que $(u_k,\,\lambda) \in co\,(epi\,(J)) \subset \overline{co}\,(epi\,(J))$. Temos então $\lambda \in S\,(u)$: como λ é arbitrário, isto implica que $S\,(u) = \mathbb{R}$. Assim,

$$\overline{co}\,(J)\,(u) = -\infty \Longleftrightarrow S\,(u) = \mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{co}\,(epi\,(J)) \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}\ . \quad (6.11)$$

Suponhamos que $\overline{co}\,(J)\,(u) = a \in \mathbb{R}$. Então $\lambda \in S\,(u) \Longrightarrow \lambda \geq a$, de modo que $S\,(u) \subset [a,\ +\infty[$.

Mostremos que $[a,\ +\infty[\ \subset S\,(u)$: seja $\lambda \in [a,\ +\infty[$.

Se $\lambda > a$, então a igualdade $\overline{co}\,(J)\,(u) = \inf\ S\,(u) = a$ implica a existência de $\eta < \lambda$ tal que $\eta \in S\,(u)$. Como na situação precedente, existe uma seqüência $\{(u_n,\,\eta_n)\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset co\,(epi\,(J))$ tal que $u_n \to u$ em V e $\eta_n \to \eta$ em $\mathbb{R}$ e, para $\varepsilon > 0$ tal que $\eta < \eta + \varepsilon < \lambda$, existe um índice k tal que $\eta_k \leq \eta + \varepsilon < \lambda$. Da mesma maneira, $(u_k,\,\lambda) \in co\,(epi\,(J)) \subset \overline{co}\,(epi\,(J))$ e temos $\lambda \in S\,(u)$.

Se $\lambda = a$, então - dado que $\overline{co}\,(J)\,(u) = a$ - existe uma seqüência $\{\ \lambda_n\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset S\,(u)$ tal que $\lambda_n \to a$ em $\mathbb{R}$. Assim, $(u,\,\lambda_n) \in \overline{co}\,(epi\,(J))$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $\{(u_n,\, \lambda_n)\ \}_{n\, \in\, \mathbb{N}}$, onde $u_n = u$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos $\{(u_n,\, \eta_n)\ \}_{n\, \in\, \mathbb{N}} \subset \overline{co}\,(epi\,(J))$, $u_n \to u$ em V e $\lambda_n \to a$ em $\mathbb{R}$. Como $\overline{co}\,(epi\,(J))$ é fechado, resulta que $(u,\, a) \in \overline{co}\,(epi\,(J))$ e, por conseguinte, $a \in S\,(u)$.

Assim,

$$\overline{co}\,(J)\,(u) = a \Longleftrightarrow S\,(u) = [a,\ +\infty[\ \Longleftrightarrow \overline{co}\,(epi\,(J)) \cap (\{u\} \times \mathbb{R}) = [a,\ +\infty[\ . \tag{6.12}$$

As equações (6.10), (6.11) e (6.12) mostram que $\overline{co}\,(epi\,(J)) = epi\,(\overline{co}\,(J))$ (Cf. Lema 6.1.8).

3) (ii) e (iii) resultam da proposição 6.1.10 e do Teorema 6.3.17. Por exemplo, $\overline{co}\,(J)$ é sci pois $epi\,(\overline{co}\,(J)) = \overline{co}\,(epi\,(J))$ é fechado.

4) Prova de (iv): como I é convexo e sci, $epi(I)$ é convexo (Cf. Teorema 6.2.5) e fechado (Cf. Teorema 6.3.17). Assim

$$epi\,(J) \subset epi(I) \Longrightarrow \overline{co}\,(epi\,(J)) \subset epi\,(I)\,,$$

pois $\overline{co}\,(epi\,(J))$ é o menor convexo fechado contendo $epi\,(J)$ (Cf. definição 5.3.5). Logo, podemos aplicar (iii), de onde o resultado.

5) Prova de (v): $co\,(epi\,(J)) \subset \overline{co}\,(epi\,(J)) = epi\,(\overline{co}\,(J))$, de modo que o Teorema 6.5.4.(iv) mostra que $\overline{co}\,(J) \leq co\,(J)$. Do mesmo teorema, (vi) mostra que $co\,(J) \leq J$. Por outro lado, $epi\,(J) \subset \overline{co}\,(epi\,(J))$ (Cf. proposição 5.3.6), de modo que $\overline{co}\,(epi\,(J))$ é um fechado contendo $epi\,(J)$. Resulta que $\overline{epi\,(J)} \subset \overline{co}\,(epi\,(J))$, pois $\overline{epi\,(J)}$ é o menor fechado contendo $epi\,(J)$ (Cf. definição 4.3.11). Assim, $epi\left(\overline{J}\right) \subset epi\,(\overline{co}\,(J))$, de modo que $\overline{co}\,(J) \leq \overline{J}$ (Cf. Lema 6.1.4).

6) Prova de (vi) : Suponhamos J convexo e $epi\,(J)$ fechado. Seja $u \in V$: (iv) mostra que $J\,(u) \leq \overline{co}\,(J)\,(u)$, enquanto que (v) mostra que $\overline{co}\,(J)\,(u) \leq J\,(u)$. Logo $\overline{co}\,(J)\,(u) = J\,(u)$ para todo $u \in V$. A recíproca resulta de (ii).

7) Prova de (vii) : Seja $m = \inf\limits_{V} J$. Se $m = +\infty$, então $J\,(v) = +\infty$ para todo $v \in V$, de modo que $epi\,(J) = \varnothing$ e $co\,(J)\,(v) = +\infty$ para todo $v \in V$, o que implica o resultado.

Suponhamos agora que $m < +\infty$. (v) mostra que $\inf\limits_{V} \overline{co}\,(J) \leq m$. Logo, basta mostrar que $\inf\limits_{V} \overline{co}\,(J) \geq m$. Seja $\{(u_n,\, \lambda_n)\ \}_{n\, \in\, \mathbb{N}} \subset co\,(epi\,(J))$ tal que $u_n \to u$ em V e $\lambda_n \to \lambda$ em $\mathbb{R}$. Temos (Cf. prova de (viii) no Teorema 6.5.4):

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : (u_n,\, \lambda_n) \in co\,(epi\,(J)) \Longrightarrow \lambda_n \geq m\ .$$

Assim, passando ao limite para $n \to +\infty$, reulta que $\lambda \geq m$. Por conseguinte,

$$\forall\ u \in V : \inf\ S(u) \geq m\ .$$

Logo,

$$\forall\ u \in V : \overline{co}(J)(u) \geq m \implies \inf_V \overline{co}(J) \geq m,$$

o que prova o resultado enunciado.

8) (viii) resulta da proposição 6.1.10.

■

6.6 Funcionais Conjugados

Consideremos um funcional $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ arbitrário.

Definição 6.6.1. *Seja* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *um funcional. O* funcional conjugado (dual, polar) *de* J *é* $J^* : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *dado por*

$$J^*(p) = \sup\{\ (\ p,\ x\ ) - J(x) : x \in V\ \}\ .$$

O funcional biconjugado (bidual, bipolar) *de* J *é* $J^{**} : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *dado por* $J^{**} = (J^*)^*$ *, isto é,*

$$J^{**}(x) = \sup\{\ (\ p,\ x\ ) - J^*(p) : p \in V\ \}\ . \ ■$$

Temos:

Proposição 6.6.2. *Sejam* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *um funcional e* $\Pi : V \to V'$ *a isometria de Riesz . Então*

$$J^*(p) = \sup\{\ \Pi(p)(x) - J(x) : x \in V\ \}\ ;$$

$$J^{**}(x) = \sup\{\ \Pi(p)(x) - J(x) : p \in V\ \} = \sup\{\ \ell(x) - J(x) : \ell \in V'\ \}\ . \ ■$$

Prova. Como $(\ p,\ x\ ) = \Pi(p)(x)$, temos

$$J^*(p) = \sup\{\ \Pi(p)(x) - J(x) : x \in V\ \}\ ;\ J^{**}(x) = \sup\{\ \Pi(p)(x) - J(x) : p \in V\ \}\ .$$

Além disto $\Pi : V \to V'$ é uma bijeção, de modo que $V' = \Pi(V) = \{\ \Pi(p) : p \in V\ \}$. Assim,

$$J^{**}(x) = \sup\{\ \ell(x) - J(x) : \ell \in V'\ \}$$

e temos o resultado enunciado. ■

Proposição 6.6.3. *Seja* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *um funcional. Então*

(i) *Se* $I : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *um minorante de* J*, então* $J^* \leq I^*$*;*

(ii) *Se existe* $x \in V$ *tal que* $J(x) = -\infty$*, então* $J^* = +\infty$ *;*

(iii) *Se existe* $p \in V$ *tal que* $J^*(p) = -\infty$*, então* $J = +\infty$ *;*

(iv) $J = +\infty$ *se e somente se* $J^* = -\infty$*.*

(v) *Se existe* $p \in V$ *tal que* $J^*(p) > -\infty$*, então* $J^*(q) > -\infty$ *para todo* $q \in V$ *e existe* $x \in V$ *tal que* $J(x) < +\infty$*.*

(vi) J^* *é convexo sci.*

(vii) *Se* $J(x) = \inf\{J_\lambda(x) : \lambda \in \Lambda\}$*, então* $J^*(p) = \sup\{J^*_\lambda(p) : \lambda \in \Lambda\}$*.*

(viii) *Se* $J(x) = \sup\{J_\lambda(x) : \lambda \in \Lambda\}$*, então* $J^*(p) \leq \inf\{J^*_\lambda(p) : \lambda \in \Lambda\}$*.*

(ix) *Se* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $I(x) = J(\lambda x)$ *então* $I^*(p) = J^*\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)$*.*

(x) *Se* $\lambda > 0$ *e* $I(x) = \lambda J(x)$ *então* $I^*(p) = \lambda J^*\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)$ *.*

(xi) *Se* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $I(x) = J(x) + \lambda$ *então* $I^*(p) = J^*(p) - \lambda$*.*

(xii) *Se* $x \in V$ *verifica* $J(x) \in \mathbb{R}$ *ou* $J^*(p) \in \mathbb{R}$*, então* $(p, x) \leq J(x) + J^*(p)$ *;*

(xiii) $\inf\limits_V J = -J^*(0)$ *.*

(xiv) $I^* + J^* = (I \,\square\, J)^*$*,* $(I \,\square\, J)(x) = \inf\{I(y) + J(x-y) : y \in V\}$*.* $(I \,\square\, J)$ *é a inf-convolution entre* I *e* J*.* ■

Prova.

(i) Seja I um minorante de J. Então, para todo $p \in V$:

$$\forall\, x \in V \;:\; (p, x) - J(x) \geq (p, x) - I(x),$$

de modo que

$$\sup\{(p, x) - J(x) : x \in V\} \geq \sup\{(p, x) - I(x) : x \in V\}$$

e

$$\forall\, p \in V \;:\; J^*(p) \geq I^*(p) \;.$$

(ii) Temos, para todo $p \in V$:

$$(p, x) - J(x) = (p, x) - (-\infty) = +\infty,$$

de modo que

$$\sup \{ (p, x) - J(x) : x \in V \} = +\infty$$

e

$$\forall\, p \in V \ : J^* (p) = +\infty \ .$$

(iii) Temos

$$\sup \{ (p, x) - J(x) : x \in V \} = -\infty \ .$$

Assim,

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ : \sup \{ (p, x) - J(x) : x \in V \} < -n \ .$$

Logo,

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ : (p, x) - J(x) \ < -n \text{ para todo } x \in V,$$

isto é,

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ : (p, x) + n \ < J(x) \text{ para todo } x \in V.$$

Para $n \to +\infty$, resulta $J(x) = +\infty$ para todo $x \in V$.

(iv) Seja $J = +\infty$. Então, para todo $p \in V$:

$$\forall\, x \in V \ : (p, x) - J(x) = (p, x) - (+\infty) = -\infty,$$

de modo que

$$\sup \{ (p, x) - J(x) : x \in V \} = -\infty \ .$$

e

$$\forall\, p \in V \ : J^* (p) = -\infty \ .$$

Seja $J^* = -\infty$. Então $J^*(0) = -\infty$ e o resultado decorre de (iii).

(v) Se existe $q \in V$ tal que $J^*(q) = -\infty$, (iii) mostra que $J = +\infty$ e (iv) mostra que $J^* = -\infty$, de modo que $J^*(p) = -\infty$, o que é absurdo, pois $J^*(p) \in \mathbb{R}$. De maneira análoga, se $J = +\infty$, (iv) mostra que $J^* = -\infty$ e temos a mesma contradição.

(vi) Seja

$$L(x; p) = (p, x) - J(x) \,. \tag{6.13}$$

Então $J_x : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é convexo sci para todo $x \in V$. Como

$$J^*(p) = \sup_{x \in V} L(x; p) \ , \tag{6.14}$$

o resultado decorre das proposições 6.2.4 e 6.3.16.

(vii) Neste caso, a Eq. (6.13) se escreve

$$L(x;p) = (\ p,\ x\ )\ \ -\ \inf_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda(x)$$

isto é,

$$L(x;p) = (\ p,\ x\ )\ \ +\ \sup_{\lambda\in\Lambda}(-J_\lambda(x))\ .$$

Logo,

$$L(x;p)\ \ =\ \sup_{\lambda\in\Lambda}((\ p,\ x\ ) - J_\lambda(x))\ .$$

Seja

$$L(x;p\ ;\lambda) = (\ p,\ x\ ) - J_\lambda(x)\,. \tag{6.15}$$

Então

$$J_\lambda^*(p)\ \ =\ \sup_{x\in V} L(x;p\ ;\lambda)\quad \text{e}\quad L(x;p)\ \ =\ \sup_{\lambda\in\Lambda} L(x;p\ ;\lambda)\ .$$

Assim, a Eq. (6.14) se escreve

$$J^*(p)\ \ =\ \sup_{x\in V}\ \sup_{\lambda\in\Lambda} L(x;p\ ;\lambda) = \sup_{\lambda\in\Lambda}\ \sup_{x\in V} L(x;p\ ;\lambda)\ \ =\ \sup_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda^*(p)\ .$$

(viii) Neste caso, a Eq. (6.13) se escreve

$$L(x;p) = (\ p,\ x\ )\ \ -\ \sup_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda(x)$$

isto é,

$$L(x;p) = (\ p,\ x\ )\ \ -\ \inf_{\lambda\in\Lambda}(-J_\lambda(x))\ .$$

Logo,

$$L(x;p)\ \ =\ \inf_{\lambda\in\Lambda} L(x;p\ ;\lambda)\ .$$

Assim, a Eq. (6.14) se escreve

$$J^*(p)\ \ =\ \sup_{x\in V}\ \inf_{\lambda\in\Lambda} L(x;p\ ;\lambda)\ .$$

Ora,

$$\forall\ x\in V\ \ :\ \inf_{\lambda\in\Lambda} L(x;p\ ;\lambda) \le L(x;p\ ;\lambda)\,,$$

de modo que

$$\sup_{x\in V}\ \inf_{\lambda\in\Lambda} L(x;p\ ;\lambda)\ \ \le\ \sup_{x\in V} L(x;p\ ;\lambda)$$

e

$$J^*(p) = \sup_{x\in V}\ \inf_{\lambda\in\Lambda} L(x;p\ ;\lambda)\ \ \le\ \inf_{\lambda\in\Lambda}\ \sup_{x\in V} L(x;p\ ;\lambda) = \inf_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda^*(p)\ .$$

(ix) Neste caso,

$$I^* (p) = \sup \{ \ (p, x) - J (\lambda x) : x \in V \ \} \ .$$

Assim, utilizando $y = \lambda x$

$$I^* (p) = \sup \left\{ \ \left(p, \frac{y}{\lambda} \right) - J (y) : y \in V \ \right\} \ ,$$

isto é,

$$I^* (p) = \sup \left\{ \ \left(\frac{p}{\lambda}, y \right) - J (y) : y \in V \ \right\} = J^* \left(\frac{p}{\lambda} \right) \ .$$

(x) Neste caso,

$$I^* (p) = \sup \{ \ (p, x) - \lambda J (x) : x \in V \ \} \ .$$

Assim, como $\lambda > 0$

$$I^* (p) = \lambda \sup \left\{ \ \left(\frac{p}{\lambda}, y \right) - J (y) : y \in V \ \right\} = \lambda J^* \left(\frac{p}{\lambda} \right) \ .$$

(xi) Neste caso,

$$I^* (p) = \sup \{ \ (p, x) - J (x) - \lambda : x \in V \ \} \ .$$

Assim, como $\lambda > 0$

$$I^* (p) = \sup \{ \ (p, y) - J (y) : y \in V \ \} - \lambda = J^* (p) - \lambda \ .$$

(xii) Basta notar que

$$J^* (p) = \sup \{ \ (p, y) - J (y) : y \in V \ \} \geq (p, x) - J (x) \ .$$

Se $J (x) \in \mathbb{R}$ ou $J^* (p) \in \mathbb{R}$, então $J^* (p) + J (x)$ tem sentido e temos o resultado enunciado.

(xiii) Temos

$$J^* (0) = \sup \{ -J (x) : x \in V \ \} = - \inf \{ J (x) : x \in V \ \} \ ,$$

de onde o resultado enunciado.

(xiv) Seja $H = (I \,\Box\, J)$. Temos

$$H^*(p) = \sup\{\ (\ p,\ x\ ) - \inf\{\ I(y) + J(x-y) : y \in V\} : x \in V\ \}\ ,$$

de modo que

$$H^*(p) = \sup\{\ (\ p,\ x\ ) -\ I(y) - J(x-y) : y \in V\ ,\ x \in V\ \}\ ,$$

isto é,

$$H^*(p) = \ \sup\{\ (\ p,\ y\ ) -\ I(y) + (\ p,\ x-y\ ) - J(x-y) : y \in V\ ,\ x \in V\ \}\ ,$$

ou seja

$$H^*(p) = \ \sup\{\ (\ p,\ y\ ) -\ I(y) + \sup\{\ (\ p,\ x-y\ ) - J(x-y) : x \in V\ \},\ y \in V\ \}\ .$$

Ora,

$$\sup\{\ (\ p,\ x-y\ ) - J(x-y) : x \in V\ \} = \sup\{\ (\ p,\ z\ ) - J(z) : z \in V\ \} = J^*(p)\ ,$$

de modo que

$$\begin{aligned} H^*(p) &= \sup\{\ (\ p,\ y\ ) -\ I(y) + J^*(p)\,,\ y \in V\ \} \\ &= \sup\{\ (\ p,\ y\ ) -\ I(y)\,,\ y \in V\ \} + J^*(p)\ . \end{aligned}$$

Assim, $H^*(p) = I^*(p) + J^*(p)$.

■

Proposição 6.6.4. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. Então*

(i) $J^{**} \leq J$ *;*

(ii) *Seja $\mathcal{A}(J) = \{\ A : V \to \mathbb{R}$ afim contínua e $A \leq J\ \}$. Então*

$$J^{**}(x) = \sup\{\ A(x) : A \in \mathcal{A}(J)\}\,,\ \ se\ \mathcal{A}(J) \neq \varnothing\quad ;\quad J^{**}(x) = -\infty,\ \ se\ \mathcal{A}(J) = \varnothing\quad .$$

(iii) J^{**} *é convexo sci ;*

(iv) $J^{***} = J^*$.

(v) *Se I e J são convexos sci e próprios então $(I+J)^* = (I^* \Box J^*)^{**}$* .■

Prova.

(i) Temos
$$J^*(p) = \sup\{ \ (\ p,\ x\ ) - J(x) : x \in V\ \} \ .$$

Assim,

$$\forall\ x \in V\ \ : (\ p,\ x\ ) - J(x) \leq J^*(p) \Longrightarrow \ \ (\ p,\ x\ ) - J^*(p) \leq J(x)\,.$$

Logo,
$$\forall\ x \in V\ \ :\ \ \sup\{ \ (\ p,\ x\ ) - J^*(p) : p \in V\ \} \leq J(x)\,,$$
isto é, $J^{**} \leq J$.

(ii) Notemos inicialmente que o Corolário 6.4.4 mostra que toda função $A : V \to \mathbb{R}$ afim e contínua é da forma $A(v) = (p,\ v) + \alpha$, com $p \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\mathcal{A}(J) = \{\ A : V \to \mathbb{R}\ \ :\ A(x) = (p,\ x) + \alpha,\ p \in V,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \ \text{e}\ A \leq J\ \}\,.$$

Seja

$$s(x) = \sup\{\ A(x) : A \in \mathcal{A}(J)\}\,,\ \ \text{se}\ \mathcal{A}(J) \neq \varnothing\ \ ;\ \ \ s(x) = -\infty,\ \ \text{se}\ \mathcal{A}(J) = \varnothing\ \ .$$

a) Se $J^* = -\infty$: então $J = +\infty$ (Cf. proposição 6.6.3.(iv)). Assim

$$\mathcal{A}(J) = \{\ A : V \to \mathbb{R}\ \ :\ A(x) = (p,\ x) + \alpha,\ p \in V,\ \alpha \in \mathbb{R}\ \}\ \ .$$

Então, tomando $p = 0$, temos

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{R} : s(x) \geq \alpha \Longrightarrow s(x) = +\infty.$$

Por outro lado, $J^{**} = (J^*)^* = +\infty$ (Cf. proposição 6.6.3.(iii)). Assim, $s(x) = J^{**}(x)$ para todo $x \in V$.

b) Se $J^* = +\infty$: neste caso, $J^{**} = (J^*)^* = -\infty$ (Cf. proposição 6.6.3.(iv)). Além disto,

$$\forall\ p \in V : \sup\{\ \ (\ p,\ x\ ) - J(x) : x \in V\ \} = +\infty\ .$$

Assim, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, existe $x_{\alpha,p} \in V$ tal que

$$(\ p,\ x_{\alpha,p}\ ) - J(x_{\alpha,p}) > -\alpha \Longrightarrow (\ p,\ x_{\alpha,p}\ ) + \alpha > J(x_{\alpha,p})\ \ ,$$

de modo que $\mathcal{A}(J) = \varnothing$ e $s(x) = J^{**}(x)$ para todo $x \in V$.

c) Se existe $p \in V$ tal que $J^*(p) \in \mathbb{R}$. Neste caso, $J^*(p) > -\infty$ para todo $p \in V$ (Cf. proposição 6.6.3.(v)). Resulta que

$$J^{**}(x) = \sup\{\ \ (\ p,\ x\ ) - J^*(p) : p \in V\ \ \text{e}\ J^*(p) < +\infty\ \}\ \ .$$

Ora, por um lado, para todo $p \in V$ tal que $J^*(p) < +\infty$, $A(y) = (\ p, y\ ) - J^*(p)$ define um elemento de $\mathcal{A}(J)$, pois

$$\forall\ y \in V : J^*(p) \geq (\ p, y\ ) - J(y)\ .$$

Assim,

$$\sup\{\ (\ p, x\ ) - J^*(p) : p \in V \ \text{ e } J^*(p) < +\infty\ \} \leq s(x)\ ,$$

e temos $J^{**}(x) \leq s(x)$. Por outro lado, se $A \in \mathcal{A}(J)$ e $A(x) = (p,\ x) + \alpha$, então

$$\forall\ x \in V : (p,\ x) + \alpha \leq J(x) \implies (p,\ x) - J(x) \leq -\alpha$$

Assim,

$$J^*(p) \leq -\alpha$$

de modo que $J^*(p) < +\infty$ e

$$\forall\ x \in V : (p,\ x) + \alpha \leq (p,\ x) - J^*(p) \leq J^{**}(x)\ .$$

Logo, $s(x) \leq J^{**}(x)$. Assim, $s(x) = J^{**}(x)$ para todo $x \in V$ também neste caso.

(iii) Como $J^{**} = (J^*)^*$, o resultado decorre da proposição 6.6.3.(vi).

(iv) Temos $J^{***} = (J^*)^{**}$, de modo que (i) mostra que $J^{***} \leq J^*$. Por outro lado, (i) implica também $J^{***} \geq J^*$ (Cf. proposição 6.6.3.(i)). Logo, $J^{***} = J^*$.

(v) Decorre da proposição 6.6.3 que $(I^* \Box J^*)^* = I^{**} + J^{**} = I + J$. Logo, $(I + J)^* = (I^* \Box J^*)^{**}$.

■

O resultado seguinte é extremamente útil:

Teorema 6.6.5. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. Então $J^{**} = \overline{co}(J)$. Por conseguinte, $J = J^{**}$se e somente se J é convexo sci.* ■

Prova. Temos $J^{**} \leq J$ (Cf. 6.6.4).Como J^{**} é convexo sci, resulta da proposição 6.5.6 que $J^{**} \leq \overline{co}(J)$.

Mostremos que $epi(J^{**}) \subset \overline{co}(epi(J)) = epi(\overline{co}(J))$ (Cf. proposição 6.5.6). Suponhamos que existe $(\ x, \lambda\ ) \in epi(J^{**})$ tal que $(\ x, \lambda\ ) \notin \overline{co}(epi(J))$. Então $J^{**}(x) < \lambda < \overline{co}(J)(x)$.

a) Se $\overline{co}\,(epi\,(J)) = \varnothing$, então

$$\forall\ u \in V : S\,(u) = \{\ \lambda \in \mathbb{R} : (u,\,\lambda) \in \overline{co}\,(epi\,(J))\ \} = \varnothing,$$

de modo que $\overline{co}\,(J) = +\infty$. Além disto, $epi\,(J) \subset \overline{co}\,(epi\,(J))$, de maneira que

$$\forall\ u \in V : T\,(u) = \{\ \lambda \in \mathbb{R} : (u,\,\lambda) \in epi\,(J)\ \} = \varnothing$$

e, por conseguinte, $J = +\infty$. Temos então $J^{**} = +\infty = \overline{co}\,(J)$. Mas então $epi\,(J^{**}) = \varnothing$ e $(\ x,\,\lambda\ ) \in epi\,(J^{**})$, o que é absurdo.

b) Assim, $\overline{co}\,(epi\,(J)) \neq \varnothing$ e existe $u \in V$ tal que $\overline{co}\,(J)\,(u) < +\infty$. Suponhamos que

$$\nexists\ u \in V \ \text{ tal que } \overline{co}\,(J)\,(u) \in \mathbb{R}\ .$$

Então $\overline{co}\,(J) = -\infty$ e $\overline{co}\,(epi\,(J)) = epi\,(\overline{co}\,(J)) = V \times \mathbb{R}$. Mas então $(\ x,\,\lambda\ ) \in \overline{co}\,(epi\,(J))$. Temos então $(\ x,\,\lambda\ ) \in \overline{co}\,(epi\,(J))$ e $(\ x,\,\lambda\ ) \notin \overline{co}\,(epi\,(J))$, o que é absurdo.

c) Assim, existe $u \in V$ tal que $\overline{co}\,(J)\,(u) \in \mathbb{R}$. Resulta do Lema 6.3.18 que $\overline{co}\,(J)\,(u) \in \mathbb{R}$ para todo $u \in dom\,(\overline{co}\,(J))$. Logo $\overline{co}\,(J)$ é próprio. Assim, decorre do Teorema 6.4.5 que existe $A : V \to \mathbb{R}$, afim e contínuo tal que $A\,(x) = \lambda$ e $A < \overline{co}\,(J)$. Neste caso, a proposição 6.6.4.(ii) mostra que $J^{**}\,(x) \geq A\,(x) = \lambda$. Temos então $\lambda > J^{**}\,(x) \geq \lambda$, o que é absurdo.

Por conseguinte, $epi\,(J^{**}) \subset epi\,(\overline{co}\,(J))$ e decorre do Lema 6.1.4 que $\overline{co}\,(J) \leq J^{**}$. Assim, $\overline{co}\,(J) \leq J^{**}$ e $J^{**} \leq \overline{co}\,(J)$, de maneira que $J^{**} = \overline{co}\,(J)$. Utilizando a proposição 6.5.6, temos que $J = J^{**}$se e somente se J é convexo sci. ∎

6.7 Subdiferenciabilidade

A noção clássica de diferenciabilidade utilizada no Cálculo das Variações em espaços de Hilbert, *que se aplica aos funcionais tomando somente valores reais*, é a seguinte:

Definição 6.7.1. *Sejam $J : V \to \mathbb{R}$ um funcional e*

$$\Delta J\,(u)\,(v,t) = \frac{J\,(u + tv) - J\,(u)}{t}$$

A derivada direcional de J em u na direção v *é*

$$DJ\,(u)\,(v) = \lim_{t\,\to\,0} \Delta J\,(u)\,(v,t)\ \ . \ \blacksquare$$

Definição 6.7.2. *Seja $J : V \to \mathbb{R}$ um funcional. J é* diferenciável no sentido de Gâteaux no ponto u *(ou simplesmente, em u) se e somente a derivada direcional $DJ(u)(v)$ existe para todo $u \in V$ e a aplicação $v \to DJ(u)(v)$ verifica $DJ(u) \in V'$.*

Neste caso, $DJ(u)$ é o diferencial de Gâteaux de J em u. *A* derivada de Gâteaux em u *é $\nabla J(u) = \Lambda^{-1}(DJ(u))$, onde $\Lambda : V \to V'$ é a isometria de Riesz : $DJ(u)(v) = (\nabla J(u), v)$ para todo $v \in V$.*

Diremos que J é diferenciável no sentido de Gâteaux *se e somente se J é diferenciável no sentido de Gâteaux todo ponto $u \in V$.* ■

A diferenciabilidade no sentido de Gâteaux não implica a continuidade: Por exemplo, seja $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$J(x) = 1, \text{ se } \; x_1^2 - x_2 = 0 \; \text{ e } x \neq 0 \;\; ; \;\; J(x) = 0, \text{ senão.}$$

Temos $DJ(0) = 0$, mas J não é contínua nesse ponto.

Podemos calcular uma derivada de Gâteaux utilizando derivadas usuais:

Lema 6.7.3. *Seja $J : V \to \mathbb{R}$ um funcional diferenciável no sentido de Gâteaux no ponto u. Então $DJ(u)(v) = f'(0)$, onde $f(t) = J(u + tv)$.*■

Prova. O resultado é imediato. ■

Temos também

Lema 6.7.4. *Seja $J : V \to \mathbb{R}$ um funcional convexo. Então*

(i) $\forall\, u, v \in V \;\; : \;\; t \to \Delta J(u)(v,t)$ *é crescente sobre* $\mathbb{R}^+$.

(ii) $\lim_{t \to 0+} \Delta J(u)(v,t)$ *existe para todo* $u, v \in V$.

(iii) $\lim_{t \to 0-} \Delta J(u)(v,t)$ *existe para todo* $u, v \in V$.

(iv) $\lim_{t \to 0-} \Delta J(u)(v,t) = -\lim_{t \to 0+} \Delta J(u)(w,t)$, $w = -v$. ■

Prova.

(i) Se $J(u) = +\infty$. Seja $t \geq s > 0$. Pondo $\theta = s/t \in (0,1)$, temos

$$J(u + sv) = J(\theta(u + tv) + (1 - \theta)u) \leq \theta J(u + tv) + (1 - \theta)J(u) \;\; ,$$

de modo que

$$\frac{J(u + sv) - J(u)}{s} \leq \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} \Longrightarrow \Delta J(u)(v,s) \leq \Delta J(u)(v,t) \;\; .$$

(ii) Seja
$$m = \inf \{ \ \Delta J(u)(v,t) : t > 0 \} .$$

Se $m = -\infty$ então:

$$\forall \ M \in R \ : \ \exists \ \delta > 0 \text{ tal que } \Delta J(u)(v,\delta) \leq M.$$

Assim, de (i)

$$0 < t \leq \delta \Longrightarrow \Delta J(u)(v,t) \leq M \Longrightarrow DJ(u)(v) \leq M.$$

Resulta que

$$\forall \ M \in \mathbb{R} \ : DJ(u)(v) \leq M \Longrightarrow DJ(u)(v) = -\infty.$$

Se $m > -\infty$ então:

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ : \ \exists \ \delta > 0 \text{ tal que } m \leq \Delta J(u)(v,\delta) \leq m + \varepsilon.$$

Assim, de (i)

$$0 < t < \delta \Longrightarrow m \leq \Delta J(u)(v,t) \leq m + \varepsilon \Longrightarrow m \leq DJ(u)(v) \leq m + \varepsilon.$$

Resulta que

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ : m \leq DJ(u)(v) \leq m + \varepsilon \Longrightarrow DJ(u)(v) = m.$$

(iii) e (iv) Sejam $w = -v$ e $s = -t$. Então,

$$\lim_{t \to 0-} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = - \lim_{s \to 0+} \frac{J(u+sw) - J(u)}{s}$$

e o resultado segue de (ii).

■

Teorema 6.7.5. *Seja $J : V \to \mathbb{R}$ um funcional diferenciável no sentido de Gâteaux. Então*

(i) *J é convexo se e somente*

$$J(v) \geq J(u) + (\nabla J(u) \, , \, v - u) \, , \quad \forall \ u, \, v \in V.$$

(ii) *J é estritamente convexo se e somente se*

$$J(v) > J(u) + (\nabla J(u) \, , \, v - u) \, , \quad \forall \ u, \, v \in V, \, u \neq v. \ \blacksquare$$

Prova.

1) prova de (i): Suponhamos J convexo. Então

$$\forall\ t \in (0,\ 1) : J\left(u + t\left(v - u\right)\right) \leq \left(1 - t\right) J\left(u\right) + tJ\left(v\right).$$

Assim,

$$\frac{J\left(u + t\left(v - u\right)\right) - J\left(u\right)}{t} \leq \frac{\left(1 - t\right) J\left(u\right) + tJ\left(v\right) - J\left(u\right)}{t} = J\left(v\right) - J\left(u\right)\ .$$

e, passando ao limite para $t \to 0$, temos

$$\left(\nabla J\left(u\right),\ v - u\right) \leq J\left(v\right) - J\left(u\right)\ .$$

Mostremos a recíproca: seja $u_\theta = \theta u + \left(1 - \theta\right) v$. Então

$$J(u) \geq J(u_\theta) + \left(\nabla J\left(u_\theta\right),\ u - u_\theta\right) \quad \text{e} \quad J(v) \geq J(u_\theta) + \left(\nabla J\left(u_\theta\right),\ v - u_\theta\right)\ .$$

Como

$$\forall\ \theta \in (0,\ 1) : \theta\left(\nabla J\left(u_\theta\right),\ u - u_\theta\right) + \left(1 - \theta\right)\left(\nabla J\left(u_\theta\right),\ v - u_\theta\right) = 0\ ,$$

temos

$$\forall\ \theta \in (0,\ 1) : \theta J(u) + \left(1 - \theta\right) J(v) \geq J(u_\theta)$$

e J é convexo.

2) prova de (ii): Suponhamos J estritamente convexo. Seja $u \neq v$. Então

$$\forall\ t \in (0,\ 1) : J\left(u + t\left(v - u\right)\right) < \left(1 - t\right) J\left(u\right) + tJ\left(v\right).$$

Assim,

$$\frac{J\left(u + t\left(v - u\right)\right) - J\left(u\right)}{t} < \frac{\left(1 - t\right) J\left(u\right) + tJ\left(v\right) - J\left(u\right)}{t} = J\left(v\right) - J\left(u\right)\ .$$

e, do Lema 6.7.4.(i),

$$\left(\nabla J\left(u\right),\ v - u\right) \leq \frac{J\left(u + t\left(v - u\right)\right) - J\left(u\right)}{t} < J\left(v\right) - J\left(u\right)\ .$$

A prova da recíproca é análoga à de (i): $u_\theta = \theta u + \left(1 - \theta\right) v$. Então

$$J(u) > J(u_\theta) + \left(\nabla J\left(u_\theta\right),\ u - u_\theta\right) \quad \text{e} \quad J(v) > J(u_\theta) + \left(\nabla J\left(u_\theta\right),\ v - u_\theta\right)\ ,$$

de modo que

$$\forall\ \theta \in (0,\ 1) : \theta J(u) + \left(1 - \theta\right) J(v) > J(u_\theta).$$

■

Teorema 6.7.6. *Seja $J : V \to \mathbb{R}$ um funcional diferenciável no sentido de Gâteaux. Então*

(i) *J é convexo se e somente se*

$$(\nabla J\,(u) - \nabla J\,(v)\,,\; u - v) \geq 0, \quad \forall\; u,\, v \in V.$$

(ii) *J é estritamente convexo se e somente se*

$$(\nabla J\,(u) - \nabla J\,(v)\,,\; u - v) > 0, \quad \forall\; u,\, v \in V,\; u \neq v. \;\blacksquare$$

Prova.

1) prova de (i): Se J é convexo, então:

$$J(v) \geq J(u) + (\nabla J\,(u)\,,\; v - u) \;\text{ e }\; J(u) \geq J(v) + (\nabla J\,(v)\,,\; u - v)\;\;.$$

Fazendo a soma destas duas desigualdades, obtemos o resultado enunciado. Mostremos a recíproca: sejam $u, w \in V$, $t \in \mathbb{R}$ e $g\,(t) = J\,(u + tw)$. Temos

$$\frac{g\,(t+h) - g\,(t)}{h} = \frac{J\,(u + tw + hw) - J\,(u + tw)}{h} \underset{h\,\to\,0}{\to} (\nabla J\,(u + tw)\,,\; w)\,,$$

de modo que $g'\,(t) = (\nabla J\,(u + tv)\,,\; v)$. Assim,

$$(g'\,(t) - g'\,(s))\,(t - s) = (\nabla J\,(u + tw) - \nabla J\,(u + sw)\,,\; (t - s)\,w) \geq 0.$$

Resulta que

$$s \leq t \Longrightarrow g'\,(s) \leq g'\,(s)$$

e $t \to g'\,(t)$ é crescente. Sejam $s < t$ e $\theta \in (0, 1)$ e $t_\theta = \theta t + (1 - \theta)\,s$

$$h\,(\theta) = g\,(t_\theta) - \theta g\,(t) - (1 - \theta)\,g\,(s)\,.$$

Temos

$$h\,(\theta) = \theta\,(g\,(t_\theta) - g\,(t)) - (1 - \theta)\,(g\,(s) - g\,(t_\theta)) = \theta \int_t^{t_\theta} g'\,(a)\,da - (1 - \theta) \int_{t_\theta}^{s} g'\,(a)\,da.$$

Ora, como $t \to g'(t)$ é crescente,

$$\int_t^{t_\theta} g'(a)\, da \le g'(t_\theta)(t_\theta - t) \quad ; \quad \int_{t_\theta}^{s} g'(a)\, da \ge g'(t_\theta)(s - t_\theta) \ ,$$

de modo que

$$h(\theta) \le \theta g'(t_\theta)(t_\theta - t) - (1-\theta) g'(t_\theta)(s - t_\theta) = g'(t_\theta)(t_\theta - \theta t - (1-\theta)s) = 0.$$

Logo, $g(t_\theta) \le \theta g(t) + (1-\theta) g(s)$. Tomando $w = v - u$, $t = 1$, $s = 0$, temos $g(0) = J(u)$, $g(1) = J(v)$, $g(t_\theta) = J(\theta u + (1-\theta) v)$ e

$$J(\theta u + (1-\theta) v) \le \theta J(u) + (1-\theta) J(v)$$

e J é convexa.

2) prova de (i): Se J é estritamente convexo, então:

$$J(v) > J(u) + (\nabla J(u), v - u) \text{ e } J(u) > J(v) + (\nabla J(v), u - v) \ .$$

Fazendo a soma destas duas desigualdades, obtemos o resultado enunciado.

A recíproca é análoga à de (i): neste caso,

$$(g'(t) - g'(s))(t - s) = (\nabla J(u + tw) - \nabla J(u + sw), (t - s) w) > 0$$

e $t \to g'(t)$ é estritamente crescente. Resulta que

$$\int_t^{t_\theta} g'(a)\, da < g'(t_\theta)(t_\theta - t) \quad ; \quad \int_{t_\theta}^{s} g'(a)\, da > g'(t_\theta)(s - t_\theta) \ ,$$

de modo que $h(\theta) < 0$ e $J(\theta u + (1-\theta) v) \le \theta J(u) + (1-\theta) J(v)$.

■

Um funcional arbitrário pode não possuir uma derivada de Gâteaux. Tal é o caso, por exemplo, quando J assume valores infinitos ou é não-diferenciável. Neste caso, utilizaremos as noções seguintes :

Definição 6.7.7. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. $p \in V$ é um* subgradiente local *de J em u se e somente se existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\forall\ v \in B_\varepsilon(u) : J(v) \ge J(u) + (p,\ v - u)\,.$$

O conjunto dos subgradientes locais de J em u é o subdiferencial local *de J em u:*

$$\partial_{loc} J(u) = \{\ p \in V : p \text{ é subgradiente local de } J \text{ em } u\}\,.\blacksquare$$

Assim, um subgradiente local define um minorante afim contínuo *local* de J. Quando este minorante afim contínuo é *global*, isto é, a vizinhança $B_\varepsilon(v)$ pode ser substituída por V, diremos que $p \in V$ é um *subgradiente global* de J em u ou simplesmente um *subgradiente* de J em u:

Definição 6.7.8. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. $p \in V$ é um* subgradiente de J em u *se e somente se*

$$\forall\ v \in V : J(v) \geq J(u) + (p,\ v-u).$$

O conjunto dos subgradientes de J em u é o subdiferencial de J em u*:*

$$\partial J(u) = \{\ p \in V : p \text{ é subgradiente de } J \text{ em } u\}. \blacksquare$$

Temos:

Lema 6.7.9. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional.*

(i) *Se $J(u) = -\infty$ então $\partial_{loc}J(u) = \partial J(u) = V$.*

(ii) *Se existe $v \in V$ tal que $J(v) = -\infty$ então $\partial J(u) = \varnothing$ em todo ponto onde $J(u) > -\infty$.*

(iii) *Se $J(u) = +\infty$ e existe $v \in V$ tal que $J(v) < +\infty$ então $\partial J(u) = \varnothing$. Senão $\partial J(u) = V$.*

(iv) *Se $J(u) = +\infty$ e existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall\ v \in B_\varepsilon(u) : J(v) = +\infty$ então $\partial_{loc}J(u) = V$. Senão $\partial_{loc}J(u) = \varnothing$.*

(v) *$\partial J(u) \subset \partial_{loc}J(u)$.*

(vi) *$p \in \partial J(u)$ se e somente se $J(v) \geq J(u) + (p,\ v-u)$ para todo $v \in dom(J)$.$\blacksquare$*

Prova. Se $J(u) = -\infty$ então $J(u) + (p,\ v-u) = -\infty$ para todo $p \in V$, de modo que $J(v) \geq J(u) + (p,\ v-u) = -\infty$ para todo $p \in V$, o que prova (i).

