NOTAS EM MATEMÁTICA APLICADA e-ISSN 2236-5915

Volume 25, 2012

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2012

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7), as figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
http://www.sbmac.org.br/notas.php

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2012

ONDAS OCEÂNICAS DE SUPERFÍCIE

2ª edição

Leandro Farina
farina@alum.mit.edu

Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2012

Coordenação Editorial: Elbert Einstein Nehrer Macau

Coordenação Editorial da Série: Rosana Sueli da Motta Jafelice

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Catalogação elaborada pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

Farina, Leandro
Ondas Oceânicas de Superfície - São Carlos, SP :
SBMAC, 2012, 139 p., 20.5 cm - (Notas em Matemática) -
2ª edição

e-ISBN 978-85-86883-64-4

1. Ondas Oceânicas 2. Ondas em água
3. Espalhamento de ondas 4. Difração 5. Espectro de ondas
I. Farina, Leandro II. Título. III. Série

CDD - 51

Esta edição em formato e-book é uma edição revisada do livro original do mesmo título publicado em 2006 nesta mesma série pela SBMAC.

A Natasha, Aida e Gustavo.
E a meus pais.
Dedico

Agradecimentos

Aos colegas do Departamento de Matemática Pura e Aplicada e do Instituto de Geociências da UFRGS pela interação direta ou indireta durante a elaboração deste trabalho.

Aos colegas do Centro de Previsão do Tempo e Estudos Climáticos do INPE pela valiosa oportunidade de trabalhar em conjunto com profissionais das ciências atmosféricas, oceânicas e da computação.

Aos colegas do Departamento de Engenharia Oceânica e do Laboratório de Pesquisa em Eletrônica do MIT pelas idéias trocadas sobre Hidrodinâmica em nossas reuniões semanais durante meu pós-doutorado no MIT.

Aos membros e colaboradores da SBMAC que interagi durante o processo de elaboração destas notas pela gentileza e prestatez.

À Gabriela por participar ativamente de um enriquecedor processo da minha realidade ocorrido concomitantemente à elaboração destas notas.

Ao CNPq pela bolsa concedida durante a realização deste trabalho.

Conteúdo

Prefácio

Estas notas são a evolução de ideias e conhecimentos agrupados através do trabalho de orientação de alunos de Iniciação Científica e de Pos-Graduação da UFRGS e das oportunidades que tive de lecionar as disciplinas *Modelagem e Previsão de Ondas Oceânicas* do Programa de Pós-Graduação em Geociências da UFRGS e *Ondas Atmosféricas e Oceânicas* do Programa de Pós-Graduação do INPE.

As notas são divididas em quatro capítulos autônomos mas interligados em vários pontos. No capítulo 1, apresentamos as equações governantes determinísticas para a propagação de ondas aquáticas em uma superfície livre sem influência do vento. Descrevemos a teoria clássica e a linearização baseada na hipótese de ondas com amplitudes pequenas. No capítulo 2, a teoria linear é usada para examinar o problema de difração e radiação de ondas por obstáculos flutuantes ou submersos. Um apanhado sobre a interação de ondas com obstáculos finos através de equações integrais hipersingulares é desenvolvido e concluímos com breves relatos de aplicações à industria offshore. Iniciamos o capítulo 3 estudando problemas lineares transientes com aplicação à descrição matemática da propagação de tsunamis. Posteriormente abordamos alguns tópicos da teoria não-linear de ondas em água, principalmente aqueles para águas profundas. Aproximações e teorias não-lineares para ondas em águas rasas não são tratadas. Por fim, no capítulo 4, apresentamos a descrição estatística de ondas oceânicas e o conceito de espectro de ondas. Uma dedução da equação do balanço baseado em princípios variacionais é delineada para concluirmos com o problema de previsão de ondas oceânicas.

O material aqui contido pode ser apresentado parcialmente de várias formas sem prejuízo para seu entendimento e continuidade. Possíveis abordagens parciais das notas são

- $\boxed{\text{Capítulo 1}} \longrightarrow \boxed{\text{Capítulo 2}}$
- $\boxed{\text{Capítulo 1}} \longrightarrow \boxed{\text{Seções 3.1 a 3.3}}$
- $\boxed{\text{Capítulo 1}} \longrightarrow \boxed{\text{Seções 3.4 a 3.9}}$
- $\boxed{\text{Capítulo 1}} \longrightarrow \boxed{\text{Capítulo 3}}$
- $\boxed{\text{Capítulo 1}} \longrightarrow \boxed{\text{Seções 3.7 e 3.8}} \longrightarrow \boxed{\text{Capítulo 4}}$

Em relação à versão impressa de 2006, algums erros de digitação foram corrigidos e adições pontuais foram feitas. Uma nova seção sobre a equação de declividade suave foi incluída no capítulo 2.

Porto Alegre, 24 de setembro de 2011.
Leandro Farina

Capítulo 1

Ondas em Água

1.1 Equações Governantes do Fluido

Nosso objetivo é formular um problema de valor de contorno geral que permitirá deduzir características básicas acerca de ondas aquáticas de superfície. Nesta primeira aproximação, não será considerada a forçante do vento. A principal força restauradora é gravidade e a variação da densidade da água no tempo e espaço é bastante pequena em todas situações de interesse prático. Assim, as equações de movimento para um fluido incompressível; a conservação de massa (equação da continuidade)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{1.1.1}$$

a conservação de momento (equação Navier-Stokes),

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\Big)\boldsymbol{u} = -\nabla\Big(\frac{P}{\rho} + gz\Big) + \nu\Delta\boldsymbol{u}, \tag{1.1.2}$$

são aplicáveis. Aqui, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = (u, v, w)$ é o vetor de velocidade, $P(\boldsymbol{x}, t)$ denota a pressão, ρ densidade da água, g, a aceleração da gravidade. ν é a viscosidade cinemática e $\boldsymbol{x}$ é um ponto com coordenadas cartesianas (x, y, z) com o eixo-z verticalmente para cima.

Na água, ν é da ordem de 0.01 cm^2/s e o termo do Laplaciano em (1.1.2) é insignificante exceto onde o gradiente de velocidade e vorticidade são muito grandes. Portanto, assumindo que o fluido é não viscoso, a equação (1.1.2) se reduz a

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\Big)\boldsymbol{u} = -\nabla\Big(\frac{P}{\rho} + gz\Big), \tag{1.1.3}$$

conhecida como equação de Euler.

Discutiremos agora a lei de conservação de circulação. Ela estabelece que num fluido não-viscoso, a circulação $\Gamma_{\mathcal{C}}$, dada por

$$\Gamma_{\mathcal{C}}(t) = \oint_{\mathcal{C}} u\ dx + v\ dy + w\ dz,$$

é constante no tempo, para qualquer curva $\mathcal{C}$ consistindo das mesmas partículas do fluido.

Assumir que esta constante é zero não é restritivo do ponto de vista de aplicações físicas, uma vez que este caso ocorre em circunstâncias importantes, sempre que o fluido tenha estado em repouso ou tenha tido velocidade constante num determinado instante.

Então, assumimos que $\Gamma_{\mathcal{C}}(t) \equiv 0$ para todas curvas fechadas $\mathcal{C}$. Esta condição resulta em várias simplificações matemáticas que são de grande utilidade. Primeiramente, deve ser notado que do teorema de Stokes, segue que o rotacional de $\boldsymbol{u}$ se anula globalmente, ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}. \tag{1.1.4}$$

Portanto o escoamento é irrotacional. Como é bem conhecido, a equação (1.1.4) é equivalente ao fato que existe um *potencial de velocidade* Φ tal que

$$\boldsymbol{u} = \nabla\Phi. \tag{1.1.5}$$

Portanto, da equação da continuidade (1.1.1) tem-se que o potencial de velocidade satisfaz a equação de Laplace

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{1.1.6}$$

Adicionalmente, fazendo uso da indentidade vetorial

$$\boldsymbol{u} \cdot \nabla\boldsymbol{u} = \nabla\frac{\boldsymbol{u}^2}{2} - \boldsymbol{u} \times (\nabla \times \boldsymbol{u})$$

e da irrotacionalidade, a equação de Euler simplifica a

$$\nabla\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\Big) = -\nabla\Big(\frac{P}{\rho} + gz\Big). \tag{1.1.7}$$

Integrando (1.1.7) obtemos a chamada equação de Bernoulli

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gz = -\frac{P}{\rho} + A(t), \tag{1.1.8}$$

onde $A(t)$ é uma função de t mas não das variáveis espaciais. Podemos tomar $A(t) \equiv 0$, sem perda de generalidade, expressando Φ na forma $\Phi + \int f(t)dt$, sem afetar o campo de velocidades.

1.2 Condições de Fronteira

O domínio considerado é de um oceano ilimitado horizontalmente e com uma fronteira superior, chamada de superficie livre, representando a interface ar-água e a fronteira inferior, determinada pela batimetria.

A seguir, postularemos as condições de fronteira exatas a serem empregadas para completamente definir um problema. Após a linearização das equações, poderemos obter soluções que serão usadas para deduzir, nas subseções 1.3.1, 1.3.2 e 1.3.3, diversas propriedades de ondas de superfície assim como para representar a superfície oceânica através de uma superposição linear de componentes, obtendo-se o conceito de espectro de amplitude, como veremos no capítulo 4.

1.2.1 Condições Cinemáticas

Seja

$$z = \eta(x, y, t) \tag{1.2.9}$$

a equação que define a elevação da superfície livre. A condição de fronteira cinemática impõe que sua derivada material seja nula:

$$\frac{D}{Dt}(z - \eta(x, y, t)) = 0. \tag{1.2.10}$$

Fisicamente, esta condição requer que a superfície (1.2.9) se mova com o fluido, de modo a sempre conter as mesmas partículas dele. Assim,

$$w - \frac{\partial \eta}{\partial t} - (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\eta = 0,$$

ou

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\eta = 0, \quad \text{em } z = \eta(x, y, t). \tag{1.2.11}$$

A equação (1.2.11) é a *condição cinemática da superfície livre.*

Para fluidos não-viscosos, o fundo também constitui uma fronteira que move com o fluido. Denotando o fundo impermeável por

$$z = \mathcal{H}(x, y, t),$$

temos que

$$\frac{D}{Dt}(z - \mathcal{H}(x,y,t)) = 0, \quad \text{em } z = \mathcal{H}$$

ou

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} - (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\mathcal{H} = 0, \quad \text{em } z = \mathcal{H}, \tag{1.2.12}$$

que representa a *condição de fronteira de fundo.*

Para fundos estacionários, (1.2.12) se reduz a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\mathcal{H} = 0, \quad \text{em } z = \mathcal{H}, \tag{1.2.13}$$

ao passo que para um fundo horizontal fixo $\mathcal{H} = -h$, a condição de fronteira nele é simplesmente

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \text{em } z = -h, \tag{1.2.14}$$

o que é fisicamente entendida, apenas de considerações elementares.

No caso de ondas em águas profundas, a condição de fundo pode ser expressa por

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \to 0, \quad z \to -\infty, \tag{1.2.15}$$

1.2.2 Condição Dinâmica

A condição dinâmica diz repeito à forças. Sendo a tensão superficial desprezível para comprimentos de ondas de nosso interesse, requer-se então que a pressão seja prescrita em $z = \eta(x,y,t)$. Portanto, aplicando a equação de Bernoulli (1.1.8) na superfície livre e observando que a pressão imediatamente embaixo desta superfície deve ser igual à pressão atmosférica P_a, obtemos a *condição dinâmica da superfície livre*

$$-\frac{P_a}{\rho} = g\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla \Phi|^2 \quad \text{em } z = \eta. \tag{1.2.16}$$

1.2.3 Condição Combinada

É possível combinar as condições (1.2.11) e (1.2.16) eliminando η, e obtendo uma única condição de superfície livre. De fato, usando a indentidade vetorial

$$\boldsymbol{u} \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\boldsymbol{u}|^2,$$

e as duas condições de superfície livre, temos

$$\frac{D}{Dt}\frac{P_a}{\rho} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial |\boldsymbol{u}|^2}{\partial t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u} \cdot \nabla |\boldsymbol{u}|^2 = 0 \quad \text{em } z = \eta.$$

Se P_a for constante, a condição acima torna-se

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial |\boldsymbol{u}|^2}{\partial t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u} \cdot \nabla |\boldsymbol{u}|^2 = 0 \quad \text{em } z = \eta. \tag{1.2.17}$$

A equação (1.2.17) expressa a condição de superfície livre combinada e sua presença em um problema equivale à imposição de ambas as condições (1.2.11) e (1.2.16). Note não apenas a existência de termos não-lineares em (1.2.17), como também o fato que η é incógnita.

O problema composto pela equação de Laplace e as condições cinemáticas e dinâmica acima é denominado *problema completamente não-linear*. Devido à sua complexidade, a solução terá que ser procurada numericamente ou por meio de aproximações assintóticas e da teoria da perturbação. No capítulo 3, consideraremos aspectos da teoria não-linear de ondas em água. Contudo, linearizando e assumindo movimentos periódicos no espaço e no tempo é possível obter soluções analíticas para o problema de ondas em água. Isto será feita na seção seguinte.

1.3 Linearização e Solução

Assumindo que a amplitude das ondas é pequena comparada com o comprimento de onda e com a profundidade da água, as condições de superfície livre podem ser impostas em $z = 0$. Ademais, se a velocidade do fluido é proporcional ao movimento das ondas, os termos quadráticos em (1.2.17) podem ser desprezados tornando a condição combinada da superfície livre,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = 0. \tag{1.3.18}$$

Analogamente, sem perda de generalidade, tomando $P_a = 0$, obtemos da condição dinâmica (1.2.16) a seguinte relação direta entre a derivada de Φ e η:

$$\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{em } z = 0. \tag{1.3.19}$$

Supondo que a água tem profundidade constante no tempo e espaço, ou seja, $h \equiv 0$, o problema linearizado é então definido pelas equações (1.1.6), (1.2.14) e (1.3.18) (ver figura 1.1). Estas equações e condições de contorno encontradas ainda são muitos complexas para permitir uma solução explícita. A fim de progredir, visando o nosso objetivo de obter tal solução, fazemos uma especialização adicional que é a suposição de ondas com propagação periódicas no tempo e no espaço. Isto caracteriza a hipótese de *movimento hamônico simples*. Matematicamente, suponha uma solução deste problema na seguinte forma:

$$\Phi = \frac{ag}{\omega}\Gamma(z)\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q})}\}, \tag{1.3.20}$$

onde $\boldsymbol{q} = (x, y)$. A expressão (1.3.20) modela uma onda com amplitude $a = \frac{H}{2}$, onde H é sua altura, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência angular, $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2)$ é o vetor de onda, T, o período e $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ é o comprimento de onda, onde $k = |\boldsymbol{k}|$ é o número de onda. De fato, substituindo (1.3.20) na equação de Laplace (1.1.6), obtemos uma equação diferencial ordinária (EDO) em Γ:

$$\Gamma'' - k^2\Gamma = 0.$$

A solução geral desta EDO é dada por

$$\Gamma(z) = A\,\mathrm{senh}(kz) + B\cosh(kz),$$

onde A e B são constantes arbitrárias. Para determiná-las impomos a condição de fundo (1.2.14) e obtemos $\Gamma' = 0$ em $z = -h$, o que implica

$$A = -B\tanh(kh).$$

Assim

$$\Gamma(z) = B(\tanh(kh)\mathrm{senh}(kz) + \cosh(kz)).$$

Usando a identidade $\cosh(\alpha+\beta) = \mathrm{senh}\alpha\ \mathrm{senh}\beta + \cosh\alpha\cosh\beta$, temos

$$\Gamma(z) = B\frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)}. \tag{1.3.21}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \qquad z = 0$$

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$z = -h \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$$

Figura 1.1: Problema linearizado

Diferenciando (1.3.20) com respeito a t, usando (1.3.19) em $z = 0$ e tomando $B = -1$, obtemos

$$\eta = a\ \mathrm{sen}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}). \tag{1.3.22}$$

A expressão (1.3.22) para a superfície livre apresenta comportamento periódico em $\boldsymbol{q}$ e t. A solução do problema linear é portanto dada pelas equações (1.3.20) e (1.3.22), onde ω e k são relacionados através de uma determinada forma, como veremos na próxima seção.

No caso de águas profundas, podemos tomar o limite $h \to \infty$ em (1.3.21) para obter

$$\Phi = \frac{ag}{\omega}e^{kz}\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q})}\}, \tag{1.3.23}$$

Apesar de sua simplicidade e das simplificações feitas para obtê-la, este tipo de solução será de fundamental importância na modelagem de ondas no oceano, como veremos nas próximas seções e capítulos deste livro.

1.3.1 Velocidade de Fase, Dispersão e Refração

Substituindo (1.3.20) em (1.3.18) e avaliando em $z = 0$, chegamos a

$$\omega^2 = gk\tanh(kh). \tag{1.3.24}$$

A equação (1.3.24) é chamada *relação de dispersão* para ondas lineares em profundidade finita. Esta equação é de extrema importância na teoria linear de ondas em água, sintetizando e expressando a essência desta teoria. Em particular, (1.3.24) expressa uma única relação entre ω, k e h (or T,L e h). Se duas dessas variáveis são conhecidas, a terceira estará unicamente definida.

Por definição, a velocidade de fase ou velocidade de propagação C de uma onda é dada por

$$C = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}. \tag{1.3.25}$$

Substituindo (1.3.24) em (1.3.25), temos

$$C = \left(\frac{g}{k}\tanh(kh)\right)^{1/2}. \tag{1.3.26}$$

Analisando a expressão (1.3.26) podemos tirar importantes conclusões. Para valores dados de ω e k, a onda se propagará mais rapidamente em águas profundas do que em águas razas. Este fato explica porque ondas normalmente chegam com suas cristas paralelas à praia: uma onda em mar aberto com direção oblíqua à praia tenderá a dobrar-se, já que sua parte mais distante da praia, e portanto sujeita a profundidades maiores, será mais rápida, emparelhando com a parte da onda que estará em águas mais rasas e portanto, mais lenta. Este processo de mudança de direção de ondas chama-se *refração*.

O fato de que a relação (1.3.24) é não-linear, ou equivalentemente, que C depende de ω e k caracteriza *ondas dispersivas*. No caso de ondas de água, ondas longas ou com longos períodos se propagam mais rapidamente que ondas curtas ou com periodos curtos (ver exercício 5). Assim, para um grupo de ondas se propagando longe da região onde foram geradas, terão diferentes velocidades. As ondas mais longas se propagarão mais rapidamente e precederão ondas progressivamente mais curtas. Logo, o campo de ondas se dispersaria gradualmente. Esta característica será considerada em uma escala global no capítulo 4 (figura 4.8), em frentes de marulhos (swell) apresentando ondas com período maior a frente das ondas com períodos menores.

Tradicionalmente, na teoria de ondas aquáticas, classificações em relacão à profundidade são feitas. Tais classificações têm valor inestimável para a análise matemática de soluções e propriedades de ondas em águas rasas ou profundas. As funções hiperbólicas que aparecem nas soluções das seções anteriores fornecem a principal simplificação nesta classificação através de seus valores assintóticos para kh muito grandes ou próximos de 0. A tabela 1.1 mostra esses valores. Assim,

	$kh \to 0$	$kh \to \infty$
senhkh	kh	$e^{kh}/2$
$\cosh kh$	1	$e^{kh}/2$
$\tanh kh$	kh	1

Tabela 1.1: Valores assintóticos das funções hiperbólicas da teoria de ondas lineares.

no limite de águas profundas, a velocidade de fase se torna

$$C = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2}, \tag{1.3.27}$$

e

$$C = (gh)^{1/2} \tag{1.3.28}$$

no limite $h \to 0$, ou de ondas longas. Note portanto que, em pequenas profundidades, onde o comprimento de ondas é grande se comparado com a profundidade (daí se falar no regime de ondas longas), as ondas não são dispersivas. Para a relação de dispersão, temos os limites

$$\omega^2 = gk, \qquad \text{em águas profundas,} \tag{1.3.29}$$

$$\omega = k\sqrt{gh}, \qquad \text{em águas rasas.} \tag{1.3.30}$$

1.3.2 Trajetória de Partículas e Pressão Interna

Vejamos agora como se dá o deslocamento horizontal e vertical da água. Para isto, considere uma onda plana, ou seja, independente de y. Pelas equações (1.3.20) e (1.1.5), temos que os movimentos horizontal e vertical de uma partícula na água são dados por

$$u = \frac{agk}{\omega}\frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)}\operatorname{sen}(\omega t - kx), \tag{1.3.31}$$

$$w = \frac{agk}{\omega}\frac{\operatorname{senh}[k(z+h)]}{\cosh(kh)}\cos(\omega t - kx). \tag{1.3.32}$$

Observe que no caso particular de águas profundas, levando em conta os comportamentos assintóticos das funções hiperbólicas dados em (1.1), temos

$$u = \frac{agk}{\omega} e^{kz} \text{sen}(\omega t - kx), \qquad (1.3.33)$$

$$w = \frac{agk}{\omega} e^{kz} \cos(\omega t - kx). \qquad (1.3.34)$$

O deslocamento horizontal e vertical da partícula pode ser definido por

$$\xi = \int u dt \quad \text{e} \quad \eta = \int w dt. \qquad (1.3.35)$$

Substituindo a relação de dispersão (1.3.24) em (1.3.35) e reagrupando termos, obtemos

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1, \qquad (1.3.36)$$

onde

$$\alpha = a\frac{\cosh[k(z+h)]}{\text{senh}(kh)}, \qquad (1.3.37)$$

$$\beta = a\frac{\text{senh}[k(z+h)]}{\text{senh}(kh)}. \qquad (1.3.38)$$

De (1.3.36), podemos ver que as trajetórias das partículas de fluido para ondas lineares são elipses fechadas.

Substituindo a derivada de Φ, dado por (1.3.20) na equação de Bernoulli (1.1.8) linearizada, temos

$$\frac{P}{\rho} = g\frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)}\eta - gz$$

ou

$$\frac{P}{\rho g} = K_P \, \eta - z, \qquad (1.3.39)$$

onde K_P é chamado *fator de resposta* da pressão interna. O valor de K_P diminui com o aumento de $|z|$ e portanto as variações da pressão associadas ao efeito das ondas de superfície diminui com o distanciamento da supefície livre. Para águas profundas, K_P varia de 1 em $z = 0$ a 0.04 em $z = -L/2$. Conclui-se que a influência das ondas de superfície é desprezível para profundidades maiores que a metade do comprimento de onda.

1.3.3 Energia de Ondas

A energia de ondas pode ser expressa através das densidades das energias potencial e cinética,

$$E_p = gz \quad \text{e} \quad E_c = \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2. \tag{1.3.40}$$

Integrando $E_p + E_c$ sobre o domínio inteiro da água, obtém-se a energia total. A energia E em uma coluna de água vertical, por unidade de área da superfície livre é dada por

$$\begin{aligned} E &= \rho \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\right) dz + \rho \int_0^{\eta} gz\, dz \\ &= \rho \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\right) dz + \frac{1}{2}\rho g \eta^2. \end{aligned} \tag{1.3.41}$$

Note que a energia potencial é medida na coluna vertical de água de 0 a η pois o valor desta energia em $z = -h$, abaixo da posição de equilíbrio $z = 0$, é uma constante não relacionada ao movimento das ondas.

Empregando a solução linear plana para o caso particular de águas profundas, temos de acordo com (1.1.5), (1.3.33) e (1.3.34), que

$$\nabla\Phi = \frac{agk}{\omega}(e^{kz}\mathrm{sen}(\omega t - kx), 0, e^{kz}\cos(\omega t - kx)).$$

Substituindo esta expressão em (1.3.41) e fazendo a integração em z, teremos

$$E = \frac{1}{2}\rho g \eta^2 + \frac{\rho\omega^2 a^2}{4k} e^{2k\eta} \tag{1.3.42}$$

para ondas de pequena amplitude, hipótese da teoria linear, $\eta \ll 1$ e $e^{2k\eta} \sim 1$. Assim,

$$E = \frac{1}{2}\rho g \eta^2 + \frac{\rho\omega^2 a^2}{4k}.$$

Usando a solução linear (1.3.22) e a relação de dispersão (1.3.29),

$$E = \frac{1}{2}\rho g\, a^2\, \mathrm{sen}^2(\omega t - kx) + \frac{1}{4}\rho g\, a^2.$$

Tomando a média em um período[1], denotada por uma barra superior, temos

$$\bar{E} = \frac{1}{4}\rho g\, a^2 + \frac{1}{4}\rho g\, a^2 = \frac{1}{2}\rho g\, a^2 = \rho g\, \bar{\eta^2}. \tag{1.3.43}$$

[1] veja exercício 1.7

Assim, as energias potencial e cinéticas são iguais, como ocorre em qualquer sistema dinâmico para pequenas oscilações. Esta propriedade é denominada equipartição de energia. Para ondas em água de profunidade finita, (1.3.43) também é valida. Contudo, um cálculo um pouco mais longo é necessário, particularmente para fazer a integração em (1.3.41) e chegar em uma expressão equivalente a (1.3.42). Veja exercício 1.8.

Vemos que a energia de ondas lineares é proporcional ao quadrado da amplitude. Este resultado será utilizado mais tarde quando estudarmos a representação espectral de ondas no capítulo 4.

1.4 Velocidade de Grupo

Na seção 1.3.1 discutimos sobre como a velocidade de propagação de uma onda varia com o comprimento de onda, usando a relação de dispersão (1.3.24). Se observarmos diversas ondas em uma superfície aquática notaremos um estado que está continuamente em mudança, aparentemente sem correlação entre as ondas. Contudo, as ondas em água apresentam a notavél característica de formarem grupos. Um tal grupo de ondas se comporta semelhantemente a uma única onda, possuindo uma velocidade, um comprimento e uma certa frequência.

Para obtermos uma ideia intuitiva de como esta propriedade se dá, imagine que um objeto grande é atirado em uma superfície aquática originalmente calma, sem ondulação. Após uma complicada agitação inicial, esta perturbação começa a gerar padrões de ondas regulares: ondas concêntricas com cristas se propagando em direção oposta à perturbação. Notamos também que as ondas mais longas ficam na parte externa e as mais curtas próximas ao centro de propagação, como era de se esperar do fato que a velocidade aumenta com o comprimento de onda. Aguçando o nosso nível de observação e focando no desenvolvimento das ondas de fora, poderemos notar que perdemos estas ondas de vista, como uma ilusão de ótica. Ou seja, na parte final do movimento ondulatório as ondas desaparecem. Ao mesmo tempo, ondas *jovens* estão aparecendo no centro do círculo onde agora é um local calmo, sem perturbação.

Este fenômendo se torna mais compreensível se notarmos que o padrão das ondas se propaga em uma velocidade diferente das ondas, individualmente. De fato esta *velocidade de grupo*, em águas profundas é a metade da velocidade de fase das ondas. Assim, uma onda que aumenta seu comprimento e se torna mais veloz não poderia mais fazer parte deste grupo, e se exclue dele. Como na situação pensada existe uma única fonte de geração de ondas, estas ondas longas, de fora do círculo, podem apenas desaparecer.

As ondas *antigas* ao sumirem nos poderia levar a pensar que a energia gerada está sendo destruída. Contudo, esta hipótese é logo eliminada pelas ondas que surgem no centro do sistema. É portanto natural conjecturar que a energia de ondas gerada pela perturbação se propaga na velocidade de grupo das ondas e não na velocidade de ondas individuais.

Uma situação análoga e realística é dada por ondas oceânicas geradas por uma perturbação atmosférica, ou seja, uma tempestade ocasionada por um ciclone. Os ventos intensos geram inicialmente um padrão de ondas complexo e irregular. Por estarem sendo geradas pelos ventos locais, denominamos este sistema de *wind sea*, em inglês, e suas ondas de *vagas*. As ondas que foram originadas por estes ventos demoram a se dissipar e se propagam para longe, adiquirindo um padrão bastante regular. Este sistema se torna maduro, evolui dispersivamente e a energia gerada pela tempestade se propaga nas velocidades dos grupos de ondas. Estas ondas antigas e com forma suave e senoidal podem *viajar* milhares de kilômetros na ausência de vento; são chamadas de *swell* ou de marulhos.

Para dar mais formalismo às considerações acima suponha duas ondas planas (isto é, sem dependência na variável y), soluções do problema de valor de contorno (1.1.6), (1.2.14) e (1.3.18), se propagando simultaneamente. Como o problema é linear, esta *soma* é solução do mesmo problema. Expressando senos através da parte imaginaria de exponenciais, a superfície livre terá a forma

$$\eta = \mathrm{Im}\{a_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + a_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)}\}, \tag{1.4.44}$$

que pode ser reescrita como

$$\eta = \mathrm{Im}\left\{\left[1 + \frac{a_2}{a_1} e^{i(\Delta\omega t - \Delta k x)}\right] a_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)}\right\}, \tag{1.4.45}$$

onde $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ e $\Delta k = k_2 - k_1$. Esta última equação pode ser vista como uma onda cuja amplitude, o termo entre colchetes, varia no espaço e no tempo. Pode-se pensar em (1.4.45) como um delineamento das duas ondas. Este delineamento, ou grupo, pode ser visualizado como uma onda.

Analogamente às propriedades da seção 1.3, o grupo tem comprimento de onda $\frac{2\pi}{\Delta k}$ e período $\frac{2\pi}{\Delta\omega}$. Ademais, a velocidade deste grupo é

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \tag{1.4.46}$$

No limite quando $\Delta\omega \to 0$ e $\Delta k \to 0$, temos

$$C_g = \frac{d\omega}{dk}. \tag{1.4.47}$$

Usando a definição de velocidade de grupo (1.4.47) e a relação de dispersão (1.3.24), segue que a velocidade de grupo de um trem de ondas lineares é

$$C_g = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh}(2kh)}\right] C. \tag{1.4.48}$$

Logo, no limite,

$$C_g = \begin{cases} \frac{1}{2}C, & \text{em águas profundas,} \\ C, & \text{em águas razas.} \end{cases}$$

Portanto, exceto no caso extremo de ondas em águas rasas, as ondas individuais num grupo se propagam mais rápido que o grupo.

Usando as propriedades assintóticas de funções hiperbólicas, para águas profundas, temos que

$$C_g = \frac{g}{2\omega}.$$

Exercícios

1.1 Deduza, passo a passo, a condição de contorno não-linear (1.2.17).

1.2 Considere o potencial de velocidade

$$\Phi = A\mathrm{e}^{kz}\left(\frac{1}{r}\right)^{1/2}\cos(\omega t - kr), \tag{1.4.49}$$

onde $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ e A é uma constante. Assuma águas profundas e que a superfície livre tem dimensões horizontais infinitas.

(a) A equação de Laplace é satisfeita em todo ponto do fluido ?

(b) Em quais direções, as ondas descritas pela equação (1.4.49) se propagam ?

(c) Como a amplitude de onda varia no espaço ?

1.3 Escreva as condições cinemática e dinâmica da superfície livre em suas formas linearizadas.

1.4 Observe e identifique efeitos de dispersão de ondas em figuras mostrando períodos (de pico ou médios) de ondas oceânicas em sites de previsões de ondas como `http://www.cptec.inpe.br/ondas` ou `http://polar.ncep.noaa.gov/waves`.

1.5 Encontre uma fórmula para a velocidade de fase de uma onda em água em função do comprimento de onda e da profundidade. Supondo $\lambda = 1$, esboçe gráficos de C variando h.

1.6 Que forma o movimento de uma particula de água em ondas descreve quando h é muito grande ?

1.7 Mostre que para duas funções senoidais $\eta_1 = \mathrm{Re}(a\, e^{i\omega t})$ e $\eta_2 = \mathrm{Re}(b\, e^{i\omega t})$, vale $\overline{\eta_1 \eta_2} = \frac{1}{T}\int_0^T \eta_1 \eta_2 \, dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(ab^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(a^* b)$, onde $()^*$ denota conjugado complexo.

1.8 Obtenha a fórmula da energia $\bar{E} = \frac{1}{2}\rho g\, a^2$ para ondas lineares planas sem especificar a hipótese de águas profundas. Sugestão: Faça uso do Exercício 1.7 e da fórmula $\int_0^{kh} \cosh^2 \xi \, d\xi = \frac{1}{4}(\mathrm{senh} 2kh + 2kh)$.

Capítulo 2

Difração e Radiação

Ondas podem sofrer mudanças de direção em seu movimento, influenciando assim no processo de como sua energia se propaga. Ondas em água podem ter sua propagação modificada em direção, por exemplo, quando sofrem refração por um campo de corrente ou por variações na batimetria, como vimos na seção 1.3.1. Ondas na superfície da água serão modificadas, espalhadas, refletidas ou radiadas quando na presença de regiões como ilhas, enseadas e portos, ou de um corpo flutuante ou submerso com dimensões comparáveis ao comprimento da onda. A este fenômeno dá-se o nome de *difração*.

A teoria linear tem sido classicamente empregada e é bastante desenvolvida no tratamento da difração. Assim, postergamos ao capítulo 3 a descrição de teorias não-lineares de ondas e faremos neste capítulo uso da linearidade para explorar o problema de difração. Ao mesmo tempo, fazemos isto em separado ao capítulo anterior, visto que um instrumental matemático um tanto mais sofisticado é necessário para o tratamento e obtenção de soluções de problemas envolvendo difração.

Inicialmente abordaremos a difração e refração devido a um fundo suavamente variável e deduziremos a equação de declividade suave. Nas seções seguintes, obteremos uma representação exata do potencial de velocidade, dada em termos de uma integral, válida para uma forma relativamente arbitrária do obstáculo que causa a difração. Justamente essa arbitrariedade faz com que o passo final na obtenção da solução explícita tenha que ser feito numericamente. Contudo, é claro que em situações onde a geometria do obstáculo for simples o suficiente, soluções analíticas explícitas poderão ser obtidas.

2.1 Difração e Refração Devido a um Fundo Suavemente Variável

Para um fundo constante fixo podemos escrever o potencial de velocidade ϕ como

$$\phi = -\frac{ig\eta}{\omega} f, \tag{2.1.1}$$

onde $f = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}$ e $\omega^2 = gk \tanh kh$.

Da equação de Laplace, temos que $\eta(x, y)$ satisfaz a equação de Helmholtz bidimensional

$$\nabla^2 \eta + k^2 \eta = 0,$$

que descreve difração.

Para fundos lentamente variáveis, pode-se imaginar que as equações acima continuam válidas em certo sentido, para valores locais de k e h. Esta foi a idéia usada por Berkhoff [3] para obter uma aproximação para a solução do problema com um fundo de declividade suave. A equação obtida é formulada para $\eta(x, y)$ e denomina-se *equação de declividade suave*. Faremos a seguir uma dedução detalhada desta equação seguindo os argumentos de Smith e Sprinks [38] (Veja também Mei [24]).

Usaremos a condição cinemática para um fundo estacionário, mas variável, ou seja, a condição (1.2.13). Assim, as equações para ϕ podem ser escritas como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \nabla^2 \phi = 0, \quad -h \leqslant z \leqslant 0, \quad \text{com } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{2.1.2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g}\phi = 0, \quad z = 0, \tag{2.1.3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\nabla h \cdot \nabla \phi, \quad z = -h, \tag{2.1.4}$$

onde f satisfaz o problema

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - k^2 f = 0, \quad -h < z < 0, \tag{2.1.5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} = 0, \quad z = 0, \tag{2.1.6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \tag{2.1.7}$$

A idéia será integrar sobre a profundidade, ou seja, considerar uma média na variável z. Assim, considere a seguinte forma da fórmula de Green:

$$\int_{-h}^{0}\left[\psi_o\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z^2}-k^2\psi_1\right)-\psi_1\left(\frac{\partial^2\psi_o}{\partial z}-k^2\psi_o\right)\right]dz$$
$$=\left[\psi_o\frac{\partial\psi_1}{\partial z}-\psi_1\frac{\partial\psi_o}{\partial z}\right]_{-h}^{0}. \quad (2.1.8)$$

Expandindo o lado esquerdo desta fórmula, é fácil ver que

$$\int_{-h}^{0}\psi_o\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}-\psi_1\frac{\partial^2\psi_o}{\partial z^2}dz=\left[\psi_o\frac{\partial\psi_1}{\partial z}-\psi_1\frac{\partial\psi_o}{\partial z}\right]_{-h}^{0}.$$

Aplicando este resulado para ϕ e f, temos

$$\int_{-h}^{0}\phi\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}-f\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\left[\phi\frac{\partial f}{\partial z}-f\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]_{-h}^{0}. \quad (2.1.9)$$

De (2.1.2) e (2.1.5), teremos

$$\int_{-h}^{0}(k^2\phi f+f\nabla^2\phi)dz=\left[\phi\frac{\partial f}{\partial z}-f\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]_{-h}^{0}$$
$$=\left(\phi\frac{\partial f}{\partial z}-f\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0}-\left(\phi\frac{\partial f}{\partial z}-f\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=-h}. \quad (2.1.10)$$

Usando (2.1.4), obtemos

$$\int_{-h}^{0}(k^2\phi f+f\nabla^2\phi)dz=\left(\phi\frac{\partial f}{\partial z}-f\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0}-\left(\phi\frac{\partial f}{\partial z}+f\nabla h\cdot\nabla\phi\right)_{z=-h}$$

e com (2.1.7),

$$\int_{-h}^{0}(k^2\phi f+f\nabla^2\phi)dz=\left(\phi\frac{\partial f}{\partial z}-f\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0}-(f\nabla h\cdot\nabla\phi)_{z=-h}. \quad (2.1.11)$$

Pela definição de f, pode-se calcular sua derivada explicitamente e obter

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-k\frac{\operatorname{senh}k(z+h)}{\cosh kh}.$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z=0} &= -k \tanh kh && (2.1.12)\\
&= -\frac{\omega^2}{g}, \quad \text{pela relação de dispersão.} && (2.1.13)
\end{aligned}
$$

Substituindo este resultado em (2.1.9), obtemos

$$
\int_{-h}^{0} \left(k^2 \phi f + f \nabla^2 \phi\right) dz = \left(-\phi \frac{\omega^2}{g} - f \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0} - \left(f \nabla h \cdot \nabla \phi\right)_{z=-h}.
$$

Usando o fato que $f(0) = 1$ e (2.1.3), temos

$$
\begin{aligned}
\int_{-h}^{0} (k^2 \phi f + f \nabla^2 \phi) dz &= \left(\phi \frac{-\omega^2}{g} + \frac{\omega^2}{g} \phi\right)_{z=0} - \left(f \nabla h \cdot \nabla \phi\right)_{z=-h}\\
&= -(f \nabla h \cdot \nabla \phi)_{z=-h}. && (2.1.14)
\end{aligned}
$$

Note agora que de (2.1.1), diferenciando pela regra do produto, temos o gradiente e o laplaciano de ϕ, expressos como

$$
\begin{aligned}
\nabla \phi &= \frac{-ig}{\omega} (f \nabla \eta + \eta \nabla f)\\
&= \frac{-ig}{\omega} \left(f \nabla \eta + \eta \frac{\partial f}{\partial h} \nabla h\right)
\end{aligned}
$$

e

$$
\nabla^2 \phi = \frac{-ig}{\omega} \left(f \nabla^2 \eta + 2 \frac{\partial f}{\partial h} \nabla \eta \cdot \nabla h + \eta \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} (\nabla h)^2 + \eta \frac{\partial f}{\partial h} \nabla^2 h\right)
$$

Substituindo em (2.1.14) podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&\int_{-h}^{0} k^2 \left(-\frac{ig}{\omega} f \eta\right) f\\
&+ \left(f^2 \nabla^2 \eta + 2f \frac{\partial f}{\partial h} \nabla \eta \cdot \nabla h + \eta f \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} (\nabla h)^2 + \eta f \frac{\partial f}{\partial h} \nabla^2 h\right) \frac{-ig}{\omega} dz\\
&\qquad = -\left(f \nabla h \cdot \left(-\frac{ig}{\omega} \left(f \nabla \eta + \eta \frac{\partial f}{\partial h} \nabla h\right)\right)\right)_{z=-h}.
\end{aligned}
$$

Como $\frac{-ig}{\omega}$ é comum aos dois lados da equação, teremos

$$\int_{-h}^{0} f^2\nabla^2\eta + \int_{-h}^{0} 2f\frac{\partial f}{\partial h}\nabla\eta\cdot\nabla h\ dz + (f\nabla h\cdot f\nabla\eta)_{z=-h} + \int_{-h}^{0} k^2 f^2\eta$$
$$= -\left(f\frac{\partial f}{\partial h}\right)_{z=-h}\eta(\nabla h)^2 - \int_{-h}^{0}\eta f\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}(\nabla h)^2 - \int_{-h}^{0}\eta f\frac{\partial f}{\partial h}\nabla^2 h. \tag{2.1.15}$$

Usando agora a regra de Leibniz e a regra do produto, obtemos

$$\nabla\cdot\int_{-h}^{0} f^2\nabla\eta dz + \int_{-h}^{0} k^2 f^2\eta\, dz$$
$$= -\left(f\frac{\partial f}{\partial h}\right)_{z=-h}\eta(\nabla h)^2 - \int_{-h}^{0}\eta f\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}(\nabla h)^2 dz - \int_{-h}^{0}\eta f\frac{\partial f}{\partial h}\nabla^2 h\, dz. \tag{2.1.16}$$

Usando agora a hipótese de declividade suave do fundo em termos de $\frac{\nabla h}{kh} = O(\mu) \ll 1$ e $\frac{\nabla\eta}{k\eta} = O(1) \ll 1$, os termos do lado direito de (2.1.16) são $O(\mu^2)$ e podem ser omitidos. Assim,

$$\nabla\cdot\int_{-h}^{0} f^2\nabla\eta\, dz + \int_{-h}^{0} k^2 f^2\eta\, dz = 0. \tag{2.1.17}$$

As integrais na equação acima podem ser expressas em termos de funções elementares. Para ver isto, note que

$$\int_{-h}^{0} f^2\nabla\eta\ dz = \int_{-h}^{0}\left(\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\right)^2\nabla\eta\ dz \tag{2.1.18}$$
$$= \frac{\nabla\eta}{\cosh^2 kh}\int_{-h}^{0}\cosh^2(kz+kh)\, dz. \tag{2.1.19}$$

Usando a identidade

$$\int_{0}^{kh}\cosh^2\xi\, d\xi = \frac{1}{4}(\operatorname{senh} 2kh + 2kh)$$

temos que

$$\int_{-h}^{0} \cosh^2(kz+kh)dz = \frac{1}{4k}(\operatorname{senh} 2kh + 2kh)\left(\frac{1}{k}\right)$$
$$= \frac{\operatorname{senh} 2kh}{2k}\frac{1}{2}\left(1+\frac{2kh}{\operatorname{senh} 2kh}\right)$$
$$= \frac{2\operatorname{senh} kh \cosh kh}{2k}\frac{1}{2}\left(1+\frac{2kh}{\operatorname{senh} 2kh}\right), \quad (2.1.20)$$

onde a relação $\operatorname{senh} 2kh = 2 \operatorname{senh} kh \cosh kh$ foi usada. Logo,

$$\frac{\nabla\eta}{\cosh^2 kh}\int_{-h}^{0} \cosh^2(kz+kh)\, dz = b\nabla\eta\frac{1}{g}, \quad (2.1.21)$$

onde $b = \frac{gh \tanh kh}{kh}\frac{1}{2}\left(1+\frac{2kh}{\operatorname{senh} 2kh}\right) = CC_g$ e C e C_g são as velocidades de fase e de grupo, definidas em (1.3.26) e (1.4.48).

Note agora que

$$\int_{-h}^{0} k^2 f^2 \eta\, dz = \frac{k^2\eta}{(\cosh kh)^2}\int_{-h}^{0} \cosh^2(kz+kh)\, dz$$

e por (2.1.20),

$$\frac{k^2\eta}{(\cosh kh)^2}\int_{-h}^{0} \cosh^2(kz+kh)\, dz = \omega^2 c\eta\frac{1}{g}, \quad (2.1.22)$$

onde $c = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2kh}{\operatorname{senh} 2kh}\right) = \frac{C_g}{C}$. Assim, por (2.1.21) e (2.1.22), cancelando o fator $\frac{1}{g}$, a equação (2.1.17) pode ser escrita como

$$\nabla\cdot(b\nabla\eta) + \omega^2 c\eta = 0. \quad (2.1.23)$$

A equação (2.1.23) é conhecida como a *equação de declividade suave*. No caso particular de um fundo h constante, (2.1.23) se reduz à equação de Helmholtz. Para fundos variáveis mas pequenos suficientementes tais que $kh \ll 1$, a equação de declividade suave se reduz a

$$\nabla\cdot(h\nabla\eta) + \frac{\omega^2}{g}\eta = 0.$$

Na dedução acima, se não desprezarmos os termos do lado direto de (2.1.16), obtemos uma equação que inclui termos de $O(\nabla h)^2$ e $O(\nabla^2 h)$. Explicitamente, teremos

$$\nabla \cdot \frac{b}{g}\nabla\eta + (\omega^2 c/g + r)\eta = 0, \tag{2.1.24}$$

onde

$$r = \int_{-h}^{0} f\nabla^2 f\, dz + \nabla h \cdot (f\nabla f)_{z=-h}.$$

A equação (2.1.24) foi deduzida e denominada de *equação de declividade suave modificada* por Chamberlain e Porter [4].

2.2 O Problema de Difração e Espalhamento por Obstáculos

Considere o problema de ondas linearizado ((1.1.6), (1.3.18) e (1.2.14)), mas agora com um obstáculo com *superfície molhada* denotada por S. Este objeto pode estar flutuante, parcialmente submerso ou totalmente submerso. Em qualquer caso, a sua superfície dita molhada é a parte da sua superfície total que está abaixo da água, ou seja, a parte com pontos (x, y, z), tais que $z < 0$. A unicidade da solução para o problema linear de ondas em água na presença de um corpo é uma questão ainda aberta e objeto de vários artigos de pesquisa recentes. Basicamente, se procura relaxar as condições sobre S para que haja unicidade. Observamos apenas aqui que as condições de que S seja limitado e que nenhuma reta vertical corte S em mais de um ponto são suficientes para garantir a unicidade do problema a ser descrito em detalhes a seguir.

O movimento da água será descrito pelo potencial de velocidade $\Phi(x, y, z, t)$ que satisfaz a equação de Laplace e as condições (1.3.18) e (1.2.14). Assumiremos movimentos harmônicos simples no tempo com frequência ω. Ou seja, escrevemos

$$\Phi(x, y, z, t) = \mathrm{Re}\{\phi(x, y, z)e^{i\omega t}\},$$

onde ϕ é chamado também de potencial ou de *função onda*. Usaremos a seguir fortemente a linearidade do problema, somando pontenciais que satisfazem as equações e condições de contorno lineares. Assim ϕ é fatorado como

$$\phi = \phi_{inc} + \phi_S. \tag{2.2.25}$$

Aqui, Re{ $\phi_{inc}e^{i\omega t}$} representa a onda incidente, satisfazendo (1.1.6), (1.2.14) e (1.3.18). Sabemos, pelo capítulo anterior, que (1.3.20), com $\Gamma(z)$ dada por (1.3.21), satisfaz todas estas condições e, portanto, temos então já conhecida uma onda incidente para o problema de difração. O pontecial ϕ_S dá conta das ondas causadas pela presença do obstáculo. Escrevemos $\phi_S = \phi_{esp}+\phi_{rad}$, com ϕ_{esp} devido ao movimento de espalhamento das ondas pelo obstáculo e ϕ_{rad}, à radiação das ondas causadas pelo movimento do obstáculo. Usando a linearidade do problema e, portanto, a combinação linear dos potenciais, teremos que ϕ_{esp} é independente dos movimentos do obstáculo. Consideraremos assim que o corpo está mantido fixo e portanto, $\phi_{rad} \equiv 0$, para na seção 2.3 tratar o problema de radiação separadamente. Com esta hipótese, a condição contorno apropriada para S fixa é

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \qquad \text{em } S. \tag{2.2.26}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial \phi_{esp}}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_{inc}}{\partial n} \qquad \text{em } S, \tag{2.2.27}$$

dita *condição de contorno no obstáclo*. Para Φ satisfazer a condição de superfície livre, precisamos que ϕ_S também a satisfaça. Então, para cada valor de t, segue de (1.3.18) que

$$\frac{\partial \phi_S}{\partial z} - \lambda \phi_S = 0, \qquad \text{em } z = 0, \tag{2.2.28}$$

onde $\lambda = \frac{\omega^2}{g}$

2.2.1 Condição de Radiação

Como S é limitado e ϕ_S existe por causa da presença do obstáculo, é razoavel que *no infinito*, este potencial se comporte como ondas radiando para fora do corpo. Assim, fisicamente, notamos que as especificações de nosso problema podem estar incompletas. Não chega a ser surpreendente portanto, percebemos que se adicionarmos uma constante qualquer ao potencial ϕ teremos outras soluções satisfazendo todas as condições de contorno acima, tornando o problema mal-posto. Contudo, gostaríamos de tratar um problema com uma única solução.

Felizmente, adotando uma condição adicional, conquistamos os objetivos de satisfazer os requerimentos físicos e matemáticos acima expostos. Esta condição, introduzida por Stoker [40], se traduz matematicamente através da *condição de radiação*, escrita como

$$\lim_{\rho\to\infty} \iint\limits_{C_\rho} \left| \frac{\partial \phi_S}{\partial \rho} - ic\phi_S \right|^2 dS = 0, \tag{2.2.29}$$

onde c é uma constante e C_ρ denota o cilindro

$$\sqrt{x^2+y^2} = \rho, \qquad -h \leq z \leq 0.$$

A condição acima é uma forma fraca da conhecida condição de radiação de Sommerfeld, dada por

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho^{1/2} \Big(\frac{\partial \phi_S}{\partial \rho} - ic\phi_S \Big) = 0. \tag{2.2.30}$$

Observe também que se

$$\frac{\partial \phi_S}{\partial r} - ic\phi_S = O(r^{-3/2}) \tag{2.2.31}$$

ou

$$\phi_S \sim e^{-i\rho c}/\sqrt{\rho}, \qquad \text{quando } \rho \to \infty, \tag{2.2.32}$$

então a condição (2.2.30) é satisfeita.

Portanto, tanto (2.2.30) como (2.2.31) ou ainda (2.2.32) implicam (2.2.29). Esquematicamente, temos a relação: (2.2.32) $\Rightarrow$ (2.2.31) $\Rightarrow$ (2.2.30) $\Rightarrow$ (2.2.29). Desta forma, estas duas últimas condições, individualmente, são suficientes para garantir a condição de radiação.

2.2.2 Identidade de Green

O problema de difração cuja solução estamos procurando é definido por (1.1.6), (1.2.14), (2.2.27), (2.2.28) e (2.2.29).

Seja D o nosso domínio de interesse, ou seja, os pontos onde está a água e limitado por C_ρ. Denote por ∂D o contorno deste domínio, que pode ser decomposto como

$$\partial D = S + C_\rho + \mathcal{F} + \mathcal{B},$$

onde $\mathcal{F}$ denota a superfície livre e $\mathcal{B}$ representa o fundo dado por $z = h$.

Pela segunda identidade de Green, uma função ϕ duas vezes continuamente diferenciável em D pode ser representada por

$$\int_D (\phi \Delta G - G\Delta\phi)\, dq = \int_{\partial D} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\sigma, \tag{2.2.33}$$

onde n é o vetor normal unitário e G é uma função *quase sempre* regular em D. Ou seja, G pode ter singularidades em pontos isolados de D e neste caso teremos que reinterpretar a integral do lado direito de (2.2.33), caso esta não esteja mais definida no sentido de Riemann. Veremos que podemos optar por uma função G, chamada de função de Green de superfície livre, que terá papel fundamental para o tratamento da difração de ondas lineares. Com esta função de Green poderemos usar a fórmula (2.2.33) e obter a solução para o problema de difração.

2.2.3 A Função de Green de Superfície Livre

Denotemos $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ e $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$. A função de Green para ondas em água de profundidade h é uma função $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ regular para

$$-h \leq z \leq 0, \qquad -h \leq \zeta \leq 0, \qquad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\xi},$$

tal que

$$G - \frac{1}{R} \qquad \text{é regular em } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}, \tag{2.2.34}$$

onde $R = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}\|$ e satisfazendo todas as condições do problema de difração, com exceção de (2.2.26).

John [17] mostrou que existe uma função satisfazendo as condições impostas acima para G e apresentou sua forma explícita por

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} G_n, \tag{2.2.35}$$

com

$$G_n = 2\pi i B_n \cosh k_n(z + h) \cosh k_n(\zeta + h) H_0^{(1)}(k_n r), \tag{2.2.36}$$

onde $H_0^{(1)}$ é a função de Hankel do primeiro tipo de ordem 0, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$,

$$B_n = \frac{k_n^2 - \lambda^2}{\lambda + hk_n^2 - h\lambda^2},$$

e k_n são as raízes da equação

$$k_n \text{senh}\, k_n h = \lambda \cosh k_n h. \tag{2.2.37}$$

Note que (2.2.37) garante que G satisfaça a condição de superfície livre. Seja k_0 a raiz positiva real de (2.2.37) e $k_1, k_2, \ldots$, as raízes no eixo positivo imaginário em ordem crescente de valor absoluto.

Para verificar que G de fato satisfaz a condição de radiação, consideremos o comportamento assintótico da função de Hankel. Sabe-se que quando $r \to \infty$,

$$H_0^{(1)}(ix) = O(e^{-x} r^{-1/2}), \tag{2.2.38}$$

$$H_0^{(1)}(x) = \frac{e^{i(x-\pi/4)}}{\sqrt{\pi x/2}} + O(x^{-3/2}). \tag{2.2.39}$$

Como $k_1 r, k_2 r, \ldots$ são da forma ix, então quando $r \to \infty$, usando (2.2.38),

$$\begin{aligned} G &= G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} O(e^{-|k_n| r} r^{-1/2}) \\ &= G_0 + O(e^{-|k_1| r} r^{-1/2}), \qquad \text{pois} \quad |k_n| < |k_n + 1|, \\ &= G_0 + O(r^{-3/2}), \end{aligned}$$

pois $e^{-ar} r$ é limitado quando $r \to \infty$, para qualquer $a > 0$. Segue, de (2.2.39), que

$$\begin{aligned} G = {} & \frac{2\pi i B_0}{\sqrt{(\pi/2) k_0 r}} \cosh k_0(z+h) \cosh k_0(\zeta + h) e^{i(k_0 r - \pi/4)} \\ & + O(r^{-3/2}), \qquad r \to \infty. \end{aligned} \tag{2.2.40}$$

Diferenciar (2.2.40) não altera a ordem de magnitude do erro, pois as fórmulas (2.2.38, 2.2.39) podem ser usadas para as derivadas de $H_0^{(1)}$. Assim, obtemos

$$\frac{\partial G}{\partial r} - ik_0 G = O(r^{-3/2}). \tag{2.2.41}$$

Observamos agora que (2.2.41) é válida uniformemente em z e ζ. Adicionalmente, fazendo $\xi = \eta = 0$ vemos que G satisfaz a condição de radiação (2.2.29).

Pode-se mostrar (veja exercício 2.4) que a função dada por (2.2.35) é a única função de Green de superfície livre.

Para o caso de águas profundas ($h \to \infty$), uma forma especializada da função de Green existe e é dada por

$$G_\infty(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = [r^2 + (z-\zeta)^2]^{-1/2} + \int_0^\infty \frac{\mu + \lambda}{\mu - \lambda}\, e^{\mu(z+\zeta)}\, J_0(kr)\, d\mu, \tag{2.2.42}$$

onde J_0 é a função de Bessel do primeiro tipo e ordem zero. Esta função satisfaz as mesmas condições que G, com exceção de (1.2.14). Em vez, temos

$$G_\infty \to 0, \quad \text{quando } z \to \infty. \tag{2.2.43}$$

Versões da função de Green para problemas de difração bidimensionais também são disponíveis.

2.2.4 Solução

Podemos agora usar os resultados das duas últimas seções para escrever uma forma mais enxuta da solução do problema de difração.

Já vimos que a função de Green de superfície livre se comporta como $1/R$ em $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$, que é a *solução fundamental* da equação de Laplace. Como $G - 1/R$ é regular, temos então que

$$\Delta G = \delta_{\boldsymbol{\xi}}, \tag{2.2.44}$$

onde δ é a distribuição delta de Dirac. Substituindo (2.2.44) na segunda identidade de Green (2.2.33) para ϕ_S, temos

$$\phi_S(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left(\phi_S(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi}) - G(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \phi_S}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}) \right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}. \tag{2.2.45}$$

Como ϕ_S e G satisfazem a condição de fundo (1.2.14) e de superfície livre (2.2.28), as contribuições em (2.2.45) das integrais sobre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{B}$ se anulam. Além disso, diferenciando em relação aos argumentos x, y, z, vemos que não apenas G mas $\frac{\partial G}{\partial r}$ também satisfaz a condição (2.2.41). Logo a integral sobre o cilindro imaginário C_ρ, onde $\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r}$, tende a zero quando $\rho \to \infty$. Logo

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{C_\rho} \left(\phi_S(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) - G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \phi_S}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}) \right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = 0. \quad (2.2.46)$$

Assim, na água, como $\phi_S = \lim_{\rho\to\infty} \phi_S$, temos

$$\phi_S(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S} \left(\phi_S(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) - G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \phi_S}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}) \right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (2.2.47)$$

Diferenciando sob o símbolo da integral em (2.2.47), como G e $\frac{\partial G}{\partial r}$ satisfazem (2.2.41), vemos que ϕ_S satisfaz também a condição de radiação.

A expressão (2.2.47) é uma fórmula integral fornecendo a solução ϕ_S para todos os pontos $\boldsymbol{x}$ da água. A integral nesta fórmula é apenas sobre os pontos da superfície molhada S do obstáculo. Como G e sua derivada são conhecidos e $\frac{\partial \phi_S}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_{inc}}{\partial n}$ é dado, a única incógnita no integrando é

$$\phi_S(\boldsymbol{\xi}), \qquad \text{para} \quad \boldsymbol{\xi} \in S.$$

Portanto, se encontrarmos ϕ na superfície molhada do obstáculo, usando a fórmula (2.2.47) teremos

$$\phi_S(\boldsymbol{x}), \qquad \text{para todo} \quad \boldsymbol{x} \in D,$$

que é a solução procurada.

Fazendo $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p} \in S$ em (2.2.47), teríamos ϕ_S definida em S, em ambos os lados desta fórmula, transformando-a assim em uma equação. De fato, este limite pode ser tomado com a cautela de observar que o então chamado *potencial de camada dupla*

$$\mu(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S} \left(\phi_S(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) \right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$$

é descontínuo em $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$. Precisamente, temos o *salto*:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \mu(\boldsymbol{x}) = \mu(\boldsymbol{p}) - \frac{1}{2}\phi_S(\boldsymbol{p}). \quad (2.2.48)$$

Esta propriedade é uma consequência do seguinte resultado clássico da teoria do potencial:

$$\int_S \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{4\pi R} \right) d\sigma = -\frac{1}{2}, \qquad \boldsymbol{p} \in S.$$

Agora, à luz do resultado (2.2.48), de (2.2.47), obtemos

$$\frac{1}{2}\phi_S(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{4\pi}\int_S \left(\phi_S(\boldsymbol{p})\frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{p};\boldsymbol{\xi}) - G(\boldsymbol{p};\boldsymbol{\xi})\frac{\partial \phi_S}{\partial n}(\boldsymbol{p})\right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (2.2.49)$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2}\phi_S(\boldsymbol{p}) = f(\boldsymbol{p}) + \frac{1}{4\pi}\int_S \phi_S(\boldsymbol{p})\frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{p};\boldsymbol{\xi})\, d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}, \qquad \boldsymbol{p} \in S, \quad (2.2.50)$$

onde

$$f(p) = \frac{1}{4\pi}\int_S G(\boldsymbol{p};\boldsymbol{\xi})\frac{\partial \phi_S}{\partial n}(\boldsymbol{p})\, d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

A expressão (2.2.50) é uma equação integral de Fredholm do segundo tipo para ϕ_S em S. A parte do integrando $\frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{p};\boldsymbol{\xi})$ é dita núcleo da equação integral.

A solução do problema de difração, onde o obstáculo é mantido fixo, é dada por (2.2.47), onde $\phi_S(\boldsymbol{\xi})$ é obtido resolvendo (2.2.50), que pode ser feito por métodos numéricos. Daremos mais informações sobre tais métodos na seção 2.7.

2.2.5 Frequências Irregulares

Na seção anterior reformulamos o problema de difração, dado por equações diferenciais, em termos de uma fórmula e equação integrais. Podemos agora nos questionar se a equação integral encontrada é unicamente solúvel.

Em seu trabalho original, John [17] mostrou que existem valores de $\lambda = \frac{\omega^2}{g}$ tais que

$$\frac{1}{2}\phi_S(\boldsymbol{p}) - \frac{1}{4\pi}\int_S \phi_S(\boldsymbol{p})\frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{p};\boldsymbol{\xi})\, d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = 0, \qquad \boldsymbol{p} \in S, \qquad (2.2.51)$$

tem soluções não triviais. Isso implica que não há unicidade para (2.2.50) para tais valores de λ. Este valores são ditos *frequências irregulares*, nome este que destaca a relação de λ com a frequência ω, presente na condição de superfície livre (2.2.28) e o caráter irregular, *defeituoso* do problema integral para estes valores singulares. Note também que λ é o número de onda para o problema linear em águas profundas.

Felizmente existem maneiras de modificar a equação integral para reconquistar a unicidade da solução do problema de difração. Um método consiste com modificar o domínio da integral em (2.2.50) enquanto outra opção envolve a modificação do núcleo da equação integral, mantendo o domínio.

Para especificar o primeiro método, seja $\mathcal{F}_S$ a interseção de $\mathcal{F}$ com o obstáculo. O teorema a seguir, demonstrado por Kleinman [18], diz que se resolvermos em vez da equação integral (2.2.50), a equação

$$\frac{1}{2}\phi_S(\boldsymbol{p}) = f(\boldsymbol{p}) + \frac{1}{4\pi}\int_{S\cup\mathcal{F}_S} \phi_S(\boldsymbol{p})\frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{p};\boldsymbol{\xi})\, d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}, \qquad \boldsymbol{p}\in S\cup\mathcal{F}_S, \tag{2.2.52}$$

teremos unicidade para a solução.

Teorema (Kleinman) *Se ϕ_S é uma solução do problema de difração dado por (1.1.6), (1.2.14), (2.2.27), (2.2.28) e (2.2.29), então em S, $\phi_S(\boldsymbol{p}) = \psi(\boldsymbol{p})$, para $\boldsymbol{p}\in S$, onde ψ satisfaz a equação integral (2.2.52) e esta equação tem, no máximo, uma solução.*

2.2.6 Amplitude de Espalhamento

A amplitude de espalhamento representa as variações direcionais das ondas que são espalhadas pelo obstáculo e que se encontram longe deste, no chamado *far field*. É natural portanto que comecemos nossa análise pela expressão (2.2.40), que representa o comportamento assintótico de G para r grande.