De maneira análoga, se $J(u) > -\infty$ e $J(v) = -\infty$ então $\partial J(u) = \varnothing$: se $p \in \partial J(u)$, temos $-\infty \geq J(u) + (p,\ v-u)$, de modo que $J(u) = -\infty$, de onde $-\infty > -\infty$, o que é absurdo

Mostremos (iii): Seja $J(u) = +\infty$. Se existe $v \in V$ tal que $J(v) < +\infty$ e $\partial J(u) \neq \varnothing$, então existe $p \in \partial J(u)$. Assim, $J(u) + (p,\ v-u) = +\infty$ para todo $v \in V$, de modo que $J(v) \geq +\infty$ para todo $v \in V$ e temos $+\infty > +\infty$, o que é absurdo. Se $J = +\infty$ e então $J(u) + (p,\ v-u) = +\infty$ para todo $p \in V$ e $v \in V$, de modo que $J(v) \geq J(u) + (p,\ v-u) = +\infty$ para todo $p \in V$ e $v \in V$, o que mostra que $\partial J(u) = V$.

(iv) é análogo a (iii): se existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall\ v \in B_\varepsilon(u) : J(v) = +\infty$, então $J(u) + (p,\ v-u) = +\infty$ para todo $p \in V$ e $v \in B_\varepsilon(u)$, de modo que $J(v) \geq J(u) + (p,\ v-u) = +\infty$ para todo $p \in V$ e $v \in B_\varepsilon(u)$, o que mostra que $\partial J(u) = V$. Senão, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ v_\varepsilon \in B_\varepsilon(u)$ tal que $J(v_\varepsilon) < +\infty$. Suponhamos $\partial_{loc} J(u) \neq \varnothing$. Então existem $p \in \partial_{loc} J(u)$ e $\varepsilon > 0$ tal que $J(v) \geq J(u) + (p,\ v-u)$ para todo $v \in B_\varepsilon(u)$. Mas então $J(v) \geq +\infty$ para todo $v \in B_\varepsilon(u)$, de modo que $J(v_\varepsilon) \geq +\infty$ e temos $+\infty > +\infty$, o que é absurdo.

(v) é imediato, pois $B_\varepsilon(u) \subset V$

Mostremos (vi): Se $dom(J) = \varnothing$, então $J = +\infty$ e decorre de (iii) que $\partial J(u) = V$. Assim, a equivalência é verificada neste caso. Se $dom(J) \neq \varnothing$, ($\Longrightarrow$) resulta de $dom(J) \subset V$, enquanto que ($\Longleftarrow$) é obtida observando que, se $v \notin dom(J)$, então $J(v) = +\infty$ e a desigualdade $J(v) \geq J(u) + (p,\ v-u)$ também é satisfeita neste caso. ■

Temos também:

Teorema 6.7.10. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. Seja $u \in V$ tal que $J(u) \in \mathbb{R}$. Então $p \in \partial J(u)$ se e somente se $J(u) + J^*(p) = (p,\ u)$.*■

Prova. Temos $J(u) + J^*(p) = (p,\ u)$ se e somente se

$$(p,\ u) - J(u) = J^*(p) = \sup\{\ (\ p, v\ ) - J(x) : v \in V\ \},$$

isto é,

$$v \in V \quad : \quad (p,\ u) - J(u) \geq \ (\ p, v\ ) - J(v)\ ,$$

ou seja

$$v \in V \quad : \quad (p,\ v-u) + J(u) \leq \ J(v)\ .$$

Assim, $J(u) + J^*(p) = (p,\ u)$ se e somente se $p \in \partial J(u)$. ■

Uma conseqüência deste teorema é a seguinte:

Corolário 6.7.11. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. Seja $u \in V$ tal que $J(u) \in \mathbb{R}$ e $\partial J(u) \neq \varnothing$. Então $J^{**}(u) = J(u)$ e $\partial J^{**}(u) = \partial J(u)$.*

Prova. Seja $p \in \partial J(u)$. Temos

$$p \in \partial J(u) \Longleftrightarrow J(u) + J^*(p) = (p,\ u)\ ,$$

de modo que

$$J(u) = (p,\ u) - J^*(p) \leq \sup\{\ (\ q,\ u\ ) - J^*(p) : q \in V\ \} = J^{**}(u)\,.$$

Como $J^{**}(u) \leq J(u)$ (Cf. proposição 6.6.4), temos $J(u) = J^{**}(u)$.

Como $J^* = J^{***}$ (Cf. proposição 6.6.4), temos

$$p \in \partial J(u) \Longleftrightarrow J(u) + J^*(p) = (p,\ u) \Longleftrightarrow J^{**}(u) + J^{***}(p) = (p,\ u) \Longleftrightarrow p \in \partial J^{**}(u)\,,$$

de modo que $\partial J^{**}(u) = \partial J(u)$. ■

Uma segunda conseqüência é a seguinte

Corolário 6.7.12. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional convexo próprio sci. Seja $u \in V$ tal que $J(u) \in \mathbb{R}$. Então $p \in \partial J(u)$ se e somente se $u \in \partial J^*(p)$.*■

Prova. Neste caso, $J = \overline{co}(J) = J^{**}$ (Cf. proposição 6.5.6 e Teorema 6.6.5. Temos $p \in \partial J(u)$ se e somente se

$$p \in \partial J(u) \Longleftrightarrow J(u) + J^*(p) = (p,\ u)\ \ ,$$

isto é,

$$p \in \partial J(u) \Longleftrightarrow J^*(p) + J^{**}(u) = (u,\ p)\,.$$

Ora, do Teorema 6.7.10 :

$$J^*(p) + J^{**}(u) = (u,\ p) \Longleftrightarrow u \in \partial J^*(p)\,.$$

Assim, $p \in \partial J(u)$ se e somente se $u \in \partial J^*(p)$. ■

Veremos agora que para funcionais convexos todo subdiferencial local é global:

Teorema 6.7.13. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional convexo. Seja $u \in V$ tal que $J(u) \in \mathbb{R}$. Então são equivalentes:*

(i) $p \in \partial_{loc} J(u)$

(ii) $\forall\ v \in V : (p,\ v) \leq \lim\limits_{t\ \to\ 0+} \Delta J(u)(v,t)$.

(iii) $p \in \partial J(u)$.■

Prova. (i) $\Longrightarrow$(ii): Suponhamos $p \in \partial_{loc} J(u)$ e seja $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall\ v \in B_\varepsilon(u) : J(v) \geq J(u) + (p,\ v-u).$$

Seja $v \in V$. Então existe $n_0 > 0$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \frac{1}{n} \|\ v\| \leq \varepsilon.$$

Seja $0 < t \leq \dfrac{1}{n_0}$. Então $u + tv \in B_\varepsilon(u)$, de modo que

$$0 < t \leq \frac{1}{n_0} \Longrightarrow J(u+tv) \geq J(u) + t(p,\ v) \Longrightarrow \Delta J(u)(v,t) \geq (p,\ v)$$

e o resultado é obtido passando ao limite para $t \to 0+$ (o Lema 6.7.4 mostra que o limite existe).

(ii) $\Longrightarrow$(iii): A recíproca resulta do Lema 6.7.4: $t \to \Delta J(u)(v,t)$ é crescente sobre $\mathbb{R}^+$, de modo que

$$\forall\ v \in V\ ,\ t > 0 : \Delta J(u)(v,t) \geq \lim_{t\ \to\ 0+} \Delta J(u)(v,t) \geq (p,\ v)\ .$$

Assim,

$$\forall\ v \in V\ ,\ t > 0 : J(u+tv) \geq J(u) + t(p,\ v)\ .$$

Tomando $t = 1, v = w - u$, temos

$$\forall\ w \in V\ \ : J(w) \geq J(u) + (p,\ w-u)\ ,$$

de modo que $p \in \partial J(u) \subset \partial_{loc} J(u)$.

(iii) $\Longrightarrow$(i): resulta de $\partial J(u) \subset \partial_{loc} J(u)$ (Lema 6.7.9). ■

Corolário 6.7.14. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional convexo. Então $\partial_{loc} J(u) = \partial J(u)$ em todo ponto onde $\partial J_{loc}(u) = \varnothing$ ou $J(u) \in \mathbb{R}$.*■

Prova. O resultado é imediato se $\partial_{loc} J(u) = \varnothing$, pois (Cf. Lema 6.7.9)

$$\partial J(u) \subset \partial_{loc} J(u) = \varnothing \Longrightarrow \partial J(u) = \partial_{loc} J(u) = \varnothing.$$

Suponhamos $\partial_{loc} J(u) \neq \varnothing$ e $J(u) \in \mathbb{R}$: seja $p \in \partial_{loc} J(u)$. O Teorema 6.7.13 mostra que $p \in \partial J(u)$, de modo que $\partial J_{loc}(u) \subset \partial J(u) \subset \partial_{loc} J(u) \Longrightarrow \partial J(u) = \partial_{loc} J(u)$. ■

Corolário 6.7.15. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional convexo. Seja $u \in V$ tal que $J(u) \in \mathbb{R}$ e a derivada de Gâteaux $\nabla J(u)$ existe. Então $\partial_{loc} J(u) = \partial J(u) = \{\ \nabla J(u)\ \}$.*■

Prova. Neste caso, temos

$$\lim_{t \to 0+} \Delta J(u)(v,t) = (\nabla J(u), v).$$

O teorema mostra que $p \in \partial_{loc} J(u)$ se e somente se

$$\forall\ v \in V : (\nabla J(u), v) \geq (p, v),$$

isto é,

$$\forall\ v \in V : (\nabla J(u) - p, v) \geq 0.$$

Ora, esta desigualdade só é possível se $\nabla J(u) - p = 0$ (basta tomar $v = p - \nabla J(u)$). Assim, $p \in \partial_{loc} J(u)$ se e somente se $p = \nabla J(u)$. Como $\partial_{loc} J(u) = \partial J(u)$ (corolário 6.7.14), temos o resultado enunciado. ■

Teorema 6.7.16. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional convexo próprio. Se existe $u \in dom(J)$ tal que J é contínuo em u então J é subdiferenciável em todo ponto $w \in int(dom(J))$.*■

Prova. Como J é próprio, J não assume o valor $-\infty$, de modo que $J(u) \in \mathbb{R}$. Seja $\varepsilon > 0$: como J é contínuo em u, existe $\delta > 0$ tal que

$$\| w - u \| \leq \delta \Longrightarrow |\ J(w) - J(u)\ | \leq \varepsilon \Longrightarrow J(w) \leq J(u) + \varepsilon\ .$$

Assim, $\sup\{\ J(w) : w \in B_\delta(u)\} < +\infty$. Resulta da Proposição 6.2.4 que $int(dom(J)) \neq \varnothing$ e existe $\delta > 0$ tal que $\sup\{\ J(w) : w \in B_\delta(v)\} < +\infty$ para todo $v \in int(dom(J))$. Além disto, J é contínuo em cada ponto de $int(dom(J))$.

Seja $v \in int(dom(J))$ e $\delta > 0$ tal que $B_\delta(v) \subset int(dom(J))$ e $M = \sup\{J(w) : w \in B_\delta(v)\} < +\infty$. Então,

$$\| w - u \| \leq \delta \Longrightarrow J(w) \leq M\ .$$

Resulta que, para todo $\lambda > M$ e $w \in B_\delta(u)$, temos $J(w) \leq M < \lambda$ e $(w, \lambda) \in epi(J)$. Logo, temos

$$\left\{\ (w, \lambda) : \| w - v \|^2 + |\ \lambda - (M + 2\delta)\ |^2 \leq \delta^2 \right\} \subset epi(J)\ ,$$

de forma que $(v, M + 2\delta) \in int(epi(J)) \neq \varnothing$. Assim, $B = int(epi(J))$ é um convexo (Cf. Teorema 6.2.5 e proposição 5.2.10) de interior não-vazio. Como $(v, J(v)) \notin int(epi(J))$, $A = \{\ (v, J(v))\}$ é um convexo não-vazio tal que $A \cap B = \varnothing$. Decorre do Lema da separação (Lema 5.5.4) que existe um hiperplano fechado $H = L^{-1}(\eta)$ que separa propriamente A e B. Assim, existem $p \in V$, $\alpha, \eta \in \mathbb{R}$ tais que $L((w, \lambda)) = (\ p,\ w\ ) + \alpha\lambda$ e

$$\forall\ (w, \lambda) \in B\ :\ \ (\ p,\ w\ ) + \alpha\lambda \leq \eta \leq (\ p,\ v\ ) + \alpha J(v)\ .$$

Como $(v,\, M+2\delta) \in B$, temos

$$(\ p,\ v\ ) + \alpha\,(M+2\delta) \leq \eta \leq (\ p,\ v\ ) + \alpha J\,(v) \Longrightarrow \alpha\,(M+2\delta - J\,(v)) \leq 0\ ,$$

de maneira que $\alpha \leq 0$.

Suponhamos que $\alpha = 0$. Como $w = (1+\delta)\,v \in B_\delta\,(v)$, temos $J\,((1+\delta)\,v) \leq M < M+2\delta$ e $((1+\delta)\,v,\, M+2\delta) \in B$, de modo que

$$(1+\delta)\,(\ p,\ v\ ) \leq (\ p,\ v\ ) \Longrightarrow (\ p,\ v\ ) \leq 0\ .$$

De maneira análoga, $((1+\delta)\,v,\, M+2\delta) \in B$ e

$$(1-\delta)\,(\ p,\ v\ ) \leq (\ p,\ v\ ) \Longrightarrow (\ p,\ v\ ) \geq 0\ .$$

Assim, $(\ p,\ v\ ) = 0$, de modo que

$$\forall\ (w,\lambda) \in B\ :\ (\ p,\ w\ ) \leq \eta \leq 0\ .$$

Ora, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} \parallel p \parallel \leq \delta \Longrightarrow v + \frac{1}{n}p \in B_\delta\,(v) \Longrightarrow \left(v + \frac{1}{n}p,\ M+2\delta\right) \in B\ .$$

Assim,

$$\frac{1}{n} \parallel p \parallel^2 = \left(\ p,\ v + \frac{1}{n}p\ \right) \leq 0 \Longrightarrow \parallel p \parallel^2 \leq 0 \Longrightarrow p = 0.$$

Mas então $L = 0$ e $\eta = 0$ (pois $0 = (\ p,\ w\ ) \leq \eta \leq 0$). Assim, $H = V$ e, por um lado, H não é um hiperplano; por outro lado, $A \cup B \subset H$ e H não separa propriamente A e B, o que é absurdo.

Logo, $\alpha < 0$ e

$$\forall\ (w,\lambda) \in B\ :\ \left(\ \frac{p}{\alpha},\ w\ \right) + \lambda \geq \left(\ \frac{p}{\alpha},\ v\ \right) + J\,(v)\ \ ,$$

de maneira que

$$\forall\ (w,\lambda) \in B\ :\ \lambda \geq \left(\ \frac{p}{\alpha},\ v-w\ \right) + J\,(v)\ \ .$$

Fazendo $\lambda \to J\,(w)$, temos

$$\forall\ w \in dom\,(J)\ \ :\ J\,(w) \geq \left(\ -\frac{p}{\alpha},\ w-v\ \right) + J\,(v)\ \ .$$

Assim, o Lema 6.7.9 mostra que $-\dfrac{p}{\alpha} \in \partial J\,(v)$. ■

Teorema 6.7.17. *Sejam* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *e* $I : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *dois funcional convexos próprios. Seja* $K = I + J$. *Então:*

(i) $\partial I(u) + \partial J(u) \subset \partial K(u)$

(ii) *Se existe* $\tilde{u} \in dom\,(J) \cap dom\,(I)$ *tal que* J *é contínuo em* $\tilde{u}$, *então* $\partial I(u) + \partial J(u) = \partial K(u)$ *para todo* $u \in V$.■

Prova. Sejam $p \in \partial I(u)$ e $q \in \partial J(u)$. Temos

$$\forall\ v \in V\ : I(v) \geq I(u) + (p,\ v-u) \text{ e } J(v) \geq J(u) + (q,\ v-u)\ .$$

Adicionando as duas desigualdades, temos

$$\forall\ v \in V\ : K(v) \geq K(u) + (p+q,\ v-u)$$

e $p + q \in \partial I(u)$. Assim, temos (i). Suponhamos que $\tilde{u} \in dom\,(J) \cap dom\,(I)$ e J é contínua em $\tilde{u}$. Seja $p \in \partial K(u)$. Consideremos os funcionais $i, j, k : V \to \mathbb{R}$ tais que

$$j(v) = J(v+u) - J(u) - (p,\ v)\quad ;\quad i(v) = I(v+u) - I(u)\quad ;\quad k = i + j\ .$$

i e j são convexos próprios e $dom\,(j) = dom\,(J) - \{\ u\ \}$; $dom\,(i) = dom\,(I) - \{\ u\ \}$; $i(0) = j(0) = 0$; $0 \in \partial k(0)$ (pois $k(v) \geq k(0)$) e j é contínua em $\tilde{v} = \tilde{u} - u$.

Sejam

$$A = \{\ (v,\ \lambda) \in V \times \mathbb{R} : i(v) \leq -\lambda\}\ ;\ B = epi\,(j)\ .$$

Como $i(0) = 0$ e $(0,0) \in A \neq \varnothing$. Como i é convexo,

$$(v,\ \lambda)\,,\ (w,\ \eta) \in A \Longrightarrow i(\theta v + (1-\theta)\,w) \leq \theta i(v) + (1-\theta)\,i(w) \leq -\theta\lambda - (1-\theta)\,\eta$$

para todo $\theta \in (0,1)$ e A é convexo. De maneira análoga, $j(0) = 0$, temos $(0,0) \in B \neq \varnothing$. Como j é convexo, B é convexo.

Como j é contínua em $\tilde{v}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\ w - \tilde{v}\ \| \leq \delta \Longrightarrow |\ j(w) - j(\tilde{v})\ | \leq 1 \Longrightarrow j(w) \leq j(\tilde{v}) + 1\ .$$

Resulta que, para todo $\lambda > j(\tilde{v}) + 1$ e $w \in B_\delta(\tilde{v})$, temos $j(w) \leq j(\tilde{v}) + 1 < \lambda$ e $(w,\ \lambda) \in epi\,(j)$. Seja $\tilde{\lambda} = j(\tilde{v}) + 1 + 2\delta$. Temos

$$\left\{\ (w,\ \lambda) : \|\ w - \tilde{v}\ \|^2 + \left|\ \lambda - \tilde{\lambda}\ \right|^2 \leq \delta^2\right\} \subset epi\,(J)\ ,$$

Assim, $\left(\tilde{v},\ \tilde{\lambda}\right) \in int\,(B)$.

Temos $A \cap B = \varnothing$: se existe $(v,\ \lambda) \in A \cap B$ então, por um lado, $i(v) \leq -\lambda$ e, por outro lado, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left\{\ (w,\ \eta) : \|\ w - v\ \|^2 + |\ \eta - \lambda\ |^2 \leq \varepsilon^2\right\} \subset B\ ,$$

de modo que $(v,\ \lambda-\varepsilon) \in B$ e temos

$$j\,(v) \leq \lambda - \varepsilon \leq -i\,(v) - \varepsilon \Longrightarrow k\,(v) \leq -\varepsilon < 0 = k\,(0)\,.$$

Ora, $0 \in \partial k\,(0)$, de modo que

$$k\,(v) \geq k\,(0) + (0, v-0) = 0.$$

Assim, $0 > k\,(v) > 0$, o que é absurdo.

Logo, A e B são convexos não-vazios, $int\,(B) \neq \varnothing$ e $A \cap B = \varnothing$. O Lema da separação (Lema 5.5.4) mostra que existe um hiperplano fechado $H = L^{-1}\,(\eta)$ que separa propriamente A e B. Assim, existem $q \in V$, $\alpha, \eta \in \mathbb{R}$ tais que $L\,((w,\ \lambda)) = (\ q,\ w\ ) + \alpha\lambda$ e

$$\forall\ (w,\ \lambda) \in A \text{ e } (v,\ \gamma) \in B\ :\ \ (\ q,\ w\ ) + \alpha\lambda \leq \eta \leq (\ q,\ v\ ) + \alpha\gamma\ .$$

Como $(0,\ 0) \in A \cap B$, temos

$$0 \leq \eta \leq 0 \Longrightarrow \eta = 0\ .$$

Além disto, $(0,\ 1) \in B$, de maneira que $\alpha \geq 0$.

Suponhamos que $\alpha = 0$. Então

$$\forall\ (w,\ \lambda) \in A \text{ e } (v,\ \gamma) \in B\ :\ \ (\ q,\ w\ ) \leq 0 \leq (\ q,\ v\ )\ .$$

Como existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} \parallel q \parallel \leq \delta \Longrightarrow -\frac{1}{n}q \in B_\delta\,(0) \Longrightarrow \left(\frac{1}{n}q,\ 2\delta\right) \in B\ ,$$

temos

$$-\frac{1}{n} \parallel q \parallel^2 = \left(\ q,\ \ -\frac{1}{n}q\ \right) \geq 0 \Longrightarrow \parallel q \parallel^2 \leq 0 \Longrightarrow q = 0,$$

de forma que $L = 0$. Logo, $H = V$ e, por um lado, H não é um hiperplano; por outro lado, $A \cup B \subset H$ e H não separa propriamente A e B, o que é absurdo.

Assim, $\alpha > 0$ e

$$\forall\ (w,\ \lambda) \in A \text{ e } (v,\ \gamma) \in B\ :\ \ \left(\ \frac{q}{\alpha},\ w\ \right) + \lambda \leq 0 \leq \left(\ \frac{q}{\alpha},\ v\ \right) + \gamma\ . \tag{6.16}$$

Seja $\mu > 0$ e $v \in dom\,(j)$: $(v,\ j\,(v) + 2\mu) \in B$ e temos

$$\left(\ \frac{q}{\alpha},\ w\ \right) + j\,(v) + 2\mu \geq 0 \underset{\mu\,\to\,0+}{\Longrightarrow} j\,(v) \geq \left(\ -\frac{q}{\alpha},\ v\ \right).$$

Assim,

$$\forall\ v \in dom\,(j) : J\,(v+u) \geq J\,(u) + \left(p - \frac{q}{\alpha},\ v\right)$$

e

$$\forall\ v \in dom\,(J) : J\,(v) \geq J\,(u) + \left(p - \frac{q}{\alpha},\ v-u\right),$$

de modo que o Lema 6.7.9 mostra que

$$p - \frac{q}{\alpha} \in \partial J(u) \ . \tag{6.17}$$

Seja $v \in dom\,(i)$: Tomando $\lambda = -i(v)$ em (6.16), temos

$$\left(\frac{q}{\alpha},\ v \right) - i(v) \leq 0 \Longrightarrow i(v) \geq \left(\frac{q}{\alpha},\ v \right).$$

Assim,

$$\forall\ v \in dom\,(i) : I(v+u) \geq I(u) + \left(\frac{q}{\alpha},\ v \right)\ ,$$

isto é,

$$\forall\ v \in dom\,(I) : I(v) \geq I(u) + \left(\frac{q}{\alpha},\ v - u \right),$$

e decorre do Lema 6.7.9 que

$$\frac{q}{\alpha} \in \partial I(u) \tag{6.18}$$

De (6.17) e (6.18), temos

$$p \in \partial J(u) + \partial I(u)\ \ ,$$

de modo que $\partial K(u) \subset \partial I(u) + \partial J(u)$. Utilizando (i), temos o resultado enunciado.
■

Capítulo 7

Otimização

Nesta seção, estudaremos o problema seguinte:

Problema 7.0.18. *Determinar $u \in V$ tal que $u = \arg\min_V J$, isto é, $u \in V$ tal que $\forall\ w \in V : J(u) \leq J(w)$.* ■

Na literatura usual da otimização, esse problema é um problema de "otimização sem restrições", mas tal não é o ponto de vista da Análise Convexa. Podemos considerar:

Definição 7.0.19. *Seja $S \subset V$. A função indicatriz de S é $\Psi_S : V \to \overline{\mathbb{R}}$, dada por*

$$\Psi_S(u) = 0 \ , \ \textit{se } u \in S \quad ; \quad \Psi_S(u) = +\infty \ , \ \textit{se } u \notin S \quad .$$

■

Assim,

$$\inf_V (J + \Psi_S) \ = \ \inf_S J \ ,$$

de modo que o estudo do problema 7.0.18 engloba o problema da determinação do ponto de mínimo sobre uma parte $S \subset V$. Estudaremos mais abaixo as propriedades das funções indicatrizes.

Para simplificar as fórmulas que seguem, utilizaremos as notações

$$\inf(J) = \inf_V J \ ; \ \inf(J,S) = \inf_S J \ \ ; \ \min(J) = \min_V J \ ; \ \min(J,S) = \min_S J \ \ .$$

7.1 Noções Fundamentais

Seqüências minimizantes

No que segue, consideraremos *seqüências minimizantes*, definidas por

Definição 7.1.1. $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ *é uma* seqüência minimizante *do funcional* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *se e somente se* $J(u_n) \to \inf(J)$. ■

Utilizaremos as propriedades seguintes:

Lema 7.1.2. *Seja* $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ *uma seqüência minimizante do funcional* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$. *Seja* $\{ u_{n_k} \}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ *uma subseqüência. Então* $J(u_{n_k}) \to \inf(J)$ *quando* $k \to +\infty$*, isto é, toda subseqüência de uma seqüência minimizante é minimizante.* ■

Prova. Suponhamos que $\inf(J) = +\infty$. Então $J = +\infty$. Assim, $J(u_{n_k}) = +\infty$, para todo $k \in \mathbb{N}$, de modo que $J(u_{n_k}) \to +\infty = \inf(J)$. Seja $N \in \mathbb{N}$.

Suponhamos que $\inf(J) = -\infty$. Então, para todo $N \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow J(u_{n_k}) \leq -N.$$

Seja k_0 tal que $u_{n(k_0)} > n_0$. Então

$$k \geq k_0 \Longrightarrow n(k) \geq n(k_0) \geq n_0 \Longrightarrow J(u_{n_k}) \leq -N,$$

de modo que $J(u_{n_k}) \to -\infty = \inf(J)$.

Suponhamos que $\inf(J) \in \mathbb{R}$. Então, o resultado decorre da unicidade do limite (Cf. proposição 4.5.6). ■

7.1.1 Funções indicatrizes

Temos

Lema 7.1.3. *Seja* $S \subset V$ *e* Ψ_S *a função indicatriz de* S. *Então*

(i) *dom* $(\Psi_S) = S$.

(ii) $S = \varnothing$ *se e somente se epi* $(\Psi_S) = \varnothing$.

(iii) *Se* $S \neq \varnothing$*, então* $epi\,(\Psi_S) = S \times \mathbb{R}^+ = \{\ (v,\ \lambda) \in V \times \mathbb{R} : v \in S\ e\ \lambda \geq 0\}$.

(iv) Ψ_S *é convexa se e somente se* S *é convexo.*

(v) Ψ_S *é sci se e somente se* S *é fechado.*

(vi) Ψ_S *é própria se e somente se* $S \neq \varnothing$.

(vii) $co\,(\Psi_S) = \Psi_{co(S)}$.

(viii) $\overline{\Psi_S} = \Psi_{\overline{S}}$

(ix) $\overline{co}\,(\Psi_S) = \Psi_{\overline{co}(S)}$.

(x) $\Psi_S^{**} = \Psi_{\overline{co}(S)}$.

(xi) $\partial\Psi_S\,(u) = N\,(u, co\,(S)) = N\,(u, \overline{co}\,(S))$ *para todo* $u \in S$.

(xii) $0 \in \partial\Psi_S\,(u)$ *para todo* $u \in S$.

(xiii) $\partial\Psi_S\,(u) = \{\ 0\ \}$ *para todo* $u \in int\,(S)$.

(xiv) *Se* $S \neq \varnothing$*, então* $\partial\Psi_S\,(u) = \varnothing$ *para todo* $u \notin S$*. Senão* $\partial\Psi_S\,(u) = V$ *para todo* $u \in V$.

(xv) *Se* $S \neq \varnothing$ *e* J *é contínuo então* $\overline{J + \Psi_S} = J + \Psi_{\overline{S}}$.■

Prova.

(i) Basta notar que $\Psi_S\,(u) < +\infty \Longleftrightarrow u \in S$.

(ii) Temos

$$S = \varnothing \Longleftrightarrow \Psi_S = +\infty \Longleftrightarrow epi\,(\Psi_S) = \varnothing.$$

(iii) Seja $(v,\ \lambda) \in epi\,(\Psi_S)$. Então, do Lema 6.1.5, $\Psi_S\,(v) < +\infty$. Assim, $v \in S$ e $\lambda \geq \Psi_S\,(v) = 0$, de modo que $(v,\ \lambda) \in S \times \mathbb{R}^+$. Logo, $epi\,(\Psi_S) \subset S \times \mathbb{R}^+$.

Seja $(v,\ \lambda) \in S \times \mathbb{R}^+$. Então $\lambda \geq \Psi_S\,(v) = 0$, de modo que $(v,\ \lambda) \in epi\,(\Psi_S)$. Logo, $S \times \mathbb{R}^+ \subset epi\,(\Psi_S)$.

Assim $epi\,(\Psi_S) \subset S \times \mathbb{R}^+$ e $S \times \mathbb{R}^+ \subset epi\,(\Psi_S)$, de modo que $S \times \mathbb{R}^+ = epi\,(\Psi_S)$.

(iv) Decorre do Teorema 6.2.5 que basta mostrar que $epi\,(\Psi_S)$ é convexo se e somente se S é convexo.

Seja S convexo. Se $S = \varnothing$ então $epi\,(\Psi_S) = \varnothing$ e $epi\,(\Psi_S)$ é convexo. Suponhamos $S \neq \varnothing$. Então $epi\,(\Psi_S) = S \times \mathbb{R}^+$. Para $(u,\, \lambda) \in S \times \mathbb{R}^+$ e $(v,\, \eta) \in S \times \mathbb{R}^+$, temos $u \in S$, $v \in S$, $\lambda \geq 0$ e $\eta \geq 0$. Seja $\theta \in (0, 1)$: como S é convexo, $\theta u + (1-\theta)\, v \in S$. Além disto, $\theta\lambda + (1-\theta)\,\eta \geq 0$, de modo que

$$\theta\,(u,\, \lambda) + (1-\theta)\,(v,\, \eta) = (\theta u + (1-\theta)\, v,\, \theta\lambda + (1-\theta)\,\eta) \in S \times \mathbb{R}^+$$

e $epi\,(\Psi_S) = S \times \mathbb{R}^+$ é convexo.

Seja $epi\,(\Psi_S)$ convexo. Se $epi\,(\Psi_S) = \varnothing$ então $S = \varnothing$ e S é convexo. Suponhamos $epi\,(\Psi_S) \neq \varnothing$. Então $epi\,(\Psi_S) = S \times \mathbb{R}^+$. Sejam $u \in S$, $v \in S$, $\theta \in (0, 1)$. Então $(u,\, 0) \in S \times \mathbb{R}^+$ e $(v,\, 0) \in S \times \mathbb{R}^+$, de modo que

$$\theta\,(u,\, 0) + (1-\theta)\,(v,\, 0) = (\theta u + (1-\theta)\, v,\, 0) \in S \times \mathbb{R}^+ \; .$$

Assim, $\theta u + (1-\theta)\, v \in S$ e S é convexo.

(v) Decorre do Teorema 6.3.17 que basta mostrar que $epi\,(\Psi_S)$ é fechado se e somente se S é fechado.

Seja S fechado. Se $S = \varnothing$ então $epi\,(\Psi_S) = \varnothing$ e $epi\,(\Psi_S)$ é fechado. Suponhamos $S \neq \varnothing$. Então $epi\,(\Psi_S) = S \times \mathbb{R}^+$. Consideremos uma seqüência $\{\ (u_n,\, \lambda_n)\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset S \times \mathbb{R}^+$ tal que $u_n \to u$ em V e $\lambda_n \to \lambda$ em $\mathbb{R}$. Como $\{\ u_n\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset S$ e S é fechado, temos $u \in S$; como $\lambda_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\lambda \geq 0$. Assim, $(u,\, \lambda) \in S \times \mathbb{R}^+$ e $epi\,(\Psi_S) = S \times \mathbb{R}^+$ é fechado.

Seja $epi\,(\Psi_S)$ fechado. Se $epi\,(\Psi_S) = \varnothing$ então $S = \varnothing$ e S é fechado. Suponhamos $epi\,(\Psi_S) \neq \varnothing$. Então $epi\,(\Psi_S) = S \times \mathbb{R}^+$. Seja $\{\ u_n\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset S$ tal que $u_n \to u$ em V. Seja $\lambda_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N} : \{\ (u_n,\, \lambda_n)\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset S \times \mathbb{R}^+$ verifica $u_n \to u$ em V e $\lambda_n \to 0$ em $\mathbb{R}$. Como $epi\,(\Psi_S)$ é fechado, temos $(u,\, 0) \in S \times \mathbb{R}^+$, de modo que $u \in S$ e S é fechado.

(vi) Basta notar que Ψ_S não assume o valor $-\infty$ e $dom\,(\Psi_S) = S$.

(vii) Notemos inicialmente que $co\,(S \times \mathbb{R}^+) = co\,(S) \times \mathbb{R}^+$: com efeito, se $(u,\, \lambda) \in co\,(S \times \mathbb{R}^+)$ então existem u_1, ..., u_n elementos de S; λ_1, ..., λ_n elementos de $\mathbb{R}^+$ e θ_1, ..., θ_n também elementos de $\mathbb{R}^+$ tais que

$$u = \sum_{i\,=\,1}^{n} \theta_i u_i \;,\; \lambda = \sum_{i\,=\,1}^{n} \theta_i \lambda_i \;,\; \sum_{i\,=\,1}^{m} \theta_i = 1.$$

Assim, $u \in co\,(S)$ e $\lambda \in \mathbb{R}^+$, de forma que $(u,\, \lambda) \in co\,(S) \times \mathbb{R}^+$. Temos então $co\,(S \times \mathbb{R}^+) \subset co\,(S) \times \mathbb{R}^+$.

Reciprocamente, se $u \in co\,(S)$ e $\lambda \in \mathbb{R}^+$ então então existem u_1, ..., u_n elementos de S e θ_1, ..., θ_n elementos de $\mathbb{R}^+$ tais que

$$u = \sum_{i\,=\,1}^{n} \theta_i u_i \ , \ \sum_{i\,=\,1}^{m} \theta_i = 1.$$

Tomando $\lambda_1 = \lambda \in \mathbb{R}^+$ para $i = 1$, ..., n, temos também $\lambda = \sum\limits_{i\,=\,1}^{n} \theta_i \lambda_i$, de modo que temos $(u,\, \lambda) \in co\,(S \times \mathbb{R}^+)$. Logo, temos também $co\,(S) \times \mathbb{R}^+ \subset co\,(S \times \mathbb{R}^+)$.

Assim, $co\,(epi\,(\Psi_S)) = co\,(S \times \mathbb{R}^+) = co\,(S) \times \mathbb{R}^+$. Resulta que $co\,(\Psi_S)\,(u) = +\infty$ se $u \notin co\,(S)$ e, para $u \in co\,(S)$,

$$S\,(u) = \{\ \lambda \in \mathbb{R} : (u,\, \lambda) \in co\,(epi\,(\Psi_S))\} = \mathbb{R}^+ \Longrightarrow co\,(\Psi_S)\,(u) = 0\ .$$

Temos então

$$co\,(\Psi_S)\,(u) = 0\ ,\ \text{ se } u \in co\,(S) \quad ; \quad co\,(\Psi_S)\,(u) = +\infty\ ,\ \text{ se } u \notin co\,(S) \quad ,$$

isto é, $co\,(\Psi_S) = \Psi_{co(S)}$.

(viii) Notemos inicialmente que $\overline{S \times \mathbb{R}^+} = \overline{S} \times \mathbb{R}^+$: com efeito, se $(u,\, \lambda) \in \overline{S \times \mathbb{R}^+}$ então existe $\{\ (u_n,\, \lambda_n)\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset S \times \mathbb{R}^+$ tal que $u_n \to u$ em V e $\lambda_n \to \lambda$ em $\mathbb{R}$. Como $\{\ u_n\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset S$, temos $u \in \overline{S}$; como $\lambda_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\lambda \geq 0$. Assim, $(u,\, \lambda) \in \overline{S} \times \mathbb{R}^+$ e temos $\overline{S \times \mathbb{R}^+} \subset \overline{S} \times \mathbb{R}^+$.

De maneira recíproca, se $(u,\, \lambda) \in \overline{S} \times \mathbb{R}^+$, então $u \in \overline{S}$ e existe $\{\ u_n\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset S$ tal que $u_n \to u$ em V. Seja $\lambda_n = \lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$: $\{\ (u_n,\, \lambda_n)\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset S \times \mathbb{R}^+$ verifica $u_n \to u$ em V e $\lambda_n \to \lambda$ em $\mathbb{R}$. Assim, $(u,\, \lambda) \in \overline{S \times \mathbb{R}^+}$, de modo que temos também $\overline{S} \times \mathbb{R}^+ \subset \overline{S \times \mathbb{R}^+}$.

Assim, $\overline{epi\,(\Psi_S)} = \overline{S \times \mathbb{R}^+} = \overline{S} \times \mathbb{R}^+$. Resulta que $\overline{\Psi_S}\,(u) = +\infty$ se $u \notin \overline{S}$ enquanto, para $u \in \overline{S}$,

$$S\,(u) = \left\{\ \lambda \in \mathbb{R} : (u,\, \lambda) \in \overline{epi\,(\Psi_S)}\right\} = \mathbb{R}^+ \Longrightarrow \overline{\Psi_S}\,(u) = 0\ .$$

Logo,

$$\overline{\Psi_S}\,(u) = 0\ ,\ \text{ se } u \in \overline{S} \quad ; \quad \overline{\Psi_S}\,(u) = +\infty\ ,\ \text{ se } u \notin \overline{S} \quad ,$$

de onde $\overline{\Psi_S} = \Psi_{\overline{S}}$.

(ix) De (viii), temos $\overline{co\,(S \times \mathbb{R}^+)} = \overline{co\,(S)} \times \mathbb{R}^+$, de modo que $\overline{co\,(S \times \mathbb{R}^+)} = \overline{co\,(S) \times \mathbb{R}^+} = \overline{co\,(S)} \times \mathbb{R}^+$. Resulta desta igualdade, combinada à proposição 5.3.7, que $\overline{co}\,(S \times \mathbb{R}^+) = \overline{co}\,(S) \times \mathbb{R}^+$. Logo, $\overline{co}\,(\Psi_S)\,(u) = +\infty$ se $u \notin \overline{co}\,(S)$ enquanto, para $u \in \overline{co}\,(S)$,

$$S\,(u) = \{\ \lambda \in \mathbb{R} : (u,\, \lambda) \in \overline{co}\,(epi\,(\Psi_S))\} = \mathbb{R}^+ \Longrightarrow \overline{co}\,(\Psi_S)\,(u) = 0\ .$$

Assim

$$\overline{co}\,(\Psi_S)\,(u) = 0\ ,\ \text{ se } u \in \overline{co}\,(S) \quad ; \quad \overline{co}\,(\Psi_S)\,(u) = +\infty\ ,\ \text{ se } u \notin \overline{co}\,(S) \quad ,$$

e $\overline{co}\,(\Psi_S) = \Psi_{\overline{co}(S)}$.

(x) é uma conseqüência imediata de (ix).

(xi) Seja $u \in S$. Mostremos que $N\,(u, co\,(S)) \subset \partial\Psi_S\,(u)$: se $p \in N\,(u, co\,(S))$ então (Cf. proposição 5.6.12)

$$(p,\, v - u) \leq 0, \,\forall\, v \in co\,(S)\,.$$

Ora, $S \subset co\,(S)$ e $\Psi_S\,(v) = \Psi_S\,(u) = 0$ para todo $v \in S$, de modo que

$$\forall\, v \in S : \Psi_S\,(v) \geq \Psi_S\,(u) + (p,\, v - u)\,.$$

Seja agora $v \notin S$. Neste caso $\Psi_S\,(v) = +\infty$, de modo que

$$\forall\, v \notin S : \Psi_S\,(v) \geq \Psi_S\,(u) + (p,\, v - u)\,.$$

Assim,

$$\forall\, v \in V : \Psi_S\,(v) \geq \Psi_S\,(u) + (p,\, v - u) \Longrightarrow p \in \partial\Psi_S\,(u)\,.$$

Logo, $N\,(u, co\,(S)) \subset \partial\Psi_S\,(u)$.
Mostremos que $\partial\Psi_S\,(u) \subset N\,(u, co\,(S))$. Seja $p \in \partial\Psi_S\,(u)$. Seja $v \in co\,(S)$: então existem v_1, ..., v_n elementos de S e θ_1, ..., θ_n elementos de $\mathbb{R}^+$ tais que

$$v = \sum_{i\,=\,1}^{n} \theta_i v_i\ ,\ \sum_{i\,=\,1}^{m} \theta_i = 1.$$

Assim,

$$(p,\, v - u) = \sum_{i\,=\,1}^{n} \theta_i\,(p,\, v_i - u)\ \ .$$

Como $p \in \partial\Psi_S\,(u)$, temos, para $i = 1$, ..., n

$$\Psi_S\,(v_i) \geq \Psi_S\,(u) + (p,\, v_i - u) \Longrightarrow (p,\, v_i - u) \leq 0\ ,$$

de modo que $(p,\, v - u) \leq 0$. Resulta que (Cf. proposição 5.6.12)

$$(p,\, v - u) \leq 0, \,\forall\, v \in co\,(S) \Longrightarrow p \in N\,(u, co\,(S))\,.$$

Assim, $\partial\Psi_S\,(u) \subset N\,(u, co\,(S))$ e $N\,(u, co\,(S)) \subset \partial\Psi_S\,(u)$, de onde a primeira parte do resultado enunciado.

Por outro lado, $N(u, co(S)) = N(u, \overline{co}(S))$: com efeito, como $co(S) \subset \overline{co}(S)$,

$$(p,\, v-u) \leq 0,\, \forall\, v \in \overline{co}(S) \Longrightarrow (p,\, v-u) \leq 0,\, \forall\, v \in co(S)\,,$$

de forma que $N(u, \overline{co}(S)) \subset N(u, co(S))$. De maneira recíproca, se $p \in co(S)$ então

$$(p,\, v-u) \leq 0,\, \forall\, v \in co(S)\ .$$

Seja $v \in \overline{co}(S)$: então existe uma seqüência $\{\ v_n\ \}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset co(S)$ tal que $v_n \to v$ em V. Como $v \to (p,\, v-u)$ é contínua, temos d

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : (p,\, v_n - u) \leq 0 \Longrightarrow (p,\, v-u) \leq 0\ ,$$

de modo que $p \in N(u, \overline{co}(S))$. Assim, $N(u, co(S)) \subset N(u, \overline{co}(S))$ e temos o resultado enunciado.