Usando as coordenadas polares

$$(x,y) = r_0(\cos\theta, \mathrm{sen}\theta) \qquad (\xi,\eta) = \rho_0(\cos\varphi, \mathrm{sen}\varphi)$$

e aproximando r por

$$r = \sqrt{r_0^2+\rho_0^2-2r_0\rho_0\cos(\theta-\varphi)} \approx r_0 - \rho_0\cos(\theta-\varphi),$$

para $r_0 \gg \rho_0$, obtemos de (2.2.40) que

$$\begin{aligned} G &\approx \frac{2\pi i B_0}{\sqrt{(\pi/2)k_0 r_0}}\cosh k_0(z+h)\cosh k_0(\zeta+h) \\ &\times\ e^{i(k_0 r_0 - \pi/4 - ik_0\rho_0\cos(\theta-\varphi))}. \end{aligned}$$

Substituindo em (2.2.47), obtemos

$$\begin{aligned}\phi_{esp}(\boldsymbol{x}) &\approx B_0\, i\sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r_0}}\cosh k_0(z+h)e^{i(k_0r_0-\pi/4)} \\ &\times H\left(\cosh k_0(z_0+h)e^{-ik_0\rho_0\cos(\theta-\varphi)}\right),\end{aligned}$$

onde H é o funcional de Kochin, definido por

$$H(f(\boldsymbol{\xi})) = \int_S \left(\phi_{esp}\frac{\partial f}{\partial n} - \frac{\partial \phi_{esp}}{\partial n} f\right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Assim, a amplitude de espalhamento é definida como

$$\mathcal{D}(\theta) = B_0\, i\, e^{-i\pi/4} H\left(\cosh k_0(z_0+h)e^{-ik_0\rho_0\cos(\theta-\varphi)}\right) \tag{2.2.53}$$

e satisfaz

$$\phi_{esp}(\boldsymbol{x}) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r_0}}\,\mathcal{D}(\theta)\cosh k_0(z+h)\; e^{ik_0 r_0} \qquad \text{quando } r_0 \to \infty.$$

A expressão (2.2.53) nos diz, entre outras coisas, que conhecendo ϕ_{esp} apenas sobre o obstáculo, podemos calcular a amplitude de espalhamento.

Podemos definir também a *seção reta de espalhamento* por

$$\varrho(\theta) = |\mathcal{D}(\theta)|^2$$

e a *seção reta de espalhamento total* por

$$Q = \int_0^{2\pi} \varrho(\theta)\, d\theta.$$

Outros parâmetros de interesse em engenharia oceânica que podem ser obtidos a partir de ϕ_{esp} no obstáculo são as forças de excitação induzidas pelas ondas no obstáculo. Mencionaremos novamente estas forças, dando suas definições, na próxima seção.

2.3 O Problema de Radiação

Suponha agora que o obstáculo se movimenta com seis graus de liberdade. Sejam ξ_1, ξ_2, ξ_3 os deslocamentos de translação do obstáculo ao longo dos eixos x, y e z e ξ_4, ξ_5, ξ_6 os movimentos de rotação do obstáculo em torno dos mesmos eixos. Chamamos estes seis movimentos de *surge, sway, heave, roll, pitch* e *yaw*, respectivamente. O movimento de um ponto $\boldsymbol{s}$, orginalmente em $\boldsymbol{r_0} = (x, y, z)$ no obstáculo, assumido rígido, pode ser escrito como

$$\boldsymbol{s} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_0}, \tag{2.3.54}$$

onde $\times$ denota produto vetorial e $\boldsymbol{\omega} = (\xi_4, \xi_5, \xi_6)$.

Assumindo estes movimentos como harmônicos simples no tempo com frequência ω, definimos potenciais ϕ_i, $j = 1, 2, \ldots, 6$, tais que

$$\phi_{rad} = \sum_{j=1}^{6} \xi_j \phi_j(x, y, z) \tag{2.3.55}$$

represente o potencial de velocidades devido às velocidades

$$U_j(t) = \mathrm{Re}\{(i\omega\xi_j e^{i\omega t}\}, \quad j = 1, 2, \ldots, 6,$$

induzidas pelos seis movimentos do obstáculo. Seguem de (2.3.54) e (2.3.55) então, as seguintes condições de contorno S:

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = i\,\omega\, n_j, \quad j = 1, 2, 3, \tag{2.3.56}$$

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = i\,\omega\,(\boldsymbol{r_0} \times \boldsymbol{n})_{j-3}, \quad j = 4, 5, 6, \tag{2.3.57}$$

onde $\boldsymbol{n}$ é o vetor normal unitário interno em S.

A função $\mathrm{Re}\{\phi_j e^{i\omega t}\}$ representa o potencial de velocidade devido ao modo de movimento de obstáculo rígido j com amplitude 1. As condições (2.3.56) em conjunto com a equação de Laplace, a condição de contorno de fundo (1.2.14), a condição de superfície livre (2.2.28) e a condição de radiação (2.2.29) definem problemas de radiação. Suas soluções descrevem as ondas que se propagam devido aos movimentos executados pelo obstáculo. Quantidades integradas dos potenciais ϕ_j fornecem forças e momentos sobre o obstáculo, como veremos na próxima seção.

2.4 Forças e Momentos

O conhecimento das forças e momentos a que são submetidos corpos flutuantes e/ou submersos na presença de ondas oceânicas é um tópico de grande interesse, principalmente para engenheiros oceânicos e arquitetos navais. O tratamento matemático feito neste capítulo nos coloca em posição de agora avaliar e calcular os efeitos sofridos por estes corpos. Uma hipótese fundamental que fizemos foi que a superfície molhada do obstáculo é limitada, ou seja, não se estende indefinidamente em uma ou mais direção. Portanto, aqui o obstáculo pode representar por exemplo um navio, uma plataforma de petróleo, componentes de pontes, ou estruturas menos ortodoxas hoje existentes, como aeroportos flutuantes, bases para lançamento de foguetes e bases militares flutuantes.

Os resultados baseados em ondas planas progressivas, oriundas da teoria linear não são desprovidos de interesse físico. Contudo, pode-se questionar a sua utilidade em situações onde o estado do mar é extremamente irregular e pouco parecido com uma forma senoidal. Contudo, como veremos no capítulo 4, a descrição de uma superfície oceânica irregular pode ser feita somando soluções do problema linear.

Os vetores força F e momento M atuando no obstáculo devido à pressão P exercida pela água podem ser escritos como

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \iint_S P\,\boldsymbol{n}\,d\sigma, && (2.4.58)\\
\boldsymbol{M} &= \iint_S P\,(\boldsymbol{r_0}\times\boldsymbol{n})\,d\sigma. && (2.4.59)
\end{aligned}
$$

Da equação de Bernoulli (1.1.8), e de (2.2.25), desprezando termos não-lineares, temos a seguinte fórmula para a pressão:

$$
\begin{aligned}
P &= -\rho\left(gz+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\\
&= -\rho g z-\rho\,\mathrm{Re}\left\{(\phi_{inc}+\phi_{esp}+\phi_{rad})\,iwe^{i\omega t}\right\}.
\end{aligned}
$$

Portanto, de (2.4.58, 2.4.59) e (2.3.55), segue que os seis componentes dos vetores força e momento podem ser escritos como

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{M} \end{bmatrix} &= -\rho\, g \iint\limits_S \begin{bmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{r_0} \times \boldsymbol{n} \end{bmatrix} z\, d\sigma \\
&- \rho \operatorname{Re} i\,\omega\, e^{i\omega t} \iint\limits_S \begin{bmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{r_0} \times \boldsymbol{n} \end{bmatrix} (\phi_{inc} + \phi_{esp})\, d\sigma. \\
&- \rho \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{6} i\,\omega\, \xi_j e^{i\omega t} \iint\limits_S \begin{bmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{r_0} \times \boldsymbol{n} \end{bmatrix} \phi_j\, d\sigma. \qquad (2.4.60)
\end{aligned}
$$

As integrais em (2.4.60) representam as forças e momentos lineares atuando no obstáculo. A primeira integral do lado direito de (2.4.60) é a componente hidrostática enquanto que a segunda integral é a força e momento de excitação induzidos pela onda incidente. A última integral fornece a carga hidrodinâmica devida aos modos de movimento do obstáculo e pode ser interpretada em termos da *massa adicional* e *amortecimento*, a serem especificados a seguir.

Observe que as forças e momentos podem ser calculadas uma vez conhecidos os potenciais de velocidade apenas em S; não há necessidade de conhecê-los no domínio da água.

2.5 Massa Adicional e Amortecimento de Radiação

Usando as condições de contorno (2.3.56) em (2.4.60), podemos escrever a componente i da parte hidrodinâmica de $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{M})$ como

$$\boldsymbol{F}_i = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{6} \xi_j e^{i\omega t} f_{ij} \right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, 6, \qquad (2.5.61)$$

onde

$$f_{ij} = -\rho \iint\limits_S \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \phi_j\, d\sigma \qquad (2.5.62)$$

é uma função complexa representando a força na direção i devido ao modo de movimento com amplitude 1 na direção j. Escrevendo esta função como

$$f_{ij} = \omega^2 \mathcal{A}_{ij} - i\,\omega \mathcal{B}_{ij}, \qquad (2.5.63)$$

definimos a matrix de *massa adicional* e a matrix de *amortecimento de radiação* como $\mathcal{A}_{ij}$ e $\mathcal{B}_{ij}$, respectivamente. Existe um total de 36 valores de massa adicional e 36 amortecimentos. Estes coeficientes são funções da frequência ω, da forma e das seis velocidades U_j do obstáculo assim como da profundidade da água e do contorno do domínio.

Para trazer mais clareza às interpretações físicas de $\mathcal{A}_{ij}$ e $\mathcal{B}_{ij}$, note que podemos também expressar a força (2.5.61) como

$$\boldsymbol{F}_i = -\sum_{j=1}^{6}\left(\mathcal{A}_{ij}\frac{dU_j}{dt} + \mathcal{B}_{ij}U_j\right). \tag{2.5.64}$$

O termo $\mathcal{A}_{ij}$ é conhecido como massa adicional visto que representa a força proporcional à aceleração $\frac{dU_j}{dt}$ do modo de movimento j do obstáculo ao passo que a parte de F_i proporcional à velocidade do mesmo modo favorece a nomenclatura de amortecimento para $\mathcal{B}_{ij}$.

2.6 Corpos Finos Submersos e Integrais Hipersingulares

Poderíamos agora nos perguntar o que ocorreria com a formulação integral do problema de difração se o obstáculo tiver uma espessura muito pequena. Tão pequena que aproximá-lo por um corpo sem volume seja apropriado. Considere ainda o obstáculo submerso. O que aconteceria com o seu vetor normal, por exemplo ?

Veremos nesta seção que estas condições geométricas requerem modificações na formulação integral desenvolvida acima. Contudo esta situação favorece o uso de uma estratégia matemática bastante elegante, por intermédio de *integrais hipersingulares.*

Considere um corpo rígido e fino com sua superfície S completamente submersa abaixo da superfície livre em águas profundas. Assumimos que S é uma superfície suave, aberta com fronteira suave ∂S. A formulação diferencial do problema de difração é quase idêntica com uma distinção na condição de fundo (1.2.14), agora substituída por

$$\phi \to 0, \quad \text{quando } z \to \infty. \tag{2.6.65}$$

Escrevamos a condição de contorno no obstáculo como

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = V \tag{2.6.66}$$

para uma função V prescrita. Desta forma, a formulação tanto pode representar o problema de difração como de radiação.

Usando a função de Green para águas profundas, dada por (2.2.42), podemos expressar o potencial de velocidades como

$$4\pi\phi(\boldsymbol{p}) = \int_{S^+\cup S^-} \Big(\phi(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}) - G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi})\frac{\partial\phi(\boldsymbol{\xi})}{\partial n}\Big)dS_{\boldsymbol{\xi}}. \qquad (2.6.67)$$

Denotamos os dois lados do obstáculo por S^+ e S^- e a integração em (2.6.67) é sobre ambos os lados deste corpo. Denotamos também por $\frac{\partial}{\partial n^\pm}$ a derivada normal em um ponto em $S^\pm$ na direção de $S^\pm$ para a água e $\boldsymbol{p}^\pm$,$\boldsymbol{\xi}^\pm$ são pontos correspondentes em $S^\pm$. Além disso, $\phi(\boldsymbol{\xi}^\pm) := \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\xi}^\pm}\phi(\boldsymbol{x})$. Usando o fato que $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ é contínua através de S, temos

$$\frac{\partial\phi(\boldsymbol{\xi}^+)}{\partial n^+} = -\frac{\partial\phi(\boldsymbol{\xi}^-)}{\partial n^-},$$

de tal forma que

$$\int_S G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi})\frac{\partial\phi}{\partial n}\,dS_{\boldsymbol{\xi}} = \int_S G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi})\Big(\frac{\partial\phi(\boldsymbol{\xi}^+)}{\partial n^+} + \frac{\partial\phi(\boldsymbol{\xi}^-)}{\partial n^-}\Big)\,dS_{\boldsymbol{\xi}} = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} 4\pi\phi(\boldsymbol{p}) &= \int_{S^+\cup S^-}\phi(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi})}{\partial n}\,dS_{\boldsymbol{\xi}} \\ &= \int_{S^+\cup S^-}\phi(\boldsymbol{\xi}^+)\frac{\partial G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}^+)}{\partial n^+} + \phi(\boldsymbol{\xi}^-)\frac{\partial G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}^-)}{\partial n^-}\,dS_{\boldsymbol{\xi}}. \end{aligned}$$

Como G é contínua através de S,

$$\begin{aligned} 4\pi\phi(\boldsymbol{p}) &= \int_S(\phi(\boldsymbol{\xi}^+) - \phi(\boldsymbol{\xi}^-))\frac{\partial G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}^+)}{\partial n^+}\,dS_{\boldsymbol{\xi}} \\ &= \int_S[\phi]\frac{\partial G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}^+)}{\partial n^+}\,dS_{\boldsymbol{\xi}}, \end{aligned} \qquad (2.6.68)$$

onde $[\phi] = \phi(\boldsymbol{\xi}^+) - \phi(\boldsymbol{\xi}^-)$. Aplicando a condição de contorno no obstáculo (2.6.66),

$$\frac{\partial\phi(\boldsymbol{p})}{\partial n^+_{\boldsymbol{p}}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n^+_{\boldsymbol{p}}}\int_S[\phi]\frac{\partial G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi})}{\partial n^+_{\boldsymbol{\xi}}}\,dS_{\boldsymbol{\xi}} = V(\boldsymbol{p}^+).$$

Obtemos uma expressão análoga se $\boldsymbol{p} \to S^-$. Logo

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_{\boldsymbol{p}}}\int_S [\phi]\frac{\partial G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}}\, dS_{\boldsymbol{\xi}} = V(\boldsymbol{p}), \quad \boldsymbol{p} \in S. \tag{2.6.69}$$

Esta é uma equação integro-diferencial a ser resolvida sujeita à condição de borda

$$[\phi] = 0 \quad \text{em } \partial S, \tag{2.6.70}$$

pois $[\phi]$ é discontínua apenas através do obstáculo e não na água. Trocando a ordem de integração com diferenciação normal em (2.6.69) produz uma *integral hipersingular*. Tal procedimento é legítimo contanto que a integral resultante seja interpretada como uma integral de parte-finita de Hadamard (ver seção 2.6.1). Assim,

$$\frac{1}{4\pi}\,⨎_S [\phi]\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{p}}\partial n_{\boldsymbol{\xi}}}\, dS_{\boldsymbol{\xi}} = V(\boldsymbol{p}), \quad \boldsymbol{p} \in S, \tag{2.6.71}$$

que deve ser resolvida sujeita à condição de borda (2.6.70). A cruz indica que esta é uma integral hipersingular.

2.6.1 Parte Finita de Hadamard

Integrais hipersingulares fazem parte da classe das integrais de parte finita (*finite-part integrals*), originalmente concebidas pelo matemático francês Jacques Hadamard em seu trabalho de 1923 entitulado *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, recentemente republicado pela Dover Phoenix Editions [8].

Supondo que f' é uma função Hölder-continua, $f \in C^{1,\beta}$, a integral unidimensional de parte finita é definida como

$$⨎_a^b \frac{f(t)}{(x-t)^2}\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_a^{x-\varepsilon}\frac{f(t)}{(x-t)^2}\, dt + \int_{x+\varepsilon}^b \frac{f(t)}{(x-t)^2}\, dt - \frac{2f(x)}{\varepsilon}\right\}. \tag{2.6.72}$$

Uma relação com o valor principal de Cauchy pode ser expresso como

$$\frac{d}{dx}⨍_a^b \frac{f(t)}{x-t}\, dt = -⨎_a^b \frac{f(t)}{(x-t)^2}\, dt. \tag{2.6.73}$$

Integrais de parte finita para funções de duas variáveis, sobre superfícies suaves em $\mathbb{R}^3$ podem ser definidas de várias formas, todas equivalentes. Assuma que Ω é uma região plana, limitada no plano-xy.

Então para $f \in C^{1,\alpha}$, podemos definir a integral hipersingular em (2.6.71) por

$$\neq\!\!\!\!\!\!\int_\Omega w(\xi,\eta)\,\frac{d\Omega}{R^3} = \lim_{z\to 0}\frac{\partial}{\partial z}\int_\Omega w(\xi,\eta)\left\{\lim_{\zeta\to 0}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+(z-\zeta)^2}}\right)\right\}d\Omega,$$

onde $d\Omega = d\xi\, d\eta$. Ou analogamente a (2.6.72), por

$$\neq\!\!\!\!\!\!\int_\Omega w(\xi,\eta)\,\frac{d\Omega}{R^3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} w(\xi,\eta)\,\frac{d\Omega}{R^3} - \frac{2\pi w(x,y)}{\varepsilon}\right\},$$

onde Ω_ε é um pequeno disco de raio ε centrado no ponto singular (x,y).

2.6.2 O Núcleo para Superfícies Planas

A equação integral hipersingular (2.6.71) é aplicável a superfícies suaves S de qualquer forma. Contudo, simplificações consideráveis são obtidas se S é *plana*. Denote o núcleo de (2.6.71) por

$$H = \frac{\partial^2 G}{\partial n_p \partial n_q}.$$

Esta é uma função explícita mas complicada. Decomponha G em suas partes singular e regular como $G = G_s + G_r$, onde

$$G_s = [R^2+(z-\zeta)^2]^{-1/2} \quad \text{e} \quad G_r = G - G_s.$$

Será de utilidade decompor H similarmente como $H = H_s + H_r$.

Seja $\boldsymbol{n}(p) = (n_1, n_2, n_3)$ o vetor normal unitário em $p \in S^+$. Como S^+ é plana, $\boldsymbol{n}(q) = \boldsymbol{n}(p)$. Então obtemos

$$\frac{\partial^2 G_s}{\partial n_p \partial n_q} = \frac{1}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\xi}|^3} - \frac{3}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\xi}|^5}\left\{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\xi})\right\}^2, \tag{2.6.74}$$

onde $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{\xi}$ são os vetores posição de p e ξ, respectivamente. Mas como $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\xi}$ é um vetor no plano do obstáculo, segue que $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\xi}) = 0$ e

$$H_s = |\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\xi}|^{-3}. \tag{2.6.75}$$

O resultado (2.6.75) vale para obstáculos planos com qualquer orientação. Pode-se calcular H_r para tais obstáculos, mas o cálculo é bem mais simples quando o obstáculo é *horizontal*, como agora será assumido. Neste caso, $|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\xi}| = R$.

G_r pode ser escrita na forma

$$G_r = \fint_0^\infty \frac{k+\lambda}{k-\lambda}\, e^{k(z+\zeta)} J_0(kR)\, \underset{\cdot}{k} + 2\pi i \lambda\, e^{\lambda(z+\zeta)}\, J_0(\lambda R), \tag{2.6.76}$$

onde a integral deve ser interpretada como um valor principal de Cauchy. Definimos coordenadas adimensionais X e Z por

$$X = \lambda R \quad \text{e} \quad Z = -\lambda(z+\zeta). \tag{2.6.77}$$

Note que como z e ζ são negativos, ambos X e Z são não-negativos. Então, uma simples mudança de variáveis de integração fornece

$$G_r = \lambda F(X,Z) + 2\pi i \lambda\, e^{-Z} J_0(X), \tag{2.6.78}$$

onde

$$F(X,Z) = \fint_0^\infty \frac{\nu+1}{\nu-1}\, e^{-\nu Z} J_0(\nu X)\, d\nu. \tag{2.6.79}$$

Note que a integral semi-infinita em (2.6.76), que é relacionada com a principal tarefa de avaliar G_r, é agora expressa como uma função F das duas variáveis X e Z. Usando a transformada de Laplace, não é difícil mostrar que

$$\begin{aligned} F(X,Z) \;&=\; (X^2+Z^2)^{-1/2} - \pi e^{-Z}(\mathbf{H}_0(X) + Y_0(X)) \\ &\quad - 2\int_0^Z e^{t-Z}(X^2+t^2)^{-1/2}\, \underset{\cdot}{t}, \end{aligned} \tag{2.6.80}$$

onde $\mathbf{H}_0$ é a função de Struve e Y_0 é a função de Bessel do segundo tipo de ordem 0.

Como o obstáculo é horizontal, temos $\boldsymbol{n}(p) = \boldsymbol{n}(q) = (0,0,1)$, logo

$$H_r = \frac{\partial^2 G_r}{\partial z^2} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) G_r.$$

Como $J_0(kR)$ satisfaz a equação de Helmoltz bidimensional, obtemos

$$H_r = \int\!\!\int \frac{k+\lambda}{k-\lambda} e^{k(z+\zeta)} k^2 J_0(kR)\, dk.$$

Agora, como $k^2 = \lambda^2 + (k-\lambda)(k+\lambda)$, vemos que

$$H_r = \lambda^2 G_r + \int_0^\infty (k^2 + 2\lambda k + \lambda^2)\, e^{k(z+\zeta)} J_0(kR)\, dk.$$

Este resultado também pode ser obtido diferenciando (2.6.76) duas vezes com respeito a z. A integral que sobrou pode ser calculada por

$$\int_0^\infty e^{-kY} J_0(kR)\, \underset{.}{\mathrm{k}} = (R^2+Y^2)^{-1/2}, \quad Y>0,$$

derivando em relação a Y. O resultado é

$$H_r = \lambda^2 G_r + \lambda^3 \left\{ \frac{3Z^2}{(X^2+Z^2)^{5/2}} + \frac{2Z-1}{(X^2+Z^2)^{3/2}} + \frac{1}{(X^2+Z^2)^{1/2}} \right\}. \tag{2.6.81}$$

Em resumo, a equação integral hipersingular (2.6.71) pode ser escrita como

$$\frac{1}{4\pi} \mathop{\times\!\!\!\!\!\!\int}_S [\phi(q)] \left\{ \frac{1}{R^3} + H_r(p,q) \right\} \underset{.}{\mathrm{S}}_q = V(p), \quad p \in S, \tag{2.6.82}$$

onde S é plana horizontal de qualquer forma e H_r é dada por (2.6.81). A equação (2.6.82) deve ser resolvida sujeita à condição (2.6.70). Embora uma integral hipersingular possa passar a ideia de difícil solução, este não é o caso. Como veremos a seguir, podemos encontrar uma maneira de avaliar esta integral analiticamente e construir um método para aproximar a solução da equação integral hipersingular.

2.6.3 O Método de Expansão-Colocação

Comentário sobre a teoria unidimensional

Em duas dimensões, vários problemas de ondas envolvendo obstáculos finos podem ser reduzidos a uma equação da forma

$$\mathop{\times\!\!\!\!\!\!\int}_{-1}^{1} \left\{ \frac{1}{(x-t)^2} + H(x,t) \right\} v(t)\, dt = f(x) \quad \text{para } -1 < x < 1, \tag{2.6.83}$$

suplementada por duas condições de contorno, como, por exemplo, $v(-1) = v(1) = 0$. Aqui, v é a função incógnita, f é dada e o núcleo H é conhecido. Assumindo que f é suficientemente suave, a solução v vai a zero como raiz quadrada no pontos extremos. Isto sugere que escrevamos

$$v(x) = \sqrt{1-x^2}\, u(x).$$

Assim, expandimos u usando um conjunto de polinômios ortogonais; uma boa escolha é usar polinômios de Chebyshev do segundo tipo, U_n, definidos como

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin{(n+1)\theta}}{\sin\theta}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Esta é uma boa escolha por causa da fórmula

$$\frac{1}{\pi} \,⨍_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}\, U_n(t)}{(x-t)^2}\, dt = -(n+1)U_n(x). \tag{2.6.84}$$

Assim, aproximamos u por

$$\sum_{n=0}^{N} a_n U_n(x),$$

substituimos em (2.6.83) e avaliamos a integral hipersingular analiticamente, usando (2.6.84). Para achar os $(N+1)$ coeficientes a_n, escolhemos (*colocamos*) $(N+1)$ pontos; boas escolhas, que garantem convergência da aproximação, são os zeros de T_{N+1} ou U_{N+1}, onde T_n é um polinômio de Chebyshev do primeiro tipo.

O método para integrais bidimensionais

Descreveremos agora um método para resolver a equação integral hipersingular (2.6.82) quando S for um disco horizontal circular. Sejam (r, θ, z) coordenadas cilíndricas tais que $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Então o disco é dado por

$$S = \{(r, \theta, z) : 0 \le r < a, -\pi \le \theta < \pi, z = -d\}\,. \tag{2.6.85}$$

Esse obstáculo tem raio a e está submerso a uma distância d abaixo da superfície livre; podemos tomar $a = 1$ sem perda de generalidade.

Consideraremos um procedimento de expansão-colocação onde a função incógnita é expandida por séries de Fourier em θ, e os coeficientes de Fourier (que dependem de r) são expandidos usando funções de Legendre. Esta abordagem pode ser vista como uma generalização do método unidimensional para resolver equações integrais hipersingulares com polinômios de Chebyshev, descrito acima.

Se escrevemos $\xi = s\cos\alpha$, $\eta = s\sin\alpha$ e $\zeta = -d$, temos

$$R^3 = [r^2 + s^2 - 2rs\cos{(\theta-\alpha)}]^{3/2}.$$

Então, podemos escrever (2.6.82) como

$$\frac{1}{4\pi} \mathop{\not\!\!\int}_S [\phi(s,\alpha)] \left\{ \frac{1}{R^3} + H_r(r,\theta; s,\alpha; d,\lambda) \right\} s\, ds\, d\alpha = V(r,\theta), \quad (2.6.86)$$

com $(r,\theta) \in S$ e sujeita à condição

$$[\phi] = 0 \quad \text{em } r = 1. \qquad (2.6.87)$$

Note que a parte hipersingular, R^{-3}, não depende da profundidade de submersão (ou orientação) do obstáculo. Além disso, todos os efeitos de ondas estão incluídos em H_r.

Para fins de simplicidade, assumimos que $V(r,\theta)$ é uma função par de θ. Assim, a equação integral (2.6.86) implica que $[\phi(r,\theta)]$ é uma função par de θ. Expandiremos esta função usando as funções base B_k^m, definidas por

$$B_k^m(r,\theta) = P_{m+2k+1}^m(\sqrt{1-r^2})\, \cos m\theta, \qquad k, m = 0, 1, \ldots,$$

onde P_n^m é uma função associada de Legendre. A parte radial destas funções base podem também ser expressadas em termos de polinômios de Gegenbauer.

As funções $\{B_k^m\}$ são ortogonais sobre o disco unitário em relação ao peso $(1-r^2)^{-1/2}$:

$$\begin{aligned} \int_S B_k^m(r,\theta)\, B_l^n(r,\theta)\, \frac{r\, dr\, d\theta}{\sqrt{1-r^2}} \\ = 2\sigma_m \delta_{mn} \int_0^1 P_{m+2k+1}^m(\rho)\, P_{m+2l+1}^m(\rho)\, d\rho \\ = \frac{\sigma_m \delta_{mn} \delta_{kl}}{m+2k+3/2}\, O_k^m, \end{aligned}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker,

$$O_k^m = \frac{(2m+2k+1)!}{(2k+1)!},$$

$\sigma_m = \pi/2$ se $m > 0$ e $\sigma_0 = \pi$; no último passo, usamos o fato de que o integrando é uma função de ρ e as relações ortogonais para as funções associadas de Legendre.

A próxima fórmula, descoberta por Krenk (1979,1982) é essencial para a construção do método. Ele permite a avaliação analítica da integral hipersingular:

$$\frac{1}{4\pi} \times\!\!\!\!\!\!\int_S \frac{1}{R^3} B_k^m(s,\alpha)\, s\, ds\, d\alpha = C_k^m \frac{B_k^m(r,\theta)}{\sqrt{1-r^2}}, \qquad (2.6.88)$$

onde

$$C_k^m = -\frac{\pi}{4} \left[P_{m+2k+1}^{m+1}(0) \right]^2 / O_k^m.$$

A fórmula (2.6.88) pode ser interpretada como uma versão bidimensional de (2.6.84).

Para fazer uso de (2.6.88), expandimos $[\phi]$ em termos das funções B_k^m. Abreviadamente, escreveremos

$$[\phi] \approx \sum_{k,m}^{N} a_k^m\, B_k^m := \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2} a_k^m\, B_k^m. \qquad (2.6.89)$$

Substituindo (2.6.89) na equação integral (2.6.86) e assim avaliando as integrais hipersingulares usando (2.6.88), obtemos

$$\sum_{k,m}^{N} a_k^m \left\{ C_k^m \frac{B_k^m(r,\theta)}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{1}{4\pi} \int_S B_k^m(s,\alpha) H_r(r,\theta;s,\alpha;d,\lambda)\, sdsd\alpha \right\}$$
$$= V(r,\theta), \quad (r,\theta) \in S. \quad (2.6.90)$$

Resta agora saber como determinar os coeficientes a_k^m.

Uma possível abordagem é usar o Método de Galerkin: multiplicar (2.6.90) por $B_l^n(r,\theta)$ e integrar sobre S para obter

$$a_l^n \frac{\sigma_n C_l^n O_l^n}{n+2l+3/2} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k,m}^{N} a_k^m \int_S B_l^n(r,\theta)$$
$$\times \int_S B_k^m(s,\alpha) H_r(r,\theta;s,\alpha;d,\lambda)\, sdsd\alpha\, rdrd\theta = \int_S V\, B_l^n\, dS.$$

A principal desvantagem deste método é a integral quádrupla; é possível avaliar algumas destas integrais analiticamente para certas configurações mas para um método mais geral podemos usar o método de colocação no qual a avaliação de (2.6.90) em $(N_1+1)(N_2+1)$ pontos no disco gera um sistema linear para os coeficientes a_k^m, que pode ser resolvido eficientemente de forma numérica.

Na figura 2.6.3, a seção reta de espalhamento é mostrada para cinco valores do número de onda adimensional ka, onde a é o raio do disco e $k = \omega^2/g$, o número de ondas para águas profundas, para uma profundidade de submersão $d = 0.1$. É interessante notar a dependência angular variável quando a frequência aumenta e as áreas definidas pelas curvas fechadas que fornecem a seção reta de espalhamento total, descrita previamente.

Se S não é um disco, ainda podemos usar a técnica acima descrita fazendo uma transformação conforme de S para o disco. Tal tipo de transformação preserva a estrutura da hipersingularidade, favorecendo o uso da expansão acima e de (2.6.88).

2.7 Aplicações em Atividades *Offshore*

Atividades industriais, científicas, comerciais e militares no mar, *fora da costa* (ou *offshore*, em inglês) envolvem grandes estruturas flutuantes ou submersas cuja segurança e eficácia dependem de suas respostas às ondas. Se o objeto está fixo e apoiado no fundo do mar ou preso por linhas de ancoramento este absorverá parte da energia das ondas e espalhará as ondas difratadas. Se a estrutura é presa com graus de liberdade, esta oscila e radia ondas. Como se dá a interação das ondas com estas estruturas offshore e o efeito causado nelas pode ser examinado através da teoria de difração desenvolvida neste capítulo. Há anos a indústria do petróleo desenvolve atividades de exploração de petróleo e gás em *águas profundas*, sendo o Brasil um dos líderes mundiais nesta tecnologia. Entre os vários tipos de plataformas, existem as fixas e extendendo-se até o fundo do mar. Estas estruturas são denominadas de *Gravity Base Structures, GBS*. Não há portanto forças como massa adicional e amortecimento de radiação. Plataformas situadas em profunidades superiores usam outro sistema para fixá-las. Um exemplo é a plataforma de tensão (*Tension Leg Platform, TLP*) que possui usualmente quatro colunas (pernas) flutuantes que são presas por cabos até o fundo do mar que elimina quase todo o seu movimento vertical.