(xii) Basta constatar que, para todo $u \in S$, $\Psi_S(u) = 0 \leq \Psi_S(v)$, para todo $v \in V$.

(xiii) De (xii), temos $\{\ 0\ \} \subset \partial\Psi_S(u)$. Suponhamos que existe $p \in \partial\Psi_S(u)$ tal que $p \neq 0$. Então $\|\ p\ \| > 0$. Se $u \in int(S)$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(u) \subset S$. Ora, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n}\|\ p\ \| \leq \varepsilon \Longrightarrow u + \frac{1}{n}p \in B_\varepsilon(u) \Longrightarrow u + \frac{1}{n}p \in S\ .$$

Assim,

$$\frac{1}{n}\|\ p\ \|^2 = \left(p,\, \frac{1}{n}p\right) = \left(p,\, u + \frac{1}{n}p - u\right) \leq 0\ \Longrightarrow \|\ p\ \| = 0.$$

Logo, $0 < \|\ p\ \| = 0$, o que é absurdo e temos o resultado enunciado.

(xiv) Se $S \neq \varnothing$, então existe $w \in S \Longrightarrow \Psi_S(w) = 0 \in \mathbb{R}$. Assim, resultado decorre do Lema 6.7.9.

(xv) $\Psi_{\overline{S}} = \overline{\Psi_S} \leq \Psi_S$, de forma que $J+\ \Psi_{\overline{S}} \leq J + \Psi_S$. Além disto, como J é contínuo, J é sci (Cf. proposição 6.3.6). Ora, $\Psi_{\overline{S}} = \overline{\Psi_S}$ é sci, de modo que $J+\ \Psi_{\overline{S}}$ é sci (Cf. proposição 6.3.16). Resulta que $J+\ \Psi_{\overline{S}}$ é um funcional sci minorando $J + \Psi_S$: temos então $J+\ \Psi_{\overline{S}} \leq \overline{J + \Psi_S}$ (Cf. proposição 6.5.5). Assim, $epi\left(\overline{J + \Psi_S}\right) = \overline{epi\,(J + \Psi_S)} \subset epi\,(J + \Psi_{\overline{S}})$.

Mostremos a recíproca: seja

$$(u,\, \lambda) \in epi\,(J + \Psi_{\overline{S}}) = \left\{\ (u,\, \lambda) \in V \times \mathbb{R} : u \in \overline{S} \text{ e } \lambda \geq J(u)\ \right\}.$$

Então, existe uma seqüência $\{\ u_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset S$ tal que $u_n \to u$ em V. Seja $\lambda_n = J\,(u_n) + \lambda - J\,(u)$. Como J é contínuo,

$$\lambda_n = \lambda + \underbrace{J\,(u_n) - J\,(u)}_{\to\ 0} \to \lambda \quad \text{e} \quad \lambda_n = J\,(u_n) + \underbrace{\lambda - J\,(u)}_{\geq\ 0} \geq J\,(u_n)\,,$$

de modo que $\{\ (u_n,\,\lambda_n)\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset epi\,(J + \Psi_S)$ e $(u_n,\,\lambda_n) \to (u,\,\lambda)$. Resulta que $(u,\,\lambda) \in \overline{epi\,(J + \Psi_S)} = epi\,\left(\overline{J + \Psi_S}\right)$. Assim,$epi\,(J + \Psi_{\overline{S}}) \subset epi\,\left(\overline{J + \Psi_S}\right)$, o que completa a prova.

■

O resultado seguinte é bastante útil:

Teorema 7.1.4. *Seja S um convexo não-vazio. Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional convexo próprio.*

(i) *Se existe $\tilde{u} \in S$ tal que J é contínuo em $\tilde{u}$ então $\partial\,(J + \Psi_S)\,(u) = \partial J\,(u) + \partial\Psi_S\,(u)$ em todo ponto $u \in V$.*

(ii) *Se $int\,(S) \neq \varnothing$ então $\partial\,(J + \Psi_S)\,(u) = \partial J\,(u) + \partial\Psi_S\,(u)$ em todo ponto $u \in V$.*■

Prova. Observemos que Ψ_S é convexa própria (Cf. Lema 7.1.3). Assim, (i) decorre do Teorema 6.7.17. (ii) também resulta deste teorema: se $int\,(S) \neq \varnothing$ então $int\,(dom\,(\Psi_S)) \neq \varnothing$ e Ψ_S é contínua sobre $int\,(dom\,(\Psi_S))$ (Cf. proposição 6.2.4. Pode-se também observar que $\Psi_S = 0$ sobre $int\,(S)$). Assim, existe $\tilde{u} \in S$ tal que Ψ_S é contínuo em $\tilde{u}$. ■

Temos também:

Teorema 7.1.5. *Sejam $S \subset V$ não-vazio e $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. Se $u \in S$ é tal que $J\,(u) \in \mathbb{R}$ e $\partial J\,(u) \neq \varnothing$ então $(J + \Psi_S)^{**}\,(u) = J^{**}\,(u) + \Psi_S^{**}\,(u) = J\,(u) + \Psi_S\,(u)$.*■

Prova. Temos $J^{**} \leq J$ e $\Psi_S^{**} \leq \Psi_S$, de modo que $J^{**} + \Psi_S^{**} \leq J + \Psi_S$. Decorre da proposição 6.6.4 que $J^{**} + \Psi_S^{**} \leq (J + \Psi_S)^{**} \leq J + \Psi_S$. O Corolário 6.7.11 mostra que $J^{**}\,(u) = J\,(u)$. Por outro lado, $S \subset \overline{co}\,(S)$, de modo que $\Psi_S^{**}\,(u) = \Psi_{\overline{co}(S)}\,(u) = 0 = \Psi_S\,(u)$. Assim, $J^{**}\,(u) + \Psi_S^{**}\,(u) = J\,(u) + \Psi_S\,(u)$. Temos então

$$J\,(u) + \Psi_S\,(u) = J^{**}\,(u) + \Psi_S^{**}\,(u) \leq (J + \Psi_S)^{**}\,(u) \leq J\,(u) + \Psi_S\,(u)\,,$$

de onde $(J + \Psi_S)^{**}\,(u) = J^{**}\,(u) + \Psi_S^{**}\,(u) = J\,(u) + \Psi_S\,(u)$. ■

7.1.2 Coercividade

Definição 7.1.6. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. Diremos que J é coercivo se e somente se, para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $N \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\| u \| \geq N \Longrightarrow J(u) \geq M \ . \blacksquare$$

Podemos caracterizar os funcionais coercivos através do seguinte Lema:

Lema 7.1.7. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. J é coercivo se e somente se, para toda seqüência $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$*

$$\| u_n \| \to +\infty \Longrightarrow J(u_n) \to +\infty \ . \blacksquare$$

Prova. Seja J coercivo. Consideremos $M \in \mathbb{R}$. Então existe $N \in \mathbb{R}$ tal que

$$\| v \| \geq N \Longrightarrow J(v) \geq M.$$

Como $\| u_n \| \to +\infty$, existe n_0 tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \| u_n \| \geq N \Longrightarrow J(u_n) \geq M.$$

Assim, $J(u_n) \to +\infty$.

Suponhamos que $\| u_n \| \to +\infty \Longrightarrow J(u_n) \to +\infty$. Se J não é coercivo, então existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in V$ tal que

$$\| u_n \| \geq n \ \text{ e } \ J(u_n) < M.$$

Mas então $\| u_n \| \to +\infty$, de modo que $J(u_n) \to +\infty$ e $M \geq +\infty$, o que é absurdo, pois $M \in \mathbb{R}$. ■

Temos, por exemplo,

Lema 7.1.8. *Seja $S \subset V$ e Ψ_S a função indicatriz de S. Então Ψ_S é coerciva se e somente se S é limitado, isto é, se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $S \subset B_M(0)$. Neste caso, $J + \Psi_S$ é coercivo para todo funcional próprio $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$.* ■

Prova. Seja Ψ_S coerciva. Se S não é limitado então, para todo $n \in N$, existe $u_n \in S$ tal que $\| u_n \| > n$. A seqüência $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ verifica $\| u_n \| \to +\infty$ e $\Psi_S(u_n) = 0 \to 0$. Ora, decorre da coercividade de Ψ_S que $\Psi_S(u_n) \to +\infty$. Assim, $0 = +\infty$, o que é absurdo.

Seja S limitado: então existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\| v \| \leq M$ para todo $v \in V$. Seja $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ tal que $\| u_n \| \to +\infty$. Então existe n_0 tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \| u_n \| \geq M + 1 > M \Longrightarrow u_n \notin S \Longrightarrow \Psi_S (u_n) = +\infty.$$

Assim, Ψ_S é coerciva se e somente se S é limitado. Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ próprio. Então J não assume o valor $-\infty$. Logo, para $u \notin S$, temos $(J + \Psi_S)(u) = J(u) + \Psi_S(u) = +\infty$. Assim, $n \geq n_0 \Longrightarrow (J + \Psi_S)(u_n) = +\infty$, de modo que $J + \Psi_S$ é coerciva. ■

Uma das propriedades importantes dos funcionais coercivos é a seguinte:

Lema 7.1.9. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional coercivo. Seja $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ uma seqüência tal que $\{ J(u_n) \}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é limitada superiormente. Então $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ é limitada. Por conseguinte, se V é separável, $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ admite uma subseqüência fracamente convergente.* ■

Prova. Como $\{ J(u_n) \}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é limitada superiormente, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $J(u_n) \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ não é limitada, então, para todo $k \in N$, existe um índice $n(k) \in \mathbb{N}$ tal que $\left\| u_{n(k)} \right\| > k$. Temos então $\left\| u_{n(k)} \right\| \to +\infty$ e decorre da coercividade de J que $J\left(u_{n(k)}\right) \to +\infty$. Ora, $J\left(u_{n(k)}\right) \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $M \geq +\infty$, o que é absurdo, pois $M \in \mathbb{R}$.

A existência de uma subseqüência fracamente convergente decorre do Teorema 4.9.8. ■

Um critério prático para determinar se um funcional é coercivo é dado pelo resultado seguinte:

Lema 7.1.10. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. Se existem $M \in \mathbb{R}$ e uma função $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{t \to +\infty} a(t) = +\infty$ e $J(v) \geq a(\| v \|)$ quando $\| v \| \geq M$, então J é coercivo.* ■

Prova. Seja $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ uma seqüência tal que $\| u_n \| \to +\infty$. Então existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \| u_n \| \geq M \Longrightarrow J(u_n) \geq a(\| u_n \|) \to +\infty$$

e o resultado decorre do Lema 7.1.7. ■

Quando J não é coercivo, podemos utilizar uma aproximação de J:

Teorema 7.1.11. *Seja* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *um funcional. Seja* $\{ P_\varepsilon \}_{\varepsilon > 0}$ *uma família de funcionais* $P_\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ *tais que* $P_\varepsilon (v) \geq 0$ *para todo* $v \in V$ *e* $\varepsilon > 0$*;*

$$\forall\ v \in V \ : \ P_\varepsilon (v) \underset{\varepsilon \to 0+}{\to} 0 \ ;$$

existe $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\forall\ v \in V \ : \ P_\varepsilon (v) \geq a (\| \ v \ \| , \varepsilon) \quad ; \quad \forall\ \beta \geq 0 \ : \ \lim_{t \to +\infty} [a (t, \varepsilon) - \beta t] = +\infty$$

Se existe $p \in V$ *tal que* $J^* (p) < +\infty$*, então* $J_\varepsilon : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *dado por*

$$J_\varepsilon (v) = J (v) + P_\varepsilon (v)$$

verifica

(i) J_ε *é coercivo para todo* $\varepsilon > 0$.

(ii) $J_\varepsilon (v) \to J (v)$ *quando* $\varepsilon \to 0+$.

(iii) $J \leq J_\varepsilon$.

(iv) $\inf (J_\varepsilon) \to \inf (J)$ *quando* $\varepsilon \to 0+$. ■

Prova.

(i) Como $J^* (p) < +\infty$, existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma \geq J^* (p)$. Assim,

$$\sup \{ \ (p, v) - J (v) : v \in V \ \} \leq \gamma \Longrightarrow J (v) \geq (p, v) + \gamma, \forall\ v \in V \ .$$

Ora, a desigualdade de Cauchy-Schwarz mostra que

$$(p, v) \geq - \| \ p \ \| \| \ v \ \|$$

de modo que

$$\forall\ v \in V : J (v) \geq -\beta \| \ v \ \| + \ \gamma \ \ ; \ \ \beta = \| \ p \ \| \ \ .$$

Assim

$$\forall\ v \in V : J_\varepsilon (v) = J (v) + P (v, \varepsilon) \geq a (\| \ v \ \| , \varepsilon) - \beta \| \ v \ \| + \ \gamma \ .$$

Como

$$\lim_{t \to +\infty} [a (t, \varepsilon) - \beta t + \ \gamma] = \gamma + \lim_{t \to +\infty} [a (t, \varepsilon) - \beta t] = +\infty \ ,$$

decorre do Lema 7.1.10 que J_ε é coercivo.

(ii) Por outro lado, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} P_\varepsilon(v) = 0$, de forma que

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} J_\varepsilon(v) = J(v) + \lim_{\varepsilon \to 0+} P_\varepsilon(v) = J(v)$$

e temos (ii).

(iii) Além disto, $P_\varepsilon(v) \geq 0$, de modo que $J_\varepsilon(v) \geq J(v)$ e temos (iii).

(iv) Sejam $m_\varepsilon = \inf(J_\varepsilon)$, $m = \inf(J)$. Como $J \leq J_\varepsilon$, temos

$$m \leq m_\varepsilon \Longrightarrow m \leq \lim_{\varepsilon \to 0+} m_\varepsilon \ .$$

Ora, para todo $\eta > 0$, existe $u_\eta \in V$ tal que

$$m \leq J(u_\eta) < m + \eta \ .$$

Ora,

$$m_\varepsilon \leq J_\varepsilon(u_\eta) \Longrightarrow \lim_{\varepsilon \to 0+} m_\varepsilon \leq \lim_{\varepsilon \to 0+} J_\varepsilon(u_\eta) = J(u_\eta) < m + \eta \ .$$

Assim,

$$\forall\, \eta > 0 : m \leq \lim_{\varepsilon \to 0+} m_\varepsilon < m + \eta \ ,$$

de modo que $m_\varepsilon \to m$ quando $\varepsilon \to 0+$ e temos (iv).

■

7.2 Resultados Fundamentais

Nosso primeiro resultado fundamental é o seguinte:

Lema 7.2.1. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional próprio. Então* $\inf(J) < +\infty$. *Se, além disto, J é fracamente sci e coercivo, então* $\inf(J) = m \in \mathbb{R}$. ■

Prova. Como J é próprio, J não assume o valor $-\infty$ e existe $\tilde{v} \in V$ tal que $J(\tilde{v}) \in \mathbb{R}$ (Cf. definição 6.1.12). Se $\inf(J) = +\infty$, então $J(\tilde{v}) = +\infty$, o que é absurdo, pois $J(\tilde{v}) \in \mathbb{R}$.

Suponhamos que, além de próprio, J é fracamente sci e coercivo. Se $m = -\infty$ então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um elemento $u_n \in V$ tal que $J(u_n) \leq -n$. Então $J(u_n) \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\{ J(u_n) \}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é limitada superiormente. Resulta do Lema 7.1.9 que a seqüência $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ é limitada: por conseguinte, ela admite uma subseqüência fracamente convergente (Cf. Teorema 4.9.8). Seja $\left\{ u_{n(k)} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \left\{ u_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $u_{n(k)} \underset{k \to +\infty}{\rightharpoonup} u$ em V. Como J é próprio, temos $J(u) > -\infty$. Por outro lado,

$$\inf \left\{ J\left(u_{n(k)}\right) : k \geq p \right\} \leq J\left(u_{n(p)}\right) \leq -p \ ,$$

de modo que $\liminf J\left(u_{n(k)}\right) = -\infty$. Como J é fracamente sci, temos

$$J(u) \leq \lim\ \inf\ J\left(u_{n(k)}\right) = -\infty \Longrightarrow J(u) = -\infty.$$

Mas então $-\infty = J(u) > -\infty$, o que é absurdo. Logo, $m \in \mathbb{R}$. ■

Nosso segundo resultado fundamental é o seguinte:

Teorema 7.2.2. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. Então são equivalentes:*

(i) *u é solução do problema 7.0.18*

(ii) $0 \in \partial J(u)$.

(iii) *Existe $I : V \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $I \leq J$, $0 \in \partial I(u)$ e $I(u) = J(u)$.*

(iv) $0 \in \partial J^{**}(u)$ *e* $J^{**}(u) = J(u)$.

(v) $0 \in \partial\left(\overline{co}(J)\right)(u)$ *e* $\overline{co}(J)(u) = J(u)$.

(vi) $0 \in \partial\overline{J}(u)$ *e* $\overline{J}(u) = J(u)$.

(vii) $0 \in \partial\left(co(J)\right)(u)$ *e* $co(J)(u) = J(u)$.■

Este teorema resulta dos seguintes lemas:

Lema 7.2.3. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. Então u é solução do problema 7.0.18 se e somente se* $0 \in \partial J(u)$. ■

Prova. Temos

$$\forall\, v \in V : J(v) \geq J(u)$$

se e somente se

$$\forall\, v \in V : J(v) \geq J(u) + (0,\, v - u) = J(u) \iff 0 \in \partial J(u)\,,$$

de onde o resultado enunciado. ■

Lema 7.2.4. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional. Então u é solução do problema 7.0.18 se e somente se existe $I : V \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $I \leq J$, $0 \in \partial I(u)$ e $I(u) = J(u)$.* ■

Prova. ($\Longrightarrow$) : Basta tomar $I = J$.

($\Longleftarrow$) : Como $0 \in \partial I(u)$, o Lema 7.2.3 mostra que $I(u) = \inf(I)$. Assim, $J(u) = I(u) = \inf(I)$. Ora, $I \leq J$, de modo que $\inf(I) \leq \inf(J)$. Assim, $J(u) \leq \inf(J)$. Esta desigualdade implica que $J(u) = \inf(J)$, de onde o resultado enunciado. ■

prova do Teorema 7.2.2. : Os lemas 7.2.3 e 7.2.4 mostram que (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). As equivalências (i) $\Longleftrightarrow$ (iv), (i) $\Longleftrightarrow$ (v), (i) $\Longleftrightarrow$ (vi), (i) $\Longleftrightarrow$ (vii) resultam do Lema 7.2.4, tomando, respectivamente, $I = J^{**}$(para (iv)), $I = \overline{co}(J)$(para (v)), $I = \overline{J}$(para (vi)), $I = co(J)$(para (vii)). Todos estes funcionais são minorantes de J (Cf. proposições 6.6.4 para J^{**}, 6.5.6 para $\overline{co}(J)$, 6.5.5 para $\overline{J}$, 6.5.4 para $co(J)$). ■

Quando $\inf(J)$ é finito, temos também:

Teorema 7.2.5. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional tal que $\inf(J) = m \in \mathbb{R}$. Seja $u \in V$ tal que $J(u) \in \mathbb{R}$. Então são equivalentes:*

(i) *u é solução do problema 7.0.18 ;*

(ii) *$0 \in \partial J(u)$;*

(iii) *$\partial J(u) \neq \varnothing$ e existe $I : V \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $J^{**} \leq I \leq J$ e $0 \in \partial I(u)$.*

(iv) *$0 \in \partial J^{**}(u)$ e $\partial J(u) \neq \varnothing$.*

(v) *$0 \in \partial(\overline{co}(J))(u)$ e $\partial J(u) \neq \varnothing$.*

(vi) *$0 \in \partial\overline{J}(u)$ e $\partial J(u) \neq \varnothing$.*

(vii) *$0 \in \partial(co(J))(u)$ e $\partial J(u) \neq \varnothing$.* ■

Este teorema resulta do Lema seguinte:

Lema 7.2.6. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional tal que $\inf(J) = m \in \mathbb{R}$. Seja $u \in V$ tal que $J(u) \in \mathbb{R}$. Então u é solução do problema 7.0.18 se e somente se $\partial J(u) \neq \varnothing$ e existe $I : V \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $J^{**} \leq I$; $0 \in \partial I(u)$ e $\inf(I) = \inf(J)$.* ■

Prova. ($\Longrightarrow$) : Basta tomar $I = J$ e notar que $0 \in \partial J(u)$.

($\Longleftarrow$) : Como $0 \in \partial I(u)$, decorre do Lema 7.2.3 que $I(u) = \inf(I)$. Assim, $I(u) = \inf(J)$. Ora, $J^{**} \leq I$, de modo que $J^{**}(u) \leq \inf(J)$. Assim, $J^{**}(u) \leq \inf(J)$. Esta desigualdade implica que $J^{**}(u) = \inf(J)$.

Por outro lado, $J(u) \in \mathbb{R}$ e $\partial J(u) \neq \varnothing$: decorre do Corolário 6.7.11 que $J(u) = J^{**}(u)$ e $\partial J(u) = \partial(J^{**})(u)$. Assim, temos $J(u) = \inf(J)$, de onde o resultado enunciado. ∎

prova do Teorema 7.2.5. O Lema 7.2.3 mostra que (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).Tomando $I = J$, temos (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Como $\inf(J^{**}) = \inf(J)$ (Cf. proposição 6.6.4),

$$J^{**} \leq I \leq J \Longrightarrow \inf(J^{**}) \leq \inf(I) \leq \inf(J) \Longrightarrow \inf(I) = \inf(J) \ .$$

Assim, o Lema 7.2.6 mostra que (iii) $\Longrightarrow$ (ii). As equivalências (i) $\Longleftrightarrow$ (iv), (i) $\Longleftrightarrow$ (v), (i) $\Longleftrightarrow$ (vi), (i) $\Longleftrightarrow$ (vii) resultam do Lema 7.2.6, tomando, respectivamente, $I = J^{**}$(para (iv)), $I = \overline{co}(J)$(para (v)), $I = \overline{J}$(para (vi)), $I = co(J)$(para (vii)). Todos estes funcionais são minorantes de J (Cf. proposições 6.6.4 para J^{**}, 6.5.6 para $\overline{co}(J)$, 6.5.5 para $\overline{J}$, 6.5.4 para $co(J)$) e minorados por J^{**}(Cf. proposição 6.6.4). ∎

Temos o resultado clássico seguinte:

Teorema 7.2.7. *Sejam V um espaço de Hilbert separável e $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional próprio, fracamente sci e coercivo. Então o problema 7.0.18 admite uma solução.* ∎

Prova. Seja $m = \inf_V J$. Como J é próprio, $m \in \mathbb{R}$ (Cf. Lema 7.2.1). Assim, para todo $n > 0$, existe um elemento $u_n \in V$ tal que $m \leq J(u_n) \leq m + \dfrac{1}{n+1}$. Então, passando ao limite para $n \to +\infty$:

$$J(u_n) \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} m$$

e $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ é uma seqüência minimizante.

Além disto, $J(u_n) \leq m + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $\{ J(u_n) \}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é limitada superiormente. Decorre do Lema 7.1.9 que a seqüência $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ é limitada e, por conseguinte, do Teorema 4.9.8 que ela admite uma subseqüência fracamente convergente. Seja $\{ u_{n_k} \}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $u_{n_k} \underset{k \to +\infty}{\rightharpoonup} u$ em V. Esta subseqüência também é minimizante e $J(u_{n_k}) \longrightarrow m$ quando $k \to +\infty$ (Cf. Lema 7.1.2). Temos então $\liminf J(u_{n_k}) = m$ (Cf. proposição 6.3.8). Dado que J é fracamente sci, temos

$$J(u) \leq \lim\ \inf\ J(u_{n_k}) = m.$$

Assim, $m \leq J(u) \leq m$, de modo que $J(u) = m$ e u é solução do problema 7.0.18. Logo, o problema o problema 7.0.18 admite uma solução. ∎

Corolário 7.2.8. *Sejam V um espaço de Hilbert separável e $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional convexo próprio sci coercivo. Então o problema 7.0.18 admite uma solução. Se, além disto, J é estritamente convexa, então a solução de 7.0.18 é única.* ■

Prova. Como J é convexo sci, o 6.3.19 mostra que J é fracamente sci. Assim, resulta do Teorema 7.2.7 que existe $u \in V$ tal que $J(u) = m = \inf_V J$.

Se J é estritamente convexa, u é a única solução: seja $v \in V$ tal que $J(v) = m$. Suponhamos $u \neq v$: consideremos $w = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$. Como $w \in V$, temos $J(w) \geq m$. Por outro lado, a convexidade estrita de J mostra que

$$J(w) < \frac{1}{2}J(u) + \frac{1}{2}J(v) = m,$$

de forma que $m \leq J(w) < m$, o que é absurdo. ■

Corolário 7.2.9. *Sejam V um espaço de Hilbert separável e $S \subset V$, $S \neq \varnothing$, S fracamente fechado e limitado. Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional próprio fracamente sci. Então existe $u \in S$ tal que $u = \arg\min_S J$ (i. e., $u \in S$ e $J(u) = \inf(J, S)$).*■

Prova. Como S é fracamente fechado, Ψ_S é fracamente sci. Resulta que $J + \Psi_S$ é fracamente sci. Como S é limitado, $J + \Psi_S$ é coercivo. Assim, o resultado decorre do Teorema 7.2.7. ■

Quando J não é coercivo, podemos utilizar o resultado seguinte

Teorema 7.2.10. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional convexo próprio sci. Para $\varepsilon > 0$, seja $v \in V$ e*

$$J_\varepsilon(v) = J(w) + \frac{\varepsilon}{2} \| v \|^2 \ .$$

Então:

(i) *existe um único elemento $u_\varepsilon \in V$ tal que $\inf(J) \leq J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf(J_\varepsilon)$.*

(ii) *$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \to \inf(J)$ quando $\varepsilon \to 0+$.* ■

Prova. Sejam

$$P_\varepsilon(v) = \frac{\varepsilon}{2} \| v \|^2 \quad ; \ a(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} t^2 \ .$$

Temos $P_\varepsilon(v) \geq 0$ para todo $v \in V$ e $\varepsilon > 0$; $P_\varepsilon(v) \underset{\varepsilon \to 0+}{\to} 0$ para todo $v \in V$; $P_\varepsilon(v) \geq a(\| v \|, \varepsilon)$;

$$\forall \beta \geq 0 \ : \ \lim_{t \to +\infty} [a(t, \varepsilon) - \beta t] = +\infty \ .$$

Como J é proprio, existe $u \in V$ tal que $J(u) \in \mathbb{R}$. Além disto, $\mathcal{A}(J) = \{ A : V \to \mathbb{R} \text{ afim contínua e } A \leq J \} \neq \varnothing$ (Cf. Teorema 6.4.5 ou - lembrando que $J = J^{**}$- Cf. Teorema 6.6.5). Assim, existem $p \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\forall\, v \in V : (p,\, v) + \alpha \leq J(v) \Longrightarrow (p,\, v) - J(v) \leq \alpha \Longrightarrow J^*(p) \leq \alpha.$$

Logo, $J^*(p) \in \mathbb{R}$ e os resultados enunciados decorrem do Teorema 7.1.11. ■

Enfim, temos o resultado clássico seguinte:

Teorema 7.2.11. *Sejam $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional sci e $C \subset V$ um compacto. Então existe $u \in C$ tal que $u = \arg \min_C J$ (i. e., $u \in C$ e $J(u) = \inf(J, C)$).*■

Prova. Seja $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ uma seqüência minimizante do funcional $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$. Então $J(u_n) \longrightarrow \inf(J, C)$. Como C é compacto, existe uma subseqüência $\left\{ u_{n(k)} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $u_{n(k)} \longrightarrow u \in C$ (Teorema 4.5.15). Temos $J\left(u_{n(k)}\right) \longrightarrow \inf(J, C)$ (proposição 4.5.6), de forma que a semicontinuidade inferior de J mostra que

$$J(u) \leq \lim\ \inf\ J\left(u_{n(k)}\right) = \inf(J, C)\,.$$

Como $u \in C$, temos também $J(u) \geq \inf(J, C)$, de onde o resultado. ■

7.2.1 Aproximação

Como já observamos, o problema

$$u \in S \quad \text{e} \quad J(u) = \inf(J, S)$$

é equivalente ao problema

$$u \in V \quad \text{e} \quad J(u) + \Psi_S(u) = \inf(J + \Psi_S)\ ,$$

onde Ψ_S é a função indicatriz de S. A aproximação numérica deste problema é geralmente realizada em três etapas:

- *Aproximação de Ψ_S*: a manipulação numérica do funcional Ψ_S é complexa devido aos valores infinitos, de modo que utiliza-se uma aproximação $\Psi_S \approx \Psi_\alpha$, onde Ψ_α toma somente valores finitos e α é um parâmetro real, geralmente destinado a tender ao infinito - a aproximação é geralmente construída de maneira que seu limite pontual seja Ψ_S .
- *Aproximação em dimensão finita* : quando V é um espaço de dimensão infinita, utiliza-se uma aproximação : $V \approx V_n$, onde V_n é um espaço vetorial de dimensão finita - por exemplo, $\dim(V_n) = n$. V_n pode resultar, por exemplo, de aproximações de Ritz ou por elementos finitos. Neste caso, as incógnitas são os coeficientes da solução numa base de V_n - por exemplo $u \approx \sum_{i=1}^{n} u_i \omega_i$, onde $\{\omega_1, ..., \omega_n\}$ é uma base de V_n e a incógnita é $U = (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$.

- *Utilização de um método de otimização numérica*: o cálculo numérico de U é realizado através de um algoritmo de otimização numérica.

Não apresentaremos aqui os métodos de aproximação em dimensão finita ou os algoritmos de otimização numérica, mas examinaremos três maneiras clássicas de aproximação da função indicatriz Ψ_S:

- *os métodos de penalidade*, que são geralmente bem adaptados ao cálculo de U e menos indicados para o cálculo das sensibilidades (isto é, das forças nos vínculos e da influência da restrições sobre a solução). A aproximação por penalidade conduz geralmente à utilização de métodos iterativos de descida ou à resolução iterativa das equações de equilíbrio na otimização numérica. Examinaremos tanto as *penalidades externas* (ou simplesmente *penalidades*) - as quais levam a soluções aproximadas que podem ser externas ao conjunto admissível S - quanto as *penalidades internas* (ou *barreiras*), as quais levam a soluções aproximadas pertencentes ao interior de S.

- os *métodos de regularização* podem ser considerados como uma extensão dos métodos de penalização. Tais métodos podem ser fácilmente extendidos a funcionais diferentes de Ψ_S e são geralmente utilizados para aproximar funcionais irregulares por funcionais diferenciáveis no sentido de Gâteaux. A aproximação por regularização é freqüentemente utilizada em combinação com a penalidade: por exemplo, quando J é irregular, podemos começar por aproximar $J \approx J_\alpha$ - onde J_α é diferenciável - antes de utilizar a aproximação por penalidade.

- os *métodos de dualidade*, que são geralmente bem adaptados ao cálculo das sensibilidades e menos indicados para o cálculo de U. A aproximação por dualidade conduz geralmente à utilização de métodos iterativos duais (por exemplo, Uzawa, Arrow-Hurwicz) na otimização numérica.

Aproximação por Penalidade Externa

Definição 7.2.12. *Seja $P : V \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Diremos que P é um* funcional de penalidade externa (ou simplesmente de penalidade) para S *se e somente se P é fracamente sci e*

$$P(v) = 0, \textit{ se } v \in S \quad ; \quad P(v) > 0, \textit{ se } v \notin S \quad . \blacksquare$$

Temos

Lema 7.2.13. *Seja P um funcional de penalidade para S e $\Psi(\alpha;\, v) = \alpha P(v)$. Então*

(i) $\forall\ v \in V : \mathbb{R} \ni \alpha \longrightarrow \Psi(\alpha;\, v) \in \mathbb{R}$ *é crescente;*

(ii) $\forall\ v \in S : \mathbb{R} \ni \alpha \longrightarrow \Psi(\alpha;\, v) \in \mathbb{R}$ *é estritamente crescente ;*

(iii) $\forall\ v \in V : \lim\limits_{\alpha\, \to\, +\infty} \Psi(\alpha;\, v) = \Psi_S(v)$ *;*

(iv) $\forall\ v \in V : \sup\limits_{\alpha\, \geq\, \alpha_0} \Psi(\alpha;\, v) = \Psi_S(v)$ *.* ■

Prova. Seja $g(\alpha) = \alpha P(v)$.

(i) Temos $g'(\alpha) = P(v) \geq 0$, $\forall\ v \in V$, de modo que g é crescente.

(ii) Temos $g'(\alpha) = P(v) > 0$, $\forall\ v \in S$, de modo que g é estritamente crescente.

(iii) Temos

$$\lim_{\alpha\, \to\, +\infty} \alpha P(v) = \begin{cases} 0, & \text{se } v \in S \\ +\infty, & \text{se } v \notin S \end{cases}$$

de modo que $\lim\limits_{\alpha\, \to\, +\infty} \alpha P(v) = \Psi_S(v)$.

(iv) Temos

$$\sup_{\alpha\, \geq\, 0} \alpha P(v) = \begin{cases} 0, & \text{se } v \in S \\ +\infty, & \text{se } v \notin S \end{cases} \quad ,$$

de modo que $\sup\limits_{\alpha\, \geq\, \alpha_0} \alpha P(v) = \Psi_S(v)$.

■

Teorema 7.2.14. *Sejam $S \subset V$, $S \neq \varnothing$, S fracamente fechado; $J{:}V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $J(v) \in \mathbb{R}$ para todo $v \in V$ e J é fracamente sci. Seja P um funcional de penalidade para S. Consideremos $L{:}V \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$L(v;\alpha) = J(v) + \Psi(\alpha;\, v) = J(v) + \alpha P(v) \quad .$$

Se existe $\alpha_0 > 0$ tal que $V \ni v \longrightarrow L(v;\alpha)$ é coercivo para todo $\alpha \geq \alpha_0$, então

(i) $\exists\ u \in S$ *tal que* $u = \arg \min\limits_{v\, \in\, S} J(v)$ *.*

(ii) $\forall\ \alpha \geq \alpha_0 : \exists\ u_\alpha \in V$ *tal que* $u_\alpha = \arg \min\limits_{v\, \in\, V} L(v;\alpha)$ *.*

(iii) $\alpha \longrightarrow L(u_\alpha;\alpha)$ *é crescente para* $\alpha \geq \alpha_0$*.*

(iv) $\{\ u_\alpha\ \}_{\alpha\, \geq\, \alpha_0} \subset V$ *é limitada e admite uma subseqüência fracamente convergente.*

(v) *Se* $\left\{ u_{\alpha(\eta)} \right\}_\eta \subset \{ u_\alpha \}_{\alpha \geq \alpha_0}$ *verifica* $u_{\alpha(\eta)} \rightharpoonup \overline{u}$ *quando* $\eta \to +\infty$, *então* $\overline{u} \in S$ *e* $J(\overline{u}) = J(u)$, *de modo que* $\overline{u} = \arg \min_{v \in S} J(v)$.

(vi) $\lim_{\alpha \to +\infty} L(u_\alpha; \alpha) = J(u)$.

(vii) $\sup_{\alpha \geq \alpha_0} L(u_\alpha; \alpha) = J(u)$.

(viii) $J(u) = \inf_{v \in V} \sup_{\alpha \geq \alpha_0} L(v; \alpha) = \sup_{\alpha \geq \alpha_0} \inf_{v \in V} L(v; \alpha)$.■

Prova.

(i) Temos, do Lema 7.2.13.(iv), $L(v; \alpha_0) \leq J(v) + \Psi_S(v)$ para todo $v \in V$, de modo que $J + \Psi_S$ é coercivo. Além disto, Ψ_S é fracamente sci (pois S é fracamente fechado) e J é fracamente sci, de modo que $J + \Psi_S$ é fracamente sci. Assim, o resultado decorre do Teorema 7.2.7.

(ii) $V \ni v \longrightarrow L(v; \alpha)$ é coercivo e fracamente sci (pois J e P são fracamente sci) para $\alpha \geq \alpha_0$: o resultado decorre do Teorema 7.2.7.

(iii) O Lema 7.2.13 mostra que

$$\alpha_0 \leq \alpha \leq \beta \Longrightarrow L(v; \alpha) \leq L(v; \beta), \ \forall\ v \in V .$$

Assim

$$\alpha_0 \leq \alpha \leq \beta \implies \inf_{v \in V} L(v; \alpha) \leq \inf_{v \in V} L(v; \beta) ,$$

isto é,

$$\alpha_0 \leq \alpha \leq \beta \implies L(u_\alpha; \alpha) \leq L(u_\beta; \beta) .$$

(iv) Temos

$$\forall\ \alpha \geq \alpha_0 : L(u_\alpha; \alpha_0) \leq L(u_\alpha; \alpha) \leq L(u; \alpha) = J(u) \in \mathbb{R} .$$

Assim, $\{ L(u_\alpha; \alpha) \}_{\alpha \geq \alpha_0} \subset \mathbb{R}$ é limitada superiormente. Como $v \longrightarrow L(v; \alpha_0)$ é coercivo, o resultado decorre do Lema 7.1.9. Por outro lado, o Teorema 4.9.8 mostra que $\{ u_\alpha \}_{\alpha \geq \alpha_0}$ admite uma subseqüência $\left\{ u_{\alpha(k)} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ fracamente convergente: $\alpha(k) \longrightarrow +\infty$ e $u_{\alpha(k)} \rightharpoonup \overline{u}$ quando $k \longrightarrow +\infty$.

(v) Temos

$$J\left(u_{\alpha(k)}\right) + \alpha P\left(u_{\alpha(k)}\right) \leq J(u) \Longrightarrow P\left(u_{\alpha(k)}\right) \leq \frac{J(u) - J\left(u_{\alpha(k)}\right)}{\alpha(k)}.$$

Como $P\left(u_{\alpha(k)}\right) \geq 0$ e $\alpha(k) \geq \alpha_0 > 0$, temos

$$J(u) - J\left(u_{\alpha(k)}\right) \geq 0 \Longrightarrow \lim\ \sup\left(J(u) - J\left(u_{\alpha(k)}\right)\right) \geq 0 .$$

Além disto, J é fracamente sci, de modo que $I(v) = J(u) - J(v)$ é fracamente scs e

$$\lim\ \sup \left(J(u) - J\left(u_{\alpha(k)}\right)\right) \leq\ J(u) - J(\overline{u})\,.$$

Assim, $\lim\sup\left(J(u) - J\left(u_{\alpha(k)}\right)\right) \in \mathbb{R}$. Como $\lim\limits_{k\ \rightarrow\ +\infty} \dfrac{1}{\alpha(k)} = 0$, a proposição 6.3.12 mostra que

$$\lim\ \sup\ \frac{J(u) - J\left(u_{\alpha(k)}\right)}{\alpha(k)} \leq 0\ .$$

Logo,

$$0 \leq \lim\ \sup\ P\left(u_{\alpha(k)}\right) \leq \lim\ \sup\ \frac{J(u) - J\left(u_{\alpha(k)}\right)}{\alpha(k)} \leq 0\ ,$$

de modo que $\lim\sup P\left(u_{\alpha(k)}\right) = 0$. Por outro lado,

$$P\left(u_{\alpha(k)}\right) \geq 0 \Longrightarrow \lim\ \inf\ P\left(u_{\alpha(k)}\right) \geq 0,$$

de modo que (Cf. proposição 6.3.4)

$$0 \leq \lim\ \inf\ P\left(u_{\alpha(k)}\right) \leq \lim\ \sup\ P\left(u_{\alpha(k)}\right) = 0$$

e $\lim\inf P\left(u_{\alpha(\eta)}\right) = 0$. Como P é sci, temos

$$0 \leq P(\overline{u}) \leq \lim\ \inf\ P\left(u_{\alpha(k)}\right) = 0 \Longrightarrow P(\overline{u}) = 0 \Longrightarrow \overline{u} \in S.$$

Assim,

$$\forall\ \alpha \geq \alpha_0 : J\left(u_{\alpha(k)}\right) \leq J\left(u_{\alpha(k)}\right) + \alpha P\left(u_{\alpha(k)}\right) = L(u_\alpha;\alpha) \leq L(u;\alpha) = J(u)\,,$$

de modo que a semicontinuidade inferior de J mostra que

$$J(\overline{u}) \leq \lim\ \inf\ J\left(u_{\alpha(k)}\right) \leq J(u)\,.$$

Como $\overline{u} \in S$ e $u = \arg\min\limits_{v\ \in\ S} J(v)$, temos também $J(u) \leq J(\overline{u})$. Assim, $J(\overline{u}) = J(u)$.

$$J(\overline{u}) \leq \lim\ \inf\ J\left(u_{\alpha(k)}\right) \leq J(u)\,.$$

(vi) $\{\ L(u_\alpha;\alpha)\ \}_{\alpha\ \geq\ \alpha_0} \subset \mathbb{R}$ é crescente e limitada superiormente par $J(u)$. Assim, $\lim\limits_{\alpha\ \rightarrow\ +\infty} L(u_\alpha;\alpha) = m \leq J(u)$. Por outro lado,

$$L\left(u_{\alpha(k)};\alpha(k)\right) \geq J\left(u_{\alpha(k)}\right) \Longrightarrow \lim\ \inf\ L\left(u_{\alpha(k)};\alpha(k)\right) \geq J(\overline{u}) = J(u)\ \ .$$

Decorre da proposição 6.3.8 que

$$m = \lim\ \inf\ L\left(u_{\alpha(k)};\alpha(k)\right) \geq J(u)\ \ .$$

Assim, $m \leq J(u)$ e $m \geq J(u)$, de modo que $m = J(u)$.

(vii) decorre de (vi): $\{\ L\,(u_\alpha;\alpha)\ \}_{\alpha\,\geq\,\alpha_0} \subset V$ é crescente e limitada superiormente de modo que $\displaystyle\lim_{\alpha\,\to\,+\infty} L\,(u_\alpha;\alpha) = \sup_{\alpha\,\geq\,\alpha_0} L\,(u_\alpha;\alpha)$.

(viii) Temos

$$\sup_{\alpha\,\geq\,\alpha_0}\ \inf_{v\,\in\,V} L\,(v;\alpha) \quad = \quad \sup_{\alpha\,\geq\,\alpha_0} L\,(u_\alpha;\alpha) = J\,(u)$$

e

$$\inf_{v\,\in\,V}\ \sup_{\alpha\,\geq\,\alpha_0} L\,(v;\alpha) \quad = \quad \inf_{v\,\in\,V} \left(J\,(v) + \Psi_S\,(v)\right) \quad = \quad \inf_{v\,\in\,S} J\,(v) = J\,(u) \ ,$$

o que demonstra o resultado enunciado.

■

Quando V é um espaço de Sobolev (por exemplo, $V = [H^p\,(\Omega)]^n$, $p \geq 1$) e S é definido por igualdades e desigualdades algébricas:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \ , \tag{7.1}$$

onde

$$S_1 = \{\ v \in V : \varphi_i\,(v) \leq 0,\ p.p. \text{ sur } \Omega \text{ e } 1 \leq i \leq m_1\}\,; \tag{7.2}$$

$$S_2 = \{\ v \in V : \psi_i\,(v) = 0,\ p.p. \text{ sur } \Omega \text{ e } 1 \leq i \leq m_2\}\,, \tag{7.3}$$

$$\varphi_i : V \longrightarrow\ L^r\,(\Omega)\ \ ,\ \psi_j : V \longrightarrow\ L^r\,(\Omega)\ \ (\ r > 1,\ 1 \leq i \leq m_1,\ 1 \leq j \leq m_2)\,, \tag{7.4}$$

$$S_3 = \{\ v \in V : K_i\,(v) \leq 0,\ K_i : V \to \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq m_3\}\,, \tag{7.5}$$

$$S_4 = \{\ v \in V : I_i\,(v) = 0,\ I_i : V \to \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq m_4\}\,, \tag{7.6}$$

podemos construir um funcional de penalidade da forma seguinte:

Proposição 7.2.15. *Seja Ω limitado. Sejam K_i e I_j fracamente contínuas para $1 \leq i \leq m_3$ e $1 \leq j \leq m_4$; φ_i e ψ_j fracamente contínuas para $1 \leq i \leq m_1$ e $1 \leq j \leq m_2$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $g\,(\xi) > 0$ para todo $\xi > 0$, $g\,(\xi) = 0$ para todo $\xi \leq 0$ e $|\ g\,(\xi)\ | \leq M_1 + M_3\ |\ \xi\ |^s$; $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $h\,(\xi) > 0$ para todo $\xi \neq 0$, $h\,(0) = 0$ e $|\ h\,(\xi)\ | \leq M_2 + M_4\ |\ \xi\ |^t$; $M_i \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq 4$ e $s,t \leq r$. Então*

$$P\,(v) = Q\,(v) + \int_\Omega \varphi\,(v)\,dx \ ,$$

onde

$$\varphi\,(v) = \sum_{i\,=\,1}^{m_1} g\,(\ \varphi_i\,(v)\ ) + \sum_{i\,=\,1}^{m_2} h\,(\ \psi_i\,(v)\ ) \quad ,$$

$$Q\,(v) = \sum_{i\,=\,1}^{m_3} g\,(\ K_i\,(v)\ ) + \sum_{i\,=\,1}^{m4} h\,(\ I_i\,(v)\ ) \quad ,$$

é uma função de penalidade para S. ■

Prova. Por construção,

$$P(v) = 0, \text{ se } v \in S \quad ; \quad P(v) > 0, \text{ se } v \notin S \quad .$$

Assim, basta mostrar que P é fracamente sci. Seja $\{ v_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em V: Como K_i e I_j são fracamente contínuas, temos, para $1 \leq i \leq m_3$ e $1 \leq j \leq m_4$,

$$K_i(v_n) \longrightarrow K_i(v) \ \text{ e } I_j(v_n) \longrightarrow I_j(v) \ .$$

Decorre da continuidade de g e h que

$$Q(v_n) \longrightarrow Q(v) \ . \tag{7.7}$$

Por outro lado, φ_i e ψ_j fracamente contínuas, de modo que, para $1 \leq i \leq m_1$ e $1 \leq j \leq m_2$,

$$\varphi_i(v_n) \longrightarrow \varphi_i(v) \ \text{ e } \psi_j(v_n) \longrightarrow \psi_j(v) \quad \text{em } L^r(\Omega) \ .$$

Mostremos que

$$\int_\Omega \varphi(v_n) \longrightarrow \int_\Omega \varphi(v) \ . \tag{7.8}$$

Seja $W_r = [L^r(\Omega)]^{m_1+m_2}$ e

$$f_n = (\varphi_1(v_n), ..., \varphi_{m_1}(v_n), \psi_1(v_n), ..., \psi_{m_2}(v_n)).$$

Temos

$$f_n \longrightarrow f = (\varphi_1(v), ..., \varphi_{m_1}(v);\ \psi_1(v), ..., \psi_{m_2}(v)) \quad \text{em } W_r \ .$$

Assim, existe uma constante $N_r \in \mathbb{R}$ tal que $\| f_n \|_{W_r} \leq N_r$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como Ω é limitado, a desigualdade de Hölder mostra que, para $0 < a \leq s$:

$$\| f_n \|_{W_a} \leq mes(\Omega)^{(s-a)/as} \| f_n \|_{W_s} \ .$$

Assim, existem também duas constante N_r, $N_t \in \mathbb{R}$ tais que $\| f_n \|_{W_s} \leq N_s$ e $\| f_n \|_{W_t} \leq N_t$. Temos então

$$| \varphi(v_n) | \leq m_1 M_1 + m_2 M_2 + M_3 \sum_{i=1}^{m_1} | \varphi_i(v_n) |^s + M_4 \sum_{i=1}^{m_2} | \varphi_i(v_n) |^t \quad ,$$

de modo que

$$\| \varphi(v_n) \|_{L^1(\Omega)} \leq (m_1 M_1 + m_2 M_2) \ mes(\Omega) + M_3 \| f_n \|_{W_s}^s + M_4 \| f_n \|_{W_t}^t$$

e

$$\| \varphi(v_n) \|_{L^1(\Omega)} \leq (m_1 M_1 + m_2 M_2) \ mes(\Omega) + M_3 (N_s)^s + M_4 (N_t)^t \, .$$

Seja $a_n = \int_\Omega \varphi(v_n)$. Temos

$$| \ a_n \ | \leq \| \ \varphi(v_n) \ \|_{L^1(\Omega)} \ ,$$

de modo que $\{ \ a_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é limitada e, portanto, admite uma subseqüência convergente. Seja $\{ \ a_{n(k)} \ \}_{k \ \in \ \mathbb{N}} \subset \{ \ a_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}}$ tal que $a_{n(k)} \to a$ quando $k \to +\infty$. Temos (Cf. proposição 4.5.6).

$$f_{n(k)} \longrightarrow f \quad \text{em } W_r \text{ quando } k \to +\infty.$$

Por outro lado, existe uma subseqüência $\{ \ f_{n(k(m))} \ \}_{m \ \in \ \mathbb{N}} \subset \{ \ f_{n(k)} \ \}_{k \ \in \ \mathbb{N}}$ tal que

$$f_{n(k(m))} \longrightarrow f \quad p.p. \text{ sur } \Omega \Longrightarrow \varphi\left(v_{n(k(m))}\right) \longrightarrow \varphi(v) \quad p.p. \text{ sur } \Omega,$$

pois g e h são contínuas. Logo, do teorema da convergência dominada (Cf. [Wilcox & Myers 1994]),

$$\int_\Omega \varphi\left(v_{n(k(m))}\right) \longrightarrow \int_\Omega \varphi(v) \quad \text{em} \quad L^1(\Omega),$$

de modo que $a_{n(k(m))} \to \int_\Omega \varphi(v)$. Decorre da proposição 4.5.6 que $a = \int_\Omega \varphi(v)$. Assim, da proposição 4.5.8, $a_n \to \int_\Omega \varphi(v)$. ■

Aproximação por Penalidade Interna

A aproximação por penalidade externa gera pontos não admissíveis, o que é tanto uma vantagem quanto um inconveniente: por um lado, a implementação numérica envolvendo métodos iterativos não necessita um ponto inicial admissível; por outro lado, o resultado final é geralmente um ponto não admissível. Em certas circunstâncias, pode ser essencial trabalhar somente com pontos admissíveis e dispor de uma garantia de que o resultado final seja admissível. Neste caso, podemos utilizar os métodos de *penalidade interna* ou de *barreira*. Notemos que, em caso de implementação numérica envolvendo métodos iterativos, tais métodos necessitam que o ponto inicial seja admissível.

Definição 7.2.16. *Seja $S \subset V$. Diremos que x é um ponto interno de S se e somente se $x \in int(\ S\ )$. A fronteira de S é $front(\ S\ ) = S - int(\ S\ )$ e diremos que x é um ponto de fronteira de S se e somente se $x \in front(\ S\ )$.* ■

Assim, a fronteira de C é formada pelos elementos de S que não pertencem a seu interior. Os métodos de barreira utilizam a propriedade seguinte:

Lema 7.2.17. *Seja $S \subset V$ um conjunto não-vazio e fechado tal que $\overline{int\,(\ S\ )} = S$. Então todo $x \in front\,(\ S\ )$ é limite de uma seqüência de pontos internos de S, isto é, existe uma seqüência $\{\ x_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset int\,(\ S\ )$ tal que $x_n \longrightarrow x$.* ■

Prova. Basta notar que $front\,(\ S\ ) \subset S = \overline{int\,(\ S\ )}$. ■

Quando as condições deste Lema estão satisfeitas, podemos considerar:

Definição 7.2.18. *Seja $P : V \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Diremos que P é um* funcional de penalidade interna (ou de barreira) para S *se e somente se*

(i) *P é fracamente sci sobre $int\,(\ S\ )$;*

(ii) *$P\,(x) \in \mathbb{R}$ e $P\,(x) \geq 0$, $\forall\ x \in int\,(\ S\ )$;*

(iii) *Para toda seqüência $\{\ x_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset int\,(\ S\ )$ tal que $x_n \longrightarrow x \in front\,(\ S\ )$: $P\,(x_n) \longrightarrow +\infty$;*

(iv) *$P\,(x) = +\infty$, $\forall\ x \notin int\,(\ S\ )$.* ■

Quando

$$S = S_1 \cap S_3,$$

podemos construir um funcional de barreira utilizando

$$P\,(v) = \sum_{i\ =\ 1}^{m_3} \frac{1}{g\,(\ K_i\,(v)\ )} + \sum_{i\ =\ 1}^{m_1} \int_\Omega \frac{1}{g\,(\ \varphi_i\,(v)\ )} dx\ ,$$

onde $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $g\,(0) = 0$, $g\,(s) > 0$, se $s < 0$.

Temos

Lema 7.2.19. *Seja P um funcional de barreira para S e $\Psi\,(\varepsilon;\, v) = \varepsilon P\,(v)$. Então*

(i) *$\forall\ v \in S :]0,\ +\infty[\ \ni \varepsilon \longrightarrow \Psi\,(\varepsilon;\, v) \in \mathbb{R}$ é crescente;*

(ii) *$\forall\ v \in V :\ \lim\limits_{\varepsilon\ \to\ 0+} \Psi\,(\varepsilon;\, v) = \Psi_{int(\ S\ )}\,(v)$;*

(iii) *$\forall\ v \in V :\ \inf\limits_{\varepsilon\ >\ 0} \Psi\,(\varepsilon;\, v) = \Psi_{int(\ S\ )}\,(v)$.* ■

Prova. Seja $g\,(\varepsilon) = \varepsilon P\,(v)$.

(i) Temos $g'\,(\varepsilon) = P\,(v) \geq 0$, $\forall\ v \in V$, de modo que g é crescente.

(ii) Temos
$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon P(v) = \begin{cases} 0, & \text{se } v \in int(\ S\ ) \\ +\infty, & \text{se } v \notin int(\ S\ ) \end{cases}$$
de modo que $\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon P(v) = \Psi_{int(\ S\ )}(v)$.

(iii) Temos
$$\inf_{\varepsilon > 0} \varepsilon P(v) = \begin{cases} 0, & \text{se } v \in int(\ S\ ) \\ +\infty, & \text{se } v \notin int(\ S\ ) \end{cases} \quad ,$$
de modo que $\inf_{\varepsilon > 0} \varepsilon P(v) = \Psi_{int(\ S\ )}(v)$.

■

Teorema 7.2.20. *Sejam $S \subset V$, $S \neq \varnothing$, S fracamente fechado, $S = \overline{int(\ S\ )}$; $J{:}V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $J(v) \in \mathbb{R}$ para todo $v \in V$ e J é fracamente sci. Seja P um funcional de barreira para S. Consideremos $L{:}V \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por*
$$L(v;\varepsilon) = J(v) + \Psi(\alpha;\, v) = J(v) + \varepsilon P(v) \quad .$$
Se $V \ni v \longrightarrow J(v)$ é coercivo e fortemente contínuo, então

(i) $\exists\ u \in S$ *tal que* $u = \arg \min_{v \in S} J(v)$.

(ii) $\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ u_\varepsilon \in V$ *tal que* $u_\varepsilon = \arg \min_{v \in V} L(v;\varepsilon)$. *Além disto,* $u_\varepsilon \in int(\ S\ )$.

(iii) $\varepsilon \longrightarrow L(u_\varepsilon;\varepsilon)$ *é crescente para* $\varepsilon > 0$.

(iv) $\{\ u_\varepsilon\ \}_{\varepsilon > 0} \subset V$ *é limitada e admite uma subseqüência fracamente convergente.*

(v) *Se* $\{\ u_{\varepsilon(\eta)}\ \}_\eta \subset \{\ u_\varepsilon\ \}_{\varepsilon > 0}$ *verifica* $u_{\varepsilon(\eta)} \rightharpoonup \overline{u}$ *quando* $\eta \to 0+$, *então* $\overline{u} \in S$ *e* $J(\overline{u}) = J(u)$, *de modo que* $\overline{u} = \arg \min_{v \in S} J(v)$.

(vi) $\lim_{\varepsilon \to 0+} L(u_\varepsilon;\varepsilon) = J(u)$.

(vii) $\inf_{\varepsilon > 0} L(u_\varepsilon;\varepsilon) = J(u)$.

(viii) $J(u) = \inf_{v \in V} \ \inf_{\varepsilon > 0} L(v;\varepsilon) = \inf_{\varepsilon > 0} \ \inf_{v \in V} L(v;\varepsilon)$.■

Prova.

Notemos inicialmente que
$$\inf_{v \in int(\ S\ )} J(v) = \inf_{v \in S} J(v) \quad . \tag{7.9}$$

En effet, soit

$$m = \inf_{v \in int(S)} J(v). \tag{7.10}$$

Como $int(S) \subset S$, é imediato que $m \geq \inf_{v \in S} J(v)$. Por outro lado, como $\overline{int(S)} = S$, todo $v \in S$ é limite de uma seqüência de elementos de $int(S)$, isto é, existe $\{ v_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset int(S)$ tal que $v_n \longrightarrow u$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Como J é fortemente contínuo, $J(v_n) \longrightarrow J(v)$. Assim,

$$m \leq J(v_n), \ \forall \ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow m \leq J(v).$$

Como $v \in S$ é qualquer, resulta que

$$m \leq \inf_{v \in S} J(v). \tag{7.11}$$

(7.10) e (7.11) mostram (7.9).

(i) J é coercivo, de modo que $J + \Psi_S$ também é coercivo. Além disto, Ψ_S é fracamente sci (pois S é fracamente fechado) e J é fracamente sci, de modo que $J + \Psi_S$ é fracamente sci. Assim, o resultado decorre do Teorema 7.2.7.

(ii) Temos $L(v;\varepsilon) \geq J(v)$, de modo que $V \ni v \longrightarrow L(v;\varepsilon)$ é coercivo e fracamente sci (pois J e P são fracamente sci) para $\varepsilon > 0$: o resultado decorre do Teorema 7.2.7. Como $\overline{int(S)} = S \neq \varnothing$, $int(S) \neq \varnothing$: seja $w \in int(S)$. Temos $L(u_\varepsilon;\varepsilon) \leq L(w;\varepsilon) \in \mathbb{R}$, de modo que $L(u_\varepsilon;\varepsilon) \in \mathbb{R}$. Assim, $P(u_\varepsilon) \in \mathbb{R} \Longrightarrow u_\varepsilon \in int(S)$.

(iii) O Lema 7.2.19 mostra que

$$0 < \alpha \leq \beta \Longrightarrow L(v;\alpha) \leq L(v;\beta), \ \forall \ v \in V.$$

Assim

$$0 < \alpha \leq \beta \implies \inf_{v \in V} L(v;\alpha) \leq \inf_{v \in V} L(v;\beta),$$

isto é,

$$0 < \alpha \leq \beta \Longrightarrow L(u_\alpha;\alpha) \leq L(u_\beta;\beta).$$

(iv) Temos

$$\forall \ \varepsilon > 0 : J(u_\varepsilon) = L(u_\varepsilon;0) \leq L(u_\varepsilon;\varepsilon) \in \mathbb{R}.$$

Assim, $\{ J(u_\varepsilon) \}_{\varepsilon > 0} \subset \mathbb{R}$ é limitada superiormente. Como J é coercivo, o resultado decorre do Lema 7.1.9. Por outro lado, o Teorema 4.9.8 mostra que $\{ u_\varepsilon \}_{\varepsilon > 0}$ admite uma subseqüência $\{ u_{\varepsilon(k)} \}_{k \in \mathbb{N}}$ fracamente convergente: $\varepsilon(k) \longrightarrow 0+$ e $u_{\varepsilon(k)} \rightharpoonup \overline{u}$ quando $k \longrightarrow +\infty$.

(v) Temos $\{\ u_{\varepsilon(k)}\ \}_{k\ \in\ \mathbb{N}} \subset int\,(\ S\ )$, de modo que $\overline{u} \in \overline{int\,(\ S\ )} = S$.

Seja $w \in int\,(\ S\ )$. Temos

$$J\left(u_{\varepsilon(k)}\right)+\varepsilon\,(k)\,P\left(u_{\varepsilon(k)}\right) \leq J\,(w)+\varepsilon\,(k)\,P\,(w) \Longrightarrow \varepsilon\,(k)\,P\left(u_{\varepsilon(k)}\right) \leq J\,(w)-J\left(u_{\varepsilon(k)}\right). \tag{7.12}$$

Como $P\left(u_{\varepsilon(k)}\right) \geq 0$ e $\varepsilon\,(k) > 0$, temos

$$J\,(w) - J\left(u_{\varepsilon(k)}\right) \geq 0 \Longrightarrow \lim\ \sup\left(\ J\,(w) - J\left(u_{\varepsilon(k)}\right) + \varepsilon\,(k)\,P\,(w)\right) \geq 0\ .$$

Ora, J é fracamente sci, de modo que $I\,(v) = J\,(w) - J\,(v)$ é fracamente scs e

$$\lim\ \sup\left(\ J\,(w) - J\left(u_{\varepsilon(k)}\right)\right) \leq\ J\,(w) - J\,(\overline{u})\,.$$

Além disto, $\lim\limits_{k\ \to\ +\infty} \varepsilon\,(k) = 0$, de forma que $\varepsilon\,(k)\,P\,(w) \longrightarrow 0$. Temos então

$$0 \leq \limsup\left(\ J\,(w) - J\left(u_{\varepsilon(k)}\right) + \varepsilon\,(k)\,P\,(w)\right) \leq J\,(w) - J\,(\overline{u})\,,$$

de modo que $J\,(\overline{u}) \leq J\,(w)$ para todo $w \in int\,(\ S\ )$. Decorre de (7.9) que $J\,(\overline{u}) = J\,(u)$.

(vi) Seja $w \in int\,(\ S\ )$. Temos $L\,(u_\varepsilon;\varepsilon) \leq L\,(w;\varepsilon) = J\,(w) + \varepsilon P\,(w)$ e, por conseguinte,

$$0\ <\ \varepsilon\ <\ 1 \Longrightarrow L\,(u_\varepsilon;\varepsilon) \leq L\,(w;\varepsilon) \leq L\,(u_\varepsilon;\varepsilon) \leq L\,(w;1)\,. \tag{7.13}$$

Assim, $\{\ L\,(u_\varepsilon;\varepsilon)\ \}_{0\ <\ \varepsilon\ <\ 1} \subset \mathbb{R}$ é limitada. Ora, $\varepsilon \longrightarrow L\,(u_\varepsilon;\varepsilon)$ é também crescente para $\varepsilon > 0$ (Lema 7.2.19). Assim, $L\,(u_\varepsilon;\varepsilon) \longrightarrow m$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0+$. Além disto (proposição 4.5.6):

$$m = \lim_{\varepsilon\ \to\ 0+} L\left(u_{\varepsilon(k)};\varepsilon\,(k)\right)\ ,$$

Como $\{\ u_{\varepsilon(k)}\ \}_{k\ \in\ \mathbb{N}} \subset int\,(\ S\ )$, temos

$$J\,(u) \leq J\left(u_{\varepsilon(k)}\right) \leq L\left(u_{\varepsilon(k)};\varepsilon\,(k)\right).$$

Assim,

$$J\,(u) \leq \lim_{\varepsilon\ \to\ 0+} L\left(u_{\varepsilon(k)};\varepsilon\,(k)\right) = m. \tag{7.14}$$

Por outro lado, (7.13) mostra que

$$m = \lim_{\varepsilon\ \to\ 0+} L\,(u_\varepsilon;\varepsilon) \leq \lim_{\varepsilon\ \to\ 0+} L\,(w;\varepsilon) = J\,(w)\,.$$

Assim, $m \leq J\,(w)\,,\ \forall\ w \in int\,(\ S\ )$ e decorre de (7.9) que $m \leq J\,(u)$. Logo, $m \leq J\,(u)$ e $m \geq J\,(u)$, de onde $m = J\,(u)$.

(vii) decorre de (vi): $\{ \ L(u_\varepsilon;\varepsilon) \ \}_{\varepsilon \,>\, 0} \subset V$ é crescente e limitada superiormente de modo que $\lim\limits_{\varepsilon \,\to\, 0+} L(u_\varepsilon;\varepsilon) = \inf\limits_{\varepsilon \,>\, 0} L(u_\varepsilon;\varepsilon)$.

(viii) Temos

$$\inf_{\varepsilon \,>\, 0}\ \inf_{v \,\in\, V} L(v;\varepsilon) \ = \ \inf_{\varepsilon \,>\, 0} L(u_\varepsilon;\varepsilon) = J(u)$$

e

$$\inf_{v \,\in\, V}\ \inf_{\varepsilon \,>\, 0} L(v;\varepsilon) \ = \ \inf_{v \,\in\, V} \big(J(v) + \Psi_{int(\ S\ )}(v) \big) \ = \ \inf_{v \,\in\, int(\ S\ )} J(v) = J(u) \ ,$$

o que demonstra o resultado enunciado.

■

Aproximação por Regularização

Podemos generalizar o procedimento definido pelas aproximações por penalidade através da noção seguinte:

Definição 7.2.21. *Seja $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Diremos que $J_\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma* regularização inferior *de J se e somente se*

(i) *J_α é sci e diferenciável no sentido de Gâteaux,*

(ii) *para todo $v \in V : J_\alpha(v) \leq J(v)$, $\alpha \longrightarrow J_\alpha(v)$ é crescente e $J(v) = \lim\limits_{\alpha \,\longrightarrow\, +\infty} J_\varepsilon(v)$.*■

Teorema 7.2.22. *Sejam $S \subset V$, $S \neq \varnothing$, S fracamente fechado, $J{:}V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $J(v) \in \mathbb{R}$ para todo $v \in V$ e J é fracamente sci. Seja Ψ_α uma regularização inferior de Ψ_S. Consideremos $L{:}V \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$L(v;\alpha) = J(v) + \Psi(\alpha;\ v) \quad ; \quad \Psi(\alpha;\ v) = \Psi_\alpha(\ v) \ .$$

Se existe $\alpha_0 > 0$ tal que $V \ni v \longrightarrow L(v;\alpha)$ é coercivo para todo $\alpha \geq \alpha_0$, então

(i) *$\exists\ u \in S$ tal que $u = \arg \min\limits_{v \,\in\, S} J(v)$.*

(ii) *$\forall\ \alpha \geq \alpha_0 : \exists\ u_\alpha \in V$ tal que $u_\alpha = \arg \min\limits_{v \,\in\, V} L(v;\alpha)$.*

(iii) *$\alpha \longrightarrow L(u_\alpha;\alpha)$ é crescente para $\alpha \geq \alpha_0$.*

(iv) *$\{ \ u_\alpha \ \}_{\alpha \,\geq\, \alpha_0} \subset V$ é limitada e admite uma subseqüência fracamente convergente.*

(v) *Se $\left\{ \ u_{\alpha(\eta)} \ \right\}_\eta \subset \{ \ u_\alpha \ \}_{\alpha \,\geq\, \alpha_0}$ verifica $u_{\alpha(\eta)} \rightharpoonup \overline{u}$ quando $\eta \to +\infty$, então $\overline{u} \in S$ e $J(\overline{u}) = J(u)$, de modo que $\overline{u} = \arg \min\limits_{v \,\in\, S} J(v)$.*

(vi) $\lim_{\alpha \to +\infty} L(u_\alpha;\alpha) = J(u)$.

(vii) $\sup_{\alpha \geq \alpha_0} L(u_\alpha;\alpha) = J(u)$.

(viii) $J(u) = \inf_{v \in V} \sup_{\alpha \geq \alpha_0} L(v;\alpha) = \sup_{\alpha \geq \alpha_0} \inf_{v \in V} L(v;\alpha)$.■

Prova.

(i) Temos $\Psi_\alpha(v) \leq \Psi_S(v)$, de forma que $L(v;\alpha_0) \leq J(v)+\Psi_S(v)$ para todo $v \in V$ e $J + \Psi_S$ é coercivo. Além disto, Ψ_S é fracamente sci (pois S é fracamente fechado) e J é fracamente sci, de modo que $J + \Psi_S$ é fracamente sci. Assim, o resultado decorre do Teorema 7.2.7.

(ii) $V \ni v \longrightarrow L(v;\alpha)$ é coercivo e fracamente sci (pois J e Ψ são fracamente sci) para $\alpha \geq \alpha_0$: o resultado decorre do Teorema 7.2.7.

(iii) Como $\alpha \longrightarrow \Psi_\alpha(v)$ é crescente,

$$\alpha_0 \leq \alpha \leq \beta \Longrightarrow L(v;\alpha) \leq L(v;\beta)\,,\ \forall\, v \in V\ .$$

Assim

$$\alpha_0 \leq \alpha \leq \beta \implies \inf_{v \in V} L(v;\alpha) \leq \inf_{v \in V} L(v;\beta)\ ,$$

isto é,

$$\alpha_0 \leq \alpha \leq \beta \implies L(u_\alpha;\alpha) \leq L(u_\beta;\beta)\ .$$

(iv) Notando que $L(u;\alpha) \leq J(u) + \Psi_\alpha(\ u) = J(u)$, temos

$$\forall\, \alpha \geq \alpha_0 : L(u_\alpha;\alpha_0) \leq L(u_\alpha;\alpha) \leq L(u;\alpha) \leq J(u) \in \mathbb{R}\ .$$

Assim, $\{\ L(u_\alpha;\alpha)\ \}_{\alpha \geq \alpha_0} \subset \mathbb{R}$ é limitada superiormente. Como $v \longrightarrow L(v;\alpha_0)$ é coercivo, o resultado decorre do Lema 7.1.9. Por outro lado, o Teorema 4.9.8 mostra que $\{\ u_\alpha\ \}_{\alpha \geq \alpha_0}$ admite uma subseqüência $\{\ u_{\alpha(\eta)}\ \}_\eta$ fracamente convergente: $u_{\alpha(\eta)} \rightharpoonup \overline{u}$ quando $\eta \to +\infty$.

(v) e (vi) $\{\ L(u_\alpha;\alpha)\ \}_{\alpha \geq \alpha_0} \subset \mathbb{R}$ é crescente e limitada superiormente par $J(u)$. Assim, $\lim_{\alpha \to +\infty} L(u_\alpha;\alpha) = m \leq J(u)$.

Seja $\beta \geq 0$. Como $\alpha(\eta) \longrightarrow +\infty$, existe $\eta(\beta) > 0$ tal que $\alpha(\eta) \geq \beta$ para $\eta \geq \eta(\beta)$. Temos então

$$\forall\, \eta \geq \eta(\beta) : L\left(u_{\alpha(\eta)};\beta\right) \leq L\left(u_{\alpha(\eta)};\alpha(\eta)\right) \leq J(u) \in \mathbb{R}\ . \tag{7.15}$$

Como J é fracamente sci, esta desigualdade e a proposição 6.3.8 implicam que

$$L(\overline{u};\beta) \leq \lim\ \inf\ L(u_\alpha;\beta) \leq m \leq J(u)\,. \tag{7.16}$$

Assim, por um lado,

$$\Psi_\beta\left(\,\overline{u}\right) \leq J\left(u\right) - J\left(\overline{u}\right)$$

e

$$\Psi_S\left(\,\overline{u}\right) = \lim_{\beta\,\to\,+\infty} \Psi_\beta\left(\,\overline{u}\right) = \sup_{\beta\,\geq\,\alpha_0} \Psi_\beta\left(\,\overline{u}\right) \leq J\left(u\right) - J\left(\overline{u}\right) \in \mathbb{R}\ .$$

e temos $\overline{u} \in S$. Logo, $\Psi_S\left(\,\overline{u}\right) = 0$ e temos

$$0 \leq J\left(u\right) - J\left(\overline{u}\right) \leq 0,$$

de modo que $J\left(u\right) = J\left(\overline{u}\right)$. Decorre desta igualdade e de (7.16) que

$$J\left(\overline{u}\right) = \lim_{\beta\,\to\,+\infty} L\left(\overline{u};\beta\right) \leq m \leq J\left(u\right),$$

de forma que $m = J\left(u\right)$.

(vii) decorre de (vi): $\{\ L\left(u_\alpha;\alpha\right)\ \}_{\alpha\,\geq\,\alpha_0} \subset V$ é crescente e limitada superiormente de modo que $\displaystyle\lim_{\alpha\,\to\,+\infty} L\left(u_\alpha;\alpha\right) = \sup_{\alpha\,\geq\,\alpha_0} L\left(u_\alpha;\alpha\right)$.

(viii) Temos

$$\sup_{\alpha\,\geq\,\alpha_0}\ \inf_{v\,\in\,V} L\left(v;\alpha\right) \ = \ \sup_{\alpha\,\geq\,\alpha_0} L\left(u_\alpha;\alpha\right) = J\left(u\right)$$

e

$$\inf_{v\,\in\,V}\ \sup_{\alpha\,\geq\,\alpha_0}\ L\left(v;\alpha\right) \ = \ \inf_{v\,\in\,V} \left(J\left(v\right) + \Psi_S\left(v\right)\right) \ = \ \inf_{v\,\in\,S} J\left(v\right) = J\left(u\right)\ ,$$

o que demonstra o resultado enunciado.

■

N.B. 7.2.23. *De maneira análoga, podemos definir uma* regularização superior J_ε *de* $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

(i) J_ε *é sci e diferenciável no sentido de Gâteaux,*

(ii) *para todo* $v \in V : J_\varepsilon\left(v\right) \geq J\left(v\right)$, $\varepsilon \longrightarrow J_\varepsilon\left(v\right)$ *é crescente e* $J\left(v\right) = \displaystyle\lim_{\varepsilon\,\longrightarrow\,0+} J_\varepsilon\left(v\right)$.

As regularizações superiores são úteis quando J ***não é*** *uma função indicatriz. Com efeito, uma função indicatriz não admite uma regularização superior: se* Ψ_ε *é uma regularização superior de* Ψ_S *então, para* $v \notin S$, $\Psi_\varepsilon\left(v\right) \geq \Psi_S\left(v\right) = +\infty$, *de modo que* Ψ_ε *toma valores fora de* $\mathbb{R}$. ■

Consideremos a situação descrita pelas equações (7.1)-(7.6) com $r = 2$. Neste caso, podemos considerar o espaço de Hilbert

$$H = \left[\, L^2(\Omega)\right]^{m_1} \times \left[\, L^2(\Omega)\right]^{m_2} \times \mathbb{R}^{m_3} \times \mathbb{R}^{m_4} \tag{7.17}$$

e

$$\alpha = (\lambda,\ \mu,\ \gamma,\ \eta) \in H$$

onde

$$\lambda(x) = (\lambda_1(x), ..., \lambda_{m_1}(x)) \quad ; \quad \mu(x) = (\mu_1(x), ..., \mu_{m_2}(x)) \ .$$

$$\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_{m_3}) \quad ; \quad \eta = (\eta_1, ..., \eta_{m4}) \ .$$

Sejam

$$\varphi(v) = (\varphi_1(v), ..., \varphi_{m_1}(v)) \quad ; \quad \psi(v) = (\psi_1(v), ..., \psi_{m_2}(v)) \ ;$$

$$K(v) = (K_1(v), ..., K_{m_3}(v)) \quad ; \quad I(v) = (I_1(v), ..., I_{m4}(v)) \ .$$

Temos

$$R(v) = (\varphi(v),\ \psi(v),\ K(v),\ I(v)) \in H \quad . \tag{7.18}$$

Consideremos

$$\Psi(\alpha;\, v) = (\ \alpha,\, R(v)\ )_H \ , \tag{7.19}$$

isto é,

$$\Psi(\alpha;\, v) = T(v; \lambda, \mu) + U(v; \gamma, \eta) \ ,$$

$$T(v; \lambda, \mu) = \sum_{i\,=\,1}^{m_1} \int_\Omega \lambda_i \varphi_i(v)\, dx + \sum_{i\,=\,1}^{m_2} \int_\Omega \mu_i \psi_i(v)\, dx \ ,$$

$$U(v; \gamma, \eta) = \sum_{i\,=\,1}^{m_3} \gamma_i K_i(v) \ + \sum_{i\,=\,1}^{m4} \eta_i I_i(v) \ .$$

Temos

Lema 7.2.24. *Sejam S definido por (7.1)-(7.6) com $r = 2$ e Ψ_α dado por (7.17)-(7.19). Então*

(i) *$H \ni \alpha \longrightarrow \Psi(\alpha;\, v) \in \mathbb{R}$ é linear e fracamente contínua.*

(ii) *$v \in S \Longleftrightarrow \Psi(\alpha;\, v) \leq 0$, $\forall \alpha \in A$.*

(iii) *$\sup\limits_{\alpha\,\in\,A} \Psi(\alpha;\, v) = \Psi_S(v)$.*

(iv) *Se $R : V \longrightarrow H$ é fracamente contínua então $V \ni v \longrightarrow \Psi(\alpha;\, v) \in \mathbb{R}$ é fracamente contínua e S é fracamente fechado.* ■

Prova.

(i) é imediato: $\alpha \longrightarrow \Psi(\alpha;\, v)$ é linear e fracamente contínua por construção.

(ii) $(\Longrightarrow)$: se $v \in S$ então, para todo $\alpha \in A$:

$$T(v;\lambda,\mu) = \sum_{i\,=\,1}^{m_1} \int_\Omega \underbrace{\lambda_i}_{\geq\,0} \underbrace{\varphi_i(v)}_{\leq\,0} dx + \sum_{i\,=\,1}^{m_2} \int_\Omega \mu_i \underbrace{\psi_i(v)}_{=\,0} dx \leq 0\ ,$$

$$U(v;\gamma,\eta) = \sum_{i\,=\,1}^{m_3} \underbrace{\gamma_i}_{\geq\,0} \underbrace{K_i(v)}_{\leq\,0} + \sum_{i\,=\,1}^{m4} \eta_i \underbrace{I_i(v)}_{=\,0} \ \leq 0\ ,$$

de modo que $\Psi(\alpha;\, v) \leq 0$, $\forall \alpha \in A$.

$(\Longleftarrow)$: suponhamos $\Psi(\alpha;\, v) \leq 0$, $\forall \alpha \in A$. Suponhamos que existe $1 \leq i \leq m_1$ tal que: $\varphi_i(v) > 0$ sobre $\omega \subset \Omega$ e $mes(\omega) > 0$. Seja $\omega' \subset \omega$ tal que $0 < mes(\omega') < +\infty$. Tomando $\lambda^j(x) = \left(\lambda_1^j(x), ..., \lambda_{m_1}^j(x)\right)$, onde

$$\lambda_i^j = 0, \text{ se } i \neq j \ \ ; \ \ \lambda_i^i(x) = 1, \text{ se } x \in \omega' \ \ ,\ \lambda_i^i(x) = 0, \text{ se } x \notin \omega' \ \ .$$

Então $\alpha = \left(\lambda^j,\ 0,\ 0,\ 0\right) \in A$, de modo que $\Psi(\alpha;\, v) \leq 0$. Por outro lado,

$$\Psi(\alpha;\, v) = \int_{\omega'} \underbrace{\lambda_i}_{=\,1} \underbrace{\varphi_i(v)}_{>\,0} dx > 0\ .$$

Assim, $0 < \Psi(\alpha;\, v) \leq 0$, o que é absurdo. Logo, $\varphi_i(v) \leq 0$ $q.s.$ sobre Ω para $1 \leq i \leq m_1$.

De maneira análoga, suponhamos que existe $1 \leq i \leq m_2$ tal que: $\psi_i(v) \neq 0$ sobre $\omega \subset \Omega$ e $mes(\omega) > 0$. Seja $\omega' \subset \omega$ tal que $0 < mes(\omega') < +\infty$.

Tomando $\mu^j(x) = \left(\mu_1^j(x), ..., \mu_{m_1}^j(x)\right)$, onde

$$\mu_i^j = 0, \text{ se } i \neq j \ \ ; \ \ \mu_i^i(x) = \operatorname{sign}(\psi_i(v)), \text{ se } x \in \omega' \ \ ,\ \mu_i^i(x) = 0, \text{ se } x \notin \omega' \ \ .$$

Então $\alpha = \left(0,\ \mu^j,\ 0,\ 0\right) \in A$, de modo que $\Psi(\alpha;\, v) \leq 0$. Por outro lado,

$$\Psi(\alpha;\, v) = \int_{\omega'} \underbrace{\mu_i \varphi_i(v)}_{=\,|\ \varphi_i(v)\ |\,>\,0} \ dx > 0\ .$$

Assim, $0 < \Psi(\alpha;\, v) \leq 0$, o que é absurdo. Logo, $\psi_i(v) \leq 0$ $q.s.$ sobre Ω para $1 \leq i \leq m_1$.

Se existe $1 \leq i \leq m_3$ tal que $K_i(v) > 0$, podemos tomar $\gamma^i = \left(\gamma_1^i, ..., \gamma_{m_3}^i\right)$ tal que $\gamma_i^j = 0$, se $i \neq j$; $\gamma_i^i = 1$. Então $\alpha = \left(0,\ 0,\ \gamma^i,\ 0\right) \in A$, de modo que $\Psi(\alpha;\ v) \leq 0$. Mas $\Psi(\alpha;\ v) = K_i(v) > 0$, de modo que $0 < \Psi(\alpha;\ v) \leq 0$, o que é absurdo. Logo, $K_i(v) \leq 0$ para $1 \leq i \leq m_3$.

Se existe $1 \leq i \leq m_4$ tal que $I_i(v) \neq 0$, podemos tomar $\eta^i = \left(\eta_1^i, ..., \eta_{m_3}^i\right)$ tal que $\eta_i^j = 0$, se $i \neq j$; $\eta_i^i = \text{sign}(I_i(v))$. Então $\alpha = \left(0,\ 0,\ 0,\ \eta^i\right) \in A$, de modo que $\Psi(\alpha;\ v) \leq 0$. Mas $\Psi(\alpha;\ v) = |\ I_i(v)\ | > 0$, de modo que $0 < \Psi(\alpha;\ v) \leq 0$, o que é absurdo. Logo, $I_i(v) = 0$ para $1 \leq i \leq m_4$.

(iii) Seja $v \in S$. Então $\Psi(\alpha;\ v) \leq 0, \forall \alpha \in A$, de modo que $\sup\limits_{\alpha\ \in\ A} \Psi(\alpha;\ v) \leq 0$. Por outro lado, $\mathbf{0} = (0,\ 0,\ 0,\ 0) \in A$, de modo que $\sup\limits_{\alpha\ \in\ A} \Psi(\alpha;\ v) \geq \Psi(\mathbf{0};\ v) = 0$. Assim, $\sup\limits_{\alpha\ \in\ A} \Psi(\alpha;\ v) = 0 = \Psi_S(v)$.

Seja $v \notin S$. Então $\exists\ \beta \in A$ tal que $\Psi(\beta;\ v) > 0$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$: $\Psi(n\beta;\ v) = n\Psi(\beta;\ v)$, de forma que

$$\sup_{\alpha\ \in\ A} \Psi(\alpha;\ v) \geq n\Psi(\beta;\ v) \longrightarrow +\infty \text{ quando } n \to +\infty.$$

Assim, $\sup\limits_{\alpha\ \in\ A} \Psi(\alpha;\ v) = +\infty = \Psi_S(v)$.

(iv) Seja $\{\ v_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset V$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em V. Então $R(v_n) \longrightarrow R(v)$ em H. Assim, $\Psi(\alpha;\ v_n) \longrightarrow \Psi(\alpha;\ v)$ em $\mathbb{R}$. Se $\{\ v_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset S$ então

$$\forall\ \alpha \in A : \Psi(\alpha;\ v_n) \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

Assim,

$$\forall\ \alpha \in A : \Psi(\alpha;\ v) \leq 0 \Longrightarrow v \in S$$

de modo que S é fracamente fechado.

■

No que segue, utilizaremos a definição seguinte:

Definição 7.2.25 (ponto de sela)**.** *Sejam $U \subset V$, $B \subset H$, $M : U \times B \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que $(u;\ \alpha)$ é um ponto de sela de M em $U \times B$, se e somente se*

$$M(u;\ \beta) \leq M(u;\ \alpha) \leq M(v;\ \alpha)\ \ ,\ \ \forall\ \ (v;\ \beta) \in U \times B\ .\ \blacksquare$$

Tomando

$$A = \{\ \alpha \in H :\ \lambda_i \geq 0\ (1 \leq i \leq m_1),\ \gamma_i \geq 0\ (1 \leq i \leq m_3)\ \}\ \ ,$$

temos

Teorema 7.2.26. *Sejam* $R : V \longrightarrow H$ *fracamente contínua ;* $S \subset V$, $S \neq \varnothing$; $J{:}V \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $J(v) \in \mathbb{R}$ *para todo* $v \in V$ *e* J *é fracamente sci. Consideremos* $L{:}V \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ *dado por*

$$L(v;\alpha) = J(v) + \Psi(\alpha;\, v)\,.$$

Se existe $\bar{\alpha} \in A$ *tal que* $V \ni v \longrightarrow L(v;\bar{\alpha})$ *é coerciva então*

(i) $\exists\ u \in S$ *tal que* $u = \arg \min\limits_{v \,\in\, S} J(v)$.

(ii) $J(u) = \inf\limits_{v \,\in\, V} \sup\limits_{\alpha \,\in\, A} L(v;\, \alpha)$

(iii) $\forall\ v \in V : \alpha \longrightarrow L(v;\, \alpha)$ *é afim e fracamente contínua.*

(iv) $\forall\ \alpha \in A : v \longrightarrow L(v;\, \alpha)$ *é fracamente sci.*

(v) $J(u) = \inf\limits_{v \,\in\, V} \sup\limits_{\alpha \,\in\, A} L(v;\alpha) = \sup\limits_{\alpha \,\in\, A} \inf\limits_{v \,\in\, V} L(v;\alpha)$.