Plataformas flutuantes para lançamento de satélites são uma outra aplicação offshore que requerem o conhecimento detalhado do comportamento de estruturas flutuantes no mar.

Existe uma clase de estruturas no oceano que se destacam por suas dimensões não usuais. Por vezes denominadas de *estruturas flutuantes muito grandes* (*Very Large Floating Structures, VLFS*), podem assumir assumir alguns kilômetros de comprimento e estão ainda em fase de testes e modelagem. Um exemplo já relativamente bem conhecido deste tipo de estrutura são as pontes flutuantes, em particular, em países como Noruega e Japão. Devido a escassez de espaço em grandes cidades, aeroportos flutuantes são projetados com 5 kilômetros de comprimento e testados com modelos reais de 1 kilômetro. Bases militares móveis *(Mobile Offshore Base, MOB*) com em torno de 2 kilômetros de extensão são projetadas para permitir diversas funções militares no mar. Aeroportos flutantes e MOB's localizados em águas com profundidade maior que 400 metros, estão livres de catástrofes devido a terremotos e tsunamis.

Cidades flutuantes podem ser uma alternativa no futuro para a demanda de espaço em países como o Japão onde várias cidades flutuantes já foram propostas por diferentes corporações.

Inúmeras outras aplicações mais comuns e rotineiras requerem hoje a análise das forças e momentos hidrostático e hidrodinâmico. Parâmetros como massa adicional e forças de excitação definidos nas seções 2.4 e 2.5 têm papéis importantes na análise e design de estruturas offshore. A insuficiência deste tipo de tratamento científico-tecnológico pode causar grandes danos e prejuízos, como o recente caso da platarforma TLP Mars na passagem do Furacão Katrina nos EUA (ver figuras 2.2 e 2.3). Métodos numéricos para resolver o problema de difração ou radiação e obter forças e momentos sobre um obstáculo são o objeto de estudo a seguir.

2.7.1 Métodos Numéricos

Métodos para resolver a nossa reformulação integral do problema de difração ou radiação são usualmente chamados métodos diretos de equação integral de contorno, que se caracterizam por terem quantidades de interesse físico, como ϕ and $\frac{\partial \phi}{\partial n}$, como incógnitas.

Três principais aspectos merecem mais atenção para aplicar o método numérico: integração de núcleos singulares, solução dos correspondentes sistemas lineares com matrizes densas e avaliação eficiente da função de Green.

Embora o segundo e terceiro aspectos podem ser tratados como independentes, poder existir um grande benefício do ponto de vista computacional quando relacionamos estas duas tarefas através de um método do tipo *Multipolo Rápido*. Tal método lida com avaliar um produto matriz-vetor

$$A\boldsymbol{x},$$

onde as entradas de A são essencialmente funções de Green. Expansões multiplo destas funções de Green combinadas com a estratégia do algoritmo fornece um vetor $\boldsymbol{y}$ tal que

$$||A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| < \epsilon,$$

com um número de operações proporcional à dimensão da matriz A, para qualquer acurácia ϵ previamente especificada.

A tarefa de avaliar uma função de Green de superfície livre não pode ser subestimada. Esta é uma função intricada que tem que ser avaliada várias vezes de acordo com a resolução da discretização do obstáculo.

Para águas intermediárias, podemos usar a expansão em autofunções (2.2.35), truncando-a conforme a precisão requerida.

Em relação à profundidade infinita, vimos na seção 2.6.2 que a função de Green de superfície livre para águas profundas pode ser expressa como

$$G = \frac{1}{R} + \lambda F(X,Y) + 2\pi i \lambda e^{-Z} J_0(X), \tag{2.7.91}$$

onde

$$\begin{aligned} F(X,Z) &= (X^2+Z^2)^{-1/2} - \pi \mathrm{e}^{-Z}(\mathbf{H}_0(X) + Y_0(X)) \\ &\quad -2\int_0^Z \mathrm{e}^{t-Z}(X^2+t^2)^{-1/2}\,dt, \end{aligned} \tag{2.7.92}$$

em termos de novas variáveis X, Y e Z. As funções especiais $\mathbf{H}_0$ e Y_0 podem ser computadas aproximando-as por polinômios de Chebyshev. Este procedimento produz uma forma bastante eficiente de avaliar estas funções já que polinômios de seis termos são suficientes para dar uma aproximação acurada. A expressão (2.7.91) está pronta para computações numéricas e é válida para todo o domínio da água. Contudo pode-se ir além nas simplificações na forma para G estimando a integral em (2.7.92) por polinômios ortogonais em vários subdomínios separados.

Uma outra alternativa, mais inexplorada porém promissora, para avaliar a função de Green para águas profundas é expressá-la em termos de uma expansão em autofunções, análoga àquela usada para definir a função de Green para profundidades intermediárias em (2.2.35). A expansão para produndidade infinita foi apresentada recentemente por Peter e Meylan [31].

Para discretizar S podemos empregar o Método de elemento de contorno, ou método de painéis: aproxima-se S por *elementos*, ou painéis, cuja união se aproxima da forma precisa de S. A incógnita, o potencial de velocidade ϕ é então aproximado nos painéis, pondendo ser constante em cada um dos painéis ou aproximado por funções base, como polinômios ou outras funções. No então chamado método de ordem superior, ϕ é usualmente expresso por splines e S é representado de forma *exata* através de uma transformação paramétrica.

Uma outra maneira simples de resolver equações integrais é utilizar diretamente a regra de integração trapezoidal, conforme Press et. al [36].

Para ilustrar o método de elemento de contorno, daremos na próxima seção os detalhes deste quando ϕ é constante em cada painel.

Método de elemento de contorno

O ponto de partida para a formulação computacional é a equação (2.2.49). Escrevendo a condição de contorno no obstáculo como

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = V,$$

onde V é prescrita, a equação a ser resolvida se expressa como

$$\phi(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left(\phi(\boldsymbol{p}) \frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{\xi}) - G(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{\xi}) V(\boldsymbol{\xi}) \right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}, \qquad \boldsymbol{p} \in S. \tag{2.7.93}$$

Considere subregiões, ou painéis $\{S_j\}_1^N$, próximos a S e de maneira a simular a forma do obstáculo. As coordenadas dos painéis $\{S_j\}_1^N$ determinam a discretização de S. Assim, teremos

$$\phi(\boldsymbol{p}) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \int_{S_j} \left(\phi(\boldsymbol{p}) \frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{\xi}) - V(\boldsymbol{\xi}) G(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{\xi}) \right) \, d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}, \qquad \boldsymbol{p} \in S. \tag{2.7.94}$$

Escolhendo pontos de colocação $\{\boldsymbol{\xi}_j\}_1^N$, sobre cada painel S_j, e assumindo que ϕ e V não variam no interior de um painel, temos de (2.7.94),

$$\phi(\boldsymbol{p}) \approx \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\left(\phi(\boldsymbol{\xi}_j)\int_{S_j}\frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{p};\boldsymbol{\xi})\,d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} - V(\boldsymbol{\xi}_j)\int_{S_j}G(\boldsymbol{p};\boldsymbol{\xi})\,d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}\right), \tag{2.7.95}$$

com $\boldsymbol{p} \in S$. Avaliando (2.7.95) nos pontos de colocação, obtemos

$$\phi(\boldsymbol{\xi}_i) \approx \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\left(A_{ij}\phi(\boldsymbol{\xi}_j) - B_{ij}V(\boldsymbol{\xi}_j)\right), \tag{2.7.96}$$

onde denotamos

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{S_j}\frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}_j;\boldsymbol{\xi})\,dS_j, \qquad (2.7.97)\\ B_{ij} &= \int_{S_j}G(\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\xi})\,dS_j. \end{aligned}$$

Definindo os vetores $\widetilde{\phi}$ e $\widetilde{V}$ em R^N por

$$\widetilde{\phi} = (\phi(\boldsymbol{\xi}_1),\ldots,\phi(\boldsymbol{\xi}_N)), \qquad \{\widetilde{V}\}_i = \sum_{j=1}^{N}B_{ij}V(\boldsymbol{\xi}_j)$$

escrevemos (2.7.96) como a equação matricial

$$(2\pi I - A)\,\widetilde{\phi} = \widetilde{V}, \tag{2.7.98}$$

onde $A = \{A_{ij}\}$ e I é a matriz identidade.

Os elementos da matriz A podem ser calculados usando as expressões G dadas na seção 2.7.1 juntamente com uma regra de quadratura para fazer a integração numérica de funções singulares. A solução do sistema linear (2.7.98) pode ser feita com os bons métodos disponíveis para este tipo de cálculo e uma aproximação para o potencial é assim obtida.

Parâmetros físicos como forças e momentos são obtidos conhecendo-se $\widetilde{\phi}$ através de uma integração numérica sobre S de um integrando regular. Por exemplo, a massa adicional e o amortecimento de radiação são obtidos calculando integrais do tipo

$$\int_S V\phi.$$

Se o potencial em cada ponto $\boldsymbol{p}$ do domínio D da água é requerido, este pode ser calculado pela expressão

$$\phi(\boldsymbol{p}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{n} \left(\phi(\boldsymbol{\xi}_j) \int_{S_j} \frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{p};\boldsymbol{\xi})\, d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} - V(\boldsymbol{\xi}_j) \int_{S_j} G(\boldsymbol{p};\boldsymbol{\xi})\, d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \right),$$

que é deduzida a partir da discretização de (2.2.47).

2.7.2 Forças Hidrodinâmicas em uma Plataforma Offshore

Plataformas do tipo spar são usadas para perfuração e para produção de petróleo. Tais plataformas são apoiadas em um cilindro longo parcialmente submerso e ancorado ao fundo do mar por uma série de cabos e linhas. O grande cilindro serve para estabilizar a plataforma na água e absorver a força de eventos extremos como furacões. Sendo umas das maiores plataformas em uso, usualmente possuem quilhas helicoidais sobre o cilindro para evitar vibrações induzidas por vórtices.

Os resultados apresentados a seguir mostram a resposta de uma plataforma spar a ondas incidentes e também as forças de radiação devido ao movimento da spar. Os problemas de difração e de radiação são formulados como descrito nas seções anteriores deste capítulo. Profundidade infinita é assumida.

Para resolver a equação integral governante (2.7.93) foi usado um método de ordem superior onde a geometria da parte molhada da spar é representada de forma exata através de uma transformação

$$(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = T(u,v), \tag{2.7.99}$$

onde (x, y, z) é um ponto em S e (u, v) parâmetros em um simples domínio quadrado.

A solução ϕ é representada por B-splines.

A geometria do que chamaremos de *spar padrão* é definida por um cilindro com 36 m de diametro, 200 m de profundidade com três quilhas helicoidais anexadas ao seu casco. Uma quilha tem 3.7 m de largura e sua espessura é de 0.025 m. As quilhas são uniformemente rodadas por 2π, do topo até o fundo do cilindro, onde suas localizações fazem ângulos de 0, $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ radianos em relação ao eixo-x. (veja figura 2.4). Como a espessura da quilha é pequena comparada com o raio do cilindro, o escoamento em torno das bordas das quilhas é descrito como um escoamento de quina (*corner flow*) com comportamento local dado por

$$\phi \sim r^{1/2}, \tag{2.7.100}$$

onde r é a distância do casco do cilindro à borda da quilha. Isto sugere uma parametrização com a propriedade

$$r(u) \sim u^2, \tag{2.7.101}$$

onde u é a variável paramétrica em (2.7.99).

O efeito de usar (2.7.101) pode ser visto na figura 2.5.

Coeficientes como massa adicional e amortecimento foram computados para um número de ondas adimensional λR na banda de 0.01 a 2, onde R é o raio do cilindro.

Nos resultados são mostrados os coeficientes hidrodinâmicos para a spar padrão e são comparados com os mesmos coeficientes de duas outras geometrias associadas: a *spar lisa*, a spar sem as quilhas e a *spar com quilhas grossas*, a spar com quilhas 100 vezes mais grossas que a spar padrão. Os resultados numéricos são confiados a terem um erro relativo de 1%.

Nas figuras 2.6 e 2.7, o seguinte aspecto qualitativo é observado: quando λ aumenta, a massa adicional dos três tipos de spar diferem, quase exclusivamente, por uma constante adicional, com esta constante tendo um valor maior para o caso do heave.

Nas figuras 2.8 é visto que existem picos, próximos a $\lambda R = 0.7$ para o amortecimento de surge.

Para ondas incidentes na direção do eixo-x, é verificado pela simulação numérica que não existe contribuição do corpo do cilindro nas forças de excitação de sway, roll e yaw. Então os valores não-nulos destas forças são causados exclusivamente pelo efeito das quilhas. Esta situação traz dificuldades numéricas, particularmente para quilhas com espessura pequena.

Por outro lado, a contribuição do corpo principal do cilindro nas forças e momentos de excitação de surge, heave e pitch é dominante e a convergência numérica é facilmente atingida. Veja na figura 2.9, a força de excitação de pitch.

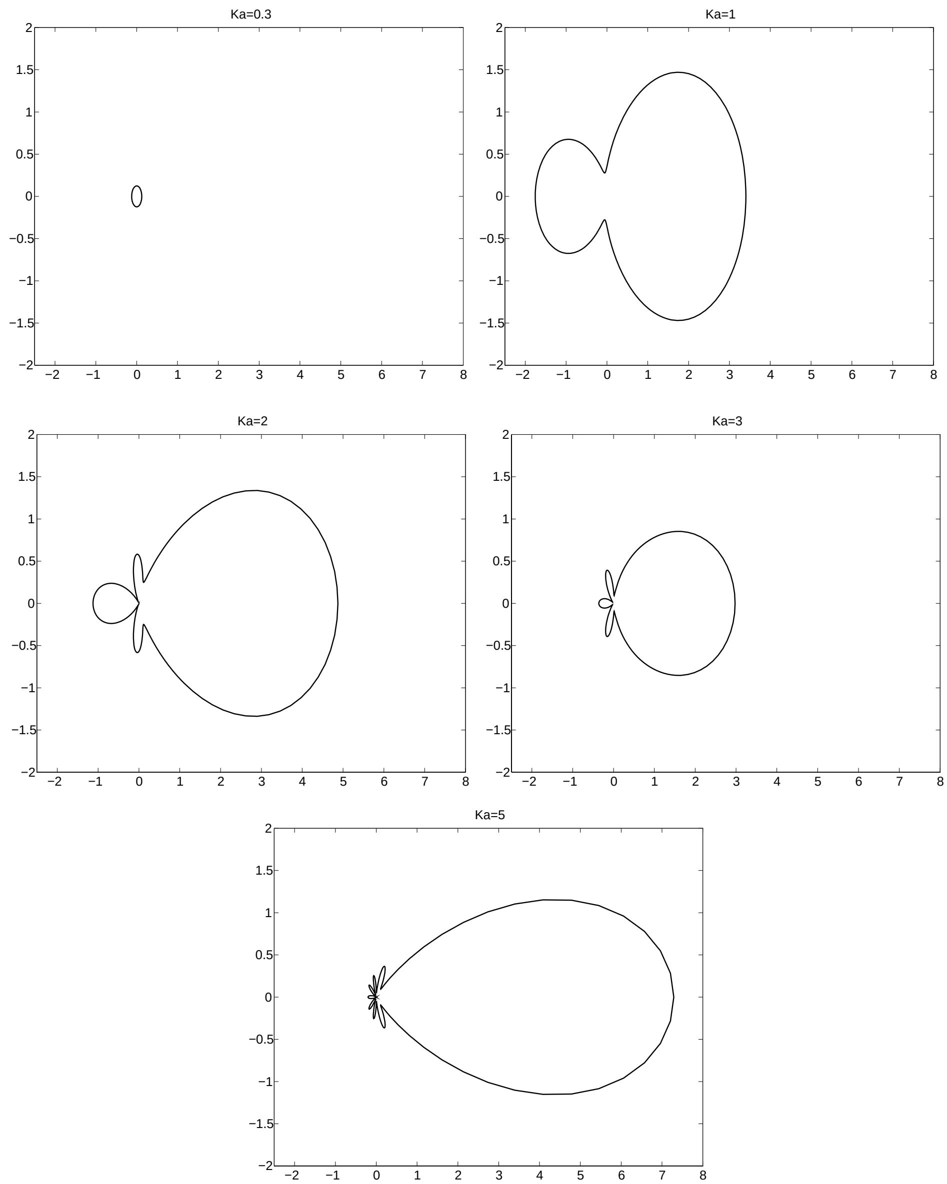

Figura 2.1: Seção reta de espalhamento. Os eixos vertical e horizontal são os eixos y e x, respectivamente e $(0,0)$ indica o centro do disco.

Figura 2.2: Plataforma TLP Mars

Figura 2.3: Plataforma TLP Mars após a passagem do furacão Katrina em agosto de 2005. Esta plataforma foi projetada para suportar ondas de até 22 m e ventos de até 225 km/h simultaneamente. As condições geradas pelo Katrina superaram estas estimativas de condições atmosféricas e oceanográficas extremas.

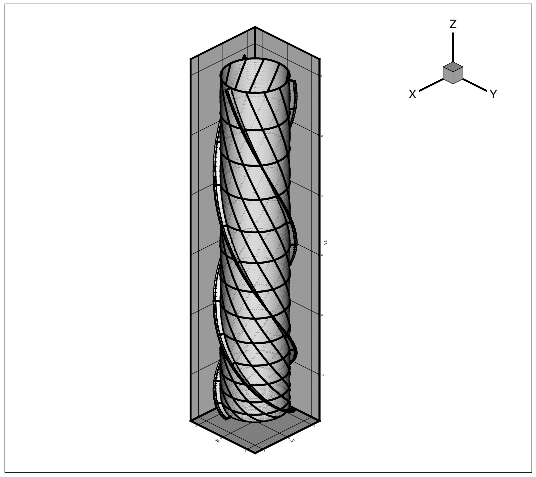

Figura 2.4: Plataforma spar padrão. Nesta discretização, uma parametrização levando em conta as quinas nas bordas das quilhas e no fundo do cilindro é utilizada.

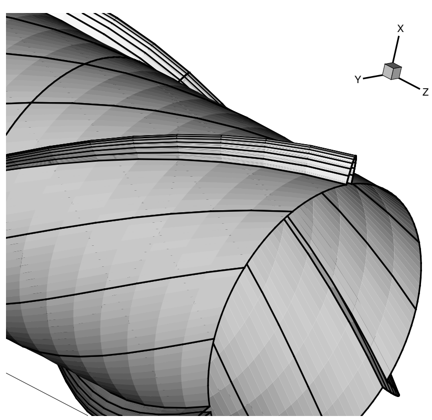

Figura 2.5: Discretização da quilha conforme (2.7.101)

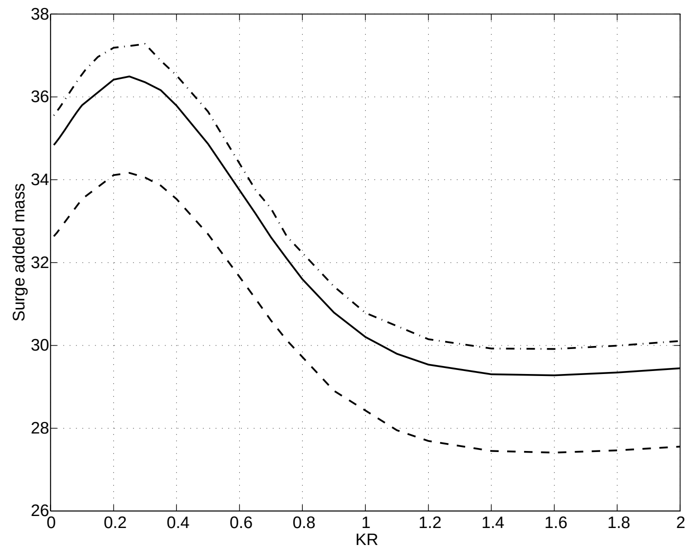

Figura 2.6: A massa adicional de surge como uma função do número de onda adimensional. A linha sólida representa resultados para a spar padrão; a linha tracejada é para a spar lisa e a linha formada por (-.) é para a spar de quilha grossa.

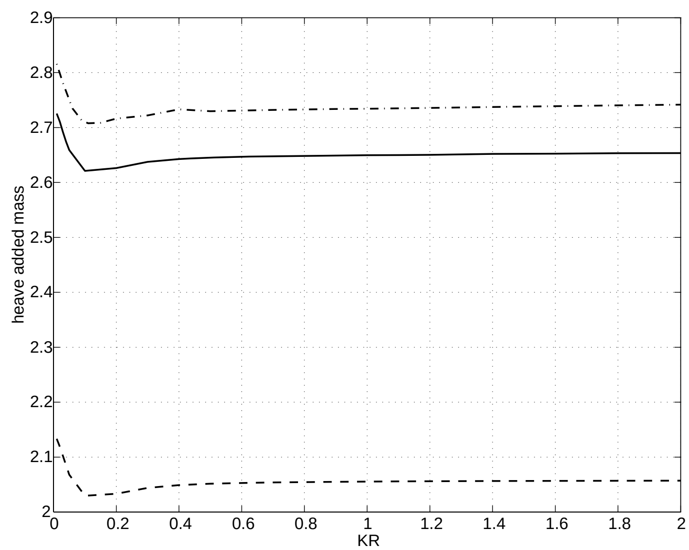

Figura 2.7: A massa adicional de heave como uma função do número de onda adimensional. A linha sólida representa resultados para a spar padrão; a linha tracejada é para a spar lisa e a linha formada por (-.) é para a spar de quilha grossa.

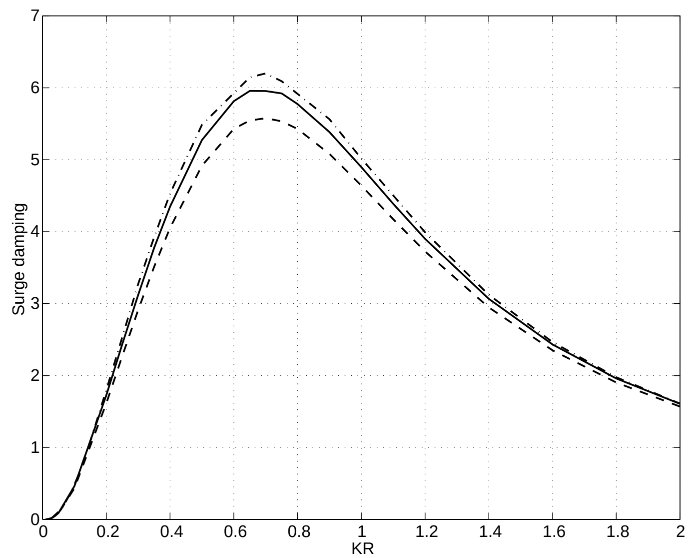

Figura 2.8: O amortecimento de surge como uma função do número de onda adimensional. A linha sólida representa resultados para a spar padrão; a linha tracejada é para a spar lisa e a linha formada por (-.) é para a spar de quilha grossa.

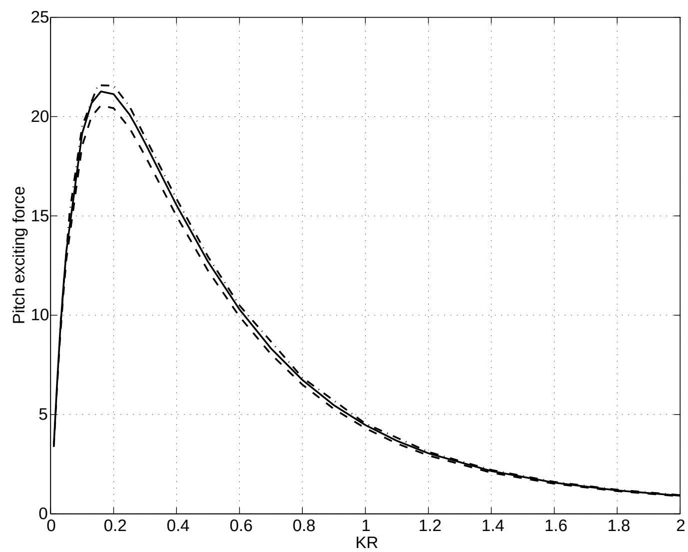

Figura 2.9: A força de excitação de pitch como uma função do número de onda adimensional. A linha sólida representa resultados para a spar padrão; a linha tracejada é para a spar lisa e a linha formada por (-.) é para a spar de quilha grossa.

Exercícios

2.1 Demonstre a seguinte relação entre as condições de radiação. (2.2.32) $\Rightarrow$ (2.2.31) $\Rightarrow$ (2.2.30) $\Rightarrow$ (2.2.29).

2.2 Mostre que G satisfaz a condição de superfície livre (2.2.28)

2.3 Encontre uma expressão alternativa para (2.2.41) usando coordenadas polares para x, y e ξ, η.

2.4* O fluxo F_C através de um cilindro vertical C para uma função f satisfazendo (1.1.6, 1.2.14, 2.2.28, 2.2.41) é dado por

$$F_C = \frac{\omega \rho_a}{2} \iint\limits_C \frac{\left|\frac{\partial g}{\partial r}\right|^2 + k_0^2 \left|g\right|^2}{2k_0} \, d\sigma - \iint\limits_C \frac{\left|\frac{\partial g}{\partial r} - ik_0 g\right|^2}{2k_0} \, d\sigma. \qquad (2.7.102)$$

Se g é regular (não possui singularidades) em qualquer ponto, $F_C = 0$.
(a) Mostre que se duas funções g_1 e g_2 satisfazem as condições acima mais (2.2.34), entao $h = g_1 - g_2$ é regular e satisfaz a condição fraca de radiação.
(b) mostre que

$$\lim_{\rho \to \infty} \iint\limits_{C_\rho} \left|\frac{\partial g}{\partial r}\right|^2 \, d\sigma = \lim_{\rho \to \infty} \iint\limits_{C_\rho} \left|g\right|^2 \, d\sigma = 0.$$

(c) Use a segunda indentidade de Green com g e G, e a desigualdade de Schwarz para mostrar que $g \equiv 0$.
(d) Enuncie um teorema de unicidade para a função de Green de superfície livre.

2.5 Deduza, passo a passo, a fórmula (2.6.74) para o núcleo da equação integral hipersingular (2.6.71).

2.6 Explique porque não existe força de excitação de sway, roll e yaw para uma spar sem quilhas sujeita a uma onda incidente na direção do eixo-x.

Capítulo 3

Movimentos Transientes e Não-Linearidade

Usando a teoria linear e abandonando a hipótese de movimentos harmônicos simples para a propagação das ondas poderemos, neste capítulo, encontrar soluções transientes para o problema de ondas induzidas por terremotos subaquáticos gerando ondas do tipo tsunami.

Posteriormente veremos como podemos tratar o problema não-linear usando a teoria da perturbação para, nas últimas seções, apresentar a formulação Hamiltoniana e a teoria de Zakharov para ondas em águas profundas.

3.1 Ondas Transientes Lineares

Consideramos o problema de ondas em mar aberto sem obstáculos. Assuma que as variações na superfície livre e no fundo independem de y e o problema pode ser formulado no plano-xz. Permitindo agora variações no leito do mar, denotado por $z = -h + H(x,t)$, segue da condição de fundo (1.2.12) que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \text{em } z = -h + H(x,t). \tag{3.1.1}$$

Coerentemente com as hipóteses de linearização, assumimos que as amplitudes de H e $\frac{\partial H}{\partial x}$ são pequenas tais que termos quadráticos são desprezíveis. Denotando $L(x,t) = \frac{\partial H}{\partial t}$, podemos escrever a condição de fundo como

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = L(x,t), \quad \text{em } z = -h. \tag{3.1.2}$$

O problema então pode ser formulado para $\Phi(x,z,t)$ como

$$\begin{aligned} \Phi_{xx} + \Phi_{zz} &= 0, \quad -h < z < 0, \\ \Phi_{tt} + g\Phi_z &= 0, \quad z = 0, \\ \Phi_z &= L(x,t), \quad z = -h. \end{aligned}$$

Como a propagação das ondas não é mais necessariamente periódica no tempo, precisamos de condições iniciais. Tais condições devem ser impostas apenas na superfície livre, visto que as derivadas no tempo são exclusivamente presentes nesta região. Assumindo que a água está originalmente em repouso, adicionamos, ao problema, as condições

$$\begin{aligned} \Phi(x,0,0) &= 0, \\ \Phi_t(x,0,0) &= 0. \end{aligned}$$

Para resolver o problema acima usaremos a transformada de Fourier em x:

$$\tilde{f} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x,z,t)\, dx, \tag{3.1.3}$$

que pode ser vista como uma soma infinita ponderada das *ondas* e^{-ikx} com número de ondas k.

As equações e condições do problema transformado são

$$\tilde{\Phi}_{zz} - k^2\tilde{\Phi} = 0, \tag{3.1.4}$$

$$\tilde{\Phi}_{tt} + g\,\tilde{\Phi}_z = 0, \quad z = 0, \tag{3.1.5}$$

$$\tilde{\Phi}_z = \tilde{L}, \quad z = -h, \tag{3.1.6}$$

$$\tilde{\Phi}(k,0,0) = 0, \tag{3.1.7}$$

$$\tilde{\Phi}_t(k,0,0) = 0. \tag{3.1.8}$$

A solução geral de (3.1.4) é da forma

$$\tilde{\Phi} = A(k,t)\,\text{senh} kz + B(k,t)\cosh kz, \tag{3.1.9}$$

e as condições de contorno (3.1.5) e (3.1.6) implicam em

$$B_{tt} + gA = 0 \tag{3.1.10}$$

e

$$A = \frac{\tilde{L}}{k \cosh kh} + B \tanh kh. \qquad (3.1.11)$$

Substituindo (3.1.11) em (3.1.10), vemos que B satisfaz a equação diferencial ordinária

$$B_{tt} + \omega^2 B = \frac{-g\tilde{L}}{\cosh kh}, \qquad (3.1.12)$$

onde

$$\omega = \sqrt{gk \tanh kh}. \qquad (3.1.13)$$

Como $\operatorname{senh} 0 = 0$ e $\cosh 0 = 1$, usando as condições iniciais (3.1.7, 3.1.8), segue que

$$\begin{aligned} B(k,0) &= 0, && (3.1.14) \\ B_t(k,0) &= 0. && (3.1.15) \end{aligned}$$

A solução de (3.1.12, 3.1.14, 3.1.15) pode ser encontrada usando o método da função de Green. Desta forma, temos

$$B(k,t) = -\frac{g}{\omega \cosh kh} \int_0^t G(t,\tau)\tilde{L}(k,\tau)\, d\tau, \qquad (3.1.16)$$

onde $G(t,\tau) = \operatorname{sen} \omega(t-\tau)$.

A solução do problema de ondas transiente é portanto obtida invertendo a transformada de Fourier e pode ser escrita como

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \Big[\left(\frac{\tilde{L}(k,t)}{k \cosh kh} + B(k,t) \tanh kh \right) \operatorname{senh} kz + B(k,t) \cosh kz \Big]\, dk, \qquad (3.1.17)$$

onde B é dada por (3.1.16).

3.2 Tsunami Devido a Levantamento do Fundo Oceânico

Tsunamis são usualmente gerados por levatamento do fundo do oceano devido a rupturas em bordas de grandes placas tectônicas. Tais deslocamentos verticais, de até 10 metros, ocorrem durante alguns segundos em áreas de milhares de kilômetros quadrados. Apesar de algumas idealizações no modelo que descreveremos, características importantes de tsunamis frequentemente relatadas são reproduzidas por esta teoria.

Considere que antes do tempo inicial não havia perturbação na superfície livre. Neste momento, um movimento instantâneo no chão oceânico é sentido. Como o fundo é denotado por $z = -h + \mathcal{H}(x,t)$, a situação acima é representada por

$$\mathcal{H}(x,0^-) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}(x,0^+) = \mathcal{H}_0(x)$$

e a condição de fundo, expressa como

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = L(x,t) = \mathcal{H}_0(x)\delta(t), \tag{3.2.18}$$

onde δ é a delta de Dirac com a propriedade

$$\int_{0^-}^{0^+} L\, dt = \mathcal{H}_0(x). \tag{3.2.19}$$

Isto modela um deslocamento vertical instantâneo causando as elevações no fundo dadas por $\mathcal{H}_0(x)$.

De (3.2.18), temos

$$L = 0 \quad \text{para} \quad t > 0^+. \tag{3.2.20}$$

Assim, para o modelo do tsunami, as equações (3.1.12) e (3.1.14) são trocadas por

$$B_{tt} + \omega^2 B = 0, \quad t > 0^+ \tag{3.2.21}$$

e

$$B(k,0^+) = 0. \tag{3.2.22}$$

Para especificar a condição inicial sobre B_t, note que de (3.2.22) temos

$$\int_{0^-}^{0^+} (B_{tt} + \omega^2 B)\, dt = B_t(k,0^+).$$

Por outro lado, de (3.1.12)

$$\begin{aligned}\int_{0^-}^{0^+} (B_{tt} + \omega^2 B)\, dt &= \int_{0^-}^{0^+} \frac{-g\tilde{L}}{\cosh kh}\, dt, \\ &= \frac{-g\tilde{\mathcal{H}}_0}{\cosh kh}, \qquad \text{usando (3.2.19).}\end{aligned}$$

Isso nos fornece a condição

$$B_t(k, 0^+) = \frac{-g\tilde{\mathcal{H}}_0}{\cosh kh}. \tag{3.2.23}$$

A solução do problema de valores iniciais (3.2.21,3.2.22,3.2.23) é facilmente econtrada e escrita como

$$B = -\frac{g\tilde{\mathcal{H}}_0}{\omega \cosh kh} \operatorname{sen} \omega t. \tag{3.2.24}$$

Assim de (3.1.9,3.2.20), temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi} &= B \tanh kh \, \mathrm{senh} kz + B \cosh kz \\
&= \frac{B}{\cosh kh} (\mathrm{senh}\, kz \ \mathrm{senh}\, kh + \cosh kz \cosh kh) \\
&= \frac{B}{\cosh kh} \cosh k(z + h) \\
&= -\frac{g\tilde{\mathcal{H}}_0}{\omega \cosh kh} \ \mathrm{sen} \omega t \ \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh kh}, \qquad \text{usando (3.2.24).}
\end{aligned}$$

Invertendo a transformada de Fourier, obtemos o seguinte potencial de velocidade.

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{g\tilde{\mathcal{H}}_0}{\omega \cosh kh} \ \mathrm{sen} \omega t \ \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh kh} \, dk.$$

A elevação da superfície livre é portanto, de (1.3.19), dada por

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\tilde{\mathcal{H}}_0(k)}{\cosh kh} \cos \omega t \, dk, \tag{3.2.25}$$

cuja parte real carrega o significado físico. Esta expressão representa as formas e alturas das ondas do tsunami. É portanto oportuno analisarmos com detalhes a estrutura e significado dos termos em (3.2.25). O termo $\tilde{\mathcal{H}}_0(k)$ é dito o espectro do deslocamento do fundo e fornece informações sobre a perturbação no fundo, tais como sua amplitude e distribuição espacial. Vemos que os tsunamis regidos por (3.2.25) são dominados por números de onda k onde $\tilde{\mathcal{H}}_0(k)$ é próximo de seus valores máximos. O termo $(\cosh kh)^{-1}$ pode ser visto como um filtro para as ondas curtas. Isto pode ser inferido dados os comportamentos assintóticos de

$$(\cosh kh)^{-1} \sim 1, \qquad kh \to 0,$$

referente a ondas longas e

$$(\cosh kh)^{-1} \sim 0, \qquad kh \to \infty,$$

relacionado a ondas curtas. Por fim, o termo $e^{ikx} \cos \omega t$ controla as informações de propagação das ondas, suas velocidades, espalhamento direcional e a dispersão prevista por (3.1.13).

A seguir, usando análise assintótica, extrairemos informações de (3.2.25) acerca do comportamento das cristas mais rápidas do tsunami que atingiriam regiões litorâneas primeiro.

3.2.1 Análise das Ondas Líderes

A função $\mathcal{H}_0(x)$ descreve o deslocamento vertical do fundo e pode sempre ser decomposta como a soma de uma função par $\mathcal{H}_0^p(x)$ e outra ímpar $\mathcal{H}_0^i(x)$. Pela linearidade do problema, as duas componentes de $\mathcal{H}_0(x)$ podem ser tratadas separadamente e superpostas depois. Concentremos agora na parte ímpar que é aquela com resultados fisicamente mais interessantes.

Seja $F(x)$ tal que

$$\frac{dF}{dx} = \mathcal{H}_0^i(x). \tag{3.2.26}$$

Logo $\tilde{\mathcal{H}}_0^i(k) = ik\tilde{F}(k)$. Como $\tilde{\mathcal{H}}_0^i(k)$ é ímpar, $\tilde{F}(k)$ é real e par em k. Assim, de (3.2.25), podemos escrever as ondas causadas pelo tsunami como

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re} \, \frac{e^{ikx}}{\cosh kh} i \, k \, \tilde{F}(k) \, \frac{1}{2} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\cosh kh} \, \tilde{F}(k) \, \frac{1}{2} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) dk. \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

As ondas mais rápidas e as primeiras a encontrarem uma praia correspondem às ondas mais longas e portanto a $k \approx 0$, como visto no capítulo 1. Tais ondas são denominadas *ondas líderes*. Para ondas longas, a velocidade de propagação é $C = (gh)^{1/2}$, conforme (1.3.28). Para valores pequenos do número de onda, a segunda integral em (3.2.27) é dominante. Para analisá-la, note que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\int_0^\infty \frac{e^{i(kx-\omega t)}}{\cosh kh}\tilde{F}(k)\,dk &\approx \operatorname{Re}\tilde{F}(0)\int_0^\infty e^{i(kx-\omega t)}\,dk\\ &\approx \operatorname{Re}\tilde{F}(0)\int_0^\infty e^{\left\{i\left[k\left(x-(gh)^{1/2}t\right)+\frac{1}{6}(gh)^{1/2}h^2k^3t\right]\right\}}\,dk, \quad (3.2.28)\end{aligned}$$

onde expandimos a função de fase $kx-\omega t$ para k pequeno usando as relações (1.3.28) e (1.3.25). Fazendo uma mudança de variavéis (veja exercício 3.1), podemos escrever (3.2.28) como

$$\pi\tilde{F}(0)\left(\frac{2}{(gh)^{1/2}h^2t}\right)^{1/3}\operatorname{Ai}\left(\left(\frac{2}{(gh)^{1/2}h^2t}\right)^{1/3}\left(x-(gh)^{1/2}t\right)\right),$$

onde Ai é a função de Airy, dada por

$$\operatorname{Ai}(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(z\alpha+\alpha^3/3\right).$$

Derivando em relação a x, obtemos

$$\begin{aligned}\eta &\approx \frac{\tilde{F}(0)}{2}\left(\frac{2}{(gh)^{1/2}h^2t}\right)^{1/3}\frac{d}{dx}\operatorname{Ai}\left(\left(\frac{2}{(gh)^{1/2}h^2t}\right)^{1/3}\left(x-(gh)^{1/2}t\right)\right)\\ &= \frac{\tilde{F}(0)}{2}\left(\frac{2}{(gh)^{1/2}h^2t}\right)^{2/3}\operatorname{Ai}'\left(\left(\frac{2}{(gh)^{1/2}h^2t}\right)^{1/3}\left(x-(gh)^{1/2}t\right)\right),\end{aligned} \quad (3.2.29)$$

onde

$$\operatorname{Ai}'=\frac{d}{dz}\operatorname{Ai}(z).$$

Podemos agora tirar conclusões físicas sobre as ondas líderes, aquelas que alcançariam uma praia primeiro. Por (3.2.29), vemos que a forma das primeiras cristas do tsunami seriam definidas pela primeira derivada da função de Airy com suas amplitudes atenuadas por um fator de $t^{-2/3}$. Na figura 3.1 é mostrada o gráfico desta função. As ondas líderes do tsunami possuirão cristas e cavados na mesma sequência e com intensidades proporcionais àquelas do gráfico de Ai' dependendo do sinal da constante $\tilde{F}(0)$. Para analisar este aspecto, observe que

$$\tilde{F}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x}\mathcal{H}_0^i(\xi)\,d\xi\,dx=-\int_{-\infty}^{\infty}x\mathcal{H}_0^i(x)\,dx.$$

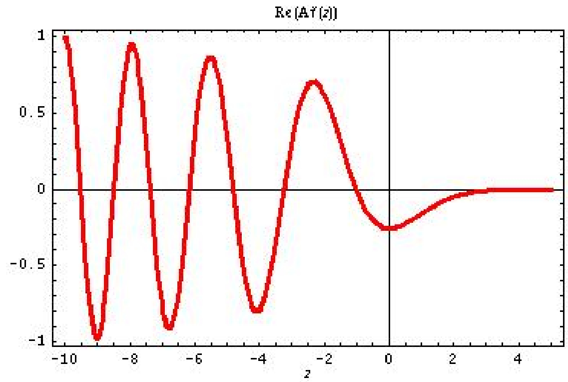

Figura 3.1: Gráfico de Ai′.

Assim, se na ruptura do fundo, o lado a direita abaixa e consequentemente (pois $\mathcal{H}_0^i(x)$ é ímpar) o lado a esquera levanta, $\tilde{F}(0) > 0$. Neste caso, a frente de ondas se propagando para a direita é liderada por uma depressão da superfície da água e cristas subsequentes mais altas. Como assinalado por Mei [24], isto reflete uma característica frequentemente relatada em ocasiões de tsunamis: recuada do mar na praia antes da chegada do tsunami e que a primeira crista não é a maior delas. Se a situação inversa acontece no deslocamento do fundo, $\tilde{F}(0) < 0$ e as ondas à direita são lideradas por elevações da superfície o que também é uma característica coerente com relatos, visto que nem sempre o fenômeno do recuo do mar antes da ocorrência do tsunami é observado.

Finalizando esta subseção, observamos que os resultados acima podem também ser obtidos usando as equações linearizadas de Boussinesq que modelam ondas longas e que em uma dimensão são equivalentes a

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{h^2}{3} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \right).$$

3.3 Generalizações e Parametrizações de Modelos de Tsunamis

Uma descrição tridimensional da superfície oceânica em um ponto $\boldsymbol{q} = (x, y)$ causada por um tsunami pode ser obtida como a seguinte generalização de (3.2.25).

$$\eta(\boldsymbol{q}, t) = \mathrm{Re}\, \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q} - \omega t)} \frac{H(k)}{\cosh kh}\, d\boldsymbol{k}, \qquad (3.3.30)$$

com espectro de deslocamento do fundo

$$H(k) = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{H}(\boldsymbol{\xi})\, e^{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi} - \omega\tau(\boldsymbol{\xi}))}\, d\boldsymbol{\xi},$$

onde $\mathcal{H}$ prescreve a o deslocamento do fundo, $k = |\boldsymbol{k}|$,

$$\omega(k) = \sqrt{gk \tanh kh}$$

e τ prescreve a distribuição temporal da perturbação do fundo.

Usando coordenadas polares (r, θ) e (ρ, α), a descrição de η acima pode ser escrita alternativamente como

$$\eta(r, \theta, t) = \mathrm{Re}\, \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{k\, e^{-i\omega t}}{\cosh kh} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) e^{i\,n\theta} H_n(k) \right) dk, \qquad (3.3.31)$$

onde

$$H_n(k) = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{H}(\boldsymbol{\xi})\, J_n(k\rho) e^{i(\omega\tau(\boldsymbol{\xi}) - n\alpha)}\, d\boldsymbol{\xi},$$

onde J_n são as funções de Bessel do primeiro tipo e de ordem n.

A forma acima pode ser simplificada para certos tipos de perturbações do fundo. Por exemplo, se a perturbação é radial e se $\tau \equiv 0$, a forma do tsunami correpondente é dada por

$$\eta(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{k\, \cos \omega t}{\cosh kh} J_0(kr) H_0(k)\, dk.$$

Usualmente, o tempo para o levantamento da falha é de alguns segundos. Levando em consideração que o período típico de ondas de um tsunami são de centenas de segundos, os deslocamentos do fundo são praticamente instantâneos e a hipótese de $\tau \equiv 0$ é uma boa aproximação.

Podemos agora nos perguntar de qual maneira a intensidade e outras características de um terromoto subaquático influencia as ondas do tsunami. Dentre os vários parâmetros que podem caracterizar o processo sísmico, podemos classificar três aspectos deles: momento, mecanismo e profundidade.

O momento é um produto da rigidez da rocha μ, área da falha A e do deslocamento médio $\Delta\mathcal{H}$. A magnitude do terremoto é então avaliada usando o momento, através de fórmulas parametrizadas empíricamente. O mecanismo M estipula a orientação da falha do terremoto e a direção do deslocamento sobre ela através de vetores normais à região com área A, que usualmente é idealizada como retângulos planos. A profundidade d do terremoto determina a distância da falha ao fundo.

Atribuindo valores aos parâmetros do terremoto pode-se parametrizar também o tsunami. Estes parâmetros são usados para determinar o espectro de deslocamento $H = H(k, \tau, \mu, A, \Delta\mathcal{H}, M)$. O subsequente emprego da fórmula (3.3.31) fornece assim uma simulação da propagação e forma do tsunami. Ward [43] fornce detalhes de parametrizações usualmente empregadas para tsunamis.

Tsunamis com características distintas daqueles gerados por levantamento do fundo oceânico podem ocorrer na natureza. Em particular, tsunamis gerados por deslizamentos submarinos são importantes. Tais tsunamis podem ser descritos por (3.3.30) especializando H. Em particular, para representar um deslizamento com velocidade v na direção x pode-se tomar $\tau = x/v$.

Tsunamis devido a deslizamentos podem ser mais severos que aqueles gerados por um terremoto sem esta característica. O vulcão de Cumbre Vieja na ilha de La Palma do arquipélado das ilhas Canárias possui uma fenda na direção norte-sul devido a erupções. Estudos indicam que uma futura erupção deste vulcão pode gerar um colapso do flanco leste da ilha de La Palma ocasionando um deslizamento de 15 a 500km^3 de rocha no mar. Simulações do tsunami resultante feitas por Ward e Day [44], usando as equações acima, mostraram que com uma velocidade $v = 100$m/s ondas podem atravessar o Oceano Atlântico e atingir o litoral entre o nordeste do Brasil até o Canadá com alturas entre 3-8 metros a 10-25 metros.

Outra classe de tsunamis de interesse são causados por impactos de cometas ou asteróiedes no oceano. Neste caso, modelos semelhantes ao acima podem ser usados. A diferença essencial é a ausência do fator $(\cosh kh)^{-1}$ já que tsunamis de impactos possuem comprimentos de ondas menores.

Por vezes, tsunamis são detectados por sensoriamento remoto. Recentemente, foi possível analisar com dados de satélites a passagem do tsunami ocorrido em 26 de dezembro de 2004 no Oceano Índico (ver Gower [7] e Bao et. al. [1]). Coincidentemente, este evento foi o mais forte do gênero que ocorreu, deste o ínicio de medições de ondas por satélites com altímetro, nos anos 1970's.

3.4 Ondas Fracamente Não-Lineares de Stokes

Desde a seção 1.3 temos considerado ondas lineares, ou seja, temos usado a hipótese que a elevação da superfície livre e suas derivadas são pequenas em comparação com os comprimentos de onda. A idéia nesta seção é abandonar a hipótese acima e obter correções para a solução linear por meio da técnicas da perturbação. Esta diferente abordagem é por vezes denominada de teoria da amplitude finita, em contraposição à teoria linear ou de amplitude infinitesimal.

Consideremos o problema não-linear de ondas, em águas profundas, deduzido no capítulo 1:

$$\Delta\Phi = 0, \qquad -\infty < z < \eta(x,y,t),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \nabla\Phi \cdot \nabla\eta = 0, \qquad \text{em } z = \eta(x,y,t), \tag{3.4.32}$$

$$g\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 = 0, \qquad \text{em } z = \eta(x,y,t), \tag{3.4.33}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \to 0, \qquad z \to -\infty. \tag{3.4.34}$$

Assuma que o potencial de velocidade Φ e a elevação da superfície livre possuam as seguintes expansões em séries de potencias.

$$\Phi(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \Phi_j(x,y,z,t), \tag{3.4.35}$$

$$\eta(x,y,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \eta_j(x,y,t), \tag{3.4.36}$$

onde ϵ é um parâmetro pequeno e proporcional à amplitude média das ondas.

Pela linearidade da equação de Laplace segue que $\Delta\Phi_j = 0$, $\forall j$.

Note que nas condições (3.4.32,3.4.33), Φ_j e suas derivadas são avaliadas para $z = \eta(x, y, t)$. Por exemplo, $\Phi_2 = \Phi_2(x, y, \eta_0(x, y, t) + \epsilon\eta_1(x, y, t) + \epsilon^2\eta_2(x, y, t), t)$. Levando este detalhe em consideração, substituindo as expansões de Φ e η na condição cinemática (3.4.32), obtemos a seguinte hierarquia de condições cinemáticas aproximadas.

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} = 0, \tag{3.4.37}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial \eta_0}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{\partial \eta_0}{\partial y} + \frac{\partial \eta_1}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \tag{3.4.38}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\frac{\partial \eta_0}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\frac{\partial \eta_0}{\partial y} + \frac{\partial \eta_2}{\partial t} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{\partial \eta_1}{\partial y} \\ &\quad - \eta_1\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y}\frac{\partial \eta_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y}\frac{\partial \eta_0}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y \partial y}\right),\end{aligned} \tag{3.4.39}$$

$$\vdots$$

Para usar a condição dinâmica, primeiro note que sua expansão de Taylor em torno de $z = 0$ é

$$\begin{aligned}\eta = &-\frac{1}{g}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi\right)_{z=0} \\ &+ \eta\frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{1}{g}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi\right)\right]_{z=0} + \ldots .\end{aligned} \tag{3.4.40}$$

Usando as expansões (3.4.35,3.4.36) em (3.4.40), obtemos

$$\eta_0 = 0, \tag{3.4.41}$$

$$g\eta_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = 0, \tag{3.4.42}$$

$$g\eta_2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)^2\right] + \eta_1\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t \partial z} = 0, \tag{3.4.43}$$

$$\vdots$$

As condições (3.4.39,3.4.39,...) e (3.4.42,3.4.43,...), assim como (3.4.40), devem ser satisfeitas em $z = 0$.

Usando (3.4.41), as condições de superfície livre aproximadas cinemáticas podem ser escritas como

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0, \tag{3.4.44}$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z \partial z}\eta_1, \tag{3.4.45}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \eta_n}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} = F_{n-1}, \tag{3.4.46}$$

e as condições dinâmicas, como

$$g\eta_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = 0, \tag{3.4.47}$$

$$g\eta_2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)^2\right] - \eta_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t \partial z}, \tag{3.4.48}$$

$$\vdots$$

$$g\eta_n + \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} = G_{n-1}, \tag{3.4.49}$$

onde F_{n-1} e G_{n-1} são operadores aplicados às funções η_k e Φ_k, para $k \leq n-1$. As condições acima devem ser satisfeitas em $z = 0$ e portanto o procedimento de perturbação empregado gera uma aproximação do problema em torno da posição de equilíbrio da água.

Notamos, observando as estruturas das equações acima, que após resolver-se o problema de ordem 1, referente a ϵ^1, pode-se substituir esta solução nas equações do problema de ordem 2, usando-as como forçantes nas equações (3.4.45, 3.4.48). As soluções de ordem superior são obtidas repetindo este processo. As condições de superfície livre aproximadas somadas à equação de Laplace, a condições iniciais e a outras possíveis condições de contorno levam a soluções únicas Φ_k e η_k para cada ordem ϵ^k. As soluções obtidas truncando as expanções (3.4.35, 3.4.36) são ditas fracamente não-lineares.

O trabalho de Stokes [41] foi o primeiro a usar a idéia acima para obter soluções explícitas não-lineares. Tais soluções, denominadas *ondas de Stokes* são o ponto de partida para o estudo de ondas *não-lineares* *dispersivas.* Em particular, as soluções de Stokes mostraram a possibilidade de ondas periódicas em sistemas não-lineares e produzindo relações de dispersão dependentes da amplitude da onda. Este último caráter, embora simples, implica em importantes consequências para a descrição de propagação de ondas.

As ondas de Stokes assumem propagação na direção x e periódicos em x e em t. Usando expansões como (3.4.36) para a amplitude e a velocidade de fase, pode-se obter as relações de dispersão para as aproximações. Desta forma, pode-se interpretar esta solução não-linear como uma correção para a solução linear harmônica simples dada por (1.3.23) e (1.3.22).

A solução, ou expansão, de Stokes, com termos de até ordem 3 explicitados é dada por

$$\begin{aligned} \Phi &= C\beta e^{kz}\mathrm{sen}(kx-\omega t), \\ \eta &= -a\cos(kx-\omega t) + \frac{1}{2}ka^2\cos 2(kx-\omega t) + \frac{3}{8}k^2a^3\cos 3(kx-\omega t) \\ &\quad + O(a^4), \end{aligned} \tag{3.4.50}$$

onde

$$\beta = a - \frac{9}{8}k^2a^3 + O(a^4)$$

e a velocidade de fase C é dada por

$$C^2 = \frac{g}{k}(1+\beta^2k^2) + O(\beta^4). \tag{3.4.51}$$

Note que a aproximação de primeira ordem de Stokes tem a velocidade de fase linear (1.3.27):

$$C^2 = \frac{g}{k}$$

e a relação de dispersão correspondente para águas profundas (1.3.29):

$$\omega^2 = gk.$$

A expressão (1.3.27) é uma relação de dispersão envolvendo a amplitude a, por vezes denominada dispersão de amplitude. Notamos através desta relação que ondas mais altas se propagam mais rapidamente que ondas baixas. Assim, com a teoria não-linear incorporamos na nossa descrição não apenas ondas mais altas como também ondas mais rápidas.

Note que não é necessário a convergência da expansão de Stokes para termos boas aproximações para o problema. É suficiente a validade *assintótica* das condições do problema para $\epsilon \to 0$. A convergência da expansão de Stokes implica na existência de ondas com amplitude finita *estacionárias* e *periódicas*. Levi-Civita [20] demonstrou esta convergência para valores suficientemente pequenos de ϵ, sem especificar o raio de convergência.

O problema de existência de ondas estacionárias não-lineares formulado nos trabalhos de Stokes e Levi-Civita (ver Okamoto & Shoji [29]) é objeto de pesquisa ainda hoje, onde teorias matemáticas mais sofisticadas são empregadas. Tais teorias incluem a formulação Hamiltoniana de ondas em água vista na seção 3.6.

3.5 Equação Não-Linear de Schrödinger

A solução linear (1.3.20) e a solução fracamente não-linear (3.4.50) representam ondas periódicas, planas que são exemplos simples de um *trem de ondas*. Empregando um conceito mais amplo de trem de ondas podemos permitir que a amplitude, frequência e número de onda variem com o espaço e o tempo. Se estas variações são lentas em relação ao trem de onda original, podemos identificar assim a onda portadora e as modulações ou variações dele. Em termos mais precisos, escreveremos

$$\omega = \omega_0 + \omega', \quad k = k_0 + k', \tag{3.5.52}$$

onde ω_0 e k_0 são constantes e ω' e k' são as perturbações na frequência e no número de onda. Introduzimos também o *envelope de ondas* complexo por

$$A(x,t) = a(x,t)e^{i(k'x-\omega't)}.$$

Embora as perturbações sejam pequenas em relação as propriedades ω_0 e k_0 da onda portadora, a modulação total, depois de um longo tempo, não é necessariamente pequena.

Note que de (3.4.51),

$$\omega = (gk)^{1/2}(1 + k^2a^2)^{1/2} + O(k^3a^3).$$

Expandindo a raíz quadrada $(1 + k^2a^2)^{1/2}$ em série de taylor para ka pequeno, obtemos

$$\omega(k) = (gk)^{1/2}(1 + \frac{1}{2}k^2a^2) + O(k^3a^3). \tag{3.5.53}$$

Expandindo agora $\omega(k)$ em torno de k_0 e mantendo termos de ordem 2, obtemos para a frequência e número de onda pertubados a expressão

$$\omega' - \frac{\omega_0}{2k_0}k' + \frac{\omega_0}{8k_0^2}k'^2 + \frac{1}{2}\omega_0 k_0^2 a^2 = 0. \tag{3.5.54}$$

Assim como uma transformada de Fourier coverte operadores diferenciais em operadores algébricos, em um sistema de ondas lineares existe uma correspondência entre sua relação de dispersão e a equação diferencial governante. Tal correpondência, que pode ser justificada com rigor, se traduz em

$$-i\omega' \to \frac{\partial}{\partial t}, \quad ik' \to \frac{\partial}{\partial x}. \tag{3.5.55}$$

Esta correpondência é aplicável a sistemas fracamente não-lineares onde o termo não-linear não depende de k', que é o caso de (3.5.54). Assim, de (3.5.55), obtemos um operador diferencial correspondente que aplicado ao envelope de ondas complexo fornece

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\omega_0}{2k_0}\frac{\partial A}{\partial x}\right) - \frac{\omega_0}{8k_0^2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\omega_0 k_0^2 |A|^2 = 0. \tag{3.5.56}$$

Esta é a equação não-linear de Schrödinger, denotada por NLS e usada em vários campos da física-matemática. O argumento eurístico utilizado acima para a dedução desta equação pode ser substituído por uma variedade de métodos tais como múltipla escalas, formulação Lagrangiana ou o método espectral utilizado na dedução de Zakharov [48].

Vários estudos foram relizados sobre a duração das ondas de Stokes, ou equivalentemente sobre a estabilidade destas no tempo. Trabalhos sobre este tema se somam e são marcados pelo resultado clássico e original de Benjamin e Feir [2], que demonstraram a existênica de instabilidades em ondas de Stokes. A instabilidade de Benjamin-Feir, também chamada de instabilidade de banda lateral, é causada quando a frequência perturbada que tem duas componentes laterais à frequência da onda portadora, tem parte imaginária. Isto causa uma *quebra* do caráter periódico das ondas de Stokes. Estes estudos podem envolver equações governantes como a equação não-linear de Schrödinger.

3.6 Formulação Hamiltoniana para Ondas em Água

Nesta seção abordaremos a teoria para uma reformulação das equações do problema não-linear de ondas. Usaremos conceitos do cálculo variacional.

Começamos esta seção com uma definição: suponha que $H(f, g)$ é um funcional que depende suavemente das funções $f = f(\boldsymbol{x}, t)$ e $g = g(\boldsymbol{x}, t)$. O sistema

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta g}, \quad \frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta f}, \tag{3.6.57}$$

é denominado um *sistema Hamiltoniano* e H é o *Hamiltoniano.* O símbolo $\frac{\delta}{\delta f}$ denota derivada funcional e as equações (3.6.57) são chamadas de *equações de Hamilton.* f e g são ditas *variáveis conjugadas.*

Note que o Hamiltoniano é uma constante de movimento:

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{\delta H}{\delta f}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\delta H}{\delta g}\frac{\partial g}{\partial t}\\ &= \frac{\delta H}{\delta f}\frac{\delta H}{\delta g} + \frac{\delta H}{\delta g}\left(-\frac{\delta H}{\delta f}\right) = 0.\end{aligned}$$

As equações de Hamilton generalizam a terceira lei de Newton $F = ma = mdv/dt$ para sistemas onde o momento não é simplesmente massa vezes velocidade. Muito é conhecido sobre (3.6.57) e inúmeros fenômenos físicos são descritos por estas equações, tendo elas sido estudadas sob quase qualquer ponto de vista imaginável. Sua notação compacta pode expressar naturalmente o conceito de *integrabilidade* do sistema. Conceito este que indica se o sistema pode ser explicitamente resolvido para condições iniciais arbitrárias. Outro benefício da formulação Hamiltoniana é que esta favorece o emprego simplificado e padronizado da teoria de perturbação.

Parece portanto muito desejável exprimir o problema de ondas através das equações de Hamilton. Frequentemente, o Hamiltoniano representa a energia do sistema. Assim, para o caso de ondas em água, as densidades para as energias potencial e cinética, dadas por (1.3.40), são

$$E_p = gz \quad \text{e} \quad E_c = \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2.$$

A energia total na água então poderia fornecer o Hamiltoniano para ondas em água. Ou seja,

$$
\begin{aligned}
H &= \iint\limits_{\Omega} \left(\int_0^{\eta} E_p \, dz + \int_{-h}^{\eta} E_c \, dz \right) dx \, dy, \\
&= \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} \left(g\eta^2 + \int_{-h}^{\eta} |\nabla \Phi|^2 \, dz \right) dx \, dy, \qquad (3.6.58)
\end{aligned}
$$

onde o domínio horizontal Ω pode ser o $\mathbb{R}^2$ ou um comprimento de onda, dependendo se o problema for transiente, e neste caso assumindo $\eta, \Phi \to 0$ quando $x^2 + y^2 \to \infty$ ou estacionário com η e Φ periódicas em x e y.

Em seu influente artigo *Estabilidade de ondas periódicas de amplitude finita na superfície de um fluido profundo* [48], Zakharov observou que a elevação da superfície η e a condição de Dirichlet na superfície livre $\Psi = \Phi(x, y, \eta, t)$ determinam completamente o movimento das ondas e que η e Ψ são variáveis conjugadas para uma formulação Hamiltoniana para o problema não-linear de ondas em água. Precisamente, temos que as equações

$$
\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \Psi}, \qquad (3.6.59)
$$

$$
\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta}, \qquad (3.6.60)
$$

com H dado por (3.6.58), são equivalentes às condições de supefície livre (3.4.32) e (3.4.33).

Embora a dedução original é feita para águas profundas, a extensão para profundidades intermediárias é facilmente obtida.

O problema completamente não-linear para ondas em água pode então ser formulado por (3.6.59, 3.6.60) e (1.1.6, 1.2.14).

A maior dificuldade técnica desta formulação é expressar a integral $\int_{-h}^{\eta} |\nabla \Phi|^2 \, dz$ como um funcional de η e Φ. Pode-se contudo obter aproximações assintóticas para este termo e para o Hamiltoniano em regimes de interesse como o de ondas longas. De fato, através deste tipo de procedimento, pode-se deduzir as equações de Boussinesq e a equação KdV.

3.7 Formulação Variacional

Nesta seção, continuaremos a usar conceitos do cálculo variacional. Para uma funcional

$$J(f) = \iint\limits_R L(f_t, f_x, f)\, dtd\boldsymbol{x},$$

o *princípio variacional* denotado por $\delta J = 0$ requer que $J(f)$, sobre qualquer região R finita, seja estacionário. Equivalentemente, que J seja minimizado. O sentido matemático preciso deste carácter estacionário pode ser consultado em [45, seção 13.2] ou em um livro sobre cálculo variacional.

É bem conhecido que a equação de Laplace, por exemplo, segue do princípio variacional

$$\delta \iint \frac{1}{2}(\nabla f)^2\, d\boldsymbol{x}dt = 0.$$

Para ondas em água, Luke [22] (veja também [45]) mostrou que o princípio variacional

$$\delta \iint\limits_R P\, d\boldsymbol{x}dt = 0,$$

onde P é a pressão dada pela equação de Bernoulli, fornece as equações do problema de ondas em água (1.1.6, 3.4.32, 3.4.33, 1.2.14). Ou seja, o problema de ondas em água completo decorre de

$$\delta \iint\limits_X L\, d\boldsymbol{x}_0 dt = 0, \tag{3.7.61}$$

onde

$$L = -\rho \int_{-h}^{\eta} \left(\Phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + gz \right) dz.$$

Aqui $\boldsymbol{x}_0 = (x, y)$ e X é uma região arbitrária no espaço $(\boldsymbol{x}_0, t)$. O operador L é denominado Lagrangiano do sistema.