(vi) *Se existe* $\alpha \in A$ *tal que* $L(u;\, \alpha) = \inf\limits_{v \,\in\, V} L(v;\alpha)$, *então* $(u;\, \alpha)$ *é um ponto de sela de* L *sobre* $V \times A$. *Neste caso, temos* $\Psi(\alpha;\, u) = 0$. ■

A demonstração utiliza os lemas seguintes:

Lema 7.2.27. *Temos*

$$\sup_{\beta \,\in\, B} \inf_{v \,\in\, U} M(v;\beta) \ \leq\ \inf_{v \,\in\, U} \sup_{\beta \,\in\, B} M(v;\beta)\ .$$

Se $(u;\ \alpha)$ *é um ponto de sela de* M *sobre* $U \times B$ *então*

$$M(u;\ \alpha) = \inf_{v \,\in\, U} \sup_{\beta \,\in\, B} M(v;\beta) = \sup_{\beta \,\in\, B} \inf_{v \,\in\, U} M(v;\beta)\,. \blacksquare$$

Lema 7.2.28. *Sejam* $U \subset V$, $B \subset H$ *dois convexos não vazios, fechados e limitados. Seja* $M : U \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

$$\forall\ v \in U : \beta \longrightarrow M(v;\, \beta) \text{ é côncava e fracamente scs}$$

$$\forall\ \beta \in B : v \longrightarrow M(v;\, \beta) \quad \text{é fracamente sci}$$

Então existe $(u;\ \alpha) \in U \times B$ *tal que* $(u;\ \alpha)$ *é um ponto de sela de* M *sobre* $U \times B$. ■

Lema 7.2.29. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 0$, sejam*

$$V_n = \{\ v \in S : \|\ v\ \|_V \leq n\ \}\ \ ;\ \ A_n = \{\ \alpha \in A : \|\ \alpha\ \|_H \leq n\ \}\ \ .$$

Então

(i) *V_n e A_n são convexos não-vazios, limitados e fracamente fechados.*

(ii) *Existe $(u_n;\ \alpha_n) \in V_n \times A_n$ tal que $(u_n;\ \alpha_n)$ é um ponto de sela de L sobre $V_n \times A_n$.*

(iii) *$\{\ u_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset V$ é limitada e admite uma subseqüência convergente.*

(iv) *$\{\ L(u_n;\ \alpha_n)\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é limitada superiormente e* $\limsup L(u_n;\ \alpha_n) \in \mathbb{R}$

(v) *Se $\left\{\ u_{n(k)}\ \right\}_{k\ \in\ \mathbb{N}} \subset \{\ u_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ verifica $u_{n(k)} \rightharpoonup \overline{u}$ quando $k \to +\infty$, então $\overline{u} \in S$ e $J(\overline{u}) = J(u)$, de modo que $\overline{u} = \arg \min\limits_{v\ \in\ S} J(v)$. Além disto,* $\limsup L\left(u_{n(k)};\ \alpha_{n(k)}\right) = J(u)$ *e* $J(u) = \inf\limits_{v\ \in\ V}\ \sup\limits_{\alpha\ \geq\ \alpha_0} L(v;\alpha) = \sup\limits_{\alpha\ \geq\ \alpha_0}\ \inf\limits_{v\ \in\ V} L(v;\alpha)$.

(vi) $\limsup L(u_n;\ \alpha_n) = J(u)$. ■

prova do Teorema 7.2.26 :.

(i) De (7.17), temos $L(v;\alpha_0) \leq J(v) + \Psi_S(v)$ para todo $v \in V$, de modo que $J + \Psi_S$ é coercivo. Além disto, Ψ_S é fracamente sci (pois S é fracamente fechado: Cf. Lema 7.2.24) e J é fracamente sci, de modo que $J + \Psi_S$ é fracamente sci. Assim, o resultado decorre do Teorema 7.2.7.

(ii) Temos

$$J(u)\ \ =\ \ \inf_{v\ \in\ V}\ (\ J(v) + \Psi_S(v)\ \ )\ \ =\ \ \inf_{v\ \in\ V}\ \sup_{\alpha\ \in\ A}\ L(v;\alpha)\ \ .$$

(iii) é imediato: $\alpha \longrightarrow \Psi(\alpha;\ v)$ é linear e fracamente contínua (Cf. Lema 7.2.24).

(iv) $v \longrightarrow \Psi(\alpha;\ v)$ é fracamente contínua (Cf. Lema 7.2.24) e o resultado decorre da proposição 6.3.10.

(v) resulta do Lema 7.2.29.

(vi) Temos

$$L(u;\ \alpha) = J(u) = \sup_{\beta\ \in\ A} L(u;\beta)\ \ ,$$

de modo que

$$L(u;\ \beta) \leq L(u;\ \alpha)\ \ ,\ \forall\ \beta \in A\ .$$

Como

$$L(u;\ \alpha) = \inf_{v\ \in\ V} L(v;\alpha)\ \ ,$$

temos também
$$L\,(u;\,\alpha) \leq\; L\,(v;\,\alpha)\;\;,\,\forall\; v \in V\;,$$
de forma que $(u;\,\alpha)$ é um ponto de sela de L sobre $V \times A$.

Para todo $c > 0$, $\Psi\,(c\alpha;\,u) = c\Psi\,(\alpha;\,u) \neq 0$. Ora, tomando $\beta = c\alpha$, temos
$$L\,(u;\,c\alpha) \leq L\,(u;\,\alpha)\;\;,\,\forall\; c > 0\;,$$
de forma que
$$(c-1)\,\Psi\,(\alpha;\,u) \geq 0\;,\,\forall\; c > 0\;.$$
Tomando sucessivamente $c = 1/2$ e $c = 2$ nesta desigualdade, temos
$$\Psi\,(\alpha;\,u) \geq 0 \text{ e } \Psi\,(\alpha;\,u) \leq 0,$$
de forma que $\Psi\,(\alpha;\,u) = 0$,

■

prova do Lema 7.2.27 :. Para todo $(w;\;\gamma) \in U \times B$,
$$\inf_{v\,\in\,U} M\,(v;\;\gamma) \leq M\,(w;\;\gamma)\;\;\leq\;\sup_{\beta\,\in\,B} M\,(v;\;\beta)$$
de modo que, para todo $w \in U$,
$$\sup_{\gamma\,\in\,B}\;\inf_{v\,\in\,U} M\,(v;\;\gamma) \leq\;\sup_{\beta\,\in\,B} M\,(w;\;\beta)$$
e
$$\sup_{\gamma\,\in\,B}\;\inf_{v\,\in\,U} M\,(v;\;\gamma) \leq\;\inf_{w\,\in\,U}\;\sup_{\beta\,\in\,B} M\,(w;\;\beta)\;\;. \tag{7.20}$$
Seja $(u;\,\alpha)$ um ponto de sela de M sobre $U \times B$. Temos
$$M\,(u;\;\beta) \leq M\,(u;\;\alpha) \leq M\,(v;\;\alpha)\;\;,\;\;\forall\;\;(v;\;\beta) \in U \times B$$
Tomando o supremo em β, temos
$$\sup_{\beta\,\in\,B} M\,(u;\;\beta) \leq M\,(u;\;\alpha) \leq M\,(v;\;\alpha)\;\;,\;\;\forall\; v \in U\;.$$
Assim,
$$\inf_{v\,\in\,U}\;\sup_{\beta\,\in\,B} M\,(v;\;\beta) \leq\;\sup_{\beta\,\in\,B} M\,(u;\;\beta) \leq M\,(u;\;\alpha) \leq\;\inf_{v\,\in\,U} M\,(v;\;\alpha)$$
e
$$\inf_{v\,\in\,U}\;\sup_{\beta\,\in\,B} M\,(v;\;\beta) \leq M\,(u;\;\alpha) \leq\;\inf_{v\,\in\,U} M\,(v;\;\alpha)\;\;\leq\;\;\sup_{\beta\,\in\,B}\;\inf_{v\,\in\,U} M\,(v;\;\beta)\;\;.$$

Combinando esta desigualdade e (7.20), temos

$$M(u;\ \alpha) = \inf_{v\ \in\ U}\ \sup_{\beta\ \in\ B} M(v;\ \beta) = \sup_{\beta\ \in\ B}\ \inf_{v\ \in\ U} M(v;\ \beta)\ ,$$

de onde o resultado enunciado. ■

prova do Lema 7.2.28 :. Seja $\beta \in B$. Como U é fracamente fechado, não-vazio e limitado em V, o Corolário 7.2.9 mostra que existe $u(\beta) \in U$ tal que

$$u(\beta)\ = \arg\min_{v\ \in\ U} M(v;\ \beta)\ .$$

Notemos que $u(\beta)$ pode não ser único. Seja $f(\beta) = M(\ u(\beta)\,;\ \beta\ )$. Consideremos $\theta \in [\ 0, 1\ ]$, $\gamma \in B$, $u_\theta = u(\theta\beta + (1-\theta)\gamma)$. Usando a concavidade de $\beta \longrightarrow M(v;\beta)$, temos

$$f(\theta\beta + (1-\theta)\gamma) = M(u_\theta;\ \theta\beta + (1-\theta)\gamma) \geq \theta M(u_\theta;\ \beta) + (1-\theta) M(u_\theta;\ \gamma)\,.$$

Como $M(u_\theta;\ \beta) \geq f(\beta)$ e $M(u_\theta;\ \gamma) \geq f(\gamma)$, temos

$$f(\theta\beta + (1-\theta)\gamma) \geq \theta f(\beta) + (1-\theta) f(\gamma)$$

e f é côncava. Por outro lado,

$$f(\beta) = -\sup_{v\ \in\ U}(-M(v;\ \beta))\,.$$

Como $\beta \longrightarrow M(v;\beta)$ é fracamente scs, $\beta \longrightarrow -M(v;\ \beta)$ é fracamente sci (Cf. 6.3.15). Assim, a proposição 6.3.16 mostra que $\beta \longrightarrow -f(\beta)$ é fracamente sci. U

é fracamente fechado, não-vazio e limitado em H: decorre do Corolário 7.2.9 que existe $\alpha \in B$ tal que

$$\alpha\ = \arg\min_{\beta\ \in\ B} - f(\beta)\ \Longrightarrow\ \alpha\ = \arg\sup_{\beta\ \in\ B} f(\beta)\ .$$

Seja $\overline{u} = u(\alpha)$, $\beta_\theta = \theta\beta + (1-\theta)\alpha$, $u_\theta = u(\alpha_\theta)$. Temos $f\left(\overline{\beta}\right) \geq f(\beta_\theta)$, de modo que

$$M(\overline{u};\ \alpha) \geq M(u_\theta;\ \beta_\theta) \geq \theta M(u_\theta;\ \beta) + (1-\theta) M(u_\theta;\ \alpha)\,.$$

Ora,

$$M(\overline{u};\ \alpha)\ =\ \min_{v\ \in\ U} M(v;\ \alpha)\,, \tag{7.21}$$

de forma que

$$\forall v \in U : M(\overline{u};\ \alpha) \leq M(v;\ \alpha)\ . \tag{7.22}$$

Em particular

$$M(\overline{u};\ \alpha) \geq M(u_\theta;\ \beta_\theta) \geq \theta M(u_\theta;\ \beta) + (1-\theta) M(\overline{u};\ \alpha)\,.$$

Assim,

$$M(\overline{u};\,\alpha) \geq M(u_\theta;\,\beta)\,. \tag{7.23}$$

Temos $\{\ u_\theta\ \}_\theta \subset U$, de modo que existe uma subseqüência $\left\{\ u_{\theta(k)}\ \right\}_{k\,\in\,\mathbb{N}}$ tal que $\theta(k) \longrightarrow 0+$ e $u_{\theta(k)} \rightharpoonup u$ fracamente em V quando $k \to +\infty$. Como U é fracamente fechado, $u \in U$. Além disto, $v \longrightarrow M(v;\beta)$ é fracamente sci: a passagem ao limite para $k \to +\infty$ nesta desigualdade mostra que, para todo $\beta \in B$,

$$M(u;\,\beta) \leq \lim\ \inf\ M\left(u_{\theta(k)};\,\beta\right) \leq M(\overline{u};\,\alpha)\ . \tag{7.24}$$

Por outro lado,

$$M(u_\theta;\,\beta_\theta) \leq M(u;\,\beta_\theta)\,.$$

de modo que, para todo $v \in U$,

$$\theta(k)\,M\left(u_{\theta(k)};\,\beta\right) + (1-\theta(k))\,M\left(u_{\theta(k)};\,\alpha\right) \leq M\left(u_{\theta(k)};\,\beta_{\theta(k)}\right) \leq M\left(v;\,\beta_{\theta(k)}\right).$$

Ora, $M(u(\beta)\,;\,\beta) \leq M\left(u_{\theta(k)};\,\beta\right)$, de forma que

$$\theta(k)\,M(u(\beta)\,;\,\beta) + (1-\theta(k))\,M\left(u_{\theta(k)};\,\alpha\right) \leq M\left(u_{\theta(k)};\,\beta_{\theta(k)}\right) \leq M\left(v;\,\beta_{\theta(k)}\right).$$

Passando ao limite para $k \to +\infty$ e utilizando novamente que $v \longrightarrow M(v;\,\alpha)$ é fracamente sci, assim como a semicontinuidade superior fraca de $\beta \longrightarrow M(u;\,\beta)$ e a proposição 6.3.11, temos, para todo $v \in U$,

$$\begin{aligned} M(u;\,\alpha) &\leq \lim\ \inf\ M\left(u_{\theta(k)};\,\beta_{\theta(k)}\right) \leq \lim\ \inf\ M\left(v;\,\beta_{\theta(k)}\right) \\ &\leq \lim\ \sup\ M\left(v;\,\beta_{\theta(k)}\right) \leq M(v;\,\alpha)\,. \end{aligned}$$

Assim, em particular, $M(u;\,\alpha) \leq M(\overline{u};\,\alpha)$. Combinada com (7.22), esta desigualdade mostra que $M(\overline{u};\,\alpha) = M(u;\alpha)$. Assim, de (7.24):

$$\forall\ \beta \in B : M(u;\,\beta) \leq M(u;\,\alpha)\ .$$

e, de (7.22):

$$\forall\ v \in U : M(u;\,\alpha) \leq M(v;\,\alpha)$$

e $(u;\,\alpha)$ é um ponto de sela de M sobre $U \times B$. ■

prova do Lema 7.2.29 :.

(i) A_n e V_n são não-vazios: $0 \in A_n$ e $0 \in V_n$. V_n é uma bola, de modo que V_n é convexo (Cf. proposição 5.2.5) e A_n é a intersecção de uma bola e do convexo A (Lema 7.2.24), de modo que A_n é convexo (Cf. proposição 5.2.6). A_n e V_n são fechados, de modo que são também fracamente fechados (Teorema 5.5.9).

(ii) decorre do Lema 7.2.28.

(iii) e (iv) Como $u \in S$,temos

$$\Psi(\alpha;\, u) \leq \Psi_S(u) = 0,\ \forall\ \alpha \in A\ .$$

Assim, para $n \geq \max\{\ \| u\|_V\ ,\ \| \overline{\alpha} \|_H\ \}$, temos

$$L(u_n;\, \overline{\alpha}) \leq L(u_n;\, \alpha_n) \leq L(u;\, \alpha_n) \leq J(u)\ .$$

Assim, por um lado, $L(u_n;\, \alpha_n) \leq J(u)$, de modo que $\{\ L(u_n;\, \alpha_n)\ \}_{n\, \in\, \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é limitada superiormente e $\limsup\ L(u_n;\, \alpha_n) \in \mathbb{R}$. Por outro lado, como $v \longrightarrow L(v;\, \overline{\alpha})$ é coerciva, decorre do Lema 7.1.9 que $\{\ u_n\ \}_{n\, \in\, \mathbb{N}} \subset V$ é limitada e admite uma subseqüência fracamente convergente (Cf. Teorema 4.9.8).

(v) e (vi) Seja $\ell = \limsup L(u_n;\, \alpha_n)$. Seja $\left\{\ u_{n(k)}\ \right\}_{k\, \in\, \mathbb{N}}$ uma subseqüência tal que $u_{n(k)} \rightharpoonup \overline{u}$ fracamente em V. $\left\{\ L\left(u_{n(k)};\, \alpha_{n(k)}\right)\ \right\}_{k\, \in\, \mathbb{N}}$ é uma subseqüência de números reais $\{\ L(u_n;\, \alpha_n)\ \}_{n\, \in\, \mathbb{N}}$, de modo que $\limsup L\left(u_{n(k)};\, \alpha_{n(k)}\right) = \ell$.

Para todo $\alpha \in H$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \in A_{n(k(p))}$, de modo que

$$L\left(u_{n(k)};\, \alpha\right) \leq L\left(u_{n(k)};\, \alpha_{n(k)}\right) \leq L\left(u;\, \alpha_{n(k)}\right) \leq J(u)\ .$$

Assim, por um lado,

$$\ell = \limsup L\left(u_{n(k)};\, \alpha_{n(k)}\right) \leq J(u)\,,$$

de forma que

$$\liminf\ L\left(u_{n(k)};\, \alpha_{n(k)}\right) \leq \limsup\ L\left(u_{n(k)};\, \alpha_{n(k)}\right) = \ell\ ;$$

e, por outro lado,

$$L(\overline{u};\alpha) \leq \lim\ \inf\ L\left(u_{n(k)};\, \alpha\right) \leq \ell \leq J(u)\ .$$

Logo,

$$\sup_{\alpha\, \in\, A} L(\overline{u};\, \alpha) \leq \ell \leq J(u) \implies \overline{u} \in S$$

e

$$\sup_{\alpha\, \in\, A} L(\overline{u};\, \alpha) = J(\overline{u})\ .$$

Para todo $v \in S$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $v \in V_{n(k(p))}$, de modo que

$$L\left(u_{n(k)};\, \alpha\right) \leq L\left(u_{n(k)};\, \alpha_{n(k)}\right) \leq L\left(v;\, \alpha_{n(k)}\right) \leq J(v)\ .$$

Assim,

$$L(\overline{u};\, \alpha) \leq \lim\ \inf\ L\left(u_{n(k)};\, \alpha\right) \leq \ell \leq J(v)$$

e

$$J(\overline{u}) = \sup_{\alpha \in A} L(\overline{u};\, \alpha) \leq \ell \leq J(v) \ .$$

Resulta que $\overline{u} = \arg \min_{v \in S} J(v)$. Assim,

$$J(\overline{u}) \ = \ \inf_{v \in V} \sup_{\alpha \in A} L(v; \alpha) \ . \tag{7.25}$$

Além disto,

$$L\left(u_{n(k(p))};\, \alpha\right) \leq L\left(u_{n(k(p))};\, \alpha_{n(k(p))}\right) \leq L\left(\overline{u};\, \alpha_{n(k(p))}\right) \leq J(\overline{u}) \ .$$

de modo que

$$L(\overline{u};\, \alpha) \leq \lim\ \inf\ L\left(u_{n(k(p))};\, \alpha\right) \leq \ell \leq J(\overline{u}) \ .$$

e

$$J(\overline{u}) \ = \ \sup_{\alpha \in A} L(\overline{u};\, \alpha) \leq \ell \leq J(\overline{u}) \ .$$

Logo, $\ell = J(\overline{u}) = J(u)$.

Como $\left(u_{n(k)};\, \alpha_{n(k)}\right)$ é um ponto de sela sobre $A_n \times B_n$, temos, para $n \geq \max\{\ \| v\|_V\ ,\ \|\ \beta\ \|_H\ \}$

$$L\left(u_{n(k)};\, \beta\right) \leq L\left(v;\, \alpha_{n(k)}\right).$$

Assim

$$L\left(u_{n(k)};\, \beta\right) \leq \ \inf_{v \in V} L\left(v;\, \alpha_{n(k)}\right) \leq \ \sup_{\alpha \in A} \ \inf_{v \in V} L(v;\, \alpha) \ .$$

Passando ao limite para $k \to +\infty$, temos

$$L(\overline{u};\, \beta) \leq \ \sup_{\alpha \in A} \ \inf_{v \in V} L(v;\, \alpha) \ .$$

Assim,

$$J(u) = J(\overline{u}) \ = \ \sup_{\beta \in A} L(\overline{u};\, \beta) \leq \ \sup_{\alpha \in A} \ \inf_{v \in V} L(v;\, \alpha) \ .$$

Combinando esta desigualdade e (7.25), temos

$$J(u) \ = \ \inf_{v \in V} \sup_{\alpha \in A} L(v; \alpha) \ \leq \ \sup_{\alpha \in A} \ \inf_{v \in V} L(v;\, \alpha)$$

e o resultado decorre do Lema 7.2.27.

■

Capítulo 8

Problemas Variacionais

8.1 Noções Fundamentais

Elementos proximais

A noção de elemento proximal resulta do seguinte Lema:

Lema 8.1.1. *Seja* $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *um funcional convexo próprio sci. Para* $\varepsilon > 0$, *seja* $v \in V$ *e*

$$I_{\varepsilon,u}(v) = J(v) + \frac{\varepsilon}{2} \parallel v - u \parallel^2 \quad .$$

Então

(i) *existe um único elemento* $u_\varepsilon = prox_{J,\varepsilon}(u) \in V$ *tal que* $\inf(J) \leq I_{\varepsilon,u}(u_\varepsilon) = \inf(I_{\varepsilon,u})$.

(ii) $I_{\varepsilon,u}(u_\varepsilon) \to \inf(J)$ *quando* $\varepsilon \to 0+$.

(iii) $u_\varepsilon = prox_{J,\varepsilon}(u)$ *se e somente se existe* $p_\varepsilon \in \partial J(u_\varepsilon)$ *tal que* $u_\varepsilon = u - \dfrac{1}{\varepsilon}\, p_\varepsilon$.

(iv) $u_\varepsilon = prox_{J,\varepsilon}(u)$ *se e somente se* $J(v) - J(u_\varepsilon) + (\varepsilon(u_\varepsilon - u), v - u_\varepsilon) \geq 0$, $\forall$ $v \in V$.

(v) $\forall\ u, v \in V : \parallel prox_{J,\varepsilon}(v) - prox_{J,\varepsilon}(u) \parallel \leq \parallel v - u \parallel$.

(vi) $u = u_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\, p_\varepsilon$, $p = p_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon$ *e* $J(u_\varepsilon) + J^*(p_\varepsilon) = (p_\varepsilon, u_\varepsilon)$ *se e somente se* $u_\varepsilon = prox_{J,\varepsilon}(u)$ *e* $p_\varepsilon = prox_{J^*,\varepsilon}(p)$. ■

Prova. Sejam

$$P_\varepsilon(v) = \frac{\varepsilon}{2} \parallel v - u \parallel^2 \quad ; \; a(t, \varepsilon) = \varepsilon \left[\alpha t^2 + \beta t + \gamma \;\right] \quad ,$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{2}, \; \beta = - \parallel v \parallel, \; \gamma = \frac{1}{2} \parallel v \parallel^2 \; .$$

Temos $P_\varepsilon(v) \geq 0$ para todo $v \in V$ e $\varepsilon > 0$; $P_\varepsilon(v) \underset{\varepsilon \to 0+}{\to} 0$ para todo $v \in V$;

$$\forall \; \beta \geq 0 \; : \; \lim_{t \to +\infty} \left[a(t, \varepsilon) - \beta t\right] = +\infty \; .$$

Por outro lado,

$$\parallel v - w \parallel^2 = \parallel w \parallel^2 + \parallel v \parallel^2 - 2(v, w) \, .$$

Assim, a desigualdade de Cauchy-Schwarz mostra que

$$-(v, w) \geq - \parallel v \parallel \parallel w \parallel \; ,$$

de modo que

$$\parallel v - w \parallel^2 \geq 2 \left[\alpha \parallel w \parallel^2 + \beta \parallel w \parallel + \gamma\right]$$

e $P_\varepsilon(v) \geq a(\parallel v \parallel, \varepsilon)$. Por conseguinte, (i) e (ii) decorrem do Teorema 7.1.11.

Além disto, do Teorema 7.2.2:

$$u_\varepsilon = prox_{J,\varepsilon}(u) \Longleftrightarrow 0 \in \partial I_\varepsilon(u_\varepsilon)$$

Como P_ε é convexo, próprio, contínuo e $dom(P_\varepsilon) = V$, decorre do Teorema 6.7.17 que $\partial I_\varepsilon(u_\varepsilon) = \partial J(u_\varepsilon) + \partial P_\varepsilon(u_\varepsilon)$. Além disto, a derivada de Gâteaux de P_ε existe: $\nabla P_\varepsilon(u_\varepsilon) = \varepsilon(u_\varepsilon - u)$, de forma que

$$u_\varepsilon = prox_{J,\varepsilon}(u) \Longleftrightarrow 0 \in \partial J(u_\varepsilon) + \varepsilon(u_\varepsilon - u) \; ,$$

isto é,

$$u_\varepsilon = prox_{J,\varepsilon}(u) \Longleftrightarrow \exists \; p_\varepsilon \in \partial J(u_\varepsilon) \text{ tal que } \; p_\varepsilon + \varepsilon(u_\varepsilon - u) = 0$$

e temos (iii). Esta equivalência implica que $u_\varepsilon = prox_{J,\varepsilon}(u)$ se e somente se

$$-\varepsilon(u_\varepsilon - u) = p_\varepsilon \in \partial J(u_\varepsilon) \, ,$$

de forma que $u_\varepsilon = prox_{J,\varepsilon}(u)$ se e somente se

$$\forall \; v \in V : J(v) - J(u_\varepsilon) \geq -(\varepsilon(u_\varepsilon - u), \, v - u_\varepsilon)$$

e temos (iv).

Sejam $u_\varepsilon = prox_{J,\varepsilon}(u)$ e $v_\varepsilon = prox_{J,\varepsilon}(v)$. Temos então

$$J(v_\varepsilon) - J(u_\varepsilon) + (\varepsilon(u_\varepsilon - u), \, v_\varepsilon - u_\varepsilon) \geq 0$$

e

$$J(u_\varepsilon) - J(v_\varepsilon) + (\varepsilon(v_\varepsilon - v), u_\varepsilon - v_\varepsilon) \geq 0.$$

Adicionando estas duas desigualdades, temos

$$\varepsilon(u_\varepsilon - v_\varepsilon, u_\varepsilon - v_\varepsilon) \leq \varepsilon(u - v, u_\varepsilon - v_\varepsilon),$$

de forma que

$$\| u_\varepsilon - v_\varepsilon \|^2 \leq (u - v, u_\varepsilon - v_\varepsilon) \leq \| u - v \| \| u_\varepsilon - v_\varepsilon \|$$

e

$$\| u_\varepsilon - v_\varepsilon \| \leq \| u - v \|,$$

de onde (v).

Por outro lado, o Lema 7.2.1 mostra que $I_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf(I_\varepsilon) \in \mathbb{R}$. Resulta do Teorema 6.7.10 que

$$p_\varepsilon \in \partial J(u_\varepsilon) \Longleftrightarrow J^*(p_\varepsilon) + J(u_\varepsilon) = (p_\varepsilon, u_\varepsilon) \Longleftrightarrow u_\varepsilon \in \partial J^*(p_\varepsilon),$$

de forma que

$$u_\varepsilon = prox_{J,\varepsilon}(u) \Longleftrightarrow \exists\, p_\varepsilon \text{ tal que } J^*(p_\varepsilon) + J(u_\varepsilon) = (p_\varepsilon, u_\varepsilon) \quad \text{e} \quad u_\varepsilon = u - \frac{1}{\varepsilon}p_\varepsilon$$

Seja

$$\tilde{I}_{\varepsilon,u}(v) = J^*(q) + \frac{\varepsilon}{2} \| q - p \|^2 \ .$$

De maneira análoga, temos

$$p_\varepsilon = prox_{J^*,\varepsilon}(p) \Longleftrightarrow \exists\, v_\varepsilon \text{ tal que } J^*(p_\varepsilon) + J^{**}(v_\varepsilon) = (p_\varepsilon, v_\varepsilon) \quad \text{e} \quad p_\varepsilon = p - \frac{1}{\varepsilon}v_\varepsilon \ .$$

Ora, $J^{**} = J$ (Cf. Teorema 6.6.5), de modo que

$$p_\varepsilon = prox_{J^*,\varepsilon}(p) \Longleftrightarrow \exists\, v_\varepsilon \text{ tal que } J^*(p_\varepsilon) + J(v_\varepsilon) = (p_\varepsilon, v_\varepsilon) \quad \text{e} \quad p_\varepsilon = p - \frac{1}{\varepsilon}v_\varepsilon \ .$$

Assim,

$$u_\varepsilon = prox_{J,\varepsilon}(u) \text{ e } p_\varepsilon = prox_{J^*,\varepsilon}(p) \Longleftrightarrow \begin{cases} J^*(p_\varepsilon) + J(u_\varepsilon) = (p_\varepsilon, v_\varepsilon), \\ p_\varepsilon = p - \frac{1}{\varepsilon}u_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = u - \frac{1}{\varepsilon}p_\varepsilon, \end{cases}$$

e temos (vi). ■

8.1.1 Operadores e Monotonia

De forma genérica, um operador é uma aplicação multívoca associando a um elemento do espaço de Hilbert V um subconjunto de um outro espaço de Hilbert W. Entretanto, uma tal generalidade não é útil para nossos objetivos: estamos principalmente interessados nos operadores que podem ser interpretados em termos de campo de forças internas ou de trabalho associado a um campo de forças. Formalmente, um *operador de esforço interno sobre* V é uma aplicação $A : V \to \mathcal{P}(V)$, onde $\mathcal{P}(V)$ é o conjunto das partes de V, enquanto que um *operador de trabalho virtual sobre* V é uma aplicação $A : V \to \mathcal{P}(V')$, onde V' é o dual topológico de V e $\mathcal{P}(V')$ é o conjunto das partes de V'. Entretanto, estas duas classes estão relacionadas através da isometria de Riesz Π, como mostra o seguinte teorema:

Teorema 8.1.2. *A correspondência $A \to B = \Pi \circ A$ (i. e., $B(u) = \Pi(A(u))$ para todo $u \in V$) é uma bijeção entre os operadores de esforço interno e os operadores de trabalho virtual.* ■

Prova. Seja A um operador de esforço interno sobre V e B dado por $B(u) = \Pi(A(u))$. Temos $A(u) \subset V$, de modo que $B(u) = \Pi(A(u)) \subset \diamond(V) = V'$ e B é um operador de trabalho virtual sobre V. Assim, a imagem da correspondência é um subconjunto de $Op_{trab}(V)$.

Seja T um operador de trabalho virtual sobre V e A dado por $A(u) = \Pi^{-1}(T(u))$. Temos $T(u) = \Pi(A(u))$ e $T(u) \subset V' \Rightarrow A(u) = \Pi^{-1}(T(u)) \subset \Pi^{-1}(V') = V$ e A é um operador de esforço interno sobre V. Assim, a correspondência é sobrejetiva.

Sejam A e B dois operadores de esforço interno sobre V e $T(u) = \Pi(A(u))$, $P(u) = \Pi(B(u))$. Suponhamos $T(u) = P(u)$: então $\Pi^{-1}(T(u)) = \Pi^{-1}(P(u))$, de modo que $A(u) = \Pi^{-1}(\Pi(A(u))) = \Pi^{-1}(\Pi(B(u))) = B(u)$. Assim, $A(u) = B(u)$ para todo $u \in V$, de modo que $A = B$. Logo, a correspondência é injetiva. ■

Assim, limitaremos nosso estudo a somente uma das classes. Por razões de conveniência, adotaremos o ponto de vista dos operadores de esforço interno e utilizaremos a palavra *operador* para designar um operador de esforço interno. Como indica o Teorema acima, esta escolha permite também o estudo dos operadores de trabalho virtual. Assim, utilizaremos no que segue, a definição seguinte:

Definição 8.1.3. *Seja V um espaço de Hilbert. Um* operador em V *é uma aplicação $A : V \to \mathcal{P}(V)$, onde $\mathcal{P}(V)$ é o conjunto das partes de V.* ■

É importante notar que um operador é, em geral, *multívoco*, isto é, $A(u)$ é um conjunto que pode conter vários elementos distintos (e mesmo infinitos elementos distintos). Assim, é necessário manipular "$p \in A(u)$"cada vez que desejarmos utilizar um elemento de $A(u)$: por exemplo, devemos escrever "(p, v), $p \in A(u)$"e não "$(A(u), v)$", expressão sem sentido dado que $A(u)$ é um conjunto. Tal cuidado é essencial quando, por exemplo, manipulamos a definição de continuidade ou semicontinuidade (Cf. section 8.1.1).

A confusão entre "$p \in A(u)$" e "$A(u)$" é porém freqüentemente utilizada no caso de operadores *unívocos*, isto é, de operadores para os quais $A(u)$ contém um único elemento, ou seja, $A(u) = \{ p(u) \}$: neste caso, é usual confundir estes dois elementos e escrever simplesmente "$A(u)$"em lugar de "$p \in A(u)$". Por exemplo, utiliza-se "$(A(u), v)$"em lugar de "$(p, v), p \in A(u)$". No caso de operadores unívocos, noções como a de linearidade ($A(u + \alpha v) = A(u) + \alpha A(v), \forall \alpha \in \mathbb{R}, u, v \in V$) ou de continuidade ($A(u_n) \longrightarrow A(u)$ se $u_n \longrightarrow u$) são uma simples aplicação das definições usuais. Em particular, quando A é linear e unívoco, podemos definir o adjunto A^* de A. A^* também é linear e unívoco e verifica

Definição 8.1.4. *Sejam V um espaço de Hilbert e A um operador em V tal que A é linear e unívoco. Definimos o adjunto A^* de A como:*

$$\forall\ u, v \in V : (\ A(u),\ v\ ) = (\ u,\ A^*(v)\ )\ . \blacksquare$$

Monotonia

Entre os operadores, destacam-se duas classes particulares:

Definição 8.1.5. *Seja A um operador em V. Diremos que A é* monótono *se e somente se, para todo $\{ (u_1, p_1), (u_2, p_2) \} \subset V \times V$ tal que $p_i \in A(u_i)$, $i = 1, 2$ temos:*

$$(\ p_1 - p_2,\ u_1 - u_2) \geq 0\ . \blacksquare$$

Definição 8.1.6. *Seja A um operador em V. Diremos que A é* ciclicamente monótono *se e somente se, para toda família finita $\{ (u_i, p_i) \}_{1 \leq i \leq n} \subset V \times V$ tal que $p_i \in A(u_i)$, $i = 1, ..., n$:*

$$(\ p_1,\ u_1 - u_2) + (\ p_2,\ u_2 - u_3) + ... + (\ p_{n-1},\ u_{n-1} - u_n) + (\ p_n,\ u_n - u_1) \geq 0\ . \blacksquare$$

Temos:

Lema 8.1.7. *Seja A um operador em V. Se A é cíclicamente monótono então A é monótono.* $\blacksquare$

Prova. Basta utilizar $n = 2$:

$$(p_1, u_1 - u_2) + (p_2, u_2 - u_1) = (p_1 - p_2, u_1 - u_2) ,$$

de onde o resultado enunciado. ■

Um exemplo simples de operador ciclicamente monótono é o operador identidade: $Id(u) = \{ u \}$.De maneira mais geral, temos também:

Lema 8.1.8. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional convexo próprio. Seja $A(u) = \partial J(u)$. Então A é ciclicamente monótono.* ■

Prova. Seja $\{ (u_i, p_i) \}_{1 \leq i \leq n} \subset V \times V$ tal que $p_i \in A(u_i)$, $i = 1, ..., n$. Consideremos $u_{n+1} = u_1$. Então, para

$$J(u_{i+1}) \geq J(u_i) + (p_i, u_{i+1} - u_i) , 1 \leq i \leq n .$$

Assim,

$$J(u_{i+1}) - J(u_i) \geq (p_i, u_{i+1} - u_i) , 1 \leq i \leq n ,$$

de modo que

$$\sum_{i=1}^{n} J(u_{i+1}) - \sum_{i=1}^{n} J(u_i) \geq \sum_{i=1}^{n} (p_i, u_{i+1} - u_i) .$$

Como $u_{n+1} = u_1$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} J(u_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} J(u_i)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (p_i, u_{i+1} - u_i) &= -[(p_1, u_1 - u_2) + (p_2, u_2 - u_3) + \cdots \\ &\quad + (p_{n-1}, u_{n-1} - u_n) + (p_n, u_n - u_1)] , \end{aligned}$$

de onde o resultado enunciado. ■

Operadores semicontínuos e hemicontínuos

Mais propriedades notáveis dos operadores monótonos estão ligadas às definições seguintes:

Definição 8.1.9. *Sejam V um espaço de Hilbert e A um operador em V. Diremos que A é semicontínuo em $u \in V$ se e somente se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon, u) > 0$ tal que*

$$\sup\{\| p - q \| : p \in A(u), \ q \in A(v), \ \| u - v \| \leq \delta(\varepsilon, u)\} \leq \varepsilon \ .$$

Diremos que A é semicontínuo sobre $C \subset V$ se e somente se A é semicontínuo em todo $u \in C$. ■

Definição 8.1.10. *Seja A um operador em V. Diremos que A é limitado se e somente se*

$$\forall \ M > 0 : K(A, M) = \sup\{ \ \| p \| : \ p \in A(w), \ \| w \| \leq M\} < +\infty. ■$$

Os operadores semicontínuos e limitados têm a propriedade seguinte:

Proposição 8.1.11. *Seja A um operador em V tal que $A(v) \neq \emptyset$ para todo $v \in V$, A é semicontínuo e limitado sobre V. Seja $\{ \ u_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de V tal que $u_n \longrightarrow u$ fortemente em V. Se $A(u)$ é fracamente fechado, então para toda seqüência $\{ \ p_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}}$ tal que $p_n \in A(u_n)$ temos:*

(i) *$\{ \ p_n \ \}_{n \ \in \ \mathbb{N}}$ é limitada*

(ii) *Se $\left\{ \ p_{n(k)} \ \right\}_{k \ \in \ \mathbb{N}}$ é uma subseqüência tal que $p_{n(k)} \rightharpoonup p$ fracamente em V, então $p \in A(u)$.* ■

Prova. Como $u_n \longrightarrow u$ fortemente em V, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\| u_n \| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (proposição 4.5.3). Assim, $\| p_n \| \leq K(A, M)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e temos (i).

Mostremos (ii): Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $k(\delta(\varepsilon, u))$ tal que

$$k \geq k(\delta(\varepsilon, u)) \Longrightarrow \left\| \ u_{n(k)} - u \ \right\| \leq \delta(\varepsilon, u).$$

Assim, existe $q_k \in A(u)$ tal que

$$k \geq k(\delta(\varepsilon, u)) \Longrightarrow \left\| \ p_{n(k)} - q_k \ \right\| \leq \varepsilon.$$

Temos então, para todo $v \in V$:

$$\left| \ \left(p_{n(k)} - q_k \ , \ v\right) \right| \leq \left\| \ p_{n(k)} - q_k \ \right\| \| \ v \ \| \leq \varepsilon \| \ v \ \|$$

de forma que

$$\left(p_{n(k)} - q_k \ , \ v\right) \longrightarrow 0 \text{ quando } k \longrightarrow +\infty.$$

Ora,

$$(p - q_k\ ,\ v) = \underbrace{\left(p - p_{n(k)}\ ,\ v\right)}_{\longrightarrow\ 0} + \underbrace{\left(p_{n(k)} - q_k\ ,\ v\right)}_{\longrightarrow\ 0} \longrightarrow 0,$$

de forma que $q_k \rightharpoonup p$ fracamente em V. Como $A(u)$ é fracamente fechado e $\{\ q_k\ \}_{k\ \in\ \mathbb{N}} \subset A(u)$, temos $p \in A(u)$. ■

A noção de semicontinuidade é muito forte e usualmente prefere-se a noção de hemicontinuidade:

Definição 8.1.12. *Sejam A um operador em V e*

$$\underline{h}_A(u,v) = \inf_{p\ \in\ A(u)} (p,v)\,.$$

Diremos que A é hemicontínuo inferiormente (hci) em $u \in V$ se e somente se

$$\forall\ v \in V : u \longrightarrow \underline{h}_A(u,v)\ \text{ é sci.}$$

Diremos que A é hci sobre $C \subset V$ se e somente se A é hci em todo ponto $u \in C$.