O princípio variaconal (3.7.61) também fornece as equações de Hamilton (3.6.59) e (3.6.60) conforme Miles [27].

3.8 Conservação de Energia

Uma forma de obter uma equação para a variação da energia de ondas é utilizar o princípo variacional médio. Basicamente, consideraremos uma média do Lagrangiano sobre todas as fases $\alpha = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_0 - \omega t$. Assim,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L\, d\alpha. \tag{3.8.62}$$

Assumimos trens de onda dados por

$$\Phi(\alpha, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n}\cosh nkz \operatorname{sen} n\alpha, \tag{3.8.63}$$

$$\eta(\alpha) = a\cos\alpha + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos n\alpha. \tag{3.8.64}$$

Assumiremos que as expressões acima são expansões do tipo Stokes, ou seja, os coeficientes a_n e A_n são $O(a^n)$. Com isso, os coeficientes A_1, A_2 e a_1 podem ser eliminados resovendo as equações variacionais

$$\mathcal{L}_{A_1} = 0, \quad \mathcal{L}_{A_2} = 0, \quad \mathcal{L}_{a_1} = 0.$$

Embora a execução deste procedimento seja enfadonha, a expressão obtida posterioremente para $\mathcal{L}$ é compensadora:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\bar{E}\left(\frac{\omega^2}{gk\tanh kh} - 1\right) - \frac{1}{2}\frac{k^2\bar{E}^2}{\rho g}\left(\frac{9\tanh^4 kh - 10\tanh^2 kh + 9}{8\tanh^4 kh}\right) + O(\bar{E}^3),$$

onde $\bar{E} = \frac{1}{2}\rho g a^2$ é a densidade de energia para ondas lineares, conforme (1.3.43), e pode ser interpretado como o parâmetro da amplitude, em vez de a.

Usando agora o princípio variacional

$$\delta \iint \mathcal{L}(\omega, \boldsymbol{k}, \bar{E})\, d\boldsymbol{x}_0 dt = 0,$$

temos para as variações em $\bar{E}$ e α,

$$\mathcal{L}_{\bar{E}} = 0 \quad \text{e} \tag{3.8.65}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_\omega - \nabla\cdot\mathcal{L}_{\boldsymbol{k}} = 0, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}_0}\omega = 0, \tag{3.8.66}$$

respectivamente. A relação (3.8.65) fornece a relação de dispersão

$$\frac{\omega^2}{gk\tanh kh} = 1 + \frac{9\tanh^4 kh - 10\tanh^2 kh + 9}{8\tanh^4 kh}\frac{k^2\bar{E}}{\rho g} + O(\bar{E}^2),$$

em concordância com (3.4.51). A primeira aproximação fornece a frequência da teoria linear $\omega_0 = \sqrt{gk\tanh kh}$.

A equação (3.8.66) fornece a lei de conservação de energia

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\bar{E}}{\omega_0} + \nabla\cdot\left(\mathbf{C}_g\frac{\bar{E}}{\omega_0}\right) + O(\bar{E}^2) = 0, \qquad (3.8.67)$$

onde $\mathbf{C}_g$ é a velocidade de grupo $\nabla_{\boldsymbol{k}}\cdot\omega$ dada por

$$\mathbf{C}_g = -\mathcal{L}_{\boldsymbol{k}}/\mathcal{L}_\omega.$$

Em termos da *ação da ondas*, definida por $\mathcal{N} = \bar{E}/\omega_0$, temos a equação do balanço de ação

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{N} + \nabla\cdot(\mathbf{C}_g\mathcal{N}) = 0, \qquad (3.8.68)$$

onde os termos não-lineares foram omitidos.

3.9 Equação de Zakharov

A generalização da equação não-linear de Schrödinger para ondas tridimensionais é trivial; possui o termo adicional de segunda ordem $\frac{\omega_0}{4k_0^2}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$. Trabalhos sobre instabilidades de ondas de Stokes em três dimenções usando a NLS tridimensional indicaram que a região de instabilidade seria ilimitada e que a energia de ondas é transferida para fequências arbitrarias, que não apenas aquelas dentro do intervalo de variação usado para obter a NLS. Martin e Yuen [23] mostraram que eventualmente soluções saiam do domínio de validade da NLS.

Dadas as limitações da NLS para a descrição da evolução de ondas em água em três dimensões, poderemos nos questionar quais hipoteses na deducao da NLS foram demasiadamente restritivas. Na dedução da NLS por Zakharov, pode-se observar que é assumido que a energia é confinada a uma banda estreita de frequências em torno daquela da onda portadora. Portanto podemos empregar a equação intermediária na dedução proposta por Zakharov, antes das hipóteses de banda estreita serem feitas. Esta equação intermediária é uma equação integro-diferencial, descreve fenômenos de instabilidade tridimensionais e constitui uma ferramenta importante para o estudo de ondas fracamente não-lineares. A seguir daremos uma dedução da equação de Zakharov.

Como na seção 3.6, seja $\Psi(\boldsymbol{x}, t)$ o potencial de velocidade na superfície, ou seja,

$$\Psi(\boldsymbol{x}, t) = \Phi(\boldsymbol{x}, \eta(\boldsymbol{x}, t), t).$$

Escreva as condições de superfície livre (3.4.32) e (3.4.33) em termos de Ψ, η e da velocidade vertical Φ_z como

$$\eta_t + (\nabla_{\boldsymbol{x}}\Psi) \cdot (\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta) - \Phi_z[1 + (\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta)^2] = 0,$$
$$\Psi_t + g\eta + \frac{1}{2}(\nabla_{\boldsymbol{x}}\Psi)^2 - \frac{1}{2}\Phi_z[1 + (\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta)^2] = 0.$$

Seguindo Yuen e Lake [47], usamos a transformada de Fourier do potencial de velocidade:

$$\Phi(\boldsymbol{k}, z, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\boldsymbol{x}, z, t) \exp(-i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

Para não sobrecarregar a leitura a seguir, note que a única distinção, em nossa notação, que fazemos entre uma função e sua transformada de Fourier está em seu argumento.

A equação de Laplace requer que $\Phi(\boldsymbol{k}, z, t)$ seja da forma

$$\Phi(\boldsymbol{k}, z, t) = \psi(\boldsymbol{k}, t) \exp(|\boldsymbol{k}|z). \tag{3.9.69}$$

Invertendo (3.9.69) e avaliando o resultado na superfície livre fornece a seguinte expressão para o potencial na superfície.

$$\Psi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\boldsymbol{k}, t) \exp(|\boldsymbol{k}|\eta(\boldsymbol{x}, t) \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{k}. \tag{3.9.70}$$

Assumindo que $|\boldsymbol{k}|\eta$ pequeno, substituímos a série de Taylor até segunda ordem $\exp(|\boldsymbol{k}|\eta) = 1 + |\boldsymbol{k}|\eta + \frac{1}{2}(|\boldsymbol{k}|\eta)^2$ em (3.9.70), obtendo

$$\begin{aligned}\Psi(\boldsymbol{x}, t) = {} & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\boldsymbol{k}, t) \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{k} \\ & + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\boldsymbol{k}, t) \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x})|\boldsymbol{k}|\eta\, d\boldsymbol{k} \\ & + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\boldsymbol{k}, t) \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x})(|\boldsymbol{k}|\eta)^2\, d\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

Usando a relação

$$\eta(\boldsymbol{k},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \eta(\boldsymbol{x},t)\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},$$

fornece

$$\begin{aligned}
\Psi(\boldsymbol{x},t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\boldsymbol{k},t)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{k} \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^2}\psi(\boldsymbol{k},t)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})|\boldsymbol{k}|\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\boldsymbol{k_1},t)\exp(i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{k_1}\,d\boldsymbol{k} \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\boldsymbol{k},t)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\frac{1}{2}|\boldsymbol{k}|^2\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\boldsymbol{k_1},t)\exp(i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x})\;\;d\boldsymbol{k_1} \\
&\qquad\times\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\boldsymbol{k_2},t)\exp(i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{k_2}\,d\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

Trocando as ordens de integração, obtemos

$$\begin{aligned}
\Psi(\boldsymbol{x},t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\boldsymbol{k},t)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{k} \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{k}|\psi(\boldsymbol{k},t)\eta(\boldsymbol{k_1},t)\exp[i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k_1})\cdot\boldsymbol{x}]\,d\boldsymbol{k_1}\,d\boldsymbol{k} \\
&\qquad + \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}|\boldsymbol{k}|^2\psi(\boldsymbol{k},t)\eta(\boldsymbol{k_1},t)\eta(\boldsymbol{k_2},t) \\
&\qquad\quad\times\exp[i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k_1}+\boldsymbol{k_2})\cdot\boldsymbol{x}]\,d\boldsymbol{k_1}\,d\boldsymbol{k_2}\,d\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

Em termos da delta de Dirac

$$\delta(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},$$

a transformada de Fourier de Ψ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\Psi(\boldsymbol{k}) &= \psi(\boldsymbol{k}) + \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{k_1}|\psi(\boldsymbol{k_1})\eta(\boldsymbol{k_2})\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k_1}-\boldsymbol{k_2})\,d\boldsymbol{k_1}\,d\boldsymbol{k_2} \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}|\boldsymbol{k_1}|^2\psi(\boldsymbol{k_1})\eta(\boldsymbol{k_2})\eta(\boldsymbol{k_3}) \\
&\times \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k_1}-\boldsymbol{k_2}-\boldsymbol{k_3})\,d\boldsymbol{k_1}\,d\boldsymbol{k_2}\,d\boldsymbol{k_3} + \cdots, \qquad (3.9.71)
\end{aligned}$$

onde a dependência no tempo de Ψ, ψ e η está implícita. Invertendo (3.9.71) iterativamente, temos

$$\psi(\boldsymbol{k}) = \Psi(\boldsymbol{k}) - \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{k_1}| \Psi(\boldsymbol{k_1}) \eta(\boldsymbol{k_2}) \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k_1} - \boldsymbol{k_2})\, d\boldsymbol{k_1}\, d\boldsymbol{k_2}$$

$$- \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} |\boldsymbol{k_1}| (2|\boldsymbol{k_1}| - |\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k_1}| - |\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k_2}| - |\boldsymbol{k_1} - \boldsymbol{k_2}| - |\boldsymbol{k_1} + \boldsymbol{k_3}|)$$
$$\times \Psi(\boldsymbol{k_1}) \eta(\boldsymbol{k_2}) \eta(\boldsymbol{k_3}) \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k_1} - \boldsymbol{k_2} - \boldsymbol{k_3})\, d\boldsymbol{k_1}\, d\boldsymbol{k_2}\, d\boldsymbol{k_3} + \cdots .$$

Escrevendo as condições de contorno (3.4.32–3.4.33) em termos de $\Psi(\boldsymbol{k})$ e $\eta(\boldsymbol{k})$, teremos

$$\begin{aligned} &\eta_t(\boldsymbol{k}) - |\boldsymbol{k}| \Psi(\boldsymbol{k}) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} (|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k_1}| - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k_1}) \Psi(\boldsymbol{k_1}) \eta(\boldsymbol{k_2}) \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k_1} - \boldsymbol{k_2})\, d\boldsymbol{k_1}\, d\boldsymbol{k_2} \\ &+ \frac{1}{16\pi^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k_1}| (2|\boldsymbol{k}| + 2|\boldsymbol{k_1}| - |\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k_2}| - |\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k_3}| - |\boldsymbol{k_1} - \boldsymbol{k_2}| - |\boldsymbol{k_1} - \boldsymbol{k_3}|) \\ &\quad \times \Psi(\boldsymbol{k_1}) \eta(\boldsymbol{k_2}) \eta(\boldsymbol{k_3}) \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k_1} - \boldsymbol{k_2} - \boldsymbol{k_3})\, d\boldsymbol{k_1}\, d\boldsymbol{k_2}\, d\boldsymbol{k_3} + \cdots = 0, \end{aligned} \tag{3.9.72}$$

e

$$\begin{aligned} &\Psi(\boldsymbol{k}) + g\eta(\boldsymbol{k}) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} (|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k_1}| - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k_1}) \Psi(\boldsymbol{k_1}) \Psi(\boldsymbol{k_2}) \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k_1} - \boldsymbol{k_2})\, d\boldsymbol{k_1}\, d\boldsymbol{k_2} \\ &+ \frac{1}{16\pi^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k_1}| (2|\boldsymbol{k_1}| + 2|bkb| - |\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k_1}| - |\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k_2}| - |\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k_3}| - |\boldsymbol{k_1} + \boldsymbol{k_3}|) \\ &\quad \times \Psi(\boldsymbol{k_1}) \eta(\boldsymbol{k_2}) \eta(\boldsymbol{k_3}) \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k_1} - \boldsymbol{k_2} - \boldsymbol{k_3})\, d\boldsymbol{k_1}\, d\boldsymbol{k_2}\, d\boldsymbol{k_3} + \cdots = 0. \end{aligned} \tag{3.9.73}$$

Definindo a *amplitude complexa* $a(\boldsymbol{k}) = a(\boldsymbol{k}, t)$ por

$$a(\boldsymbol{k}) = \left(\frac{\omega(\boldsymbol{k})}{2|\boldsymbol{k}|}\right)^{1/2} \eta(\boldsymbol{k}) + i \left(\frac{|\boldsymbol{k}|}{2\omega(\boldsymbol{k})}\right)^{1/2} \Psi(\boldsymbol{k}),$$

as relações entre $\eta(\boldsymbol{x}, t)$ e Ψ com $a(\boldsymbol{k}, t)$ serão

$$\begin{aligned} \eta(\boldsymbol{x}, t) &= \left(\frac{|\boldsymbol{k}|}{2\omega(\boldsymbol{k})}\right)^{1/2} [a(\boldsymbol{k}, t) + a^*(\boldsymbol{k}, t)], \qquad (3.9.74) \\ \Psi(\boldsymbol{k}, t) &= -i \left(\frac{g}{2\omega(\boldsymbol{k})}\right)^{1/2} [a(\boldsymbol{k}, t) - a^*(\boldsymbol{k}, t)]. \end{aligned}$$

As equações (3.9.72) e (3.9.73) podem ser combinadas em uma só. Usando uma ligeira generalização da notação[1] empregada por Stiassnie e Shemer[39], obtemos

$$a_t(\boldsymbol{k}) + i\omega(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + i \sum_{n=1}^{3} \iint_{-\infty}^{\infty} V^{(n)}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}) C_{2n}(a)\, d\boldsymbol{k_1}\, d\boldsymbol{k_2}$$
$$+ i \sum_{n=1}^{4} \iiint_{-\infty}^{\infty} W^{(n)}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3}) C_{3n}(a)\, d\boldsymbol{k_1}\, d\boldsymbol{k_2}\, d\boldsymbol{k_3} = 0, \qquad (3.9.75)$$

onde

$$C_{ln}(c(\boldsymbol{k})) = \left(\prod_{m=1}^{n-1} c^*(\boldsymbol{k}_m)\right) \left(\prod_{m=n}^{l} c(\boldsymbol{k}_m)\right) \delta \left(\boldsymbol{k} + \sum_{m=1}^{n-1} \boldsymbol{k}_m - \sum_{m=n}^{l} \boldsymbol{k}_m\right),$$

e $\sum_{m=n}^{l}$ e $\prod_{m=n}^{l}$ para $l < n$ são definidos como 0 e 1, respectivamente. Os coeficientes de interação são dados no apêndice. Assumimos agora que o campo de ondas pode ser dividido em um componente variando lentamente no tempo b e um pequeno, rápidamente variante componente b' e que a maior parte da energia nas ondas está contida em b. Então escrevemos

$$a(\boldsymbol{k}, t) = [\epsilon b(\boldsymbol{k}, \tau) + \epsilon^2 b'(\boldsymbol{k}, t')] \exp(-i\omega(\boldsymbol{k})t), \qquad (3.9.76)$$

onde ϵ é um parâmetro pequeno descrevendo a magnitude da não-linearidade. Substituindo esta forma de a em (3.9.75) e mantendo

[1] Em nossa notação, o operador C_{ln} depende da função complexa $c(\boldsymbol{k}, t)$

termos de ordem $O(\epsilon^2)$ teremos

$$i\frac{\partial b'}{\partial t} = \iint_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{3} V^{(n)}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}) C_{2n}(b) \exp[i\,\Omega_{2n} t]\, d\boldsymbol{k_1}\, d\boldsymbol{k_2}, \qquad (3.9.77)$$

onde $\Omega_{ln} = \omega + \sum_{m=1}^{n-1} \omega_m - \sum_{m=n}^{l} \omega_m$. Observando que os termos envolvendo b' no lado direito de (3.9.77) não dependem de t', integrando com respeito a t' obtemos, na primeira ordem,

$$b'(\boldsymbol{k}, t') = -\iint_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{3} V^{(n)}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}) C_{2n}(b) \frac{\exp[i\,\Omega_{2n} t]}{\Omega_{2n}}\, d\boldsymbol{k_1}\, d\boldsymbol{k_2}. \qquad (3.9.78)$$

A constante de integração correspondente a fase inicial é assumida zero sem perda de generalidade. À ordem $O(\epsilon^3)$ temos

$$\begin{aligned} i\frac{\partial b}{\partial t} = & -\iint_{-\infty}^{\infty} V^{(1)}_{0,1,2}(b_1 b'_2 + b_2 b'_1)\delta_{0-1-2} \exp[i\,(\Omega_{21})t] \\ & + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} V^{(2)}_{0,1,2}(b^*_1 b'_2 + b_2 b'^*_1)\delta_{0+1-2} \exp[i(\Omega_{22})t] \\ & + \iint_{-\infty}^{\infty} V^{(3)}_{0,1,2}(b^*_1 b'^*_2 + b^*_2 b'^*_1)\delta_{0+1+2} \exp[i\,(\Omega_{23})t]\, d\boldsymbol{k_1}\, d\boldsymbol{k_2} \\ & + \iiint_{-\infty}^{\infty} W^{(2)}_{0,1,2,3} b^*_1 b_2 b_3 \delta_{0+1-2-3} \exp[i\,(\Omega_{32})t]\, d\boldsymbol{k_1}\, d\boldsymbol{k_2}\, d\boldsymbol{k_3}, \end{aligned} \qquad (3.9.79)$$

onde usamos a notação na qual os argumentos $\boldsymbol{k}_i$ são substituídos pelos índices i.

Os termos envolvendo $W^{(n)}$, $n = 1, 3, 4$, são abandonados baseado no argumento que as oscilações no tempo correspondentes seriam mais rápidas que o termo com $W^{(2)}$, e assim menores, quando integradas.

Substituindo a solução para b' de (3.9.78) em (3.9.79) e convertendo a uma forma simétrica, chegamos na equação de Zakharov:

$$i\frac{\partial b}{\partial t} = \iiint_{-\infty}^{\infty} T_{0,1,2,3} C_{32} \exp[i\,(\Omega_{32})t]\, d\boldsymbol{k_1}\, d\boldsymbol{k_2}\, d\boldsymbol{k_3}, \qquad (3.9.80)$$

onde $T_{0,1,2,3}$ é dado em termos de$V^{(n)}$ e $W^{(n)}$, no apêndice A.

Exercícios

3.1 Mostre que a integral

$$\frac{a}{2\pi}\int_0^\infty \cos\left[k\left(x-(gh)^{1/2}t\right)+\left(\frac{(gh)^{1/2}h^2t}{6}\right)k^3\right]\,dk$$

é reduzida a

$$\frac{a}{2}\left(\frac{2}{(gh)^{1/2}h^2t}\right)^{1/3}\mathrm{Ai}(z)$$

se a mudança de variáveis $z^3 = \frac{2\left(x-(gh)^{1/2}t\right)^3}{(gh)^{1/2}h^2t}$ e $k\left(x-(gh)^{1/2}t\right) = z\alpha$ é empregada.

3.2 Deduza a condição de superfície aproximada (3.4.43). Faça o mesmo, agora usando como ponto de partida a equação (3.4.33) no lugar de (3.4.40). Mostre que as condições aproximadas resultantes diferem por $\eta_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t\partial z}$.

Capítulo 4

Ondas Irregulares no Oceano

No capítulo 1, assumindo que o movimento das ondas tem amplitude pequena e que as condições de fronteira podem ser aplicadas na superfície média $z = 0$ em vez de em $z = \eta$, linearizamos o problema de ondas em água e obtemos soluções explíticas. Com este procedimento nos distanciamos da realidade física. Em várias aplicações é necessário recorrer a teorias não-lineares ou de amplitude finita. Contudo, apesar da sofisticação da teoria de ondas de amplitude finita, nela as ondas são essencialmente de uma única frequência. Existe claramente um período e comprimento e a soma de duas soluções não é em geral uma solução.

Por outro lado, como duas soluções do problema linear é também uma solução, podemos compensar as restrições feitas na linearização com a incorporação ao modelo matemático de todas aquelas ondas obtidas através de superposições de ondas senoidais.

De fato, é fácil de observar que tipicamente ondas em oceanos parecem desorganizadas e irregulares, sem uma direção, amplitude ou frequência definidas. A idéia central deste capítulo é ondas senoidais, lineares para descrever a superfície oceânica através de *espectro* de ondas, onde estão presentes diferentes frequências e direções.

4.1 Superposição de Soluções

Na seção 1.4 usamos a superposição, ou soma, de duas ondas para facilitar a apresentação do conceito de velocidade de grupo. O simples modelo de duas ondas senoidais combinadas pode descrever, por exemplo, interferência entre ondas, reflexão e até atenuação de ondas em uma praia, apenas variando as duas direções de incidência e amplitudes. Contudo, ainda é um modelo muito simples para representar a irregularidade do estado do mar. Poderíamos então ir além e somar um número arbitrário de componentes. O resultado seria uma descrição não mais monocromática (com uma única frequência) da superfície livre. De fato, podemos formar um campo de ondas com N vetores de onda k_n, frequências ω_n e amplitudes a_n na forma

$$\eta(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Re}\{a_n e^{-i(\boldsymbol{k}_n \cdot \boldsymbol{x} - \omega_n t)}\}, \tag{4.1.1}$$

com potenciais correpondentes na forma (1.3.20) ou (1.3.23). Escrevendo $\boldsymbol{k}_n = (k_n \cos\theta_n, k_n \operatorname{sen}\theta_n)$, onde θ_n indica a direção da componente de onda n, podemos escrever (4.1.1) como

$$\eta(x, y, t) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Re}\{a_n e^{-ik_n(x\cos\theta_n + y \text{ sen } \theta_n) + i\omega_n t}\}, \tag{4.1.2}$$

onde k_n depende de ω_n através da relação de dispersão.

Um poder de representação ainda maior teremos se usarmos infinitos componentes de ondas. Assim, tomando o limite quando $N \to \infty$ em (4.1.1), obtemos

$$\eta(\boldsymbol{x}, t) = \mathrm{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} a(\omega, \theta) e^{-ik(\omega)(x\cos\theta + y\mathrm{sen}\theta) + i\omega t}\, d\omega\, d\theta. \tag{4.1.3}$$

A expressão acima fornece uma descrição da superfície oceânica e é por vezes denominada de *pacote de ondas*. A integral acima será convergente no sentido de Riemann ou Lebesgue contanto que o *espectro de amplitude* $a(\omega, \theta)$ tenha quadrado integrável no domínio inteiro.

Neste momento observamos que ondas lineares superpostas, com diferentes frequências e direções, podem formar uma superfície intricada simulando a forma irregular da superfíce oceânica. Esta ideia é brilhantemente ilustrada na figura 4.1, por Pierson et. at. [34].

Uma reflexão sobre o modelo acima é agora proposta. Ao observar atentamente uma superfície marítima, podemos perceber, em geral, ondas se propagando em diferentes direções com comprimentos distintos e entrever a água se movimentando em direções concorrentes ao mesmo tempo em um mesmo ponto! Isto é representado pelo espectro

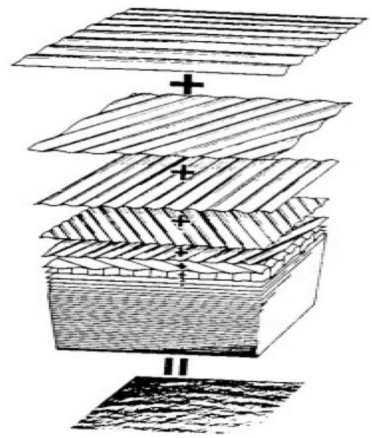

Figura 4.1: Superposição de ondas lineares formando uma superfície oceânica (de Pierson et. al [34])

de amplitude acima. Uma situação análoga seria enxergarmos duas ou mais componentes no espectro de cores. Você poder ver o azul contido na púrpura ou ainda o amarelo no verde ? Outra analogia que podemos pensar é um conjunto de notas musicais, cada uma com uma frequência distinta, soadas ao mesmo tempo, formando um acorde.

4.2 Descrição Estatística e o Espectro de Ondas

Consideremos agora o problema de descrever o estado do mar globalmente em grandes bacias marítimas. Em vez de procurarmos uma descrição determinística, adotaremos o ponto de vista estatístico, baseados na observação de que as ondas na superfície oceânica são quase sempre aleatórias e sua configuração varia de maneira irregular no espaço e tempo.

Uma medição estatística de interesse é a função de probabilidade conjunta $P(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. P é definida com a propriedade de que para qualquer domínio D no espaço n-dimensional das elevações da superfície livre $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ em pontos $(\boldsymbol{x}_1, t_1), (\boldsymbol{x}_2, t_2), \ldots, (\boldsymbol{x}_n, t_n)$, a probabilidade de que estas elevações estejam em D é dada por

$$Pr[\,(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in D\,] = \int_D P(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_1\; dy_2 \ldots dy_n.$$

Segue pela definição que

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(y_1, y_2, \dots, y_n)\ dy_1 = P(y_2, \dots, y_n). \tag{4.2.4}$$

Convencionalmente, a função densidade de probabilidade são normalizadas, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(y)\, dy = 1.$$

Definindo os momentos M_j de P por

$$M_j = \int_{\infty}^{\infty} y^j P(y)\, dy,$$

o valor esperado, que pode ser visto como uma média ponderada de η, é dado por M_1/M_0. Ou seja,

$$\bar{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} yP(y)\, dy,$$

já que $M_0 = 1$. A covariância da elevação da superfície livre é

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}[(\boldsymbol{x}_i, t_j), (\boldsymbol{x}_i, t_j)] &= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} y_i y_j P(y_i, y_j)\, dy_i\, dy_j \\ &= \overline{\eta(\boldsymbol{x}_i, t_i)\eta(\boldsymbol{x}_j, t_j)} \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

e a variância $\operatorname{var}[(\boldsymbol{x}, t)]$ é dada por

$$\operatorname{var}[(\boldsymbol{x}, t)] = \operatorname{cov}[(\boldsymbol{x}, t), (\boldsymbol{x}, t)]. \tag{4.2.6}$$

Portanto, usando (4.2.4), temos a seguinte relação.

$$\operatorname{var}[(\boldsymbol{x}, t)] = \operatorname{cov}[(\boldsymbol{x}, t), (\boldsymbol{x}, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 P(y)\, dy = \overline{\eta^2}(\boldsymbol{x}, t) = M_2. \tag{4.2.7}$$

Em circunstâncias naturais, a variação de cov é maior quando a diferença $(\boldsymbol{r}, t)$ entre $(\boldsymbol{x}_i, t_i)$ e $(\boldsymbol{x}_j, t_j)$ é comparável em magnitude com o comprimento de onda e do período das maiores ondas. Assim, focaremos os casos em que $\operatorname{cov}[(\boldsymbol{x}_i, t_i), (\boldsymbol{x}_j, t_j)] = \operatorname{cov}[(\boldsymbol{x}_0, t_0), (\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{r}, t_0 + t)]$ e por vezes, a dependência em $\boldsymbol{x}_0$ e t_0 não será explicitada. A hipótese de cov depender apenas do incremento $\boldsymbol{r}$ e da diferença de tempo

t, definem um campo de ondas *homogêneo* e *quase estacionário*. Um campo estacionário seria aquele independente de t. Não é necessário uma condição tão severa. Assumiremos um campo de ondas homogêneo e quase estacionário. Além disso a função de probabilidade conjunta é tal que média no nível da superfície livre é zero, ou seja, $M_1 = 0$.

Casos particulares de (4.2.5) são covariância da elevação *instantânea* da superfície livre

$$\mathrm{cov}[\boldsymbol{r}] = \mathrm{cov}[\boldsymbol{r}, 0] = \overline{\eta(\boldsymbol{x}_0, t_0)\eta(\boldsymbol{x}_0 + r, t_0)}$$

e a covariância para um ponto fixo, em função do tempo,

$$\mathrm{cov}[t] = \mathrm{cov}[0, t] = \overline{\eta(\boldsymbol{x}_0, t_0)\eta(\boldsymbol{x}_0, t_0 + t)}.$$

O espectro de ondas é a transformada de Fourier da covariância[1]:

$$\mathsf{F}(\boldsymbol{k}, \sigma) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{cov}[\boldsymbol{r}, t] e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \sigma t)}\, d\boldsymbol{r} dt, \tag{4.2.8}$$

onde Ω é o domínio espacial horizontal versus o intervalo de tempo considerado. A transformada inversa nos fornece

$$\mathrm{cov}[\boldsymbol{r}, t] = \iiint \mathsf{F}(\boldsymbol{k}, \sigma) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \sigma t)}\, d\boldsymbol{k} d\sigma. \tag{4.2.9}$$

Em particular,

$$\overline{\eta^2} = \iint \mathsf{F}(\boldsymbol{k}, \sigma)\, d\boldsymbol{k} d\sigma. \tag{4.2.10}$$

A relação acima é de grande importância. Note que a média do quadrado de η pode ser usada para definir a energia média total de ondas, de acordo com (1.3.43). Ou seja $\bar{E} = \rho g \overline{\eta^2}$. Assim,

$$\bar{E} = \rho g \iint \mathsf{F}(\boldsymbol{k}, \sigma)\, d\boldsymbol{k} d\sigma \tag{4.2.11}$$

e portanto o espectro de ondas pode ser interpretado como a densidade de energia por unidade de volume do espaço número de onda-frequência.

[1] Este resultado pode ser formalizado através do teorema de Wiener-Khintchine [28]

Formas alternativas do espectro de ondas podem ser obtidas. Integrando em σ, o espectro de vetor de onda é dado por

$$\mathsf{F}(\boldsymbol{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{F}(\boldsymbol{k}, \sigma)\, d\sigma. \tag{4.2.12}$$

As componentes de ondas obedecem a uma relação de dispersão. Assim, o domínio de $\boldsymbol{k} = (k\cos\theta, k\,\mathrm{sen}\theta)$ e $\sigma = \omega$ estão correlacionados. Em águas profundas, $\sigma^2 = \omega^2 = gk$. Como consequência podemos expressar o vetor de onda em termos das direções de propagação e das frequências dos componentes do espectro. Usando as coordenadas polares (k, θ) com $k\,dk = (2\omega^3/g^2)\,d\omega$, temos de (4.2.12),

$$\begin{aligned}\overline{\eta^2} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \mathsf{F}(k,\theta)\, kdk\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} F(\omega,\theta)\, d\omega\, d\theta,\end{aligned}$$

onde

$$F(\omega,\theta) = \frac{2\omega^3}{g^2}\mathsf{F}(k,\theta) \tag{4.2.13}$$

é denominado espectro direcional sendo muito utilizado em modelagem numérica de ondas, medições de campo e em previsões de ondas. O espectro da frequência é dado por

$$\hat{F}(\omega) = \int_0^{2\pi} F(\omega,\theta)\, d\theta.$$

Podemos definir os momentos do espectro de ondas por

$$m_i = \int_0^{\infty} \omega^i \hat{F}(\omega)\, d\omega,$$

e vemos que $m_0 = M_2$.

Pode-se estabelecer uma relação entre o espectro de ondas e o espectro de amplitude definido na seção 4.1. Calculando a média do quadrado de η diretamente por (4.1.3) teremos

$$\begin{aligned}\overline{\eta^2} = \frac{1}{2}\overline{\iint e^{-ik(\omega)(x\cos\theta + y\mathrm{sen}\theta)+i\omega t}\, da(\omega,\theta)} \\ \overline{\times \iint e^{-ik(\omega')(x\cos\theta' + y\mathrm{sen}\theta')+i\omega' t}\, da^*(\omega',\theta')},\end{aligned}$$

onde $()^*$ denota complexo conjugado. Pode ser mostrado que as únicas contribuições para esta média ocorrem se $(\omega, \theta) = (\omega', \theta')$ e obtemos

$$\overline{\eta^2} = \frac{1}{2} \iint da(\omega, \theta)\, da^*(\omega', \theta') = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta)\, d\omega d\theta.$$

Como consequência imediata segue que o espectro de ondas de um campo de ondas estacionário e homogêneo é real e positivo.

4.3 Altura de Onda

Analisaremos nesta seção propriedades estatísticas da altura de onda H. Esta variável randômica é definida como $H = 2a$. Precisamos definir a função densidade de probabilidade f para a altura de ondas indicando que a probabilidade de uma altura H entre H_1 e H_2 ocorrer é

$$\Pr[H_1 \leq H \leq H_2] = \int_{H_1}^{H_2} f(s)\, ds.$$

Assumindo que a energia de ondas está altamente concentrada na vizinhança ou banda de uma certa frequência, ou seja, assumindo que a ocorrência da altura de ondas é uma processo de *banda estreita*, tem-se que

$$f(s) = \frac{2s}{R}\, e^{-s^2/R}, \qquad 0 \leq s < \infty, \tag{4.3.14}$$

onde R é um parâmetro que pode ser relacionado com o espectro de ondas por

$$R = 8m_0. \tag{4.3.15}$$

Esta é a distribuição de probabilidade de Rayleigh e foi primeiramente utilizada para a previsão de amplitude de ondas por Longuet-Higgins [21]. Comparações de (4.3.14) com dados observacionais demonstram a adequacidade desta função densidade de probabilidade. Para estados de mar severos, onde o campo de ondas é muito mais irregular, a hipótese de banda estreita se torna uma aproximação menos acurada e (4.3.14) pode ser corrigida, como veremos posteriormente.

4.3.1 Altura Significativa de Ondas

Determinar a altura de ondas em todos os pontos na superfície de um oceano inteiro para cada instante de tempo é uma tarefa intratável.

Por outro lado, podemos utilizar médias das alturas das ondas para várias porções do oceano. A *altura significativa de ondas* é o conceito mais comumente utilizado em medições in situ e remotas e em modelagem matemática. Para defini-la, suponha que todas as alturas medidas ou observadas sejam dividas em três grupos; as menores, as intermediárias e o terço das maiores. A altura significativa é a média do terço das alturas mais altas. Contudo, não frequentemente esta definição é usada para cálculo. Podemos tornar esta quantidade mais precisa e facilmente calculável através do espectro de ondas.

Assumindo um espectro de banda estreita, as alturas de ondas podem ser estimadas usando a distribuição de probabilidade de Rayleigh, como vimos acima. Seja $s_{1/3}$ o limite inferior do terço das alturas mais altas. Assim a probabilidade de uma altura H exceder $s_{1/3}$ é $1/3$. Assim,

$$\Pr[H \geq s_{1/3}] = \int_{s_{1/3}}^{\infty} \frac{2s}{R}\, e^{-s^2/R}\, ds = \frac{1}{3}.$$

Integrando, obtemos

$$s_{1/3} = \ln 3\sqrt{R}. \tag{4.3.16}$$

Assim, a altura significativa de ondas é

$$\begin{aligned} H_s &= \frac{\int_{s_{1/3}}^{\infty} s f(s)\, ds}{\int_{s_{1/3}}^{\infty} f(s)\, ds} \\ &= \frac{s_{1/3} e^{-s_{1/3}^2/R} + \sqrt{\pi R}\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2}{R}} s_{1/3}\right)\right]}{\frac{1}{3}}, \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

onde Φ é chamada de *função distribuição cumulativa normal padrão* e é expressa por

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right], \end{aligned}$$

onde erf é a função erro definida por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Então, de (4.3.15), (4.3.16) e (4.3.17), temos

$$H_s = \left\{ \sqrt{\ln 3} + 3\sqrt{\pi} \left[1 - \Phi\left(\sqrt{2 \ln 3}\right) \right] \right\} \sqrt{8}\, \sqrt{m_0}. \qquad (4.3.18)$$

Aproximando o valor numérico acima, obtemos a seguinte definição para altura significativa de ondas.

$$H_s = 4\sqrt{m_0}. \qquad (4.3.19)$$

Ou seja, a altura significativa é quatro vezes a raíz quadrada da integral do espectro de ondas com a hipótese de um espectro de banda estreita. Vale observar que os valores da altura significativa calculado por modelos de previsão ou medido frequentemente estão de acordo com valores estimados por observadores de onda. Isto fortalece a idéia de H_s ser uma média adequada, ou *signicativa*, no sentido comum desta palavra.

O resultado acima pode ser generalizado para outras médias das alturas de ondas. Por exemplo, a média do $1/n$ das alturas mais altas pode ser calculada usando o mesmo procedimento. Obteremos

$$H_{1/n} = \left\{ \sqrt{\ln n} + n\sqrt{\pi} \left[1 - \Phi\left(\sqrt{2 \ln n}\right) \right] \right\} \sqrt{8}\, \sqrt{m_0}. \qquad (4.3.20)$$

Como

$$\Phi(z) \sim 1, \quad z \gg 1,$$

para n grande, (4.3.20) pode ser aproximada por

$$H_{1/n} = \sqrt{\ln n}\, \sqrt{8}\, \sqrt{m_0} = 2\sqrt{2 \ln n}\sqrt{m_0}.$$

Se a hipótese de banda estreita for abandonada, a altura significativa pode ser calculada pelo mesmo procedimento. Contudo, uma distribuição de probabilidade mais geral do que a de Rayleigh deve ser usada. Seguindo Ochi [28], a função densidade de probabilidade de uma altura máxima ζ acima do nível médio da superfície pode ser expressa por

$$f(\zeta) = \frac{2/\sqrt{m_0}}{1+\sqrt{1-\epsilon^2}} \left\{ \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon^2} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{m_0}} \right)^2 \right) \right.$$
$$+ \sqrt{1-\epsilon^2} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{m_0}} \right) \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{m_0}} \right)^2 \right)$$
$$\left. \times \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon} \frac{\zeta}{\sqrt{m_0}} \right) \right\}, \quad 0 \le \zeta < \infty, \quad (4.3.21)$$

onde

$$\epsilon = \sqrt{1 - m_2^2/m_0 m_4}.$$

O parâmetro ϵ é denominado *largura de banda* e é uma medida da área de frequência mais relevante do espectro de ondas. Um processo de banda estreita é representado por $\epsilon = 0$. É oportuno definir a *altura significativa* ϵ, calculada com (4.3.21) e denotada por $H_s^{(\epsilon)}$, com $H_s^{(0)} = H_s$. Os valores de ϵ observados no oceano variam entre 0.4 e 0.8. Calculando a altura significativa ϵ com estes valores de ϵ fornece

$$3,68 \le \frac{H_s^{(\epsilon)}}{\sqrt{m_0}} \le 3,94.$$

Assim, avaliar a altura significativa com a hipótese de banda estreita leva a uma superestimação de aproximadamente 1,5 a 8 por cento.

4.4 A Sétima Onda

A probabilidade de uma onda ser mais alta do que altura significativa é

$$\begin{aligned} \Pr[H > H_s] &= \int_{H_s}^{\infty} f(s)\, ds = -e^{\frac{-s^2}{8m_0}} \Big|_{H_s}^{\infty} \\ &= e^{-\frac{H_s^2}{8m_0}} \\ &= e^{-2} \qquad \text{por (4.3.15)} \\ &= 0.135\ldots \approx \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Portanto como a probabilidade de uma onda exceder o valor da altura significativa é um sétimo o que pode ser interpretado que existe uma forte probabilidade de uma onda grande, maior que a média H_s, ocorrer a cada sete ondas. Isto vem ao encontro do famoso dizer que a sétima onda é grande. Mesmo músicas como *Love is the seventh wave*, de Sting, e os versos *I'll wait for the ocean to rise up; And greet me as it rose up before , I'll know the time* de *Seventh Wave* de Devin Townsend fazem referências e popularizam este dito.

É interessante notar que a menor largura de banda observada no oceano, ou seja, $\epsilon = 0.4$, correpondendo a um campo de ondas relativamente regular, livre de tempestades locais, fornece, como uma aproximação de primeira ordem, uma probabilidade de 0,1436 de uma onda exceder a altura significativa. Esta probabilidade é ainda mais próxima de $\frac{1}{7}$!

4.5 Outros Parâmetros Estatísticos

Além da altura significativa, podemos definir outros parâmetros estatísticos de relevância para descrever o estado do mar. Tais definições usualmente usam o conceito de média estatística, definida como a razão entre o momento de ordem um e o momento de ordem zero com o domínio de integração sendo o espaço de amostra.

Assim, a altura média de ondas é

$$\bar{H} = \int_0^\infty s \left(\frac{2s}{R} e^{-s^2/R} \right) ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{R} = \sqrt{2\pi}\, \sqrt{m_0}.$$

Portanto, de (4.3.19), a razão entre a altura significativa e a altura média é

$$\frac{H_s}{\bar{H}} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{8/\pi} \approx 1,60,$$

o que evidencia o quanto a altura significativa é um valor superior à média de ondas.

A frequência e período médios são

$$\bar{\omega} = m_1/m_0 \quad \text{e} \quad \bar{T} = 2\pi/\bar{\omega},$$

respectivamente.

A frequência de pico e período de pico são os valores para os quais o espectro de ondas é máximo. Portanto,

$$\omega_p \quad \text{é o valor de } \omega \text{ tal que} \quad \frac{d\bar{F}(\omega)}{d\omega} = 0.$$

e

$$T_p = 2\pi/\omega_p.$$

As ondas tipo swell, ou marulho, como mencionamos na seção 1.4, são aquelas originadas por ventos distantes, normalmente devidos a tempestades, ciclones, etc. Portanto, são ondas antigas, que pelo efeito da dispersão se tornam mais longas, rápidas e com forma mais suave. Suas frequências são mais baixas. Podemos calcular a altura significativa dos marulhos indentificando a parte do espectro que correspondem a frequências baixas. Portanto,

$$H_{\text{swell}} = 4 \int_0^{\omega_{\text{swell}}} \bar{F}(\omega)\, d\omega.$$

A frequência máxima dos marulhos ω_{swell} pode ser ajustada de acordo com observações da região e clima de ondas que se está investigando. No modelo de previsão de ondas SWAN, o valor *default* de ω_{swell} é $2\pi\, 0,1$ Hz.

A direção média de ondas é convencionalmente definida por

$$\bar{\theta} = \arctan\left(\frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{sen}\theta\, F(\omega,\theta)\, d\omega d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \cos\theta\, F(\omega,\theta)\, d\omega d\theta} \right).$$

O número de onda médio é dado por

$$\bar{k} = \frac{\int_0^{\infty} k\, \bar{F}(\omega)\, d\omega}{\int_0^{\infty} \bar{F}(\omega)\, d\omega}$$

e o comprimento de onda médio, portanto, por $\bar{\lambda} = 2\pi/\bar{k}$.

Podemos definir a declividade significativa de ondas por

$$S = H_s/\bar{\lambda}.$$

Assim como as quantitades acima, podemos definir outros parâmetros estatísticos, geralmente por meio de momentos do espectro de ondas, que sejam de relevância à modelagem de ondas oceânicas.

4.6 A Equação do Balanço

Na seção 3.8, vimos uma equação regendo a evolução para densidade de energia

$$\bar{E} = \frac{1}{2}\rho g a^2 \tag{4.6.22}$$

por unidade de área da superfície livre. Podemos relacionar a densidade discreta acima com a densidade contínua de energia por unidade de espaço de vetor de onda, ou seja, o espectro de ondas. De (4.2.11) e (4.2.12) e (4.6.22), temos

$$\mathsf{F}(\boldsymbol{k})\Delta \boldsymbol{k} = \frac{1}{2}a^2$$

ou mais geralmente,

$$\mathsf{F}(\boldsymbol{k})\Delta \boldsymbol{k} = \frac{1}{2}\sum_n a_n^2.$$

Analogamente ao caso discreto, podemos definir a densidade contínua de ação de ondas por

$$N(\boldsymbol{k}) = \mathsf{F}(\boldsymbol{k})/\omega. \tag{4.6.23}$$

Considere agora a generalização do espectro de ondas para o caso em que há variações lentas no espaço e no tempo. Uma primeira aproximação da densidade de energia é então dada por

$$\bar{E}(\boldsymbol{x}, t) = \rho g \int \mathsf{F}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{k}.$$

A equação do balanço de ação (3.8.68) escrita para o espectro de ondas toma a forma [2]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{C}_g\right) N(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}, t) = 0.$$

A esta equação podem ser somados forçantes que influenciarão na propagação de ondas. Estas forçantes tomam a forma de termos fonte como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{C}_g\right) N(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}, t) = S_{in} + S_{nl} + S_{ds}, \tag{4.6.24}$$

[2]Este versão da equação do balanço foi deduzida por Willebrand [46]

onde S_{in} fornece a transferência de energia dos ventos para as ondas, S_{nl} representa a interação não-linear devido a grupos de quatro ondas resonantes e S_{ds} traduz a dissipação de energia devido a quebra de ondas em alto mar. Os processos físicos representados pelos termos fonte podem ser altamente não-lineares localmente. Contudo, se estes mecanismos forem *fracos na média* no sentido de causarem apenas mudanças moderadas no espectro, os termos fonte são quase-lineares no espectro de ondas, ou seja, $S = \gamma \mathsf{F}$, onde γ pode depender não-linarmente de outros parâmetros que não o espectro F.

A equação (4.6.24) pode também ser escrita para o espectro de ondas e expressa concisamente como

$$\frac{DF}{Dt} = S, \tag{4.6.25}$$

onde S é o termo fonte total.

Como veremos na seção 4.8, esta equação é a base de modelos de previsão de ondas oceânicas. Note que uma vez determinado o espectro de ondas $\mathsf{F}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}, t)$ ou equivalentemente $F(\omega, \theta, \boldsymbol{x}, t)$, parâmetros que descrevem o estado do mar, como a altura significativa ou os demais definidos na seção (4.5), podem ser facilmente obtidos por integração.

Outros termos fonte possam ser incluídos na modelagem como um termo para as interações triplas não-lineares em águas rasas ou para a difração de ondas na zona marginal de gelo.

4.7 Termos Fonte

A seguir descreveremos resumidamente como podem ser expressos os termos S_{in}, S_{nl} e S_{ds}.

4.7.1 Contribuição Atmosférica

Esboçaremos a teoria de escoamento de cisalhamento desenvolvida por Miles [25] para descrever a geração de ondas pelo vento. O ar é assumido não viscoso e incompressível e na ausência de ondas pode ser descrito como um escoamento de cisalhamento médio que varia apenas com a altura acima da superfície aquática. O perfil do vento na camada limite entre a atmosfera e o oceano pode ser descrito por

$$U(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln(z/z_0),$$

onde $u_* = (\tau)^{1/2}$ é a velocidade de fricção, τ sendo a tensão de cisalhamento na superfície; $\kappa = 0,4$ é a constante de von Kármán e z_0 é o comprimento de rugosidade.

As perturbações no vento induzidas pelas ondas são assumidas bidimensionais, com componentes $(u, 0, w)$.

A energia extraída do escoamento médio do vento por unidade de volume é dada por

$$\rho_a \overline{uw} \, \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{4.7.26}$$

onde ρ_a é densidade do ar e a média $\overline{uw}$ é a tensão induzida pelas ondas ou a tensão de Reynolds que aparece em teoria de instabilidade e é calculada como

$$\overline{uw} \approx \frac{\pi}{k} \frac{U''(z_c)}{U'(z_c)\overline{w^2}(z_c)}, \qquad z < z_c, \tag{4.7.27}$$

onde k é o número de onda e z_c é a altura crítica acima da superfície da água para a qual $U = C$, onde $C = \omega/k$ é a velocidade fase da onda na superfície. A camada de ar da superfície da água até z_c é dita camada crítica, onde $\overline{uw}$ é constante. Acima da altura crítica, a velocidade de propagação da onda é maior que a do escoamento médio do vento e não há transferência de energia para as ondas. Temos

$$\overline{uw} = 0, \qquad z > z_c. \tag{4.7.28}$$

A energia transferida do escoamento médio para as ondas por unidade de área da superfície livre é, por (4.7.26) e (4.7.27), dada por

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= -\rho_a \int_0^\infty \left(\frac{\pi}{k} \frac{U''(z_c)}{U'(z_c)} \, \overline{w^2}(z_c) \right) \frac{\partial U}{\partial z} \, dz \\
&= -\rho_a \int_0^{z_c} \left(\frac{\pi}{k} \frac{U''(z_c)}{U'(z_c)} \, \overline{w^2}(z_c) \right) \frac{\partial U}{\partial z} \, dz \quad \text{por (4.7.28)} \\
&= -\frac{\pi \rho_a C}{k} \frac{U''(z_c)}{U'(z_c)} \, \overline{w^2}(z_c),
\end{aligned} \tag{4.7.29}$$

pois $U(z_c) = C$ e $U(z_c) = 0$.

A frequência angular é $\omega = Ck$ e $T_{rad} = 1/Ck$ é o tempo necessário para mover um radiano da fase. Com isso, podemos definir a taxa de crescimento de ondas

$$\gamma = \frac{1}{Ck}\frac{1}{E}\frac{dE}{dt},$$

que representa o aumento em energia de ondas por radiano. Para ondas senoidais, temos

$$E = \rho g \overline{\eta^2}.$$

Para águas profundas, $g = \omega^2/k$, e portanto

$$E = \frac{\rho\omega^2}{k}\overline{\eta^2} = \frac{\rho}{k}\overline{(\eta')^2}. \tag{4.7.30}$$

De (4.7.29) e (4.7.30), obtemos

$$\gamma = -\frac{\pi}{k}\frac{U''(z_c)}{U'(z_c)}\frac{\overline{w^2}(z_c)}{\overline{(\eta')^2}}.$$

Este é o resultado clássico de Miles para o crescimento de ondas devido ao escoamento de cisalhamento. Vemos que o crescimento depende da curvatura, presente pelo termo U'', e do gradiente U' do perfil médio do vento na altura crítica. Posteriormente, Miles [26] generalizou este resultado para incluir ângulos arbitrários θ entre o vento e as ondas com

$$\gamma = \frac{\rho_a}{\rho}\beta\omega\nu^2,$$

onde

$$\nu = \frac{u_*}{C}\cos\theta$$

e $\beta = \beta(\Omega, \frac{u_*}{C}cos\theta)$ é o dito parâmetro de Miles. Aqui, $\Omega = \frac{gz_0}{u_*^2\cos^2\theta}$. e $z_0 = \alpha u_*^2/g$, onde α é o parâmetro de Charnock. Um valor constante de α adequado para ondas antigas é 0,0144. Janssen [13] mostrou que o parâmetro de Charnock não é constante mas depende do estado do mar através do espectro de ondas e da *idade de ondas* definida por $\mathcal{I} = \frac{C_p}{u_*}$, onde C_p é a velocidade de fase de pico do espectro. Note que a medida que C_P se eleva, $\mathcal{I}$ aumenta e temos um estado do mar mais maduro. Para ondas novas, um parâmetro de Charnock constante não fornece uma modelagem acurada. Medir o vento a uma altura de 10m da superfície é usual e denotamos a velocidade desta grandeza por U_{10}. Experimentos mostram a transferência de energia do vento para o oceano se encerra quando a idade de onda expressa por $\frac{C_p}{U_{10}}$ atinge 1,22. Um mar com esta idade é dito *plenamente desenvolvido*.

Em termos da altura crítica adimensional $\mu = kz_c$, pode-se parametrizar o parâmetro de Miles como

$$\beta = \frac{\beta_m}{\kappa^2}\mu \ln^4 \mu, \qquad \mu \leq 1, \tag{4.7.31}$$

onde β_m é uma constante. Em termos do vento e das propriedades de propagação das ondas, μ é dado por

$$\mu = \left(\frac{u_*}{\kappa C}\right)^2 \Omega_m \, e^{\kappa/\nu},$$

onde $\Omega_m = \kappa^2 g z_0 / u_*^2$. O termo fonte

$$S_{in} = \gamma N,$$

onde N é o espectro de ação de ondas, é usado no modelo de previsão de ondas WAM.

Outras descrições de S_{in} podem ser usadas, em particular usando modelos não-lineares e descrevendo rajadas de vento.

4.7.2 Interação Não-Linear entre Ondas

Na aproximação de primeira ordem, os componentes de ondas são independentes, no sentido de que podem ser superpostos livremente. Incluindo correções à aproximação linear, os componentes de onda do espectro ficam vinculados e há troca de energia entre eles através de interações resonantes. Em águas rasas, as interações mais relevantes se dão entre certos conjuntos de três ondas, denominadas interações tríades. A condição de resonância entre as ondas é

$$\boldsymbol{k_1} = \boldsymbol{k_2} + \boldsymbol{k_3},$$
$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3.$$

Em águas profundas as interações tríades são irrelevantes. Em contrapartida, neste caso, conjuntos de quatro ondas satisfazendo a relação de resonância [3]

$$\boldsymbol{k_1} + \boldsymbol{k_2} = \boldsymbol{k_3} + \boldsymbol{k_4}, \tag{4.7.32}$$
$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4. \tag{4.7.33}$$

[3] Os primeiros trabalhos acerca das interações resonantes não-lineares onda-onda são devidos a Phillips [32],[33] e a Hasselmann [9]

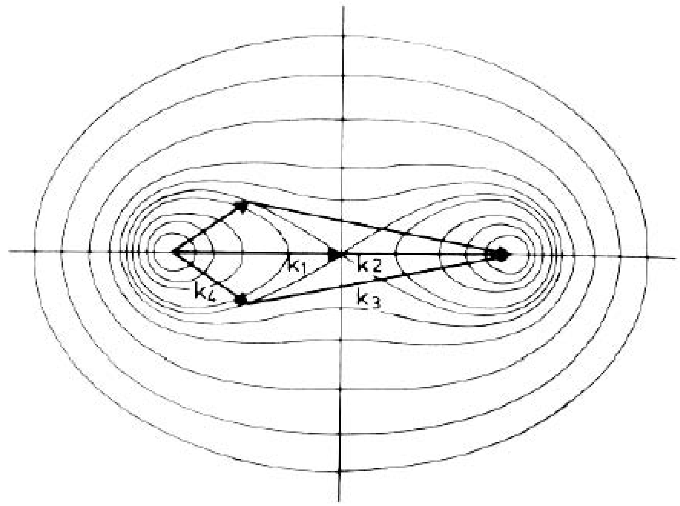

Figura 4.2: Diagrama, conhecido como figura do oito de Phillips, mostrando os vetores de ondas satisfazendo a condição de resonância entre conjuntos de quatro ondas. (Komen et. al [19])

trocam energia e contribuem decisivamente para a evolução de um campo de ondas. Estas são as chamadas interações quádruplas. Cada $\boldsymbol{k}_j$ é atado a ω_j pela relação de dispersão. Possíveis soluções da relação (4.7.32) podem ser ilustradas através da figura 4.2, conhecida como a figura do oito de Phillips. Vemos que a condição de resonância (4.7.32) está presente na equação de Zakharov (3.9.80) através do termo C_{32}.

As instabilidades de banda lateral, próprias de ondas de gravidade, mencionadas na seção 3.5 são um caso especial do processo de interação quádrupla.

A descrição do processo de interações onda-onda resonantes foi primeiramente apresentada por Hasselmann [9], usando a teoria da perturbação. A transferência de energia no espectro de ondas devido a interações quádruplas foi determinada através da taxa de variação da densidade da ação de ondas. Este resultado é cognato da equação de Zakharov que fornece a evolução determinística de ondas de gravidade em águas profundas. De fato, pode-se obter a derivada $\frac{\partial N}{\partial t}$ que é diretamente relacionada a S_{nl}, usando a equação de Zakharov, conforme

Yuen e Lake [47] ou Janssen [16]. A dedução é extensa mas a sua essência pode ser explicada como segue.

Pela equação (4.2.8), vemos que o espectro é dado em termos da covariância da superfície livre. Para um campo de ondas homogêneo e estacionário, é suficiente considerarmos a variância (4.2.6). Por (4.2.7), (3.9.74) e (3.9.76), a derivada da variância pode ser calculada pela equação de Zakharov e o resultado de Hasselmann reproduzido. Assim, a derivada da ação de ondas $N_1 = N(\boldsymbol{k_1})$ é descrita por

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = 4\pi \iiint_{-\infty}^{\infty} (T_{1,2,3,4})^2 \delta(\boldsymbol{k_1} + \boldsymbol{k_2} - \boldsymbol{k_3} - \boldsymbol{k_4})\, \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \times [N_3 N_4 (N_1 + N_2) - N_1 N_2 (N_3 + N_4)]\, d\boldsymbol{k_2} d\boldsymbol{k_3} d\boldsymbol{k_4}, \qquad (4.7.34)$$

onde o núcleo T é dado no apêndice. Vemos então que a densidade de ação de ondas evolui no tempo devido as interações resonantes (4.7.32) que são selecionadas na integral sextupla acima através das deltas de Dirac nelas presentes. Uma descrição envolvendo também interações não-resonates foi proposta recentemente por Janssen ([15] e [16]). Interações não resonantes ocorrem em uma escala de tempo muito pequena e são provavelmente não relevantes para a evolução em uma escala de tempo maior, que é a mais importante para aplicações práticas como previsão de ondas operacional.

Calcular o termo fonte S_{nl} diretamente pela expressão (4.7.34) exata ainda não é viável para aplicações a previsão de ondas operacional onde várias integrações da equação do balanço devem ser feitas diariamente. A expressão acima, além de possuir um núcleo complicado, envolve uma integral de Boltzmann sextupla. Várias aproximações portanto, foram propostas para avaliar S_{nl} numericamente. A abordagem mais bem sucedida e provavelmente a ainda mais usada foi proposta por Hasselmann et al. [11] e chama-se *discrete interaction approximation* ou simplesmente DIA. Nesta aproximação, um restrito conjunto de combinações de ondas é considerado e contudo boa concordância com o cálculo exato da transferência de energia é encontrado. Além disso, assim como no caso contínuo, energia, momento e ação são conservados na DIA. A parametrização se baseia na seguinte configuração para o conjunto de quatro ondas resonantes.

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 \tag{4.7.35}$$
$$\omega_3 = \omega_0(1+\lambda) = \omega_+ \tag{4.7.36}$$
$$\omega_4 = \omega_0(1-\lambda) = \omega_-, \tag{4.7.37}$$

onde o parâmetro $\lambda = 0,25$ é escolhido com base em comparações com computacionais exatas. Note que o problema de interação entre quatro ondas é reduzido para três: ω_0, ω_+ e ω_- com o parâmetro λ. Da condição de resonância, os ângulos θ_3 e θ_4 dos vetores de onda $\boldsymbol{k}_+$ e $\boldsymbol{k}_-$ relativos a $\boldsymbol{k}_0$ são $\theta_3 = 11,5°$ e $\theta_4 = -33,6°$. As taxas de variação das ações de ondas correspondentes são dadas pela equação vetorial

$$\frac{\partial}{\partial t}(N_0, N_+, N_-) = c\, g^{-8} f_0^{19}[N_0^2(N_+ + N_-) - 2N_0N_+N_-]\,\Delta\boldsymbol{k}\ (-2,1,1), \tag{4.7.38}$$

onde $f_0 = \omega_0/2\pi$ e c é uma constante. O termo fonte S_{nl} parametrizado é obtido somando (4.7.38) sobre todas as possibilidades de vetores de onda.

Inúmeras outras aproximações e métodos têm sido propostos para o cálculo eficiente das interações não-lineares. Polnikov e Farina [35] promoveram o que foi chamado por Janssen [16] de um *concurso de beleza*, comparando diferentes aproximações de S_{nl} visando uma escolha ótima. Como resultado, DIA desempenhou muito bem e uma versão com baixo custo computacional, denominada *Fast* DIA, foi elaborada.

Antes de concluir esta seção devemos enfatizar a grande importância do termo S_{nl} para a evolução de ondas regida pela equação do balanço (4.6.24). Em particular, ondas oceânicas tendem a estabilizar a forma espectral após um período de tempo relativamente curto, independente da condição inicial, conforme Farina [5]. Este fenômeno chama-se estabilização do espectro e é ditado por S_{nl}.

Em estados de mar maduros onde a idade de onda ultrapassa o valor daquele de um mar plenamente desenvolvido, mesmo sem a presença de swell, frequentemente este acréscimo de energia é dado pelas interações não-lineares entre ondas.

4.7.3 Dissipação

Vimos que energia do vento é transferida para as ondas e que interações entre quatro ondas contribuem para redestruibuir esta energia.

Em águas profundas, as ondas crescem, atingem uma certa altura e quando se tornam instáveis, quebram. Esta quebra, sem influência do fundo oceânico, é denominada *white cap* e por vezes chamada de *carneirinho* na língua portuguesa.

Algumas teorias se desenvolveram para a descrição do white capping. Contudo devido a esporacidade deste processo físico, que se dá apenas para ondas muito inclinadas, é difícil estabelecer um termo fonte que descreva o processo com precisão e resultados parametrizados e válidos em média são atualmente utilizados. Assumindo o processo de dissipação por white capping fraco na média, Hasselmann [10] propos um termo quase-linear na ação de ondas N para S_{ds}. Desta forma,

$$S_{ds} = -\gamma_{ds} N,$$

onde γ_{ds} é um fator de amortecimento dependendo não-linearmente dos números de onda e frequência do espectro. O resultado parametrizado para o fator de amortecimendo do termo fonte de dissipação é

$$\gamma_{ds} = C_{ds}\,\overline{\omega}\left(\overline{k}^2 m_0\right)^m \left(k/\overline{k} + a\left(k/\overline{k}\right)^2 + \cdots\right),$$

onde C_{ds}, a e m são constantes que precisam ser determinadas. Esta parametrização é empregada no modelo de ondas WAM.

Com a disponibilidade de mais observações de campo, é esperado que mais conhecimento seja adiquirido para a modelagem deste termo.

4.8 Previsão de Ondas Oceânicas

Usando técnicas semelhantes às utilizadas na previsão do tempo, pode-se fazer previsões de ondas oceânicas. Objetivando bacias marítimas grandes, a descrição estatística é a mais apropriada. Portanto, um *modelo de ondas* é um sistema composto pelas equações e relações matemáticas que culminam na equação do balanço. Usualmente, esta equação é escrita em termos do espectro da frequência-direção $F(f, \theta)$ e deve ser resolvida numericamente. Ressalvamos que f pode ser escrito em termos da frequência angular como $f = \omega/2\pi$.