De maneira análoga, diremos que A é hemicontínuo em u se e somente se $\underline{h}_A$ é contínua em $u \in C$ e que A é hemicontínuo sobre $C \subset V$ se e somente se $\underline{h}_A$ é contínua em todo ponto $u \in C$. ■

Podemos substituir um supremo ao ínfimo nesta definição :

Proposição 8.1.13. *Seja*

$$\overline{h}_A(u,v) = \sup_{p\ \in\ A(u)} (p,v)\ \ .$$

Lema 8.1.14. *Então*

(i) *A é hci em $u \in V$ se e somente se $u \longrightarrow \overline{h}_A(u,v)$ é scs, $\forall\ v \in V$.*

(ii) *A é hemicontínuo em $u \in V$ se e somente se $u \longrightarrow \overline{h}_A(u,v)$ é contínua, $\forall\ v \in V$.*■

Prova. Temos

$$\underline{h}_A(u,-v) = \inf_{p\ \in\ A(u)} -(p,v) = -\overline{h}_A(u,v)\ \ ,$$

de modo que

$$u \longrightarrow \underline{h}_A(u,-v)\ \text{ sci} \Longleftrightarrow u \longrightarrow \overline{h}_A(u,v)\ \text{ scs}$$

e

$$u \longrightarrow \underline{h}_A(u,-v)\ \text{ scs} \Longleftrightarrow u \longrightarrow \overline{h}_A(u,v)\ \text{ sci,}$$

de onde o resultado enunciado. ■

Todo operador semicontínuo é hci, como mostra o resultado seguinte:

Proposição 8.1.15. *Seja A um operador semicontínuo sobre $C \subset V$. Então A é hci sobre C.* $\blacksquare$

Prova. Sejam $u \in C$ e $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ tal que $u_n \longrightarrow u$ fortemente em V.Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon, u) > 0$ tal que

$$\| u - w \| \leq \delta(\varepsilon, u) \Longrightarrow \| p - q \| \leq \varepsilon, \forall\, p \in A(u), q \in A(w) \ .$$

Ora, existe $n(\delta(\varepsilon, u))$ tal que

$$n \geq n(\delta(\varepsilon, u)) \Longrightarrow \| u - u_n \| \leq \delta(\varepsilon, u) .$$

Seja $n \geq n(\delta(\varepsilon, u))$: para todo $v \in V$, $p \in A(u)$, $q \in A(u_n)$:

$$| \ (p - q \ , \ v)| \leq \| p - q \| \| v \| \leq \varepsilon \| v \|$$

de modo que

$$(p \ , \ v) - \varepsilon \| v \| \leq (q \ , \ v)$$

e, por conseguinte,

$$\underline{h}_A(u, v) - \varepsilon \| v \| \leq (q \ , \ v) .$$

Como $q \in A(u_n)$ é qualquer, vem

$$\underline{h}_A(u, v) - \varepsilon \| v \| \leq \underline{h}_A(u_n, v) .$$

Logo

$$\underline{h}_A(u, v) - \varepsilon \| v \| \leq \lim \ \inf_n \ \underline{h}_A(u_n, v) .$$

Como $\varepsilon > 0$ é qualquer, temos

$$\underline{h}_A(u, v) \leq \lim \ \inf \ \underline{h}_A(u_n, v)$$

e o resultado decorre da proposição 6.3.9. $\blacksquare$

Temos:

Teorema 8.1.16. *Seja A um operador em V tal que A é* unívoco*, monótono, limitado, hci sobre V e $A(v) \neq \emptyset$ para todo $v \in V$. Então*

$$\forall\, u, v \in V : \lim_{t \longrightarrow 0} (\ A(u + tv) \ , \ v) = (\ A(u) \ , \ v) .\blacksquare$$

Corolário 8.1.17. *Seja A um operador em V tal que A é* unívoco*, monótono, limitado, hci sobre V e $A(v) \neq \emptyset$ para todo $v \in V$. Seja $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ tal que $u_n \longrightarrow u$ fortemente em V. Então*

$$A(u_n) \rightharpoonup A(u) \ \textit{fracamente em } V. \ \blacksquare$$

A prova do teorema utiliza o seguinte Lema:

Lema 8.1.18. *Seja A um operador em V tal que A é monótono, limitado, hci sobre V. Sejam u, $v \in V$ e consideremos a seqüência $\{ u_\varepsilon \}_{\varepsilon > 0}$ dada por $u_\varepsilon = u - \varepsilon v$. Seja $\{ p_\varepsilon \}_{\varepsilon > 0}$ tal que $p_\varepsilon \in A(u_\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$. Então*

$$(p_\varepsilon,\, v) \longrightarrow \underline{h}_A(u,v) \ \textit{quando}\ \varepsilon \longrightarrow 0+ . \ \blacksquare$$

Corolário 8.1.19. *Seja A um operador em V tal que A é monótono, limitado, hci sobre V. Sejam u, $v \in V$ e consideremos a seqüência $\{ u_\varepsilon \}_{\varepsilon > 0}$ dada por $u_\varepsilon = u + \varepsilon v$. Seja $\{ p_\varepsilon \}_{\varepsilon > 0}$ tal que $p_\varepsilon \in A(u_\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$. Então*

$$(p_\varepsilon,\, v) \longrightarrow \overline{h}_A(u,v) \ \textit{quando}\ \varepsilon \longrightarrow 0+ . \ \blacksquare$$

prova do Lema 8.1.18. Temos $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ fortemente em V. Além disto,

$$\| u_\varepsilon \| \leq \| u \| + \| v \| .$$

Como A é limitado,

$$\| p_\varepsilon \| \leq K(A, \ \| u \| + \| v \|) .$$

Assim, existe uma subseqüência $\left\{ u_{\varepsilon(k)} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\left\{ p_{\varepsilon(k)} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ é fracamente convergente: $p_{\varepsilon(k)} \rightharpoonup p$ quando $k \longrightarrow +\infty$. Temos $u_{\varepsilon(k)} \longrightarrow u$ (Cf. Teorema 4.5.9). Seja $q \in A(u)$: como A é monótono, temos

$$\forall\ k \in \mathbb{N} : \left(p_{\varepsilon(k)} - q,\, u_{\varepsilon(k)} - u\right) \geq 0$$

de forma que

$$\forall\ k \in \mathbb{N} : \left(p_{\varepsilon(k)} - q,\, v\right) \leq 0.$$

Logo,

$$\forall\ k \in \mathbb{N} : \left(p_{\varepsilon(k)},\, v\right) \leq (q,\, v) .$$

Resulta que

$$\forall\ k \in \mathbb{N} : \left(p_{\varepsilon(k)},\, v\right) \leq \underline{h}_A(u,v)$$

e, passando ao limite,

$$(p,\, v) \leq \underline{h}_A(u,v) . \tag{8.1}$$

Por outro lado,

$$\forall\ k \in \mathbb{N} : \underline{h}_A\left(u_{\varepsilon(k)}, v\right) \leq \left(p_{\varepsilon(k)},\, v\right) .$$

Como A é hci, temos

$$\underline{h}_A(u,v) \leq \lim\ \inf_k\ \underline{h}_A\left(u_{\varepsilon(k)}, v\right) \leq (p,\, v) . \tag{8.2}$$

Combinando (8.1) e (8.2), temos

$$(p,\, v) = \underline{h}_A\,(u, v)\,.$$

Assim, $\left(p_{\varepsilon(k)},\, v\right) \longrightarrow h_A\,(u, v)$. Como toda subseqüência possue o mesmo limite, resulta da proposição 4.5.8 e do Teorema 4.5.9 que $(p_\varepsilon,\, v) \longrightarrow \underline{h}_A\,(u, v)$ quando $\varepsilon \to 0+$. ■

prova do Corolário 8.1.19. Seja $w = -v$. Então $u_\varepsilon = u - \varepsilon w$. Decorre do Lema 8.1.18 que, para $\varepsilon \longrightarrow 0+$,

$$(p_\varepsilon,\, w) \longrightarrow \underline{h}_A\,(u, w)$$

isto é,

$$-\,(p_\varepsilon,\, v) \longrightarrow \underline{h}_A\,(u, -v) = -\overline{h}_A\,(u, v)\ \ ,$$

de onde o resultado. ■

prova do Teorema 8.1.16. Como $A\,(w)$ contém um e um só elemento,

$$\overline{h}_A\,(w, v) = \underline{h}_A\,(w, v) = (A\,(w)\,, v)$$

Assim, decorre do Lema 8.1.18 que

$$\lim_{t\,\longrightarrow\,0-}\ (\ A\,(u + tv)\,,\ v) = \underline{h}_A\,(u, v) = (\ A\,(u)\,,\ v)$$

e do Corolário 8.1.19 que

$$\lim_{t\,\longrightarrow\,0+}\ (\ A\,(u + tv)\,,\ v) = \overline{h}_A\,(w, v) = (\ A\,(u)\,,\ v)\,.$$

Assim, temos o resultado enunciado. ■

prova do Corolário 8.1.17. A seqüência $\{\ u_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ é limitada (proposição 4.5.3). Assim, existe $M > 0$ tal que $\|\ u_n\ \| \le M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\|\ A\,(u_n)\ \| \le K\,(A, M)$ e $\{\ A\,(u_n)\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ é limitada. Decorre do Teorema 4.9.8 que existe uma subseqüência $\left\{\ u_{n(k)}\ \right\}_{k\ \in\ \mathbb{N}}$ tal que $\left\{\ A\left(u_{n(k)}\right)\ \right\}_{k\ \in\ \mathbb{N}}$ é fracamente convergente: $A\left(u_{n(k)}\right) \rightharpoonup p$ quando $k \longrightarrow +\infty$. Temos, $u_{n(k)} \longrightarrow u$ (Cf. proposição 4.5.6) e, para todo $v \in V$, (Cf. proposição 4.5.3):

$$\left(A\,(v)\,,\, u_{n(k)} - v\right) \longrightarrow (A\,(v)\,,\, u - v)\,,$$

e (Cf. proposição 4.8.5)

$$\left(A\left(u_{n(k)}\right),\, u_{n(k)} - v\right) \longrightarrow (p,\, u - v)\,,$$

de forma que

$$\left(A\,(u_n\,(k)) - A\,(v)\,,\, u_{n(k)} - v\right) \longrightarrow (p - A\,(v)\,,\, u - v)\,.$$

Ora, A é monótono:

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \;:\quad \left(A\left(u_{n(k)}\right) - A\,(v)\,,\, u_{n(k)} - v\right) \geq 0.$$

Logo,

$$(p - A\,(v)\,,\, u - v) \geq 0.$$

Assim, para todo $v \in V$ e $\varepsilon > 0$,

$$\varepsilon\,(p - A\,(u + \varepsilon v)\,,\, v) \leq 0,$$

de modo que, para todo $v \in V$ e $\varepsilon > 0$,

$$(p - A\,(u + \varepsilon v)\,,\, v) \leq 0.$$

Fazendo $\theta \longrightarrow 0+$ e utilizando o Teorema 8.1.16, temos

$$(p - A\,(u)\,,\, v) \leq 0,\; \forall\, v \in V.$$

Tomando $-v$ nesta desigualdade, resulta que

$$(p - A\,(u)\,,\, v) = 0,\; \forall\, v \in V.$$

Logo, $p = A\,(u)$ e $A\left(u_{n(k)}\right) \rightharpoonup A\,(u)$. Decorre da proposição 4.8.7 que $A\,(u_n)$ $\rightharpoonup A\,(u)$ fracamente em V. ■

Operadores maximais monótonos

Seja V um espaço de Hilbert separável munido do produto escalar $(\bullet,\ \bullet)_V$. Consideremos o espaço de Hilbert separável $V \times V$ - o produto escalar entre $X = (x_1,\ x_2)$ e $Y = (y_1,\ y_2)$ é $(X,\ Y) = (x_1,\ y_1)_V + (x_2,\ y_2)_V$.

Definição 8.1.20. *Seja A um operador sobre V. O domínio de A é o conjunto*

$$dom\,(A) = \{\ u \in V :\ A\,(u) \neq \varnothing\}\ .\ \blacksquare$$

Definição 8.1.21. *Seja A um operador sobre V. O grafo de A é o conjunto*

$$G\,(A) = \{\ (u_1,\, u_2) \in V \times V : u_1 \in dom\,(A)\,,\, u_2 \in A\,(u_1)\}\ .\ \blacksquare$$

Definição 8.1.22. *Seja A um operador em V. Diremos que A é* maximal monótono *se e somente se: A é monótono e*

$$T \text{ operador monótono em } V \quad \text{e} \quad G(A) \subset G(T) \Longrightarrow A = T\ .$$

De maneira análoga, A é ciclicamente maximal monótono *se e somente se: A é ciclicamente monótono e*

$$T \text{ operador ciclicamente monótono em } V \quad \text{e} \quad G(A) \subset G(T) \Longrightarrow A = T\ .\blacksquare$$

Notemos que *o grafo de um operador maximal monótono nunca é vazio*: com efeito, se $G(A) = \varnothing$, então $G(A) \subset G(T)$ para todo T (por exemplo, $G(A) \subset G(Id)$). Além disto, *o grafo de um operador maximal monótono é maximal no sentido do Lema de Zorn*: não existe nenhum grafo de operador monótono que o contenha a não ser ele mesmo. Temos

Lema 8.1.23. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional convexo próprio sci. Seja $A(u) = \partial J(u)$. Então A é maximal monótono.* $\blacksquare$

Prova. Os lemas 8.1.8 e 8.1.7 mostram que A é monótono. Seja T um operador monótono tal que $G(A) \subset G(T)$. Seja $(v, q) \in G(T)$. Então

$$\forall\, u \in V : (\ p - q,\, u - v) \geq 0 \ \text{ para todo } p \in \partial J(u)\ .$$

Sejam

$$p_1 = prox_{J,1}(v + x_2) \quad ; \quad p_2 = prox_{J^*,1}(v + x_2)\ .$$

Decorre do Lema 8.1.1 que $x_1 + x_2 = p_1 + p_2$, $p_1 \in \partial J^*(p_2)$ e $p_2 \in \partial J(p_1)$. Como $p_2 \in \partial J^*(p1)$ temos

$$(\ p_2 - x_2,\, p_1 - x_1) \geq 0\ .$$

Mas $x_1 + x_2 = p_1 + p_2 \Longrightarrow p_1 - x_1 = x_2 - p_2$, de modo que esta desigualdade mostra que

$$-\parallel x_1 - p_1 \parallel^2 \geq 0 \Longrightarrow x_1 = p_1 \Longrightarrow x_2 = p_2 \Longrightarrow x_2 \in \partial J(x_1)\,.$$

Assim, $G(T) \subset G(A)$, de modo que $G(T) = G(A)$. Logo, A é maximal monótono. $\blacksquare$

Corolário 8.1.24. *Seja $J : V \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional convexo próprio sci. Seja $A(u) = \partial J(u)$. Então A é ciclicamente maximal monótono.*$\blacksquare$

Prova. O Lema 8.1.8 mostra que A é ciclicamente monótono.Seja T um operador ciclicamente monótono tal que $G(A) \subset G(T)$. O Lema 8.1.7 mostra que A e T são monótonos. Resulta do Lema 8.1.23 que $G(T) = G(A)$ e, por conseguinte, A é cíclicamente maximal monótono. ■

Enfim, todo operador monótono (resp. ciclicamente monótono) pode ser extendido a um operador maximal monótono (resp. cíclicamente maximal monótono):

Teorema 8.1.25. *Seja A um operador monótono (resp. ciclicamente monótono). Então existe $\widetilde{A}$ maximal monótono (resp. ciclicamente maximal monótono) tal que $G(A) \subset G\left(\widetilde{A}\right)$.* ■

Prova. Este resultado é uma conseqüência do Lema de Zorn. Daremos a prova somente para o caso monótono, pois a prova é idêntica no caso ciclicamente monótono.

Seja $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(V \times V)$ o conjunto das extensões monótonas de A: $L \in \mathcal{L}$ se e somente se $G(A) \subset L$ e

$$(y_2 - x_2, y_1 - x_1) \geq 0 \ , \quad \forall \ X, Y \in L \ .$$

Como $G(A) \in \mathcal{L}$, temos $\mathcal{L} \neq \varnothing$.Além disto, $(\mathcal{L}, \subset)$ é parcialmente ordenado.

Seja $\mathcal{C} = \{ L_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ uma cadeia de $\mathcal{L}$. Então $L = \underset{\lambda \in \Lambda}{\cup} L_\lambda$ é um majorante de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{L}$: por um lado, $L_\lambda \subset L$ para todo $\lambda \in \Lambda$ e, por outro lado, $L \in \mathcal{L}$: com efeito, $G(A) \subset L$ e, para todo $X, Y \in L$, existem $L_X \in \mathcal{C}$, $L_Y \in \mathcal{C}$ tais que $X \in L_X$ e $Y \in L_Y$. Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia, $\{ L_X, \ L_Y \}$ é uma subcadeia finita e possue um máximo L_M (proposição 3.2.13). Assim, $X \in L_M$ e $Y \in L_M$ de modo que

$$(y_2 - x_2, y_1 - x_1) \geq 0 \ , \quad \forall \ X, Y \in L \ .$$

Assim, o Lema de Zorn mostra que $\mathcal{L}$ tem um elemento maximal M. Seja $\widetilde{A}$ o operador definido por

$$\widetilde{A}(u) = \{ p \in V : (u, p) \in M \} .$$

Temos $G\left(\widetilde{A}\right) = M$, de modo que $G(A) \subset G\left(\widetilde{A}\right)$ e $\widetilde{A}$ é monótono. Seja T um operador monótono tal que $G\left(\widetilde{A}\right) \subset G(T)$. Então $G(A) \subset G(T)$, de modo que $G(T) \in \mathcal{L}$. Ora, M é um elemento maximal de $\mathcal{L}$, de modo que $M = G\left(\widetilde{A}\right) \subset G(T) \Longrightarrow G(T) = M = G\left(\widetilde{A}\right)$. ■

Temos

Lema 8.1.26. *Seja A um operador em V tal que A é maximal monótono. Então, para todo $U \in V \times V$:*

$$\sup\left\{(u_2 - y_2,\ y_1 - u_1)_V \ : Y \ \in \ G\left(A\right)\right\} \geq 0.$$

Além disto,

$$\sup\left\{(u_2 - y_2,\ y_1 - u_1)_V \ : Y \ \in \ G\left(A\right)\right\} = 0 \Longleftrightarrow U \in G\left(A\right). \ \blacksquare$$

Prova. Seja $U \in V \times V$ tal que

$$\sup\left\{(u_2 - y_2,\ y_1 - u_1)_V \ : Y \ \in \ G\left(A\right)\right\} \leq 0. \tag{8.3}$$

Para estabelecer o resultado, basta mostrar que esta desigualdade implica que $U \in G\left(A\right)$, o que implica também que

$$\sup\left\{(u_2 - y_2,\ y_1 - u_1)_V \ : Y \ \in \ G\left(A\right)\right\} = 0,$$

de forma que, por um lado, *não existe* nenhum elemento U tal que

$$\sup\left\{(u_2 - y_2,\ y_1 - u_1)_V \ : Y \ \in \ G\left(A\right)\right\} < 0$$

e, por outro lado,

$$\sup\left\{(u_2 - y_2,\ y_1 - u_1)_V \ : Y \ \in \ G\left(A\right)\right\} = 0 \Longrightarrow U \in G\left(A\right).$$

A recíproca desta última afirmação resulta da monotonia: se $U \in G\left(A\right)$, então

$$(u_2 - y_2,\ y_1 - u_1)_V = -\left(u_2 - y_2,\ u_1 - y_1\right)_V \leq 0, \quad \forall\, Y \in G\left(A\right)$$

e

$$0 \geq \sup\left\{(u_2 - y_2,\ u_1 - y_1)_V \ : Y \ \in \ G\left(A\right)\right\} \geq \left(u_2 - u_2,\ u_1 - u_1\right)_V \ = 0.$$

Seja $U \in V \times V$ satisfazendo (8.3). Então

$$\inf\left\{(u_2 - y_2,\ u_1 - y_1)_V \ : Y \ \in \ G\left(A\right)\right\} \geq 0,$$

de modo que

$$(u_2 - y_2,\ u_1 - y_1)_V \ \geq 0, \ \forall\, Y \in G\left(A\right).$$

Seja T o operador tal que $G\left(T\right) = G\left(A\right) \cup \{\ U\ \}$. A desigualdade acima mostra que T é monótono e, por construção, $G\left(A\right) \subset G\left(T\right)$. Ora, A é maximal monótono, de forma que $T = A$ e, por conseguinte, $U \in G\left(A\right)$ $\blacksquare$

Corolário 8.1.27. *Seja A um operador em V tal que A é monótono. Então A é maximal monótono se e somente se*

$$\sup\left\{(u_2 - y_2,\ y_1 - u_1)_V \ : Y \ \in \ G\left(A\right)\right\} \geq 0, \ \ \forall\, U \in V \times V$$

e

$$\sup\left\{(u_2 - y_2,\ y_1 - u_1)_V \ : Y \ \in \ G\left(A\right)\right\} = 0 \Longleftrightarrow U \in G\left(A\right). \ \blacksquare$$

Prova. A afirmação direta resulta do Lema 8.1.26. mostremos a recíproca: seja T um operador monótono tal que $G(A) \subset G(T)$ e consideremos $U \in G(T)$. Temos

$$\sup\{(u_2 - y_2,\ y_1 - u_1)_V \ : Y \ \in \ G(A)\} \geq 0.$$

Mas $G(A) \subset G(T)$ e T é monótono, de modo que

$$(u_2 - y_2,\ y_1 - u_1)_V = -(u_2 - y_2,\ u_1 - y_1)_V \leq 0, \quad \forall\, Y \in G(A)$$

e temos

$$\sup\{(u_2 - y_2,\ u_1 - y_1)_V \ : Y \ \in \ G(A)\} \leq 0.$$

Assim,

$$\sup\{(u_2 - y_2,\ y_1 - u_1)_V \ : Y \ \in \ G(A)\} = 0,$$

o que implica $U \in G(A)$. Logo, $G(T) \subset G(A)$ e temos $G(A) = G(T)$. ■

Este corolário tem uma conseqüência importante:

Teorema 8.1.28 (grafo fechado)**.** *Seja A um operador sobre V tal que A é maximal monótono. Se $\{\ (x_n,\, p_n)\ \}_{n\, \in\, \mathbb{N}} \subset G(A)$ é uma seqüência tal que $x_n \longrightarrow x$ fortemente em V e $p_n \longrightarrow p$ fracamente em V, então $(x,\ p) \in G(A)$.* ■

Prova. Como A é monótono, temos

$$(p_n - y_2,\ y_1 - x_n)_V = -(p_n - y_2,\ x_n - y_1)_V \leq 0, \quad \forall\, Y \in G(A) \ .$$

Ora (Cf. proposição 4.8.5),

$$(p_n,\ x_n)_V \longrightarrow (p,\ x)_V \ ; \ (p_n,\ y_1)_V \longrightarrow (p,\ y_1)_V \ ; \ (y_2,\ x_n)_V \longrightarrow (y_2,\ x_n)_V \ ,$$

de modo que, passando ao limite, temos

$$(p - y_2,\ y_1 - x)_V \leq 0, \quad \forall\, Y \in G(A) \ .$$

Assim,

$$\sup\{(p - y_2,\ y_1 - x)_V \ : Y \ \in \ G(A)\} \leq 0$$

e, por conseguinte, decorre do Corolário 8.1.27 que

$$\sup\{(p - y_2,\ y_1 - x)_V \ : Y \ \in \ G(A)\} = 0 \Longleftrightarrow (x,\ p) \in G(A)$$

e temos o resultado enunciado. ■

Temos também

Proposição 8.1.29. *Seja A um operador em V tal que A é monótono. Sejam*

$$\ell_Y(U) = (u_2,\ y_1)_V + (y_2,\ u_1)_V - (y_2,\ y_1)_V$$

e

$$L_A(U) = \sup\{\ell_Y(U) \ : Y \ \in \ G(A)\}.$$

Então L_A é convexo e sci. Além disto, A é maximal monótono se e somente se, para todo $U \in V \times V$:

$$L_A(U) \geq (u_2,\ u_1)_V$$

e

$$L_A(U) = (u_2,\ u_1)_V \iff U \in G(A). \ \blacksquare$$

Prova. ℓ_Y é um funcional afim contínuo, de modo que ℓ_Y é sci. Decorre das proposições 6.3.16 e 6.2.4 que L_A é convexo e sci. Além disto,

$$\ell_Y(U) = (u_2 - y_2,\ y_1 - u_1)_V + (u_2,\ u_1)_V$$

de modo que

$$L_A(U) = \sup\{(u_2 - y_2,\ y_1 - u_1)_V \ : Y \ \in \ G(A)\} + (u_2,\ u_1)_V \ .$$

Decorre do Corolário 8.1.27 que A é maximal monótono se e somente se

$$L_A(U) \geq (u_2,\ u_1)_V \quad , \ \forall\, U \in V \times V$$

e

$$L_A(U) = (u_2,\ u_1)_V \iff U \in G(A),$$

de onde o resultado enunciado. $\blacksquare$

Para $U = (u_1,\ u_2) \in V \times V$, seja $R(U) = (u_2,\ u_1)$. Temos

Lema 8.1.30. *Seja A um operador em V tal que A é maximal monótono. Se $R(P) \in \partial L_A(X)$ então*

$$(p_2 - x_2,\ p_1 - x_1)_V \leq 0 \ .$$

Além disto,

$$(p_2 - x_2,\ p_1 - x_1)_V = 0 \implies P \in G(A) \ . \ \blacksquare$$

Prova. Temos

$$(p_2 - x_2,\ p_1 - x_1)_V = (p_2,\ p_1)_V + (x_2,\ x_1)_V - (p_2,\ x_1)_V - (x_2,\ p_1)_V \ ,$$

de modo que

$$(p_2 - x_2,\ p_1 - x_1)_V \leq L_A(X) + (p_2,\ p_1)_V - (p_2,\ x_1)_V - (x_2,\ p_1)_V \ . \tag{8.4}$$

Seja $U \in G(A)$. Então

$$L_A(U) - L_A(X) \geq (R(P), U - R(X)) = (p_2,\ u_1 - x_1)_V + (p_1,\ u_2 - x_2)_V$$

Como $L_A(U) = (u_2,\ u_1)_V$, temos

$$L_A(X) \leq (u_2,\ u_1)_V - (p_2,\ u_1 - x_1)_V - (p_1,\ u_2 - x_2)_V \ .$$

Assim,

$$L_A(X) \leq (u_2,\ u_1)_V + (p_2,\ x_1)_V + (p_1,\ x_2)_V - (p_2,\ u_1)_V - (p_1,\ u_2)_V \ . \tag{8.5}$$

Combinando (8.4) e (8.5), temos, para todo $U \in G(A)$,

$$(p_2 - x_2,\ p_1 - x_1)_V \leq (p_2 - u_2,\ p_1 - \ u_1)_V \ .$$

Assim,

$$(p_2 - x_2,\ p_1 - x_1)_V \leq \inf\left\{(p_2 - y_2,\ p_1 - \ y_1)_V \ : Y \ \in \ G(A)\right\},$$

ou seja

$$(p_2 - x_2,\ p_1 - x_1)_V \leq -\sup\left\{(p_2 - y_2,\ y_1 - \ p_1)_V \ : Y \ \in \ G(A)\right\}. \tag{8.6}$$

Decorre do Corolário 8.1.27 que

$$(p_2 - x_2,\ p_1 - x_1)_V \leq 0.$$

Se

$$(p_2 - x_2,\ p_1 - x_1)_V = 0 \ ,$$

(8.6) mostra que

$$\sup\left\{(p_2 - y_2,\ y_1 - \ p_1)_V \ : Y \ \in \ G(A)\right\} \leq 0$$

e decorre do Corolário 8.1.27 que $P \in G(A)$. ■

Teorema 8.1.31. *Seja A um operador em V tal que A é monótono. A é maximal monótono se e somente se $G(A) + G(-Id) = V \times V$, isto é, A é maximal monótono*

se e somente se, para todo $X \in V \times V$, existem $u \in V$ e $Y \in G(A)$ tais que $x_1 = y_1 + u$ e $x_2 = y_2 - u$. ■

Prova. Suponhamos que $G(A) + G(-Id) = V \times V$. Seja T um operador monótono tal que $G(A) \subset G(T)$.Consideremos $X \in G(T)$. Então

$$(x_2 - z_2,\ x_1 - z_1)_V \geq 0, \forall\ Z \in G(A) \ ,$$

Ora, existem $u \in V$ e $Y \in G(A)$ tais que $x_1 = y_1 + u$ e $x_2 = y_2 - u$, de modo que

$$(y_2 - u - z_2,\ y_1 + u - z_1)_V \geq 0, \forall\ Z \in G(A)\ .$$

Tomando $Z = Y$, vem

$$(-u,\ u)_V \geq 0 \Longleftrightarrow \parallel u \parallel^2 \leq 0 \Longleftrightarrow u = 0,$$

de modo que $X = Y \in G(A)$. Assim, $G(T) \subset G(A)$ e A é maximal monótono.

Suponhamos que A é maximal monótono. Mostremos que $\mathbf{0} \in G(A) + G(-Id)$. Seja $J : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$J(U) = \frac{1}{2} \parallel U \parallel^2 + L_A(U)\,.$$

J é convexa, coerciva, própria, sci : decorre do Corolário 7.2.8 que existe $X \in V \times V$ tal que $J(X) = \min(J)$. Assim, $\mathbf{0} \in \partial J(X)$ (Teorema 7.2.2). Como a norma é uma aplicação contínua e $L_A(U) = (u_2,\ u_1)_V$ para $U \in G(A)$, o Teorema 6.7.17 mostra que

$$\partial J(X) = X + \partial L_A(X)\,.$$

Assim, existe $U \in V \times V$ tal que $-U \in \partial L_A(U)$ e, por conseguinte, $P = -R(U)$ verifica $R(P) = -U \in \partial L_A(U)$: decorre do Lema 8.1.30 que

$$(p_2 - u_2,\ p_1 - u_1)_V \leq 0\ ,$$

ou seja

$$(-u_1 - u_2,\ -u_2 - u_1)_V \leq 0 \implies \parallel u_2 + u_1 \parallel^2 \leq 0\ ,$$

de forma que $u_2 = -u_1 \implies U \in G(-Id) \implies R(U) \in G(-Id) \implies -P \in G(-Id)$. Por outro lado, temos também

$$u_2 = -u_1 \implies (p_2 - u_2,\ p_1 - u_1)_V = 0\ ,$$

de modo que o Lema 8.1.30 mostra que $P \in G(A)$. Assim, $\mathbf{0} \in G(A) + G(-Id)$. Seja $Y \in V \times V$: definindo $M = G(A) - Y$ e $\widetilde{A}$ o operador definido por

$$\widetilde{A}(u) = \{\ p \in V : (u, p) \in M\}\,.$$

Temos $G\left(\widetilde{A}\right) = M$. Além disto, $\widetilde{A}$ é maximal monótono, de forma que $\mathbf{0} \in G\left(\widetilde{A}\right) + G(-Id)$, de forma que $Y \in G(A) + G(-Id)$. Logo, $G(A) + G(-Id) = V \times V$. ■

Corolário 8.1.32. *A um operador em V tal que A é maximal monótono. Então $A + Id$ é sobrejetivo ($Im(A + Id) = V$), isto é, para todo $v \in V$, existem $u \in V$ e $p \in A(u)$ tais que $p + u = v$.* ■

Prova. $(0,\ v) \in V \times V$. Decorre do Teorema 8.1.31 que existem $X \in G(A)$, $Y \in G(-Id)$ tais que $X + Y = (0,\ v)$. Logo

$$x_1 + y_1 = 0 \ \ ; \ \ x_2 + y_2 = v.$$

Sejam $u = x_1$ e $p = x_2$. Como $X \in G(A)$, temos $p \in A(u)$. Como $Y \in G(-Id)$, temos $y_2 = -y_1$. Assim,

$$y_2 = -y_1 = x_1 = u,$$

de modo que

$$v = x_2 + y_2 = x_2 + x_1 = p + u \ ,$$

de onde a existência de um par $(u,\ p) \in G(A)$ tal que $p+u = v$. Seja $(w,\ q) \in G(A)$ tal que $q + w = v$. Então

$$(p - q) + (u - w) = v - v = 0,$$

de modo que

$$0 = \underbrace{(p - q,\ u - w)_V}_{\geq\ 0,\ \text{pois } A \text{ monótono}} + (u - w,\ u - w)_V \geq \|\ u - w\ \|_V^2 \ .$$

Assim, $u = w$ e, por conseguinte, $p = v - u = v - w = q$. ■

Teorema 8.1.33. *Sejam $\lambda > 0$ e A um operador em V tal que A é maximal monótono. Então $A + \lambda Id$ é sobrejetivo ($Im(A + \lambda Id) = V$), isto é, para todo $v \in V$, existem $u \in V$ e $p \in A(u)$ tais que $p + \lambda u = v$.* ■

Prova. Seja $A_\lambda = \dfrac{1}{\lambda}A$.Temos $X \in G(A_\lambda) \Longleftrightarrow (x_1,\ \lambda x_2) \in G(A)$. Assim, para todos $X,\, Y \in G(A_\lambda)$:

$$(y_2 - y_1,\ x_2 - x_1)_V = \frac{1}{\lambda}(y_2 - y_1, \lambda x_2 - \lambda x_1)_V \geq 0$$

e A_λ é monótono. Seja T_λ um operador monótono tal que $G(A_\lambda) \subset G(T_\lambda)$. Pondo $T = \lambda T_\lambda$, temos:

$$Y \in G(A) \Longrightarrow \left(y_1,\ \frac{1}{\lambda}y_2\right) \in G(A_\lambda) \subset G(T_\lambda) \Longrightarrow Y \in G(T) \ ,$$

de modo que $G(A) \subset G(T)$. Como A é maximal, temos $G(A) = G(T)$, de modo que

$$X \in G(T_\lambda) \Longrightarrow (x_1,\ \lambda x_2) \in G(T) = G(A) \Longrightarrow X \in G(A_\lambda) \ .$$

Assim, $G(T_\lambda) \subset G(A_\lambda)$, de forma que $G(A_\lambda) = G(T_\lambda)$ e A_λ é maximal monótono.

Sejam $v \in V$ e $v_\lambda = \dfrac{1}{\lambda} v$. Decorre do corolário 8.1.32 que existe um único par $(u_\lambda, p_\lambda) \in G(A_\lambda)$ tal que $p_\lambda + u_\lambda = v_\lambda$. Ora, $(u_\lambda,\ p_\lambda) \in G(A_\lambda) \Longleftrightarrow (u_\lambda,\ \lambda p_\lambda) \in G(A)$. Assim, tomando $u = u_\lambda$ e $p = \lambda p_\lambda$, temos $(u,\ p) \in G(A)$ e

$$\frac{1}{\lambda} p + u = v_\lambda = \frac{1}{\lambda} v \Longrightarrow p + \lambda u = v,$$

de onde a existência de um par. Seja $(w,\ q) \in G(A)$ tal que $q + \lambda w = v$. Então $w_\lambda = w$ e $q_\lambda = \dfrac{1}{\lambda} q$ verificam $(w_\lambda,\ q_\lambda) \in G(A_\lambda)$ e $q_\lambda + w_\lambda = v_\lambda$. Assim, a unicidade de $(u_\lambda,\ p_\lambda)$ mostra que $w_\lambda = u_\lambda$ e $q_\lambda = p_\lambda$, ou seja $w = u$ e $q = p$. ■

O Teorema de Ponto Fixo de Brower

Utilizaremos no que segue o resultado clássico seguinte, demonstrado por Brower (Cf. [Griffel 2002]):

Teorema 8.1.34 (ponto fixo)**.** *Seja V um espaço de Hilbert e $C \subset V$ um compacto convexo não-vazio. Se $f : C \longrightarrow V$ é uma aplicação contínua tal que $f(C) \subset C$ então existe $c \in C$ tal que $f(c) = c$.* ■

Este resultado tem grandes aplicações práticas. Por exemplo, seja $C^0(U,\ W)$ o conjunto das aplicações contínuas de U em W:

$$C^0(U,\ W) = \{\ f : U \longrightarrow W\ :\ f \text{ é contínua } \}\ .$$

Assim, $f \in C^0(U,\ W)$ se e somente se $f : U \longrightarrow W$ verifica $\lim f(u_n) = f(u)$ para toda seqüência $\{\ u_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset U$ tal que $\lim u_n = u$. O teorema do ponto fixo implica que

Teorema 8.1.35. *Sejam V e W dois espaços de Hilbert; $C \subset V$ um compacto não-vazio, $A \subset W$ um convexo não-vazio, $L : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u \longrightarrow L(u;\alpha)$ é sci para todo $\alpha \in A$ e $\alpha \longrightarrow L(u;\alpha)$ é côncava para todo $u \in C$. Seja*

$$m\ =\ \inf_{v\ \in\ C}\ \sup_{\alpha\ \in\ A} L(v;\alpha)$$

■

Lema 8.1.36. *Então*

$$m = \inf_{g\ \in\ C^0(A,\ C)}\ \sup_{\alpha\ \in\ A} L(g(\alpha);\alpha)\ .■$$

e

Corolário 8.1.37 (Ky-Fan)**.** *Seja V um espaço de Hilbert; $C \subset V$ um compacto não-vazio, $L : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u \longrightarrow L(u;\, v)$ é sci para todo $v \in C$ e $v \longrightarrow L(u;\, v)$ é côncava para todo $u \in C$. Então existe $u \in C$ tal que*

$$\sup_{v \,\in\, C} L(u;\, v) \leq \sup_{v \,\in\, C} L(v;\, v)\,. \ \blacksquare$$

O Teorema 8.1.35 resulta dos dois lemas seguintes:

Lema 8.1.38. *Seja $\varphi : U \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Então:*

(i) $\forall\, u \in U : \sup\limits_{w \,\in\, W} \varphi(u,\; w) = \sup\limits_{f \,\in\, C^0(U,\, W)} \varphi(u,\; f(u))\,;$

(ii) $\forall\, w \in W : \inf\limits_{u \,\in\, U} \varphi(u,\; w) = \inf\limits_{g \,\in\, C^0(W,\, U)} \varphi(g(w)\,,\; w)\,.\blacksquare$

Lema 8.1.39. *Sejam V e W dois espaços de Hilbert; $C \subset V$ um compacto não-vazio, $A \subset W$ um convexo não-vazio, $L : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u \longrightarrow L(u;\, \alpha)$ é sci para todo $\alpha \in A$ e $\alpha \longrightarrow L(u;\, \alpha)$ é côncava para todo $u \in C$. Seja*

$$m = \inf_{v \,\in\, C} \sup_{\alpha \,\in\, A} L(v;\, \alpha)$$

Então

$$m = \sup_{f \,\in\, C^0(C,\, A)} \inf_{v \,\in\, C} L(v;\, f(v)) = \inf_{v \,\in\, C} \sup_{f \,\in\, C^0(C,\, A)} L(v;\, f(v))\,.\blacksquare$$

prova do Lema 8.1.38. Seja $u \in U$. Então, para toda $f \in C^0(U,\; W) : f(u) \in W$, de modo que

$$\varphi(u,\; f(u)) \leq \sup_{w \,\in\, W} \varphi(u, w)\,.$$

Assim,

$$\sup_{f \,\in\, C^0(U,\, W)} \varphi(u,\; f(u)) \leq \sup_{w \,\in\, W} \varphi(u, w)\,.$$

Suponhamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sup_{f \,\in\, C^0(U,\, W)} \varphi(u,\; f(u)) + \varepsilon \leq \sup_{w \,\in\, W} \varphi(u, w)\,. \tag{8.7}$$

Então existe $w_\varepsilon \in W$ tal que

$$\sup_{w \,\in\, W} \varphi(u, w) \leq \varphi(u, w_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Como a função $f_\varepsilon : U \longrightarrow W$ dada por $f_\varepsilon(u) = w_\varepsilon$, $\forall\ u \in U$ é contínua, temos

$$\varphi(u, w_\varepsilon) = \varphi(u,\ f_\varepsilon(u)) \leq \sup_{f\ \in\ C^0(U,\ W)} \varphi(u,\ f(u)),$$

de forma que

$$\sup_{w\ \in\ W} \varphi(u, w) \leq \sup_{f\ \in\ C^0(U,\ W)} \varphi(u,\ f(u)) + \frac{\varepsilon}{2}\ . \tag{8.8}$$

Combinando as desigualdades (8.7) e(8.8), resulta que $\varepsilon \leq 0$: assim, $0 < \varepsilon \leq 0$, o que é absurdo. Logo, temos (i).

A prova de (ii) é análoga: seja $w \in W$. Então, para toda $g \in C^0(W,\ U)$: $g(w) \in U$, de modo que

$$\varphi(g(w),\ w) \geq \inf_{u\ \in\ U} \varphi(u, w)$$

e temos

$$\inf_{g\ \in\ C^0(W,\ U)} \varphi(g(w),\ w) \geq \inf_{u\ \in\ U} \varphi(u, w)\,.$$

Se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\inf_{g\ \in\ C^0(W,\ U)} \varphi(g(w),\ w) \geq \varepsilon + \inf_{u\ \in\ U} \varphi(u, w) \tag{8.9}$$

então existe $u_\varepsilon \in U$ tal que

$$\inf_{u\ \in\ U} \varphi(u, w) \geq \varphi(u_\varepsilon, w) - \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Como a função $g_\varepsilon : W \longrightarrow U$ dada por $g_\varepsilon(w) = u_\varepsilon$, $\forall\ w \in W$ é contínua, temos

$$\varphi(u_\varepsilon, w) = \varphi(g_\varepsilon(w), w) \geq \inf_{g\ \in\ C^0(W,\ U)} \varphi(g(w),\ w),$$

de forma que

$$\inf_{u\ \in\ U} \varphi(u, w) \geq \inf_{g\ \in\ C^0(W,\ U)} \varphi(g(w),\ w) - \frac{\varepsilon}{2}\ . \tag{8.10}$$

Combinando as desigualdades (8.9) e(8.10), resulta que $\varepsilon \leq 0$: assim, $0 < \varepsilon \leq 0$, o que é absurdo. Logo, temos (ii). ■

prova do Lema 8.1.39. Sejam $f \in C^0(C,\ A)$ e $v \in C$. Então $f(v) \in A$, de modo que

$$L(v;\ f(v)) \leq \sup_{\alpha\ \in\ A} L(v;\ \alpha)\,.$$

Assim,

$$\inf_{v\ \in\ V} L(v;\ f(v)) \leq \inf_{v\ \in\ C}\ \sup_{\alpha\ \in\ A} L(v;\ \alpha),$$

de forma que

$$\sup_{f\ \in\ C^0(C,\ A)}\ \inf_{v\ \in\ V} L(v;\ f(v)) \ \leq\ m. \tag{8.11}$$

Sejam $v \in C$ e $\varepsilon > 0$. Então existe $\alpha_\varepsilon(v)$ tal que

$$\sup_{\alpha \in A} L(v;\, \alpha) \leq L(v;\, \alpha_\varepsilon(v)) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.12}$$

Como $u \longrightarrow L(u;\, \alpha_\varepsilon(v))$ é sci:

$$L(v;\, \alpha_\varepsilon(v)) \leq \lim\ \inf\ L(v;\, \alpha_\varepsilon(v)),$$

de modo que existe $r(v,\varepsilon)$ tal que

$$u \in B_{r(v,\varepsilon)}(v) \Longrightarrow L(v;\, \alpha_\varepsilon(v)) \leq L(u;\, \alpha_\varepsilon(v)) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.13}$$

Seja

$$A_v = int\left(\ B_{r(v,\varepsilon)}(v)\ \right) = \{\ u \in C : \|\ u - v\| < r(v,\varepsilon)\}.$$

Então $\{\ A_v\ \}_{v\ \in\ C}$ é uma família de abertos tal que $C \subset \bigcup_{v\ \in\ C} A_v$. Como C é compacto, existe uma subfamília finita que também contém C: existem $\{\ v_1,\ ...,\ v_n\} \subset C$ tais que $C \subset \bigcup_{i\ =\ 1}^{n} A_{v_i}$. Seja $\Delta_i = C - A_{v_i}$. Como A_{v_i}é aberto, Δ_i é fechado, e, portanto, Δ_i é compacto (Lema 4.3.20). Seja

$$\delta_i(v) = dist(v,\ \Delta_i).$$

Temos $\delta_i \geq 0$. Seja $v \in A_{v_i}$. Como A_{v_i} é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(v) \subset A_{v_i}$. Assim,

$$\|\ v - s\| \geq \varepsilon,\ \ \forall\ s \in \Delta_i \Longrightarrow \delta_i(v) \geq \varepsilon > 0.$$

Logo,

$$\delta_i(v) = 0 \Longleftrightarrow v \in \Delta_i \Longleftrightarrow v \notin A_{v_i}.$$

Seja $c \in C$

$$\delta(c) = \sum_{j\ =\ 1}^{n} \delta_i(c)\ \ .$$

Como $C \subset \bigcup_{i\ =\ 1}^{n} A_{v_i}$, existe j tal que $c \in A_{v_j}$, de modo que

$$\delta(c) = \sum_{j\ =\ 1}^{n} \delta_i(c)\ \ \geq \delta_j(c) > 0.$$

Assim,

$$\delta(c) > 0,\ \ \forall\ c \in C. \tag{8.14}$$

Seja

$$f_j(c) = \frac{\delta_j(c)}{\delta(c)}$$

Como $\delta_i : C \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua para $1 \leq i \leq n$ (proposição 5.4.8), (8.14) mostra que f_j é contínua para $1 \leq j \leq n$. Logo, $f(v) = \sum_{i=1}^{n} f_i(v)\, \alpha_\varepsilon(v_i)$ é contínua.