Os primeiros passos para desenvolver um modelo numérico de previsão de ondas se basearam na equação (4.6.25) e predataram a teoria das interações quádruplas. Os então-chamados modelos de *primeira* *geração* consideravam apenas os mecanismos de geração e dissipação por white-cap, tendo o termo de fonte total $S^{(1)}$ na forma

$$S^{(1)} = S^1_{in} + S^1_{ds}.$$

Uma segunda geração de modelos de ondas foi constituída com termos fonte de geração por vento e dissipação aprimorados baseados em novos resultados de observações de campo. O espectro foi parametrizado por um número pequeno de parâmetros e possuia uma forma predeterminada e restrita. Um termo $S^{(2)}_{nl}$, calculado para este espectro, foi introduzido na equação governante. Porém tais restrições na forma do espectro e do termo descrevendo as interações não-lineares causariam limitações sérias para previsões de estados de mar que não se adequavam àqueles modelados.

Nos anos 80, vários modelos de primeira e segunda geração foram *operacionalizados* em centros de previsão meteorológicos e oceanográficos. Por operacionalizar, entenda-se o modo como os softwares dos modelos eram executados: sistematicamente, com um grau de automação e gerando previsões diárias.

As soluções para as limitações dos modelos em uso vieram em 1984 com a formação de um grupo internacional de vários pesquisadores chamado de grupo WAM (Wave Modelling) para discutir o desenvolvimento de um grande projeto em conjunto. O objetivo era desenvolver um modelo de terceira geração sem as hipóteses restritivas presentes em modelos de gerações anteriores. Com esta colaboração internacional resultou o modelo WAM que em particular possuia uma descrição aprimorada o termo S_{nl} através da aproximação DIA. Um tratado sobre modelagem e previsão de ondas, incluindo desde os conceitos físicos-matemáticos a detalhes do algorítmo usado no modelo WAM foi escrito em 1994 na forma de um livro [19]. Uma variação do modelo WAM ganhou popularidade, com o seu código fonte livremente disponível no site da NOAA (*National Oceanic and Atmospheric Organization*) Este modelo, denominado WaveWatch foi desenvolvido por Tolman e colaboradores [42], utilizando recursos adicionais da linguagem FORTRAN90 e propondo uma maior flexibilidade de execução. As descrições dos processos físicos no WaveWatch e no WAM são coincidentes. Para águas rasas, o modelo SWAN usa a mesma filosofia dos modelos WAM e WaveWatch e inclui processos relevantes à propagação de ondas em águas rasas, tais como dissipação devido ao fundo, interações não-lineares tríades.

Sejam D a região marítima de interesse e $I = [t_0, t_f]$ o intevalo de tempo, com t_f representando o prazo da previsão. A fronteiras mar-terra e mar-gelo são denotadas por ∂D. O problema para previsão de ondas oceânicas é

$$\frac{D}{Dt}F(f,\theta,\boldsymbol{x},t) = S_{in}(\boldsymbol{U},F,t) + S_{nl}(F,t) + S_{ds}(F,t),$$
$$f \in (0,\infty), \quad \theta \in [0,2\pi], \quad (\boldsymbol{x},t) \in D \times I, \tag{4.8.39}$$
$$F(f,\theta,\boldsymbol{x},t_0) = F_0(f,\theta,\boldsymbol{x}) \tag{4.8.40}$$
$$F(f,\theta,\boldsymbol{x},t) = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \partial D, \tag{4.8.41}$$
$$F(f,\theta,\boldsymbol{x},t) = F(f_{hf}(t),\theta,\boldsymbol{x},t)\left(\frac{f}{f_{hf}}\right)^{-p}, \qquad f \in [f_{hf},\infty), \tag{4.8.42}$$
$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t), \quad \text{prescrito}, \tag{4.8.43}$$

onde $F_0(f,\theta,\boldsymbol{x})$ é o espectro inicial e f_{hf} é a frequência de corte usada para delimitar a parte de alta frequência do espectro com um parâmetro exponencial p. Para resolver este problema e determinar o espectro de ondas, precisa-se conhecer o espectro inicial em t_0 e o campo de vento $\boldsymbol{U}$ para todo t em I.

4.8.1 Aspectos Computacionais

Tocaremos agora nos principais aspectos computacionais inerentes à solução do problema de previsão de ondas oceânicas (4.8.39 a 4.8.43). Primeiramente, destacamos que o custo computacional para integrar a equação do balanço em domínios globais várias vezes ao dia requer, mesmo com os atuais recursos computacionais disponíveis, aproximações. A mais importante consequência disto é que os termos fonte devem ser parametrizados a fim de diminuir o seu custo computacional. Em particular, o termo S_{nl} é sem dúvida o mais potencialmente caro do ponto de vista computacional, visto sua definição através da integral de Boltzmann em (4.7.34). Aproximações empregadas em modelos como o WAM e WaveWatch foram vistas na seções 4.7.

Há duas maneiras de se determinar o espectro inicial F_0 em (4.8.40). Se nenhuma informação é conhecida sobre o estado do mar previamente, pode-se utilizar uma forma paramétrica do espectro, como por exemplo o espectro de JONSWAP [19]. Outra forma é utilizar o espectro de uma execução prévia do modelo, feita com o prazo de previsão igual a t_0. No primeiro caso, chamamos a execução de uma *rodada fria* do modelo enquanto que o segundo caso é denominado de *rodada quente*. No contexto da dinâmica de ondas oceânicas, conforme observado por Farina [5], a condição inicial tem apenas influência para no máximo no período em torno das 48 horas iniciais da integração da equação do balanço.

A especificação da topografia define a contorno da água com a terra. Além disso, há uma fronteira dinâmica, porém com variação lenta no tempo, referente às regiões onde as camadas de gelo encontram os oceanos, em altas latitudes. Estes contornos definem ∂D e podem ser obtidos por um banco de dados de topografias, por dados observacioais ou por dados de saída de um modelo atmosférico.

O espectro é aproximado por valores constantes em um domínio discretizado do espaço $f - \theta$. Os ângulos θ são usualmente escolhidos equidistantes. Já a discretização em f é feita em uma escala logarítmica com a finalidade de modo a representar bem a parte de baixa frequência do espectro. A escolha da frequência inicial f_0 depende da região marítima para a qual pretende-se fazer a previsão. Por exemplo, no Mar Mediterrâneo ou na Lagoa dos Patos onde a ocorrência de swell de baixa frequência é pequena, $f_0 = 0.05$ Hz é uma escolha razoável. Para oceanos inteiros, um f_0 tão pequeno quanto 0.031 Hz pode ser utilizado. A discretização é feita até a frequência de corte f_{hf} que é designada usualmente por

$$f_{ht}(t) = \min\{f_{max}, 2.5\overline{f}\},$$

onde f_{max} é a frequência máxima na discretização e $\overline{f}$ é a frequência média para o instante t.

A banda $[f_0, f_{hf})$ é chamada de parte prognóstica do espectro. Os valores maiores da frequência não são incluídos na discretização e dizem respeito à chamada parte diagnóstica do espectro. Na banda $[f_{hf}, \infty)$, denominada *cauda* espectral, é utilizada uma forma assintótica do espectro conforme (4.8.42). O valor do expoente p e a própria forma assintótica do espectro tem sido objeto de inúmeros estudos publicados.

Para viabilizar uma previsão de ondas oceânicas é essencial dispor da previsão de ventos superficiais no mesmo período de tempo da previsão. O campo de vento (4.8.43) deve ser fornecido por um modelo de previsão do tempo. Assim, a execução de um modelo de ondas é fortemente relacionada com um modelo atmosférico. O modelo de ondas também pode fornecer informações de volta para o modelo atmosférico através do parâmetro de Charnock que descreve a camada limite, como vimos na subseção 4.7.1. Assim, há uma interação bidirecional entre os modelos que pode se executada *durante* as integrações das equações governantes dos dois modelos.

Para integrar a equação do balanço no tempo, pode-se empregar o método de diferenças finitas. Observe que é necessário discretizações de derivadas funcionais do tipo $\frac{\delta S}{\delta F}$.

Em uma integração numérica da equação do balanço, uma malha computacional sobre o domínio espacial D deve ser escolhida e pode apresentar espaçamentos constantes entre as células quadradas da malha com dimensões de uma fração de grau. Para aumentar a resolução em regiões de interesse, como áreas litorâneas, usualmente emprega-se a chamada técnica de *aninhamento* em contraste com malhas adaptativas. O aninhamento consiste em uma subsequente integração de um modelo, que pode ser o mesmo, em uma área menor e com maior resolução espacial e usando valores do espectro da integração prévia. Este processo pode ser repetido várias vezes gerando diversos graus de aninhamento. Duas execuções aninhadas e subsequentes são denominadas *grossa* e *fina* respectivamente, em uma referência às características de suas resoluções. O modelo SWAN pode ser aninhado operacionalmente a modelos como WAM ou WaveWatch.

4.8.2 Dados de Saída de um Modelo de Ondas

A equação do balaço pode ser vista em termos das evoluções de seus termos fonte. A figura 4.3 mostra uma configuração típica destas evoluções e do espectro da frequência. O espectro de ondas em um único ponto $(\boldsymbol{x}, t)$ do espaço-tempo é usualmente representado usando as variavés (f, θ) como coordenadas polares. Um exemplo é o espectro da figura 4.4 que mostra que a maior parte da energia de ondas, e consequentemente as maiores ondas, são aquelas com frequências 0.10 Hz e 0.25 Hz de sudoeste e com frequências em torno de 20 Hz de noroeste. Uma vez obtido o espectro de ondas através da integração da equação do balanço, pode-se calcular as *quantidades integradas* que são obtidas como uma integral em termos do espectro, conforme seção 4.5. Entre essas variáveis, destaca-se a altura significativa de ondas e o período de pico.

Nas figuras 4.5,4.6 e 4.7 vemos os campos de altura significativa, pe-

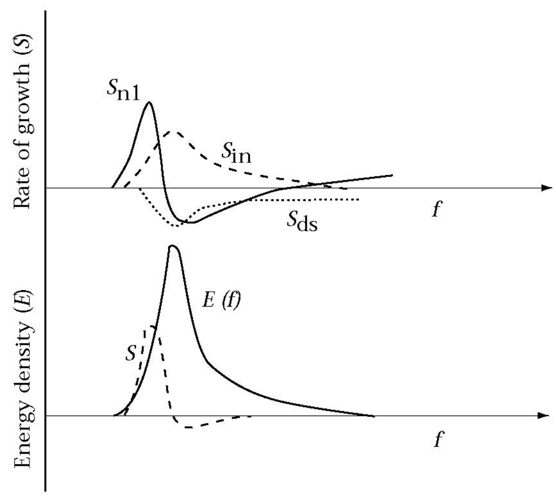

Figura 4.3: Estrutura típica do balanço entre os termos fonte. Na figura inferior S denota a soma dos termos fonte e E, a densidade de energia, o espectro da frequência. (de WMO [30])

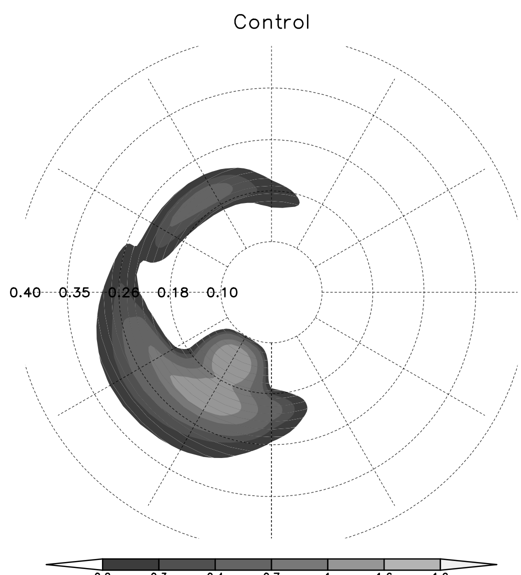

Figura 4.4: Representação geométrica de um espectro de frequência-direção

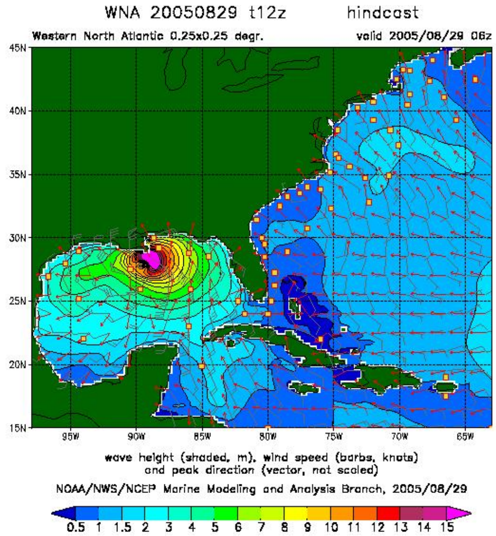

Figura 4.5: Altura significativa de ondas para 29/8/2005 (06:00 GMT), previstas pelo modelo WaveWatch III seis horas antes.

ríodo de pico e vento de superfície às 86 horas GMT do dia 29/8/2005 na ocasião em que o furacão Katrina entrava no continente. Estes resultados foram obtidos de uma previsão de 8 horas do modelo WaveWatch III operado na NOAA. A figura 4.8 mostra um campo de período de pico típico computado por uma previsão do modelo global de ondas CPTEC/WAM. Nos oceanos Índico, Atlântico e Pacífico podemos ver padrões de ondas longas com propagação para Nordeste encabeçadas pelas ondas de maior período de pico e portanto mais longas. Essas ondas representam frentes de swells onde o efeito da dispersão é evidente.

Aprimoramentos em vários aspectos na modelagem de ondas encontram-se em progresso. Em particular, a inclusão de dados de ondógrafos e de satélites na execução de modelos, processo este denominado assimilação de dados. A interação bidirecional entre modelos de ondas e outros tipos de modelos, notadamente os de previsão de tempo, é outro tópico de investigação muito promissor, assim como a previsão de ondas por ensemble que delinearemos a seguir.

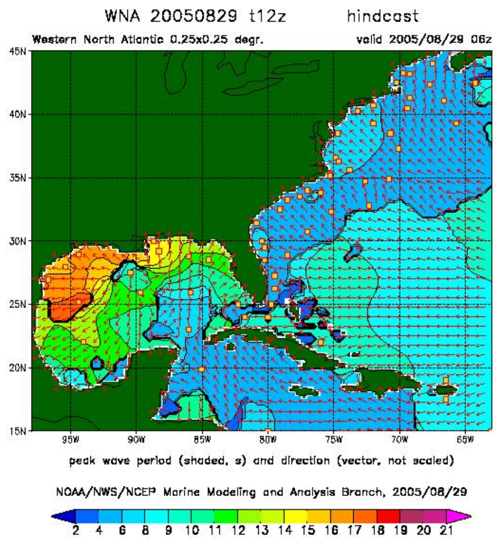

Figura 4.6: Período de pico para 29/8/2005 (06:00 GMT), previstas pelo modelo WaveWatch III seis horas antes.

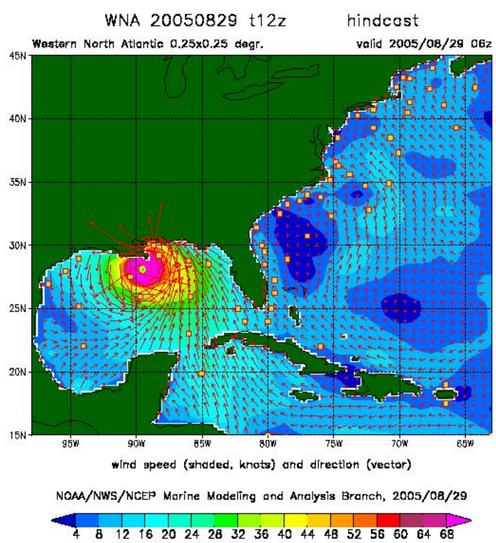

Figura 4.7: Ventos a 10 m de altura, medido em nós, para 29/8/2005 (06:00 GMT), previstas pelo modelo WaveWatch III seis horas antes.

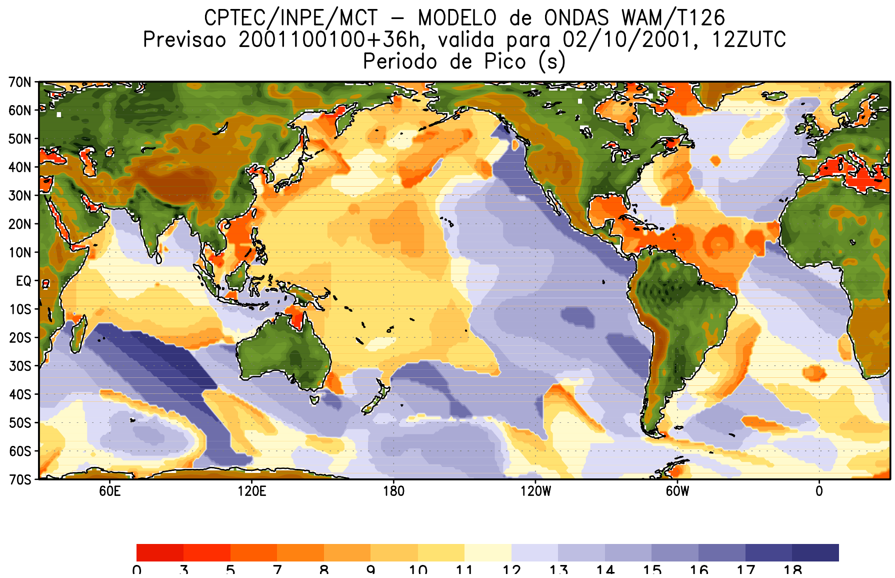

Figura 4.8: Período de pico para 2/10/2001 (12:00 GMT) previsto 36 horas antes pelo modelo CPTEC/WAM.

4.8.3 Previsão de Ondas por Ensemble

A previsão numérica por ensemble é um método consolidado para melhorar o desempenho de modelos físico-matemáticos de previsão de clima e do tempo. Levando em consideração que sempre existem erros nas observações que são utilizadas e providas a um modelo, a idéia de uma única, determinística previsão se torna questionável. Por outro lado, ao utilizar-se um conjunto (ou ensemble) de condições iniciais ou até de modelos perturbados com erros ou parâmetros representando as incertezas das medições, pode-se obter mais informações sobre o comportamento das soluções do modelo, geração de possíveis eventos distintos e probabilidades associadas a eles fornecendo assim uma maior confiabilidade da previsão final. Na modelagem de ondas oceânicas, o tópico ainda é recente e pouco foi pesquisado e documentado sobre esta técnica. No Centre for Medium-Range Weather Forecasts (ECMWF), previsões de ondas por ensemble são operacionais e diárias desde junho de 1998.

Estudos iniciais sobre os benefícios potenciais da previsão de ondas por ensemble foram conduzidos por Hoffschildt et. al. [12] e Janssen [14] no ECMWF. Neste trabalho uma aplicação do método à otimização de rotas de navios no Atlantico Norte foi descrita, onde apenas os ventos são perturbados.

Trabalhos adicionais, por Farina [5] apresentam um procedimento formal para execução de um sistema de previsão de ondas por ensemble (SPOE) usando perturabações dos ventos de superfície e do espectro de ondas.

Saetra e Bidlot [37] apresentam previsões probabilísticas de ondas usando o SPOE do ECMWF. O campo de ventos é perturbado e o estudo de uma tempestade ocorrida em 10-11 de novembro de 2001 no Mar da Noruega é analisado utilizando as previsões de ondas por ensemble. Nesta tempestade, ondas de até 25 metros ocorreram e embora o modelo não possa prevê-las o SPOE forneceu uma probabilidade de 50 % para ondas com alturas superiores a 8 m ocorrerem na região em questão.

Recentemente, Farina et. al. [6] utilizaram uma linearização do modelo WAM para obter aproximações de membros do ensemble. Tais aproximações permitem a execução de um SPOE em uma fração do tempo necessário para sua execução convencional. Os resultados sugeriram as aproximações dos membros poderiam ser calculadas em adição aos membros convencionais do ensemble. Este procedimento dobra o tamanho do ensemble com um pequeno custo computacional e geraria informações ausentes no SPOE original.

Exercícios

4.1 Encontre a altura significativa H_s para um campo de ondas cuja energia média total é $4900\,\mathrm{kg/(ms^2)}$. Assuma que a densidade da água é $1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

4.2 Para o espectro

$$\frac{A}{\omega^5} e^{-B/\omega^4},$$

calcule a altura significativa, a altura média, a frequência e períodos médios e o período de pico.

Apêndice A

Coeficientes de Interação da Equação de Zakharov

Aqui nós damos os coeficientes de interação presentes na seção 3.9. Os coeficientes de segunda ordem são:

$$\begin{aligned}
V^{(1)}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}) &= -2V(-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}) + V(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3}) \\
V^{(2)}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}) &= -2V(-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}) + V(-\boldsymbol{k_1}, -\boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3}) \\
&\quad - V(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k}) + V(-\boldsymbol{k_2}, -\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k}) \\
V^{(3)}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}) &= -2V(-\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}) + V(-\boldsymbol{k_1}, -\boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3}),
\end{aligned}$$

onde

$$V(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}) = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\omega(\boldsymbol{k})\omega(\boldsymbol{k_1})|\boldsymbol{k_2}|}{2|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k_1}|\omega(\boldsymbol{k_2})}\right)^{1/2}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k_1} + |\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k_1}|).$$

Os coeficientes de terceira ordem são;

$$\begin{aligned}
W^{(1)}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3}) &= -W(-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3}) + W(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, -\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_3}), \\
W^{(2)}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3}) &= -W(-\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3}) - W(-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_3}) \\
&\quad - W(-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_3}, \boldsymbol{k_2}, -\boldsymbol{k_1}) - W(-\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_3}, -\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_2}) \\
&\quad - W(\boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_1}, -\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k_3}) + W(\boldsymbol{k_3}, \boldsymbol{k_2}, -\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_1}), \\
W^{(3)}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3}) &= W(-\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k_1}, -\boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3}) + W(-\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_3}, -\boldsymbol{k_2}) \\
&\quad - W(-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_3}, -\boldsymbol{k_1}, -\boldsymbol{k_2}) + W(-\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, -\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_3}) \\
&\quad - W(-\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_3}, -\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k_2}) - W(\boldsymbol{k_3}, -\boldsymbol{k_1}, -\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_2}), \\
W^{(4)}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3}) &= W(-\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k_1}, -\boldsymbol{k_2}, -\boldsymbol{k_3}) + W(-\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k_2}, -\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k_3}),
\end{aligned}$$

onde

$$W(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k_1},\boldsymbol{k_2},\boldsymbol{k_3}) = \frac{1}{64\pi^2}\left(\frac{\omega(\boldsymbol{k})\omega(\boldsymbol{k_1})|\boldsymbol{k_2}||\boldsymbol{k_3}|}{2|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k_1}|\omega(\boldsymbol{k_2})\omega(\boldsymbol{k_3})}\right)^{1/2}$$
$$\times |\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k_1}|(2|\boldsymbol{k}| + 2|\boldsymbol{k_1}| - |\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k_2}| - |\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k_3}|$$
$$+ |\boldsymbol{k_1}+\boldsymbol{k_2}| - |\boldsymbol{k_1}+\boldsymbol{k_3}|).$$

O coeficiente de interação $T_{0,1,2,3} = T(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k_1},\boldsymbol{k_2},\boldsymbol{k_3})$ da equação (3.9.80) é

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k_1},\boldsymbol{k_2},\boldsymbol{k_3}) = &-\frac{V^{(1)}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k_2},\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k_2})V^{(2)}(\boldsymbol{k_3}-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k_3},\boldsymbol{k_1})}{\omega(\boldsymbol{k_3}-\boldsymbol{k_1})-\omega(\boldsymbol{k_3})+\omega(\boldsymbol{k_1})}\\ &-\frac{V^{(1)}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k_2}-\boldsymbol{k_2},\boldsymbol{k_2})V^{(2)}(\boldsymbol{k_3}-\boldsymbol{k_1},\boldsymbol{k_3},\boldsymbol{k_1})}{\omega(\boldsymbol{k_3}-\boldsymbol{k_1})-\omega(\boldsymbol{k_3})+\omega(\boldsymbol{k_1})}\\ &-\frac{V^{(2)}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k_2}+\boldsymbol{k_1},\boldsymbol{k_1})V^{(1)}(\boldsymbol{k_2}-\boldsymbol{k_3},\boldsymbol{k_2},\boldsymbol{k_3})}{\omega(\boldsymbol{k_2}-\boldsymbol{k_3})-\omega(\boldsymbol{k_2})+\omega(\boldsymbol{k_3})}\\ &-\frac{V^{(1)}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k_2},\boldsymbol{k_2}-\boldsymbol{k})V^{(2)}(\boldsymbol{k_1}-\boldsymbol{k_3},\boldsymbol{k_1},\boldsymbol{k_3})}{\omega(\boldsymbol{k_1}-\boldsymbol{k_3})-\omega(\boldsymbol{k_1})+\omega(\boldsymbol{k_3})}\\ &-2\frac{V^{(3)}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k_1},-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k_1})V^{(3)}(-\boldsymbol{k_2}-\boldsymbol{k_3},\boldsymbol{k_2},\boldsymbol{k_3})}{\omega(\boldsymbol{k_2}+\boldsymbol{k_3})+\omega(\boldsymbol{k_2})+\omega(\boldsymbol{k_3})}.\end{aligned}$$

Bibliografia

[1] L. Bao, A. Piatanesi, Y. Lu, H. Hsu, and X. Zhou. Sumatra tsunami affects observations by GRACE satellites. *EOS Transactions AGU*, 86:353–356, 2005.

[2] T. B. Benjamin and J. E. Feir. The desintegration of wavetrains on deep water. Part 1. Theory. *J. Fluid Mech.*, 27:59–75, 1967.

[3] J. C. W. Berkhoff. Computation of combined refraction-diffraction. In *13th Conf. Coastal Eng. ASCE*, volume 1, pages 471–490, 1972.

[4] P. G. Chamberlain and D. Porter. The modified mild-slope equation. *J. Fluid Mech.*, 291:393–407, 1995.

[5] L. Farina. On ensemble prediction of ocean waves. *Tellus*, 54A:148–158, 2002.

[6] L. Farina, A. M. Mendonça, and J. P. Bonatti. Approximation of ensemble members in ocean wave prediction. *Tellus*, 57A:204–216, 2005.

[7] J. Gower. Jason 1 detects the 26 december 2004 tsunami. *EOS Transactions AGU*, 86:37–38, 2005.

[8] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations.* Dover Phoenix Editions, 2003.

[9] K. Hasselmann. On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum, part 1: general theory. *J. Fluid Mech.*, 12:481–500, 1962.

[10] K. Hasselmann. On the spectral dissipation of coean waves due to whitecapping. *Bounday Layer Meteorol.*, 6:107–127, 1974.

[11] S. Hasselmann, K. Hasselmann, J. H. Allender, and T. P. Barnett. Computations and parametrizations of the nonlinear energy transfer in a gravity wave spectrum Part 2: parametrizations of the nonlinear energy transfer for application in wave models. *J. Phys. Oceanogr.*, 15:1378–1391, 1985.

[12] M. Hoffschildt, J.-R. Bidlot, B. E. Hansen, and P. A. E. M. Janssen. Potential benefit of ensemble forecastas for ship routing, 1999. Memorando técnico do ECMWF.

[13] P. A. E. M. Janssen. Quasi-linear theory of wind-wave generation applied to wave forecasting. *J. Phys. Oceanogr.*, 21:1631–1642, 1991.

[14] P. A. E. M. Janssen. Potential benefits of ensemble prediction of waves, 2000. ECMWF Newsletter 86.

[15] P. A. E. M. Janssen. Nonlinear four-wave interactions and freak waves. *J. Phys. Oceanogr.*, 33:863–884, 2003.

[16] P. A. E. M. Janssen. *The interaction of ocean waves and wind.* Cambridge University Press, 2004.

[17] F. John. On the motion of floating bodies II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 3:45–101, 1950.

[18] R. E. Kleinman. On the mathematical theory of the motion of floating bodies - an update, 1982. Relatório do David W. Taylor Naval Ship Research and Development Center. 67 páginas.

[19] G. J. Komen, L. Cavaleri, M. Donelan, K. Hasselmann, S. Hasselmann, and P. A. E. M. Janssen. *Dynamics and Modelling of Ocean Waves.* Cambridge University Press, 1994.

[20] T. Levi-Civita. Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie. *Mathematische Annalen*, 93:264–314, 1925.

[21] M. S. Longuet-Higgins. On the statistical distribution of the heights of sea waves. *J. Marine Res.*, 11:345–366, 1952.

[22] J. C. Luke. A variational principle for a fluid with a free surface. *J. Fluid Mech.*, 27:395–397, 1967.

[23] D. U. Martin and H. C. Yuen. Quasi-recurring energy leakage in the two-space-dimensional nonlinear Schrodinger equation. *Phys. Fluids*, 23:881–883, 1980.

[24] C. C. Mei. *The applied dynamics of the ocean surface waves*. Word Scientific, 1989.

[25] J. W. Miles. On the generation of surface waves by shear flows. *J. Fluid Mech.*, 3:185–204, 1957.

[26] J. W. Miles. On the generation of surface waves by turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.*, 7:469–478, 1960.

[27] J. W. Miles. Hamiltonian formulations for surface waves. *Applied Scientific Research*, 37:103–110, 1981.

[28] M. K. Ochi. *Ocean waves, the stochastic approach*. Cambridge University Press, 1998.

[29] H. Okamoto and M. Shoji. *The mathematical theory of permanent progressive water-waves*. World Scientific, 2001.

[30] Word Meteorologial Organization. Guide to wave analysis and forecasting. Technical report, WMO No. 702, 1998. Segunda edição.

[31] M. A. Peter and M. H. Meylan. The eigenfuncion expansion of the infinite depth free surface green function in three dimensions. *Wave Motion*, 40:1–11, 2004.

[32] O. M. Phillips. On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. Part 1. The elementary interactions. *J. Fluid Mech.*, 9:193–207, 1960.

[33] O. M. Phillips. *The dynamics of the upper ocean*. Cambridge University Press, 1977. Segunda edição.

[34] W. J. Pierson, G. Neumann, and R. W. James. Practical methods for observing and forecasting ocean waves by means of wave spectra and statistic. Hydrogr. Off. Publ. 603, U.S. Navy Hydrogr. Off., Washington, DC., 1958.

[35] V. G. Polnikov and L. Farina. On the problem of optimal approximation of the four-wave kinetic integral. *Nonlinear Proc. Geophys.*, 9:497–512, 2002.

[36] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes.* Cambridge University Press, 1996.

[37] O. Saetra and J.-R. Bidlot. Potential benefits of using probabilistic forecasts for waves and marine winds based on the ECMWF ensemble prediction system. *Weather and Forecasting*, 19:73–689, 2004.

[38] R. Smith and T. Sprinks. Scattering of surface waes by a conical island. *J. Fluid Mech.*, 72:373–384, 1975.

[39] Michael Stiassnie and Lev Shemer. On modifications of the Zakharov equation for surface gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 143:47–67, 1984.

[40] J. J. Stoker. *Water Waves. The Mathematical theory with applications.* Interscience, 1957.

[41] G. G. Stokes. On the theory of oscillating waves. *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 8, 1847.

[42] H. L. Tolman and D. V. Chalikov. Development of a third-generation ocean wave model at NOAA-NMC. In M. Isaacson and M. C. Quick, editors, *Proc. Waves - Physical and numerical modelling*, pages 724–733, Vancouver, 1994.

[43] S. N. Ward. Tsunamis. In *Encyclopedia of Physical Science and Technology.* Academic Press, 2002.

[44] S. N. Ward and S. Day. Cumbre Vieja Volcano - Potential collapse and tsunami at La Palma, Canary islands. *Geophysical Research Letters*, 28:3397–3400, 2001.

[45] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves.* John Wiley & sons, 1974.

[46] J. Willebrand. Energy transport in a nonlinear and inhomogeneous random gravity wave field. *J. Fluid Mech.*, 70:113–126, 1975.

[47] H. C. Yuen and B. M. Lake. Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves. In *Advances in Applied Mechanics*, volume 22, chapter 2, pages 67–229. Academic Press, 1982.

[48] V. E. Zakharov. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *Sov. Phys. J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2:190–194, 1968.

Índice