Ora, $\alpha \longrightarrow L(u;\alpha)$ é côncava, $f_i(v) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} f_i(v) = 1$, de modo que

$$L(v;\, f(v)) \geq \sum_{i=1}^{n} f_i(v)\, L(v;\, \alpha_\varepsilon(v_i)) \ ,$$

e (8.13) implica que

$$L(v;\, f(v)) \geq \sum_{i=1}^{n} f_i(v)\, L(v_i;\, \alpha_\varepsilon(v_i)) - \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

Assim, de (8.12),

$$L(v;\, f(v)) \ \geq \ \sup_{\alpha \in A} L(v;\alpha) - \varepsilon \ .$$

Por conseguinte,

$$\inf_{v \in V} L(v;\, f(v)) \geq m - \varepsilon$$

e

$$\sup_{f \in C^0(C,\, A)} \ \inf_{v \in V} L(v;\, f(v)) \ \geq \ m - \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, resulta que

$$\sup_{f \in C^0(C,\, A)} \ \inf_{v \in V} L(v;\, f(v)) \ \geq \ m. \tag{8.15}$$

Combinando (8.11) e (8.15), temos

$$m = \sup_{f \in C^0(C,\, A)} \ \inf_{v \in V} L(v;\, f(v)) \ .$$

Por outro lado, do Lema 8.1.38:

$$\sup_{\alpha \in A} L(u,\ \alpha) = \sup_{f \in C^0(C,\, A)} L(u,\ f(u)) \,,$$

de modo que

$$m = \inf_{v \in V} \ \sup_{f \in C^0(C,\, A)} L(u,\ f(u))$$

e temos o resultado enunciado. ■

prova do Teorema 8.1.35. Seja $\varphi(v) = \sup_{\alpha \in A} L(v,\ \alpha)$: φ é sci (proposição 6.3.16) e o Teorema 7.2.11 mostra que existe $u \in C$ tal que

$$\varphi(u) = \inf_{v \in V} \varphi(v) = \inf_{v \in C} \ \sup_{\alpha \in A} L(v;\alpha) \,.$$

Consideremos

$$F = \{\ K \subset A : K \ \ \text{fini}\ \}\,.$$

Para $\beta \in A$, temos $\{\ \beta\ \} \in F$, de modo que

$$L\,(v;\,\beta) \ \ \le \ \sup_{\alpha\,\in\,K} L\,(v;\,\alpha)$$

e

$$\sup_{K\,\in\,F}\ \inf_{v\,\in\,C}\ \sup_{\alpha\,\in\,K} L\,(v;\,\alpha) \le \ \inf_{v\,\in\,C}\ \sup_{\alpha\,\in\,A} L\,(v;\,\alpha)\ \ . \tag{8.16}$$

Por outro lado, para todo $K \in F$,

$$\sup_{\alpha\,\in\,K} L\,(v;\,\alpha) \le \ \sup_{\alpha\,\in\,A} L\,(v;\,\alpha) \tag{8.17}$$

Assim,

$$\inf_{v\,\in\,C}\ \sup_{\alpha\,\in\,A} L\,(v;\,\alpha) \ \ \le \ \sup_{K\,\in\,F}\ \inf_{v\,\in\,C}\ \sup_{\alpha\,\in\,K} L\,(v;\,\alpha)\,. \tag{8.18}$$

Combinando (8.16) e (8.18), temos

$$m = \ \sup_{K\,\in\,F}\ \inf_{v\,\in\,C}\ \sup_{\alpha\,\in\,K} L\,(v;\,\alpha)\,.$$

Sejam $K = \{\ \alpha_1, ..., \alpha_n\}$ e

$$S = \left\{\ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \lambda_i \ge 0\ \,(i = 1, ..., n)\ \ \text{e} \ \ \sum_{i\,=\,1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}\ .$$

Temos

$$\sup_{\alpha\,\in\,K} L\,(v;\,\alpha) = \ \sup_{\lambda\,\in\,S} \sum_{i\,=\,1}^{n} \lambda_i L\,(v;\,\alpha_i)$$

de modo que

$$\inf_{v\,\in\,C}\ \sup_{\alpha\,\in\,K} L\,(v;\,\alpha) = \ \inf_{v\,\in\,C}\ \sup_{\lambda\,\in\,S} \sum_{i\,=\,1}^{n} \lambda_i L\,(v;\,\alpha_i)$$

Seja $g \in C^0\,(A,\ C)$. Temos também

$$\inf_{v\,\in\,C}\ \sup_{\lambda\,\in\,S} \sum_{i\,=\,1}^{n} \lambda_i L\,(v;\,\alpha_i) \le \inf_{\gamma\,\in\,S}\ \sup_{\lambda\,\in\,S} \sum_{i\,=\,1}^{n} \lambda_i L \left(g \left(\sum_{i\,=\,1}^{n} \gamma_i \alpha_i \right) ;\, \alpha_i \right),$$

de forma que

$$\inf_{v\,\in\,C}\ \sup_{\alpha\,\in\,K} L\,(v;\,\alpha) \le \ \inf_{\gamma\,\in\,S}\ \sup_{\lambda\,\in\,S} M\,(\gamma;\,\lambda)\,, \tag{8.19}$$

onde

$$M\,(\gamma;\,\lambda) = \sum_{i\,=\,1}^{n} \lambda_i L \left(g \left(\sum_{i\,=\,1}^{n} \gamma_i \alpha_i \right) ;\, \alpha_i \right).$$

Ora, S é convexo e compacto (trata-se de um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^n$), $\gamma \longrightarrow M(\gamma;\, \lambda)$ é sci para todo $\lambda \in S$ e $\lambda \longrightarrow M(\gamma;\, \lambda)$ é côncava para todo $\gamma \in S$. Assim, o Lema 8.1.39 mostra que

$$\inf_{\gamma \in S} \sup_{\lambda \in S} M(\gamma;\, \lambda) \;=\; \sup_{f \in C^0(S,\, S)} \inf_{\gamma \in S} M(\gamma;\, f(\gamma)) \;.$$

Por outro lado, o Teorema do ponto fixo 8.1.34 mostra que existe $\theta \in S$ tal que $f(\theta) = \theta$, de modo que

$$\inf_{\gamma \in S} M(\gamma;\, f(\gamma)) \leq M(\theta;\, \theta) \leq \sup_{\lambda \in S} M(\lambda;\, \lambda)\,.$$

Assim,

$$\inf_{\gamma \in S} \sup_{\lambda \in S} M(\gamma;\, \lambda) \;\leq\; \sup_{\lambda \in S} M(\lambda;\, \lambda)$$

e (8.19) mostra que

$$\inf_{v \in C} \sup_{\alpha \in K} L(v;\, \alpha) \leq \sup_{\lambda \in S} M(\lambda;\, \lambda)\,. \tag{8.20}$$

Ora, como $\alpha \longrightarrow L(u;\, \alpha)$ é côncava:

$$M(\lambda;\, \lambda) = \sum_{i\,=\,1}^{n} \lambda_i L\left(g\left(\sum_{i\,=\,1}^{n} \lambda_i \alpha_i\right);\, \alpha_i\right) \leq L\left(g\left(\sum_{i\,=\,1}^{n} \lambda_i \alpha_i\right);\; \sum_{i\,=\,1}^{n} \lambda_i \alpha_i\right),$$

de modo que

$$\sup_{\lambda \in S} M(\lambda;\, \lambda) \leq \sup_{\alpha \in A} L(g(\alpha);\, \alpha)$$

e (8.20) implica que

$$\inf_{v \in C} \sup_{\alpha \in K} L(v;\, \alpha) \leq \sup_{\alpha \in A} L(g(\alpha);\, \alpha)\,.$$

Por conseguinte,

$$\sup_{K \in F} \inf_{v \in C} \sup_{\alpha \in K} L(v;\, \alpha) \leq \sup_{\alpha \in A} L(g(\alpha);\, \alpha)$$

e (8.18) mostra que

$$\inf_{v \in C} \sup_{\alpha \in A} L(v;\, \alpha) \;\leq\; \sup_{\alpha \in A} L(g(\alpha);\, \alpha)\,.$$

Assim,

$$m \leq \inf_{g \in C^0(A,\, C)} \sup_{\alpha \in A} L(g(\alpha);\, \alpha) \;. \tag{8.21}$$

Sejam $v \in C$ e $g_v : A \longrightarrow C$ dada por $g_v(\alpha) = v$, $\forall\; \alpha \in A$. g_v é contínua e $L(g_v(\alpha);\, \alpha) = L(v;\, \alpha)$. Ora,

$$\inf_{v \in C} \sup_{\alpha \in A} L(g_v(\alpha);\, \alpha) \geq \inf_{g \in C^0(A,\, C)} \sup_{\alpha \in A} L(g(\alpha);\, \alpha)$$

de modo que

$$m \geq \inf_{g \in C^0(A,\, C)} \sup_{\alpha \in A} L\left(g\left(\alpha\right);\, \alpha\right). \tag{8.22}$$

Combinando (8.21) e (8.22), obtemos o resultado enunciado. ■

prova do Corolário 8.1.37. Como a aplicação $g : C \longrightarrow C$ dada por $g\left(v\right) = v$ é contínua, temos

$$\inf_{g \in C^0(C,\, C)} \sup_{v \in C} L\left(g\left(v\right);\, v\right) \leq \sup_{v \in C} L\left(v;\, v\right)$$

Assim, decorre do Teorema 8.1.35 que

$$\inf_{w \in C} \sup_{v \in C} L\left(w;\, v\right) \leq \sup_{v \in C} L\left(v;\, v\right) \tag{8.23}$$

Seja

$$J\left(w\right) = \sup_{v \in C} L\left(w,\ v\right).$$

J é sci (proposição 6.3.16) e C é compacto, de modo o Teorema 7.2.11 mostra que que existe $u \in C$ tal que

$$\sup_{v \in C} L\left(u,\ v\right) = J\left(u\right) = \inf_{w \in C} J\left(w\right) = \inf_{w \in C} \sup_{v \in C} L\left(w;\, v\right)$$

e o resultado decorre da desigualdade (8.23). ■

8.2 Zeros de Operadores

Consideremos nesta seção o problema

Problema 8.2.1. *Sejam A um operador em V e $C \subset V$ não-vazio. Determinar $u \in C$ tal que* $0 \in A\left(u\right)$.■

Este problema é o da *determinação de um zero do operador A*. Uma *equação variacional multívoca* pode ser reformulada sob esta forma: por exemplo, se $f \in V$ e $\widetilde{A}$ é um operador em V, a determinação de um elemento $u \in V$ tal que

$$\exists\, p \in \widetilde{A}\left(u\right) \quad \text{tal que} \quad \left(p - f,\, v\right) = 0, \quad \forall\, v \in V \tag{8.24}$$

é equivalente à equação $p - f = 0$, ou seja $0 \in \widetilde{A}\left(u\right) - f$. Assim, (8.24) corresponde a $C = V$, $A\left(u\right) = \widetilde{A}\left(u\right) - f$. Certas inequações variacionais também podem ser formuladas sob esta forma: por exemplo, se C é um convexo fechado, $f \in V$ e $\widetilde{A}$ é um operador em V, a determinação de um elemento $u \in C$ tal que

$$\exists\ p \in \widetilde{A}(u) \quad \text{tal que} \quad (\ p - f,\ v - u) \geq 0, \quad \forall\ v \in C \tag{8.25}$$

é equivalente a $-(p-f) \in NC\,(C,u)$. Assim, (8.25) corresponde a $A\,(u) = \widetilde{A}\,(u) - f + NC\,(C,u)$.

Temos

Teorema 8.2.2. *Sejam B um operador unívoco em V, linear e contínuo; $C \subset V$ convexo, compacto, não-vazio; A um operador em V tal que, para todo $v \in V$, $A\,(v)$ é convexo, não-vazio e fechado. Se*

$$\forall\ v \in C : A\,(v) \cap \overline{B\,(TC\,(C,v))}\ \neq\ \varnothing \tag{8.26}$$

então

(i) *o problema 8.2.1 admite uma solução.*

(ii) *para todo $y \in B\,(C)$, existe $u\,(y) \in C$ tal que $y \in B\,(u\,(y)) - A\,(u\,(y))$.*■

Quando $C = V$, temos $TC\,(C,v) = V$, de modo que a condição (8.26) torna-se

$$\forall\ v \in C : A\,(v) \cap \overline{B\,(V)}\ \neq\ \varnothing.$$

A demonstração do teorema utiliza o Lema:

Lema 8.2.3. *Sejam B um operador unívoco sobre V, linear e contínuo; $C \subset V$ convexo, compacto, não-vazio; A um operador em V tal que, para todo $v \in V$, $A\,(v)$ é convexo, não-vazio e fechado. Se (8.26) é satisfeita, então, para todos $v \in C$, $p \in V$ tal que $B^*\,(\ p) \in NC\,(C,v)$:*

$$\underline{h}_A\,(v,p) = \inf_{q\ \in\ A(v)} (q,p) \quad \leq 0.\blacksquare$$

prova do Lema 8.2.3. Seja $v \in C$. Como $A\,(v) \cap \overline{B\,(TC\,(C,v))} \neq \varnothing$, existe $w \in A\,(v) \cap \overline{B\,(TC\,(C,v))}$. Assim, existe $\{\ w_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset B\,(TC\,(C,v))$ tal que $w_n \longrightarrow w$ e $w_n = B\,(x_n)$, $x_n \in TC\,(C,v)$. Assim, para todo $p \in V$:

$$(w_n, p) = (B\,(x_n)\,, p) = (x_n, B^*\,(p))$$

Logo, para p tal que $B^*\,(\ p) \in NC\,(C,v)$, temos (Cf. 5.6.11 e 5.6.3)

$$(w_n, p) = (x_n, B^*\,(p)) \leq 0$$

e, passando ao limite,

$$\underline{h}_A(v,p) = \inf_{q \in A(v)} (q,p) \le (w,p) = \lim_n (w_n,p) \le 0$$

e temos o resultado enunciado. ■

prova do Teorema 8.2.2. Suponhamos que o problema 8.2.1 não admite uma solução, ou seja, que $0 \notin A(u)\,,\ \forall\ u \in C$.

$A(u)$ é um convexo fechado: o teorema da projeção ortogonal (5.4.1) mostra que a projeção ortogonal de 0 sobre $A(u)$ existe. Seja $p(u)$ esta projeção ortogonal:

$$p(u) \in A(u) \quad \text{e} \quad \|\ p(u)\ \| = \inf\{\ \|\ q\ \| : q \in A(u)\}\ .$$

Dado que $0 \notin A(u)$, temos $p(u) \neq 0$. Além disto (proposição 5.4.2):

$$p(u) \in A(u) \quad \text{e} \quad (\ p(u)\,,\ q - p(u)) \ge 0,\ \forall\ q \in A(u)\,,$$

de modo que

$$\forall\ q \in A(u):\quad (\ q,\ p(u)) \ge \|\ p(u)\ \|^2 > 0.$$

Assim,

$$\underline{h}_A(u,p(u)) = \inf_{q \in A(u)} (q,p(u)) > 0. \tag{8.27}$$

Seja

$$S(p) = \{\ u \in C : \underline{h}_A(u,p) > 0\}\ .$$

Como A é hci, $\underline{h}_A$ é sci e $S(p)$ é aberto para todo $p \in V$ (Teorema 6.3.17). Ora, (8.27) mostra que $u \in S(p(u))$, de modo que $C \subset \bigcup\limits_{p \in V} S(p)$. Assim, $\{\ S(p)\ \}_{p \in V}$ é uma família de abertos que contém C. Como C é compacto, existe uma subfamília finita $\{\ p_1,\ ...,\ p_n\ \}$ tal que $C \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(p_i)$. Como na demonstração do Lema 8.1.39, definimos

$$\delta_i(v) = dist\,(v,\ C - S(p_i))\,,\ \delta(c) = \sum_{j=1}^{n} \delta_i(c)\quad,\quad f_j(c) = \frac{\delta_j(c)}{\delta(c)}$$

e temos

$$f_i(u) \ge 0,\ \ f_i(u) > 0 \Longleftrightarrow u \in S(p_i) \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} f_i(u) = 1.$$

Seja

$$L(u,v) = \sum_{i=1}^{n} f_i(u)\,(B^*(p_i)\,,u - v)\,.$$

$u \longrightarrow \varphi(u,v)$ é sci, $p \longrightarrow L(u,v)$ é côncava, C é convexo compacto não-vazio: decorre do Corolário 8.1.37 que existe $\overline{u} \in C$ tal que

$$\sup_{v \in C} L(\overline{u};\ v) \le \sup_{v \in C} L(v;\ v) = 0,$$

isto é,

$$\sup_{v \, \in \, C} \left(B^* \left(\overline{p}\right), \overline{u} - v\right) \leq 0 \quad ; \quad \overline{p} = \sum_{i \, = \, 1}^{n} f_i \left(\overline{u}\right) p_i$$

Assim, $B^* \left(\, \overline{p}\right) \in NC \left(C, \overline{u}\right)$ (Cf. proposição 5.6.12) e temos, do Lema 8.2.3,

$$\underline{h}_A \left(\overline{u}, \overline{p}\right) = \inf_{q \, \in \, A(\overline{u})} \left(q, \overline{p}\right) \leq 0. \tag{8.28}$$

Ora, como $f_i \left(\overline{u}\right) \geq 0$, temos, para todo $q \in A \left(\overline{u}\right)$ e $1 \leq i \leq n$,

$$\left(q, \; f_i \left(\overline{u}\right) p_i\right) = f_i \left(\overline{u}\right) \left(q, \; p_i\right) \geq f_i \left(\overline{u}\right) \underline{h}_A \left(\overline{u}, p_i\right) \geq 0.$$

Assim,

$$\inf_{q \, \in \, A(\overline{u})} \left(q, \overline{p}\right) \geq \sum_{i \, = \, 1}^{n} f_i \left(\overline{u}\right) \underline{h}_A \left(\overline{u}, p_i\right).$$

Seja $\Lambda = \{ \; i : 1 \leq i \leq i \leq n$ e $f_i \left(\overline{u}\right) > 0\}$. Como $C \subset \bigcup_{i \, = \, 1}^{n} S \left(p_i\right)$, temos $\Lambda \neq \varnothing$, de modo que

$$\inf_{q \, \in \, A(\overline{u})} \left(q, \overline{p}\right) \geq \sum_{i \, \in \, \Lambda} \underbrace{f_i \left(\overline{u}\right)}_{> \, 0} \underbrace{\underline{h}_A \left(\overline{u}, p_i\right)}_{> \, 0} \; > \; 0.$$

Logo,

$$\underline{h}_A \left(\overline{u}, \overline{p}\right) = \inf_{q \, \in \, A(\overline{u})} \left(q, \overline{p}\right) > 0 \; . \tag{8.29}$$

Assim, de (8.28) e (8.29)

$$0 < \underline{h}_A \left(\overline{u}, \overline{p}\right) \leq 0,$$

o que é absurdo. Logo, o problema 8.2.1 admite uma solução e temos (i).

Seja $\widetilde{A} \left(v\right) = A \left(v\right) + y - B \left(v\right)$. A condição (8.26) mostra que existe $\{ \; w_n \; \}_{n \, \in \, \mathbb{N}}$ tal que $B \left(w_n\right) \longrightarrow A \left(v\right)$. Por outro lado, existe $c \in C$ tal que $y = B \left(c\right)$ (pois $y \in B \left(c\right)$). Assim, $y - v \in TC \left(C, v\right)$ (proposição 5.6.9) e $\widetilde{w}_n = w_n + c - v \in TC \left(C, v\right)$ (proposição 5.6.2). Logo, $B \left(\widetilde{w}_n\right) \in B \left(TC \left(C, v\right)\right)$ e $B \left(\widetilde{w}_n\right) \longrightarrow \widetilde{A} \left(v\right)$. Resulta que $\widetilde{A} \left(v\right) \cap \overline{B \left(TC \left(C, v\right)\right)} \neq \varnothing$ para todo $v \in C$. Assim, (i) mostra que existe $u \left(y\right) \in C$ tal que $0 \in \widetilde{A} \left(u \left(y\right)\right) = A \left(u \left(y\right)\right) + y - B \left(u \left(y\right)\right)$, isto é, $y \in B \left(u \left(y\right)\right) - A \left(u \left(y\right)\right)$ e temos (ii). ∎

Nosso segundo teorema fundamental é o seguinte:

Teorema 8.2.4. *Sejam $C \subset V$ convexo e compacto, A um operador sobre V tal que A é semicontínuo e limitado sobre C; $A \left(v\right)$ é um convexo fechado não-vazio para todo $v \in C$. Então existe $u \in C$ tal que $0 \in A \left(u\right) + NC \left(C, u\right)$, isto é,*

$$u \in C \quad e \; \exists \; p \in A \left(u\right) \quad \textit{tal que} \quad \left(p, \; v - u\right) \geq 0, \; \forall \; v \in C \; . \; \blacksquare$$

A prova do teorema utiliza o Lema seguinte:

Lema 8.2.5. *Sejam $C \subset V$ não-vazio, A um operador em V tal que A é semicontínuo e limitado sobre C; $A(v)$ é não-vazio para todo $v \in V$. Seja*

$$L(u,v) = \underline{h}_A(u, u-v) = \inf_{p \in A(u)} (p, u-v)$$

Então $u \longrightarrow L(u,v)$ é sci sobre C e $v \longrightarrow L(u,v)$ é côncava.■

prova do Lema 8.2.5. Sejam $u \in C$ e $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ tal que $u_n \longrightarrow u$ fortemente em V. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon, u) > 0$ tal que

$$\| u - w \| \leq \delta(\varepsilon, u) \Longrightarrow \| p - q \| \leq \varepsilon, \forall\, p \in A(u), q \in A(w) \ .$$

Ora, existe $n(\delta(\varepsilon, u))$ tal que

$$n \geq n(\delta(\varepsilon, u)) \Longrightarrow \| u - u_n \| \leq \delta(\varepsilon, u).$$

Seja $n \geq n(\delta(\varepsilon, u))$: para todo $v \in V$, $p \in A(u)$, $q \in A(u_n)$:

$$| \ (p - q \ , \ u_n - v)| \leq \| p - q \| \| u_n - v \| \leq \varepsilon \| u_n - v \|$$

de modo que

$$(p \ , \ u_n - v) \leq (q \ , \ u_n - v) + \varepsilon \| u_n - v \| \tag{8.30}$$

Por outro lado,

$$\| u_n - v \| \leq \| u_n - u \| + \| u - v \| \leq \delta(\varepsilon, u) + \| u - v \|,$$

de modo que (8.30) implica que

$$(p \ , \ u_n - v) \leq (q \ , \ u_n - v) + \varepsilon \| u - v \| + \varepsilon\delta(\varepsilon, u) \ . \tag{8.31}$$

Como A é limitado sobre C, temos também

$$|(p \ , \ u_n - u)| \leq \| p \| \| u_n - u \| \leq \| p \| \delta(\varepsilon, u) \leq K(A, \|u\|) \delta(\varepsilon, u) \ ,$$

de modo que

$$(p \ , \ u_n - u) \geq -K(A, \|u\|) \delta(\varepsilon, u) \tag{8.32}$$

Como

$$(p \ , \ u_n - v) = (p \ , \ u_n - u) + (p \ , \ u - v),$$

(8.32) implica que

$$(p \ , \ u - v) - K(A, \|u\|) \delta(\varepsilon, u) \leq (p \ , \ u_n - v) \tag{8.33}$$

Seja

$$m(\varepsilon, u, v) = K(A, \|u\|) \delta(\varepsilon, u) + \varepsilon \| v - u \| + \varepsilon\delta(\varepsilon, u).$$

Combinando (8.31) e (8.33), temos

$$(p\ ,\ u-v)-m\,(\varepsilon,u,v)\leq(q\ ,\ u_n-v)\,.$$

Logo,

$$\underline{h}_A\,(u,\ u-v)-m\,(\varepsilon,u,v)\leq(q\ ,\ u_n-v)$$

e, dado que q é arbitrário,

$$\underline{h}_A\,(u,\ u-v)-m\,(\varepsilon,u,v)\leq\underline{h}_A\,(u_n,\ u_n-v)\,. \tag{8.34}$$

Ora,

$$m\,(\varepsilon,u,v)\longrightarrow 0 \text{ para } \varepsilon\longrightarrow 0+\,,$$

de modo que, passando ao limite em (8.33), temos

$$\underline{h}_A\,(u,\ u-v)\leq\lim\ \inf\ \underline{h}_A\,(u_n,\ u_n-v)$$

e decorre da proposição 6.3.9 que $u\longrightarrow L\,(u,v)$ é sci em u. Como $u\in C$ é qualquer, temos o resultado enunciado.

Sejam $v\in C$, $w\in C$, $\theta\in[0,\ 1]$, $v_\theta=\theta w+(1-\theta)\,v$. Temos

$$u-v_\theta=\theta\,(u-w)+(1-\theta)\,(u-v)\,,$$

de modo que

$$(p,\ u-v_\theta)=\theta\,(p,\ u-w)+(1-\theta)\,(p,\ u-v)\,.$$

Como

$$(p,\ u-w)\geq\underline{h}_A\,(u,\ u-w)\quad\text{e}\quad(p,\ u-v)\geq\underline{h}_A\,(u,\ u-v)\ \ ,$$

temos

$$(p,\ u-v_\theta)\geq\theta\underline{h}_A\,(u,\ u-w)+(1-\theta)\,\underline{h}_A\,(u,\ u-v)\,,$$

de onde

$$\underline{h}_A\,(u,\ u-v_\theta)\geq\theta\underline{h}_A\,(u,\ u-w)+(1-\theta)\,\underline{h}_A\,(u,\ u-v)\,.$$

Assim, $v\longrightarrow L\,(u,v)$ é côncava. ■

prova do Teorema 8.2.4. Seja $L\,(u,v)=\underline{h}_A\,(u,\ u-v)$. Decorre do Lema 8.2.5 que $u\longrightarrow L\,(u,v)$ é sci sobre C e que $v\longrightarrow L\,(u,v)$ é côncava. Como C é convexo e compacto, podemos aplicar o Corolário 8.1.37: existe $u\in C$ tal que

$$\sup_{v\,\in\,C}\ L\,(u;\,v)\leq\ \sup_{v\,\in\,C}\ L\,(v;\,v)=0.$$

Assim,

$$\sup_{v\,\in\,C}\ \inf_{p\,\in\,A(u)}\ (p,\ u-v)=\ \sup_{v\,\in\,C}\ L\,(u;\,v)\leq\ 0$$

isto é,

$$\sup_{v \in C}\left[-\sup_{p \in A(u)} (p,\ v-u)\right] \leq\ 0 \Longrightarrow \inf_{v \in C}\sup_{p \in A(u)} (p,\ v-u) \geq\ 0$$

Ora, C e $A(u)$ são convexos fechados e limitados não vazios, a aplicação $M : C \times A(u) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $M(v,p) = (p, v-u)$ é tal que $v \longrightarrow M(v,p)$ é fracamente sci e $p \longrightarrow M(v,p)$ é côncava e fracamente sci. Decorre do Lema 7.2.24 que M tem um ponto de sela $(\overline{v},\ \overline{p})$ sobre $C \times A(u)$. Assim (Lema 7.2.24):

$$(\overline{p},\ \overline{v}-u) \leq (\overline{p},\ v-u)\,,\ \ \forall\, v \in C.$$

Além disto (Lema 7.2.27)

$$(\overline{p},\ \overline{v}-u) = \inf_{v \in C}\sup_{p \in A(u)} (p,\ v-u) \geq 0$$

de modo que

$$(\overline{p},\ v-u) \geq 0,\ \ \forall\, v \in C.$$

e temos o resultado enunciado. ■

8.3 Inequações Variacionais

Nesta seção, consideramos a inequação variacional

Problema 8.3.1. *Sejam A um operador em V, $j : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ um funcional, $f \in V$. Determinar $u \in V$ tal que*

$$\exists\, p \in A(u) \quad \textit{tal que} \quad (\ p - f,\ v - u\ ) + j(v) - j(u) \geq 0, \quad \forall\, v \in V\ .\ ■$$

A formulação acima engloba um grande número de problemas. Por exemplo, a equação variacional:

$$\exists\, p \in A(u) \quad \text{tal que} \quad (\ p - f,\ v\ ) = 0, \quad \forall\, v \in V$$

é equivalente ao problema 8.3.1 com $j = 0$. De maneira análoga, a inclusão

$$f \in A(u) + \partial j(u)$$

é equivalente a

$$\exists\, p \in A(u) \quad \text{tal que} \quad f - p\ \in \partial j(u)$$

e, portanto, é também equivalente ao problema 8.3.1. Também a inequação variacional

$$u \in C \;\text{ e }\; \exists\, p \in A(u) \;\text{ tal que }\; (\, p - f,\, v - u\,) + j(v) - j(u) \geq 0, \quad \forall\, v \in C$$

pode ser reduzida a esta forma através da introdução da indicatriz Ψ_C de C : pondo $j_C = j + \Psi_C$, obtemos a forma equivalente

$$u \in V \;\text{ e }\; \exists\, p \in A(u) \;\text{ tal que }\; (\, p - f,\, v - u\,) + j_C(v) - j_C(u) \geq 0, \quad \forall\, v \in V$$

Esta formulação engloba também um grande número de problemas de otimização. Por exemplo, se $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no sentido de Gâteaux, $j : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é convexa, $I(v) = J(v) + j(v) + (\, f,\, v\,)$ e

$$u = \arg \min_V I$$

então, para todo $\theta \in [0,1]$:

$$I(\, u + \theta(v-u)\,) - I(\, u\,) \geq 0 \;\text{ e }\; j(u + \theta(v-u)) - j(u) \quad \leq \theta(\, j(v) - j(u)\,)$$

de forma que

$$J(\, u + \theta(v-u)\,) - J(\, u\,) + \theta(\, f,\, v - u\,) + \theta(\, j(v) - j(u)\,) \geq 0\,.$$

Assim,

$$\frac{J(\, u + \theta(v-u)\,) - J(\, u\,)}{\theta} + (\, f,\, v - u\,) + \; j(v) - j(u) \;\; \geq 0$$

e, fazendo $\theta \longrightarrow 0+$, temos

$$(\, \nabla J(u) - f,\, v - u\,) + j(v) - j(u) \geq 0, \quad \forall\, v \in V\,.$$

Notemos, entretanto, que a formulação do problema 8.3.1 é feita de forma que o operador A pode não derivar de um funcional.

O resultado fundamental é o seguinte:

Teorema 8.3.2. *Seja V um espaço de Hilbert separável e suponhamos que*

(i) *j é convexo e fortemente contínuo (isto é, $j(w_n) \longrightarrow j(w)$ para toda seqüência $\{\, w_n\,\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ tal que $w_n \longrightarrow w$ fortemente em V).*

(ii) *A é unívoco, monótono, limitado e hci;*

(iii) *$v \longrightarrow (\, A(v) - f,\, v\,) + j(v)$ é coerciva e existe $\overline{v} \in V$ tal que $j(\overline{v}) \in \mathbb{R}$.*

Então o problema 8.3.1 admite uma solução. ■

A prova deste teorema utiliza os seguintes lemas:

Lema 8.3.3. *Suponhamos j convexo sci e A unívoco. Seja $\varepsilon > 0$. u é solução do problema 8.3.1 se e somente se* $u = prox_{j,\varepsilon}\left(u + \frac{1}{\varepsilon}\left(f - A(u) \right)\right)$. ■

Prova. o resultado decorre diretamente do Lema 8.1.1.(iv). ■

Lema 8.3.4. *Suponhamos j convexo e A unívoco, monótono, limitado e hci. Então u é solução do problema 8.3.1 se e somente se*

$$\forall\, v \in V: \quad (\, A(v) - f,\, v - u\,) + j(v) - j(u) \geq 0 \quad . \blacksquare$$

Prova. ($\Longrightarrow$) : Seja u solução do problema 8.3.1. Como A é monótono,

$$(\, A(v)\,,\, v - u\,) \geq (\, A(u)\,,\, v - u\,)$$

de forma que

$$(\, A(v) - f,\, v - u\,) + j(v) - j(u) \geq (\, A(u) - f,\, v - u\,) + j(v) - j(u) \geq 0 \quad .$$

($\Longrightarrow$) : Sejam $\theta \in [0,\ 1]$ e $u_\theta = (1-\theta)\,u + \theta v = u + \theta\,(v - u)$. A convexidade de j mostra que

$$j(u_\theta) \leq (1-\theta)\,j(u) + \theta j(v)\,.$$

e

$$j(u_\theta) - j(u) \leq \theta\,[j(v) - j(u)] \quad . \tag{8.35}$$

Além disto,

$$(\, A(u_\theta)\,,\, v_\theta - u\,) = (\, A(u_\theta)\,,\, \theta\,(v - u)\,\,) = \theta\,(\, A(u_\theta)\,,\, v - u\,)\,. \tag{8.36}$$

Ora,

$$(\, A(u_\theta) - f,\, v_\theta - u\,) + j(v_\theta) - j(u) \geq 0,$$

de modo que (8.35) e (8.36) mostram que

$$\theta\,[(\, A(u_\theta) - f,\, v - u\,) + j(v) - j(u)] \geq 0\ ,$$

isto é,

$$(\, A(u_\theta) - f,\, v - u\,) + j(v) - j(u) \geq 0\ , \tag{8.37}$$

Ora, $u_\theta \longrightarrow u$ fortemente em V, de modo que o Teorema 8.1.16 mostra que

$$(\, A(u_\theta)\,,\, v - u\,) \longrightarrow (\, A(u)\,,\, v - u\,) \text{ quando } \theta \longrightarrow 0+\,.$$

Assim, passando ao limite para $\theta \longrightarrow 0+$ em (8.37), resulta que u é solução do problema 8.3.1. ■

prova do Teorema 8.3.2: . Seja $\varepsilon > 0$.

1 - Existe uma seqüência crescente de subespaços $\{ V_n \}_{n \geq 1} \subset V$ tais que $\overline{\bigcup_{n \geq k} V_n} = V$ e, para todo $n \geq k$: $\dim(V_n) = n$, $V_n \subset V_{n+1}$ e $\overline{v} \in V_1$: se $\overline{v} \neq 0$, basta aplicar o corolário 4.9.6 a $\{ \overline{v} \}$. No caso contrário, basta aplicar este mesmo resultado a $\{ w \}$, onde w é um elemento não nulo qualquer.

2 - Sejam $B_M = \{ v \in V_n : \| v \| \leq M\}$ e $j_M(v) = j(v) + \Psi_{B_M}(v)$, onde Ψ_{B_M} é a indicatriz de B_M. Como B_M é um convexo fechado, Ψ_{B_M} é convexa e fracamente sci (Cf. Lema 7.1.3). Como j é convexo e contínuo, j é fracamente sci (Cf. Teorema 6.3.19). Assim, j_M é convexo e fracamente sci (Cf. proposição 6.3.16). Decorre do Corolário 7.2.9 que, para todo $v \in V$, existe um único $g_M(v)$ tal que (notar que $j_M(v) = +\infty$ quando $v \notin B_M$) :

$$g_M(v) = prox_{j_M,\varepsilon}\left(v + \frac{1}{\varepsilon}(f - A(v))\right) \in B_M.$$

Assim, $g_M(B_M) \subset B_M$. Seja $\{ v_k \}_{k \in \mathbb{N}} \subset B_M$ tal que $v_k \longrightarrow v$ em V. Temos $A(v_n) \rightharpoonup A(v)$ fracamente em V (corolário 8.1.17). Como a dimensão de V_n é finita, $A(v_n) \longrightarrow A(v)$ fortemente em V (proposição 4.8.10). Assim, g_M é contínua (Cf. Lema 8.1.1.(iv)) e B_M é compacto: decorre do teorema do ponto fixo (8.1.34) que

$$\exists\, u_M \in B_M \text{ tal que } u_M = g_M(u_M). \tag{8.38}$$

3 - Temos (Lema 8.3.3)

$$(A(u_M) - f, v - u_M) + j_M(v) - j_M(u_M) \geq 0, \quad \forall\, v \in V .$$

Como $\overline{v} \in V_n$, temos, para $M > \| \overline{v} \|$:

$$(A(u_M) - f, \overline{v} - u_M) + j(\overline{v}) - j(u_M) \geq 0 \quad .$$

Assim, $a_M = (A(u_M) - f, u_M) + j(u_M)$ verifica

$$a_M \leq j(\overline{v}) - (f, \overline{v}) \quad \in \mathbb{R}$$

e $\{ a_M \}_{M \in \mathbb{N}}$ é limitada superiormente. Como $v \longrightarrow (A(v) - f, v) + j(v)$ é coerciva, resulta que $\{ u_M \}_{M \in \mathbb{N}} \subset V_n$ é limitada. Decorre do Teorema 4.9.8 que existem $U_n \in V$ e $\left\{ u_{M(k)} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{ u_M \}_{M \in \mathbb{N}}$ tal que $u_{M(k)} \rightharpoonup U_n$. Como $\left\{ u_{M(k)} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V_n$ e V_n é de dimensão finita: a proposição 4.8.10 mostra que $u_{M(k)} \longrightarrow U_n$ fortemente em V e $U_n \in V_n$. Além disto, $A\left(u_{M(k)}\right) \longrightarrow A(U_n)$ fortemente em V (Corolário 8.1.17 e proposição 4.8.10).

4 - Seja $J_n(v) = j(v) + \Psi_{V_n}(v)$, onde Ψ_{V_n} é a indicatriz de V_n. Definindo

$$G_n(v) = prox_{J_n,\varepsilon}\left(v + \frac{1}{\varepsilon}(f - A(v))\right) \in V_n,$$

temos $G_n\left(u_{M(k)}\right) \longrightarrow G_n\left(U_n\right)$ (novamente o Lema 8.1.1.(iv)). Ora, de (8.38),

$$\forall\ k \in \mathbb{N} : u_{M(k)} = G_n\left(u_{M(k)}\right)\ .$$

Passando ao limite nesta igualdade, resulta $U_n = G_n\left(U_n\right)$. Assim,

$$U_n \in V_n \quad \text{e} \quad (\ A\left(U_n\right) - f,\ v - U_n\ ) + J_n\left(v\right) - J_n\left(U_n\right) \geq 0, \quad \forall\ v \in V\ .$$

5 - Como $\overline{v} \in V_n$, esta desigualdade implica que

$$(\ A\left(U_n\right) - f,\ \overline{v} - U_n\ ) + j\left(\overline{v}\right) - j\left(U_n\right) \geq 0,$$

de forma que $b_n = (\ A\left(U_n\right) - f,\ U_n\ ) + j\left(U_n\right)$ verifica

$$b_n \leq j\left(\overline{v}\right) - (\ f,\ \overline{v}\ ) \ \in \mathbb{R}$$

e $\{\ b_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ é limitada superiormente. Como $v \longrightarrow (\ A\left(v\right) - f,\ v\ ) + j\left(v\right)$ é coerciva, resulta que $\{\ U_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}} \subset V$ é limitada. Decorre do Teorema 4.9.8 que existem $u \in V$ e $\left\{\ U_{n(k)}\ \right\}_{k\ \in\ \mathbb{N}} \subset \{\ U_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ tal que $U_{n(k)} \rightharpoonup u$.

6 - O Lema 8.3.4 mostra que

$$\left(\ A\left(v\right) - f,\ v - U_{n(k)}\ \right) + j\left(v\right) - j\left(U_{n(k)}\right) \geq 0,, \quad \forall\ v \in V_{n(k)}\ .$$

Sejam $v \in V$, $m > 0$ e $P_m v$ a projeção ortogonal de v sobre V_m: $P_m v \in V_{n(k)}$ para $n\left(k\right) \geq m$, de forma que

$$\left(\ A\left(P_m v\right) - f,\ P_m v - U_{n(k)}\ \right) + j\left(P_m v\right) - j\left(U_{n(k)}\right) \geq 0. \tag{8.39}$$

Como j é sci,

$$\lim\ \sup_k \left\{\ j\left(P_m v\right) - j\left(U_{n(k)}\right)\right\} =\ j\left(P_m v\right) - \lim\ \inf_k j\left(U_{n(k)}\right) \leq j\left(P_m v\right) - j\left(u\right),$$

de modo que (8.39) implica que

$$(\ A\left(P_m v\right) - f,\ P_m v - u\ ) + j\left(P_m v\right) - j\left(u\right) \geq 0. \tag{8.40}$$

Quando $m \longrightarrow +\infty$, temos $P_m v \longrightarrow v$ fortemente em V (Cf. 4.9.7) , de modo que, por um lado, a continuidade de j mostra que $j\left(P_m v\right) \longrightarrow j\left(v\right)$ e, por outro lado, o Corolário 8.1.17 mostra que $A\left(P_m v\right) \longrightarrow A\left(v\right)$ fracamente em V. Assim, a passagem ao limite para $m \longrightarrow +\infty$ em (8.40) mostra que

$$(\ A\left(v\right) - f,\ v - u\ ) + j\left(v\right) - j\left(u\right) \geq 0\ .$$

Como v é arbitrário, decorre do Lema 8.3.4 que u é solução do problema 8.3.1.

■

8.4 Equações de Evolução

Nesta seção, consideramos problemas envolvendo o tempo, cujo modelo é

Problema 8.4.1. *Sejam $T > 0$, A um operador sobre V, $f \in L^2(0,T;V)$, $u_0 \in$ dom (A). Determinar $u \in L^2(0,T;\ \text{dom}(A))$ tal que*

$$u(0) = u_0 \quad e\ f \in \frac{du}{dt} + A(u) \quad sobre\ (0,\ T)\,. \ \blacksquare$$

Nesta formulação, o espaço de Hilbert V é substituído pelo espaço de Hilbert $L^2(0,T;V)$, cujo produto escalar e norma são, respectivamente,

$$(u,\ v) = \int_0^T (u(s)\,,\ v(s))_V\ ds \quad ; \quad \|\ v\ \| = \left(\int_0^T \|\ v(s)\ \|_V^2\ ds \right)^{1/2} .$$

Podemos interpretar $L^2(0,T;V)$ como sendo

$$L^2(0,T;V) = \left\{ v : (0,T) \longrightarrow V : \int_0^T \|\ v(s)\ \|_V^2\ ds < \infty \right\} .$$

Além disto, é indispensável lembrar que, *contrariamente às apresentações usuais, este texto privilegia os operadores de esforço interno* - os operadores de trabalho virtual são reduzidos a operadores de esforço interno através da isometria de Riesz.

O primeiro resultado clássico é o seguinte:

Teorema 8.4.2 (Cauchy)**.** *Sejam $T > 0$ e A um operador sobre V tal que A é unívoco, dom $(A) = V$ e A é Lipschitiziano, isto é, existe $K > 0$ tal que*

$$\forall\ u,\ v \in V : \|\ A(u) - A(v)\ \|_V \leq K \|\ u - v\ \|_V \ .$$

Então o problema 8.4.1 tem uma solução única para todo $u_0 \in V$. $\blacksquare$

Este resultado decorre do teorema seguinte:

Teorema 8.4.3 (ponto fixo de Banach)**.** *Seja $F : L^2(0,T;V) \longrightarrow L^2(0,T;V)$ uma aplicação tal que existe M independente de u e v verificando $0 \leq M < 1$ e*

$$\forall\ u,\ v \in L^2(0,T;V) : \|\ F(u) - F(v)\ \| \leq M \|\ u - v\ \| \ .$$

Então existe um único $u \in L^2(0,T;V)$ tal que $u = F(u)$. $\blacksquare$

Um outro resultado clássico sobre problema 8.4.1 é o seguinte:

Teorema 8.4.4 (Hille-Yosida)**.** *Suponhamos que A é um operador linear, unívoco e maximal monótono; $\frac{df}{dt}, \frac{d^2 f}{dt^2} \in L^2(0,T;V)$; $f(0), u_0, A(u_0) \in dom(A)$. Então o problema 8.4.1 tem uma única solução.* ■

A demonstração deste resultado utiliza a noção e os resultados seguintes

Definição 8.4.5. *Seja A um operador sobre V. Para $\lambda > 0$, o regularizado de Yosida de A é o operador $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(Id - I_\lambda)$, onde $I_\lambda = (Id + \lambda A)^{-1}$. I_λ é o resolvente de A.*■

Lema 8.4.6 (Yosida)**.** *Sejam $\lambda > 0$; A um operador monótono sobre V, I_λ o resolvente de A e A_λ o regularizado de Yosida. Então, para todos $u, v \in V$:*

(i) *A_λ e I_λ são unívocos.*

(ii) $\| I_\lambda(u) - I_\lambda(v) \|_V \leq \| u - v \|_V$

(iii) *$u = I_\lambda(v) \Longleftrightarrow A_\lambda(v) \in A(u)$, de modo que $A_\lambda(v) \in A(I_\lambda(v)) = I_\lambda(A(v))$*

(iv) *existe $p \in A(v)$ tal que $A_\lambda(v) = I_\lambda(p)$.* ■

Corolário 8.4.7 (Yosida)**.** *Sejam $\lambda > 0$; A um operador linear, unívoco e maximal monótono sobre V, I_λ o resolvente de A e A_λ o regularizado de Yosida. Então, $dom(A)$ é denso em V e, para todo $v \in V$:*

(i) $\| A_\lambda(v) \|_V \leq \| A(v) \|_V$;

(ii) *$I_\lambda(v) \longrightarrow v$ em V, quando $\lambda \longrightarrow 0+$;*

(iii) *$A_\lambda(v) \longrightarrow A(v)$ em V, quando $\lambda \longrightarrow 0+$;*

(iv) $(A_\lambda(v), v)_V \geq \lambda \| A_\lambda(v) \|_V^2 \geq 0$,

(v) $\| A_\lambda(v) \|_V \leq \frac{1}{\lambda} \| v \|_V$. ■

Lema 8.4.8 (Gronwall contínuo). *Sejam* $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ $\varphi : [0,\ T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

$$\frac{d\varphi}{dt} \leq \alpha\varphi + \beta(t) \quad \textit{sobre } (0,\ T) \quad ; \quad \varphi(0) = \varphi_0\ .$$

Então

$$\varphi(t) \leq \varphi_0 e^{\alpha t} + e^{\alpha t} \int_0^t \beta(s)\, e^{-\alpha s} ds \quad \textit{sobre } (0,\ T)$$

e

$$\varphi(t) \leq \varphi_0 e^{\alpha t} + e^{\alpha t} \int_0^t \beta(s)\, ds \quad \textit{sobre } (0,\ T) \quad . \blacksquare$$

Para o caso não linear, temos o teorema seguinte:

Teorema 8.4.9. *Suponhamos que A é um operador maximal monótono, unívoco, limitado e tal que*

$$\|\ A(v) - A(w)\ \|_{V'} \leq C \|\ v - w\ \|_H\ ;$$

$f \in L^2(0, T; V)$*;* $u_0 \in dom(A)$ *e que existe um espaço de Hilbert H tal que $V \subset H \subset V'$ tal que a injeção de*

$$W = \left\{\ v \in L^2(0, T; V) : \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; H)\right\}$$

em $L^2(0, T; H)$ é compacta. Então o problema 8.4.1 tem uma única solução $u \in W$.
$\blacksquare$

A prova deste teorema utiliza o Lema seguinte

Lema 8.4.10 (Gronwall discreto). *Seja $\{\ a_n\ \}$ uma seqüência de números reais tal que $a_{n+1} \leq (1 + \alpha)\, a_n + \beta$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $\alpha > 0$. Então*

$$a_n \leq e^{na} a_0 + \frac{\beta}{\alpha}(e^n a - 1)\,, \ \forall\ n \in \mathbb{N}.\ \blacksquare$$

prova do teorema do ponto fixo de Banach. Seja $w_0 \in L^2(0, T; V)$. Seja $\{\ u_n\ \}_{n\ \in\ \mathbb{N}}$, definida por $u_{n+1} = F(\ u_n\ )$. Temos

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : \|\ u_{n+1} - u_n\ \| \leq M^n \|\ u_1 - u_0\ \|\ .$$

Com efeito, a desigualdade é imediata para $n = 0$. Por outro lado, e

$$\|\ u_{n+2} - u_{n+1}\ \| = \|\ F(u_{n+1}) - F(u_n)\ \| \leq M \|\ u_{n+1} - u_n\ \|\ .$$

Admitindo a desigualdade para o valor $n \geq 0$, temos

$$\| u_{n+2} - u_{n+1} \| \leq M M^n \| u_1 - u_0 \| = M^{n+1} \| u_1 - u_0 \|$$

e a desigualdade fica estabelecida por indução finita.

Ora,

$$u_{n+p} - u_n = \sum_{i=n}^{n+p-1} (u_{i+1} - u_i) \ ,$$

de modo que

$$\| u_{n+p} - u_n \| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \| u_{i+1} - u_i \| \leq \| u_1 - u_0 \| \sum_{i=n}^{n+p-1} M^i \ ,$$

ou seja

$$\| u_{n+p} - u_n \| \leq \| u_1 - u_0 \| \frac{M^n - M^{n+p}}{1 - M} \leq \| u_1 - u_0 \| \frac{M^n}{1 - M} \ .$$

Como $M^n \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon)$ tal que

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Longrightarrow \| u_{n+p} - u_n \| \leq \| u_1 - u_0 \| \frac{M^n}{1 - M} \leq \varepsilon, \ \ \forall \, p \in \mathbb{N} \ .$$

Assim, $\{ u_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. Como $L^2(0,T;V)$ é um espaço de Hilbert, existe $u \in L^2(0,T;V)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $L^2(0,T;V)$. Como F é contínuo (análogo à proposição 4.4.3), $F(u_n) \longrightarrow F(u)$ em $L^2(0,T;V)$. Assim, passando ao limite na igualdade $u_{n+1} = F(u_n)$, obtemos $u = F(u)$.

Seja $v \in L^2(0,T;V)$ tal que $v = F(v)$. Então:

$$\| u - v \| = \| F(u) - F(v) \| \leq M \| u - v \| \Longrightarrow \| u - v \| \leq 0,$$

de modo que u é único. ■

prova do teorema de Cauchy. Como A é unívoco, o problema 8.4.1 é equivalente a

$$u(t) = u_0 + \int_0^t (f - A(u(s)))\, ds \ ; \ \ t \in [0, \ T] \ . \tag{8.41}$$

Seja $F : L^2(0,T;V) \longrightarrow L^2(0,T;V)$ dada por

$$F(v) \ \ (t) = u_0 + \int_0^t (f - A(v(s)))\, ds \ ; \ \ t \in [0, \ T] \ .$$

(8.41) é equivalente a $u = F(u)$, de forma que basta mostrar que F tem um ponto fixo único. Temos

$$F(u) \ \ (t) - F(v) \ \ (t) = \int_0^t (A(v(s)) - A(u(s)))\, ds \ ,$$

de modo que

$$\begin{aligned}\| F(u)\ \ (t) - F(v)\ \ (t)\ \|_V &\leq \int_0^t \| A(v(s)) - A(u(s))\ \|_V\ ds \\ &\leq K \int_0^t \| u(s) - v(s)\ \|_V\ ds.\end{aligned}$$

Assim, uma aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz mostra que

$$\| F(u)\ \ (t) - F(v)\ \ (t)\ \|_V \ \leq K\ t^{1/2} \left(\int_0^t \| u(s) - v(s)\ \|_V^2\ ds \right)^{1/2}$$

e temos

$$\| F(u)\ \ (t) - F(v)\ \ (t)\ \|_V \ \leq K\ T^{1/2} \| u - v \|$$

Por conseguinte,

$$\forall\ u,\ v \in L^2(0,T;V) : \| F(u) - F(v)\ \| \leq K\ T \| u - v \|\ .$$

Suponhamos inicialmente $KT < 1$: o resultado decorre do teorema do ponto fixo de Banach. Se $KT \geq 1$, seja $\tau = \dfrac{1}{2K}$: temos $K\tau < 1$, de modo que existe uma única u tal que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t (f - A(u(s)))\, ds;\ t \in [0,\ \tau]\quad .$$

Tomando $\widetilde{u} = u(t+\tau)$, $\widetilde{u}_0 = u(\tau)$, deduzimos que esta solução existe e é única sobre $[0,\ 2\tau]$. Reiterando o procedimento (em geral, $\widetilde{u} = u(t+i\tau)$, $\widetilde{u}_0 = u(i\tau)$), obtemos o resultado enunciado. ■

A prova deste teorema utiliza os seguintes resultados auxiliares:

prova do Lema de Yosida. (i) decorre do Corolário 8.1.32.

Sejam $u_1 = I_\lambda(v_1)$ e $u_2 = I_\lambda(v_2) \Longleftrightarrow u_1 + \lambda p_1 = v_1$ e $u_2 + \lambda p_2 = v_2,\ p_1 \in A(u_1)$, $p_2 \in A(u_2)$. Então

$$(v_1 - v_2,\ u_1 - u_2)_V = (u_1 - u_2,\ u_1 - u_2)_V + \lambda \underbrace{(p_1 - p_2,\ u_1 - u_2)_V}_{\geq 0}\ ,$$

de modo que

$$\| u_1 - u_2 \|_V^2 = (v_1 - v_2,\ u_1 - u_2)_V \leq \| u_1 - u_2 \|_V \| v_1 - v_2 \|_V$$

e temos

$$\| u_1 - u_2 \|_V \leq \| v_1 - v_2 \|_V \ ,$$

de onde (ii).

Seja $u = I_\lambda (v) \Longleftrightarrow u + \lambda p = v,\ p \in A(u)$ .Então,

$$u = I_\lambda (v) \Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda}(v - u) = p \in A(u) \, ,$$

ou seja

$$u = I_\lambda (v) \Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda}(v - I_\lambda (v)) \in A(u) \Longleftrightarrow A_\lambda (v) \in A(u)$$

e temos (iii). Além disto,

$$A_\lambda (v) = \frac{1}{\lambda}(v - I_\lambda (v)) = \frac{1}{\lambda}(u + \lambda p - u) = p \in A(u) \ \ = A(I_\lambda (v))$$

e temos (iv). ■

prova do Corolário de Yosida. Como A é linear, temos: $A(0) = \{ \ 0 \ \}$, o que implica que, para todo $U \in G(A)$,

$$(u_2, \, u_1)_V \ \ = (u_2 - 0, \, u_1 - 0)_V \ \ \geq 0,$$

Além disto, $dom\,(A)$ é um subespaço vetorial: $0 \in dom\,(A)$ e, se $u, v \in dom\,(A)$, então $A(u) \neq \varnothing$ e $A(v) \neq \varnothing$, de modo que $A(\alpha u + v) = \alpha A(u) + A(v) \neq \varnothing$ e $\alpha u + v \in dom\,(A)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Seja L um funcional linear contínuo tal que $L(v) = 0$ para todo $v \in dom\,(A)$. Decorre do teorema de representação de Riez que existe $p \in V$ tal que $L(v) = (p, \, v)_V$ para todo $v \in V$. O Corolário 8.1.32 mostra que, para todo $\lambda > 0$, existe um único par $(u_1, \ u_2) \in G(A)$ tal que $p = u_1 + \lambda u_2$. Assim,

$$0 = L(u_1) = (u_1 + \lambda u_2, \, u_1)_V = \| \ u_1 \ \|_V^2 + \lambda \underbrace{(u_2, \, u_1)_V}_{\geq\, 0} \, .$$

de modo que

$$\| \ u_1 \ \|_V^2 \leq 0 \Longrightarrow u_1 = 0 \Longrightarrow u_2 = 0 \ .$$

Assim, $p = 0$, de modo que $L = 0$ e decorre do Corolário 5.5.7 que $dom\,(A)$ é denso em V.

Mostremos (i) : $(Id + \lambda A)(0) = 0$, de forma que $I_\lambda (0) = 0$. Logo, para todo $v \in dom\,(A)$:

$$\| \ I_\lambda (v) \ \|_V = \| \ I_\lambda (v) - I_\lambda (0) \ \|_V \leq \| \ v \ \|_V \quad .$$

Assim,

$$\| \ A_\lambda (v) \ \|_V = \| \ I_\lambda (A(v)) \ \|_V \leq \| \ A(v) \ \|_V \quad .$$

Como $dom\,(A)$ é denso em V, esta desigualdade é válida sobre V.

Mostremos (ii): temos

$$\| A_\lambda (v) \|_V = \frac{1}{\lambda} \| v - I_\lambda (v) \|_V .$$

de modo que

$$\| v - I_\lambda (v) \|_V \leq \lambda \| A_\lambda (v) \|_V \leq \lambda \| A (v) \|_V \longrightarrow 0 \text{ quando } \lambda \longrightarrow 0+ .$$

Mostremos (iii): temos $A_\lambda (v) = A (I_\lambda (v)) = I_\lambda (A (v)) \longrightarrow A (v)$ quando $\lambda \longrightarrow 0+$.

Mostremos (iv) e (v): temos

$$(A_\lambda (v) , v)_V = (A_\lambda (v) , v - I_\lambda (v))_V + (A_\lambda (v) , I_\lambda (v))_V ,$$

ou seja

$$(A_\lambda (v) , v)_V = \lambda (A_\lambda (v) , A_\lambda (v))_V + \underbrace{(A (I_\lambda (v)) , I_\lambda (v))_V} \geq \lambda \| A_\lambda (v) \|_V^2 .$$

Assim, por um lado,

$$(A_\lambda (v) , v)_V \geq \lambda \| A_\lambda (v) \|_V^2 \geq 0$$

e, por outro lado,

$$\lambda \| A_\lambda (v) \|_V^2 \leq \| A_\lambda (v) \|_V \| v \|_V ,$$

e temos o resultado enunciado. ■

prova do Lema de Gronwall contínuo. Temos

$$e^{-\alpha t} \frac{d\varphi}{dt} \leq \alpha e^{-\alpha t} \varphi + \beta e^{-\alpha t} \Longrightarrow \frac{d}{dt} \left(e^{-\alpha t} \varphi \right) \leq \beta e^{-\alpha t} .$$

Assim, integrando esta desigualdade entre 0 e t,

$$e^{-\alpha t} \varphi (t) - \varphi_0 \leq \int_0^t \beta (s) e^{-\alpha s} ds,$$

de onde

$$\varphi (t) \leq e^{\alpha t} \varphi_0 + e^{\alpha t} \int_0^t \beta (s) e^{-\alpha s} ds \leq e^{\alpha t} \varphi_0 + e^{\alpha t} \int_0^t \beta (s) ds$$

e temos o resultado enunciado. ■

prova do teorema de Hille-Yosida. Seja A_λ o regularizado de Yosida de A. Decorre do corolário de Yosida que A_λ é Lipschtiziano. Resulta do teorema de Cauchy que existe um único $u_\lambda \in L^2 (0, T; V)$ tal que

$$u_\lambda (0) = u_0 \text{ e } \frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda (u_\lambda) = f \text{ sobre } (0, T) .$$

Temos
$$\left(\frac{du_\lambda}{dt},\, u_\lambda\right)_V + \left(A_\lambda\left(u_\lambda\right),\, u_\lambda\right)_V = \left(f,\, u_\lambda\right)_V ,$$
de modo que (Corolário de Yosida, (v)):
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\ u_\lambda\ \|_V^2\right) + \lambda \|\ A_\lambda\left(u_\lambda\right)\ \|_V^2 \le \|\ f\ \|_V \|\ u_\lambda\ \|_V \le \frac{1}{2}\ \|\ f\ \|_V^2 + \frac{1}{2}\ \|u_\lambda\ \|_V^2\ ,$$
ou seja
$$\frac{d}{dt}\left(\|\ u_\lambda\ \|_V^2\right) + 2\lambda \|\ A_\lambda\left(u_\lambda\right)\ \|_V^2 \le\ \|\ f\ \|_V^2 + \|u_\lambda\ \|_V^2\ . \tag{8.42}$$

Assim, tomando $\varphi(t) = \|\ u_\lambda\ \|_V^2$, $\alpha = 1$, $\beta = \|\ f\ \|_V^2$, o Lema de Gronwall contínuo mostra que
$$\|\ u_\lambda\ \|_V^2 \le \|\ u_0\ \|_V^2\ e^{\alpha t}\ + e^{\alpha t}\int_0^t \|\ f\ \|_V^2\ ds\ .$$

Resulta que $\{\ u_\lambda\ \}_{\lambda\,>\,0}$ é limitada em $L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;V)$. Temos também
$$\frac{du_\lambda}{dt}(0) = f(0) - A_\lambda(u_0)$$
de forma que
$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(0)\right\|_V \le \|\ f(0)\|_V + \|\ A_\lambda(u_0)\ \|_V \le \|\ f(0)\|_V + \|\ A(u_0)\ \|_V\ .$$

Por outro lado,
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du_\lambda}{dt}\right) + A_\lambda\left(\frac{du_\lambda}{dt}\right) = \frac{df}{dt},$$
de modo que, de forma análoga,
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\ \frac{du_\lambda}{dt}\ \right\|_V^2\right) + \left(A_\lambda\left(\frac{du_\lambda}{dt}\right), \frac{du_\lambda}{dt}\right)_V = \left(f,\, \frac{du_\lambda}{dt}\right)_V$$
e temos
$$\left\|\ \frac{du_\lambda}{dt}\ \right\|_V^2 \le \left\|\ \frac{du_\lambda}{dt}(0)\ \right\|_V^2\ e^{\alpha t}\ + e^{\alpha t}\int_0^t \left\|\ \frac{df}{dt}\ \right\|_V^2\ ds\ .$$

Resulta que $\left\{\ \dfrac{du_\lambda}{dt}\ \right\}_{\lambda\,>\,0}$ é limitada em $L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;V)$. Repetindo o raciocínio, temos
$$\frac{d^2u_\lambda}{dt^2}(0) = \frac{df}{dt}(0) - A_\lambda\left(f(0) - A_\lambda(u_0)\right)$$

de forma que

$$\left\|\frac{d^2u_\lambda}{dt^2}(0)\right\|_V \leq \left\|\frac{df}{dt}(0)\right\|_V + \| f(0) \|_V + \| A_\lambda(A_\lambda(u_0)) \|_V$$

e

$$\left\|\frac{d^2u_\lambda}{dt^2}(0)\right\|_V \leq \left\|\frac{df}{dt}(0)\right\|_V + \| f(0) \|_V + \| A(u_0) \|_V .$$

Como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2u_\lambda}{dt^2}\right) + A_\lambda\left(\frac{d^2u_\lambda}{dt^2}\right) = \frac{d^2f}{dt^2}$$

deduzimos de maneira inteiramente análoga que $\left\{ \frac{d^2u_\lambda}{dt^2} \right\}_{\lambda > 0}$ é limitada em $L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;V)$. Como

$$A_\lambda(u_\lambda) = f - \frac{du_\lambda}{dt} \text{ e } A_\lambda\left(\frac{du_\lambda}{dt}\right) = \frac{df}{dt} - \frac{d^2u_\lambda}{dt^2} ,$$

temos

$$\| A_\lambda(u_\lambda) \|_V \leq \| f\|_V + \left\| \frac{du_\lambda}{dt} \right\|_V \quad \text{e} \quad \left\| A_\lambda\left(\frac{du_\lambda}{dt}\right) \right\|_V \leq \left\|\frac{df}{dt}\right\|_V + \left\| \frac{d^2u_\lambda}{dt^2} \right\|_V$$

de modo que $\{ A_\lambda(u_\lambda) \}_{\lambda > 0}$ e $\left\{ A_\lambda\left(\frac{du_\lambda}{dt}\right) \right\}_{\lambda > 0}$ também são limitadas em $L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;V)$. Assim, existe um número real $M > 0$ tal que, para todo $\lambda > 0$.

$$\left\| \frac{d^2u_\lambda}{dt^2} \right\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq M \;;\; \left\| \frac{du_\lambda}{dt} \right\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq M \;;\; \| u_\lambda \|_{L^\infty(0,T;V)} \leq M \;;$$

$$\left\| A_\lambda\left(\frac{du_\lambda}{dt}\right) \right\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq M \;;\; \| A_\lambda(u_\lambda) \|_{L^\infty(0,T;V)} \leq M .$$

Temos também

$$\left(\frac{d}{dt}(u_\lambda - u_\eta), u_\lambda - u_\eta\right)_V + (A_\lambda(u_\lambda) - A_\eta(u_\eta), u_\lambda - u_\eta)_V = 0$$

Ora, $u_\lambda = \lambda A_\lambda(u_\lambda) + I_\lambda(u_\lambda)$ e $u_\eta = \eta A_\eta(u_\eta) + I_\eta(u_\eta)$, de modo que

$$\begin{aligned}(A_\lambda(u_\lambda) - A_\eta(u_\eta), u_\lambda - u_\eta)_V &= (A_\lambda(u_\lambda) - A_\eta(u_\eta), \lambda A_\lambda(u_\lambda) - \eta A_\eta(u_\eta))_V + \\ &\quad (A_\lambda(u_\lambda) - A_\eta(u_\eta), I_\lambda(u_\lambda) - I_\eta(u_\eta))_V .\end{aligned}$$

Mas,

$$(A_\lambda(u_\lambda) - A_\eta(u_\eta), I_\lambda(u_\lambda) - I_\eta(u_\eta))_V = (A(I_\lambda(u_\lambda)) - A(I_\eta(u_\eta)), I_\lambda(u_\lambda) - I_\eta(u_\eta))_V \geq 0,$$

de forma que

$$\left(A_\lambda\left(u_\lambda\right) - A_\eta\left(u_\eta\right),\, u_\lambda - u_\eta\right)_V \geq \left(A_\lambda\left(u_\lambda\right) - A_\eta\left(u_\eta\right),\, \lambda A_\lambda\left(u_\lambda\right) - \eta A_\eta\left(u_\eta\right)\right)_V$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\| \, u_\lambda - u_\eta \, \|_V^2\right) \leq -\left(A_\lambda\left(u_\lambda\right) - A_\eta\left(u_\eta\right),\, \lambda A_\lambda\left(u_\lambda\right) - \eta A_\eta\left(u_\eta\right)\right)_V . \; .$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\| \, u_\lambda - u_\eta \, \|_V^2\right) \leq \frac{3}{2}\left(\lambda + \eta\right)\left(\| \, A_\lambda\left(u_\lambda\right) \, \|_V^2 + \| \, A_\eta\left(u_\eta\right) \, \|_V^2\right) . \leq 3\left(\lambda + \eta\right) M^2 \; .$$

Resulta que

$$\| \, u_\lambda - u_\eta \, \|_{L^\infty(0,T;V)} \leq 6\left(\lambda + \eta\right) M^2 T$$

e, por conseguinte, a seqüência $\{ \, u_\lambda \, \}_{\lambda \, > \, 0}$ é de Cauchy em $L^2\left(0,T;V\right) \cap L^\infty\left(0,T;V\right)$. De maneira inteiramente análoga,

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\eta}{dt}\right),\, \frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\eta}{dt}\right)_V + \left(A_\lambda\left(\frac{du_\lambda}{dt}\right) - A_\eta\left(\frac{du_\eta}{dt}\right),\, \frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\eta}{dt}\right)_V = 0,$$

de forma que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\| \, \frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\eta}{dt} \, \right\|_V^2\right) &\leq \frac{3}{2}\left(\lambda + \eta\right)\left(\left\| \, A_\lambda\left(\frac{du_\lambda}{dt}\right) \, \right\|_V^2 + \left\| \, A_\eta\left(\frac{du_\eta}{dt}\right) \, \right\|_V^2\right) \\ &\leq 3\left(\lambda + \eta\right) M^2 \end{aligned}$$

e $\left\{ \, \dfrac{du_\lambda}{dt} \, \right\}_{\lambda \, > \, 0}$ é de Cauchy em $L^2\left(0,T;V\right) \cap L^\infty\left(0,T;V\right)$. Logo, existe $u \in L^2\left(0,T;V\right) \cap L^\infty\left(0,T;V\right)$ tal que

$$\begin{aligned} u_\lambda \; &\longrightarrow \; u \;\text{ em }\; L^2\left(0,T;V\right) \cap L^\infty\left(0,T;V\right) \;\; \text{(fortemente)} \; ; \\ \frac{du_\lambda}{dt} \; &\rightharpoonup \; \frac{du}{dt} \;\text{ em }\; L^2\left(0,T;V\right) \cap L^\infty\left(0,T;V\right) \;\; \text{(fortemente)} \; . \end{aligned}$$

Assim,

$$A_\lambda\left(u_\lambda\right) \rightharpoonup f \; - \frac{du}{dt} \;\text{ em }\; L^2\left(0,T;V\right) \cap L^\infty\left(0,T;V\right) \;\; \text{(fortemente)} \; .$$

Ora,

$$\| \, u - I_\lambda\left(u_\lambda\right) \, \|_V \leq \| \, u - I_\lambda\left(u\right) \, \|_V + \| \, I_\lambda\left(u\right) - I_\lambda\left(u_\lambda\right) \, \|_V \;\; ,$$

de modo que, do Lema de Yosida (ii):

$$\| \, u - I_\lambda\left(u_\lambda\right) \, \|_V \leq \| \, u - I_\lambda\left(u\right) \, \|_V + \| \, u - u_\lambda \, \|_V \;\; ,$$

Assim, combinando o Corolário de Yosida e a convergência $u_\lambda \longrightarrow u$, temos

$$I_\lambda(u_\lambda) \longrightarrow u \text{ em } L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;V) \quad \text{(fortemente)} .$$

Logo,

$$(u_\lambda,\, A_\lambda(u_\lambda)) = (u_\lambda,\, A(I_\lambda(u_\lambda))) \in G(A)$$

e $(u_\lambda,\, A_\lambda(u_\lambda)) \longrightarrow \left(u,\, f - \dfrac{du}{dt}\right)$. Como $G(A)$ é fechado, deduzimos que

$$f - \frac{du}{dt} = A(u) \Longleftrightarrow \frac{du}{dt} + A(u) = f .$$

A unicidade de u resulta da monotonia: se w é outra solução, temos

$$\frac{d}{dt}(u-w) + A(u) - A(w) = 0, \quad u(0) - w(0) = 0 ,$$

de forma que

$$\left(\frac{d}{dt}(u-w),\, u-w\right)_V + (A(u) - A(w),\, u-w)_V = 0 \;\; ; \;\; u(0) - w(0) = 0$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\| u-w \|_V^2\right) \leq 0 \, , \;\; \| u(0) - w(0) \|_V^2 = 0.$$

Assim, $u = w$. ■

prova do Lema de Gronwall discreto. Mostremos por indução que

$$\forall\, n \geq 1 \; : \; a_n \leq (1+\alpha)^n a_0 + \beta \sum_{i=0}^{n-1} (1+\alpha)^i \tag{8.43}$$

A desigualdade é imediata para $n = 1$. Suponhamos que ela é válida para o valor $n \geq 1$. Temos, da definição da seqüência,

$$a_{n+1} \leq (1+\alpha)\, a_n + \beta ,$$

de modo que

$$a_{n+1} \leq (1+\alpha)\left[(1+\alpha)^n a_0 + \beta \sum_{i=0}^{n-1} (1+\alpha)^i\right] + \beta ,$$

ou seja

$$a_{n+1} \leq (1+\alpha)^{n+1} a_0 + \beta \sum_{i=0}^{n-1} (1+\alpha)^{i+1} + \beta .$$

Assim,

$$a_{n+1} \leq (1+\alpha)^{n+1} a_0 + \beta \sum_{i=0}^{n} (1+\alpha)^i$$

e a desigualdade é válida para o valor $n+1$: o princípio de indução finita mostra (8.43). Como

$$\sum_{i\,=\,0}^{n-1}(1+\alpha)^i = \frac{(1+\alpha)^n - 1}{(1+\alpha)-1} \ ,$$

de modo que

$$\forall\ n \geq 1\ :\ a_n \leq (1+\alpha)^n\, a_0 + \beta\frac{(1+\alpha)^n - 1}{\alpha}$$

e o resultado decorre da desigualdade $(1+\alpha)^n \leq (e^{\alpha})^n = e^{n\alpha}$. ■

prova do Teorema 8.4.9. Sejam $N>0$, $h=T/N$, $t_i = ih$, $f_i = f(t_i)$,

$$u^N = \sum_{i\,=\,0}^{N-1}\left(u_i + \frac{t-t_i}{h}\left(u_{i+1}-u_i\right)\right)\chi_i(t) \quad ;\ \chi_i(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_i \\ 1, & t_i \leq t \leq t_{i+1}\end{cases} \qquad ,$$

où

$$\frac{u_{i+1}-u_i}{h} + A\left(u_{i+1/2}\right) = f_{i+1/2} \quad , \quad i = 0,\ ...,\ N-1\ ;$$

$$u_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left(u_{i+1}+u_i\right) \quad ;\ f_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left(f_{i+1}+f_i\right)\ .$$

Temos

$$u_{i+1/2} + \frac{h}{2}A\left(u_{i+1/2}\right) = \frac{h}{2}f_{i+1/2} + u_i \quad , \quad i = 0,\ ...,\ N-1\ .$$

Decorre do Corolário 8.1.32 que existe uma única $u_{i+1/2}$ para todo $i \in \{0, \ldots, N-1\}$.
Assim, existe uma única $(u_0,\ u_1,\ ...,\ u_N)$ e, por conseguinte, u^N é determinada de maneira única. Além disto,

$$\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h},\, u_{i+1/2}\right)_V + \left(A\left(u_{i+1/2}\right),\, u_{i+1/2}\right)_V = \left(f_{i+1/2},\, u_{i+1/2}\right)_V \ ,$$

de modo que

$$\| u_{i+1} \|_V^2 - \| u_i \|_V^2 + \underbrace{h\left(A\left(u_{i+1/2}\right) - A(0)\,,\, u_{i+1/2}\right)_V}_{\geq 0} = h\left(f_{i+1/2} - A(0)\,,\, u_{i+1/2}\right)_V$$

e

$$\| u_{i+1} \|_V^2 \leq \| u_i \|_V^2 + h\left(\left\| f_{i+1/2} \right\|_V + \| A(0) \|_V\right)\left\| u_{i+1/2} \right\|_V \ ,$$

ou seja, definindo $M_1 = \frac{1}{2}\left(\left\| f_{i+1/2} \right\|_V + \| A(0) \|_V\right)$,

$$\| u_{i+1} \|_V^2 \leq \| u_i \|_V^2 + hM_1\left(\| u_{i+1} \|_V + \| u_i \|_V\right)\ .$$

Como, para todo $a>0$,

$$a \leq \frac{a^2+1}{2},$$

temos

$$\| \; u_{i+1} \; \|_V^2 \leq \| \; u_i \; \|_V^2 + \frac{hM_1}{2} \left(\| \; u_{i+1} \; \|_V^2 + \| \; u_i \; \|_V^2 + 2 \right) \; ,$$

Consideremos $N \geq TM_1$. Então $hM_1 \leq 1$, de modo que a desigualdade acima mostra que

$$\| \; u_{i+1} \; \|_V^2 \leq \frac{2 + hM_1}{2 - hM_1} \| \; u_i \; \|_V^2 + \frac{2hM_1}{2 - hM_1} \quad .$$

Aplicando o Lema de Gronwall discreto com

$$a_n = \| \; u_n \; \|_V^2 \quad ; \quad \alpha = \beta = \frac{2hM_1}{2 - hM_1} \quad ,$$

temos, dado que $\beta / \alpha = 1$,

$$a_n \leq e^{n\alpha} a_0 + e^{n\alpha} - 1.$$

Ora,

$$n\alpha \leq \frac{2nhM_1}{2 - hM_1} \underbrace{\leq}_{hM_1 \, \leq \, 1} \frac{2nhM_1}{2 - 1} = 2nhM_1 \underbrace{\leq}_{nh \, \leq \, T} 2TM_1,$$

de modo que, tomando $M_2 = e^{2TM_1} \| \; u_0 \; \|_V^2 + e^{2TM_1} - 1$, temos

$$\| \; u_n \; \|_V^2 \leq M_2$$

e, por conseguinte,

$$\forall \; t \in [0, \, T] : \left\| \; u^N \left(t \right) \; \right\|_V^2 \leq 2M_2 \; .$$

Assim, $\left\{ \; u^N \; \right\}_{N \, > \, 0}$ é limitada em $L^2 \left(0, T; V \right) \cap L^\infty \left(0, T; V \right)$. Como A é limitado, temos também (Cf. seção 8.1.1)

$$\left\| \; A \left(u^N \left(t \right) \right) \; \right\|_V \leq M_3 = K \left(A, \sqrt{\; 2M_2 \;} \right)$$

e $\left\{ \; A \left(u^N \right) \; \right\}_{N \, > \, 0}$ é limitada em $L^2 \left(0, T; V \right) \cap L^\infty \left(0, T; V \right)$. Além disto

$$\frac{du^N}{dt} = f - A \left(u^N \right) \Longrightarrow \left\| \; \frac{du^N}{dt} \; \right\|_V \leq M_4 = \| \; f \; \|_V + M_3,$$

de modo que $\left\{ \; \frac{du^N}{dt} \; \right\}_{N \, > \, 0}$ é limitada em $L^2 \left(0, T; V \right)$. Logo, existe uma subseqüência $\left\{ \; \left(u^{N(k)}, \; \frac{du^{N(k)}}{dt}, \; A \left(u^{N(k)} \right) \right) \; \right\}_{k \, > \, 0}$ tal que

$$u^{N(k)} \rightharpoonup u \;\; \text{ em } L^2 \left(0, T; V \right) \cap L^\infty \left(0, T; V \right) \quad \text{(fracamente)} \quad ;$$

$$\frac{du^{N(k)}}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt} \;\; \text{ em } L^2 \left(0, T; V \right) \quad \text{(fracamente)} \quad ;$$

$$A\left(u^{N(k)}\right) \rightharpoonup p \quad \text{em } L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;V) \quad \text{(fracamente)} \quad .$$

Decorre das hipóteses do teorema que

$$u^{N(k)} \longrightarrow u \quad \text{em } L^2(0,T;H) \quad \text{(fortemente)} \quad .$$

Assim,

$$\left\| \; A\left(u^{N(k)}\right) - A(u) \; \right\|_{V'} \leq C \left\| \; u^{N(k)} - u \; \right\|_H \longrightarrow 0,$$

de modo que $A\left(u^{N(k)}\right) \rightharpoonup A(u)$ em V' e, por conseguinte, $p = A(u)$ *e*

$$A\left(u^{N(k)}\right) \rightharpoonup A(u) \quad \text{em } L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;V) \quad \text{(fracamente)} \quad .$$

Além disto,

$$\left\| \; A\left(u^{N(k)}\right) - A\left(u_{i+1/2}\right) \; \right\|_{V'} \leq C \left\| \; u^{N(k)} - u_{i+1/2} \; \right\|_H \leq \frac{3}{2} Ch \left\| \; \frac{du^{N(k)}}{dt} \; \right\|_H ,$$

de modo que, para $f^{N(k)}$ definido de maneira análoga a $u^{N(k)}$,

$$\frac{du^{N(k)}}{dt} = f^{N(k)} - A\left(u^{N(k)}\right) + \underbrace{\left(f_{i+1/2} - f^{N(k)}\right)}_{\longrightarrow 0 \text{ em } V'} + \underbrace{\left(A\left(u_{i+1/2}\right) - A\left(u^{N(k)}\right)\right)}_{\longrightarrow 0 \text{ em } V'}$$

e temos, passando ao limite,

$$\frac{du}{dt} = f - A(u) \quad .$$

Como $u(0) = u_0$, u é solução do problema 8.4.1. A unicicidade resulta da monotonia: se w é uma solução, então

$$\frac{d}{dt}(u - w) + A(u) - A(w) = 0 \; ; \quad u(0) - w(0) = 0 \quad .$$

Assim,

$$\left(\frac{d}{dt}(u - w) \, , \, u - w \right)_V + \underbrace{\left(A(u) - A(w) \, , \, u - w\right)_V}_{\geq 0} = 0$$

e temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\| \; u - w \; \|_V^2 \right) \leq 0 \; , \; \| \; u(0) - w(0) \; \|_V^2 = 0,$$

de modo que $u = w$. ■

Bibliografia

[Aubin 1984] J. P. Aubin, " L'analyse non linéaire et ses motivations économiques", Masson, Paris, 1984.

[Berge 1997] C. Berge, "Topological Spaces", Dover, Mineola(USA), 1997.

[ET 1974] I. Ekeland e R. Temam, "Analyse convexe et problèmes variationnels", Dunod & Gauthier-Villars, 1974.

[Good et al 1998] C. Good, I. J. Tree e W. Watson, "On Stone's Theorem and the axiom of choice", Proc. of the AMS, vol. 126, no. 4, 1211-1228, 1998.

[Griffel 2002] D. H. Griffel, "Applied Functional Analysis", Dover, Mineola (USA), 2002.

[Halmos 2001] P. Halmos, "Teoria Ingênua dos Conjuntos", Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2001.

[Lang 1971] S. Lang, " Álgebra Linear", Editora Edgard Blucher, 1971.

[Rubin e Rubin 1985] H. Rubin e J. E. Rubin, " Equivalents of the Axiom of Choice II", North Holland, Dordrecht, 1985.

[Rudin 1974] W. Rudin, "Principles of Mathematical Analysis", McGraw Hill, New York, 1976.

[Tiel 1984] J. V. Tiel, "Convex Analysis, an introductory text", John Wiley & Sons Ltd., New York, 1984.

[Wilcox & Myers 1994] H. J. Wilcox e D. L. Myers, "An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series", Dover, Mineola(USA), 1994.

Índice

Notas em Matemática Aplicada

1. Restauraçã de Imagens com Aplicações em Biologia e Engenharia

   Geraldo Cidade, Antônio Silva Neto e Nilson Costa Roberty

2. Fundamentos, Potencialidades e Aplicações de Algoritmos Evolutivos

   Leandro dos Santos Coelho

3. Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em águas Subterrâneas

   Edson Wendlander

4. Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais

   Maria Cristina de Castro Cunha e Maria Amélia Novais Schleicher

5. Modelagem em Biomatemática

   Joyce da Silva Bevilacqua, Marat Rafikov e Cláudia de Lello Courtouke Guedes

6. Métodos de Otimização Randômica: algoritmos genéticos e "simulated annealing"

   Sezimária F. Pereira Saramago

7. "Matemática Aplicada à Fisiologia e Epidemiologia"

   H.M. Yang, R. Sampaio e A. Sri Ranga

8. Uma Introdução à Computação Quântica

   Renato Portugal, Carlile Campos Lavor, Luiz Mariano Carvalho e Nelson Maculan

9. Aplicações de Análise Fatorial de Correspondências para Análise de Dados

   Dr. Homero Chaib Filho, Embrapa

10. Modelos Matemáticos baseados em autômatos celulares para Geoprocessamento

    Marilton Sanchotene de Aguiar, Fábia Amorim da Costa, Graçaliz Pereira

    Dimuro e Antônio Carlos da Rocha Costa

11. Computabilidade: os limites da Computação

    Regivan H. N. Santiago e Benjamín R. C. Bedregal

12. Modelagem Multiescala em Materiais e Estruturas

    Fernando Rochinha e Alexandre Madureira

13. Modelagem em Biomatemática (Coraci Malta ed.)

    1 - "Modelagem matemática do comportamento elétrico de neurônios e algumas aplicações"

    Reynaldo D. Pinto

    2 - "Redes complexas e aplicaçõões nas Ciências"

    José Carlos M. Mombach

    3 - "Possíveis níveis de complexidade na modelagem de sistemas biológicos"

    Henrique L. Lenzi, Waldemiro de Souza Romanha e Marcelo Pelajo-Machado

14. A lógica na construção dos argumentos

    Angela Cruz e José Eduardo de Almeida Moura

15. Modelagem Matemática e Simulação Numérica em Dinâmica dos Fluidos

    Valdemir G. Ferreira, Hélio A. Navarro, Magda K. Kaibara

16. Introdução ao Tratamento da Informação nos Ensinos Fundamental e Médio

    Marcilia Andrade Campos, Paulo Figueiredo Lima

17. Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicação

    Rosana Sueli da Motta Jafelice, Laércio Carvalho de Barros, Rodney Carlos Bassanezi

18. Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira

    Socorro Rangel

19. Observar e Pensar, antes de Modelar

    Flavio Shigeo Yamamoto, Sérgio Alves, Edson P. Marques Filho, Amauri P. de Oliveira

20. Frações Contínuas: Propriedades e Aplicação

    Eliana Xavier Linhares de Andrade, Cleonice Fátima Bracciali

21. Uma Introdução à Teoria de Códigos

    Carlile Campos Lavor, Marcelo Muniz Silva Alves, Rogério Monteiro de Siqueira, Sueli Irene Rodrigues Costa