Notas em Matemática Aplicada e-ISSN 2236-5915

Volume 23, 2012

Editado por

Eliana X.L. de Andrade
Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

Rubens Sampaio
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro -
Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Geraldo N. Silva
Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2012

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7), as figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
http://www.sbmac.org.br/notas.php

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2012

INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS DISCRETOS DE ANÁLISE NUMÉRICA DE EDO E EDP

$$\sum_{\epsilon} \int_{\Omega^c} E_{\Omega}(x)\varphi^{\Omega}(x) = 0$$

David Soares Pinto Júnior
david@ufs.br
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Sergipe

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2012

Coordenação Editorial: Sandra Augusta Santos

Coordenação Editorial da Série: Eliana Xavier Linhares de Andrade

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Catalogação elaborada pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

Pinto Júnior, David Soares
Introdução ao Métodos Discretos de Análise Numérica de EDO e EDP - São Carlos, SP : SBMAC,2012 70 p. ; 20,5cm - (Notas em Matemática Aplicada; v. 23)

e-ISBN 978-85-86883-88-0

1. Métodos Discretos. 2. Erros Ponderados. 3. Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais.
I. Pinto Júnior, David Soares. II Título. III. Série

CDD - 51

Esta é uma republicação em formato de e-book do livro original do mesmo título publicado em 2006 nesta mesma série pela SBMAC.

Ao espírito brasílico de igualdade.

Agradecimentos

A SBMAC, história de contribuições à literatura técnico-científica brasileira na área de Matemática Aplicada e Computacional, e especialmente a comissão organizadora do XXIX CNMAC pela possibilidade de universalizar entre os graduandos no Brasil a Teoria dos Métodos Discretos de Análise Numérica de EDO e EDP.

Conteúdo

Prefácio

Os Métodos Discretos de Análise Numérica de EDO's e EDP's formam a parte da Matemática Aplicada e Computacional que trata das formulações de erros ponderados fundamentadas na noção de representação do *continuum* por uma discretização associada a uma base de funções de forma finita.

A sistematicidade, a generalidade e a simplicidade de tratamento analítico, matemático e computacional dos modelos físicos governados por EDO's e EDP's transformou os Métodos Discretos numa tendência em Matemática Aplicada e atrai continuadamente os estudiosos da Teoria da Aproximação e das suas aplicações à Engenharia e Ciências Afins.

Nesse texto introdutório, enfatiza-se os fundamentos teóricos dos Métodos Discretos de EDO's EDP's, centrando a teoria inicialmente em modelos unidimensionais, e então, extrapolando as idéias para os modelos multidimensionais.

Objetivou-se proporcionar aos graduandos em Engenharia, Matemática e Física um material de leitura simples com o qual é possível obter informações técnicas da aplicabilidade dos Métodos Discretos de Análise Numérica de EDO's e EDP's.

Aracaju, 27 de abril de 2006.

David Soares Pinto Júnior

Capítulo 1

Métodos Discretos para EDO e EDP

1.1 Sistemas Discretos e Sistemas Contínuos

A descrição quantitativa de fenômenos físicos geralmente é formulada por sistemas de EDO e EDP, definidas sobre um domínio multidimensional com condições iniciais e de contorno. Simbolicamente

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}u = f & \forall x \in \Omega \times [0, \infty) \\ \mathcal{B}u = \overline{u} & \forall x \in \partial\Omega \\ \mathcal{I}u = u_0 & \forall x \in \Omega \cup \partial\Omega \end{array} \tag{1.1.1}$$

onde $\mathcal{L}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{I}$ são operadores diferenciais, $\Omega \subset \mathbf{R}^{\mathbf{d}}$ é um aberto, limitado d-dimensional, $u : \Omega \to \mathbf{R}$ uma função escalar incógnita, $\partial\Omega$ é o contorno de Ω, $x = (x_1, \ldots, x_d)$, t é variavel temporal, $\overline{u}$ e u_0 são funções dadas que prescrevem u no contorno e no instante inicial.

Para resolver o modelo analítico são aplicados os métodos matemáticos a fim de representar a solução em fórmula fechada e explícita. Em geral, entretanto, isto é impossível porque o problema é matematicamente intratável em função da complexidade do domínio ou do operador. O domínio em que a EDO ou EDP está posta representa sólidos densos ou material contínuo nos quais as variáveis dependentes se desenvolvem e evoluem espacial e temporalmente.

Para contornar tais limitações o sistema contínuo é imaginado como um conjunto finito de parâmetros incógnitos. Tal fundamento é o princípio matemático dos métodos discretos. Portanto, o infinito conjunto de graus de liberdade que quantifica a função incógnita é transformado num número finito de incógnitas definidas sobre unidades geométricas simples.

Determinados modelos de Engenharia são ditos *naturalmente discretizáveis*, pois sua estrutura é uma composição de elementos, massas pontuais ou massas discretas intrinsecamente finitas. Protótipos clássicos são sistemas massa-mola em série, pêndulo duplo, sistemas treliçados tridimensionais.

Os sistemas contínuos são indubitavelmente os mais importantes seja pela variedade das aplicações seja pelo grau de complexidade da análise numérica e modelagem geométrica da discretização.

A forma do modelo geométrico da discretização, associada ao domínio onde a EDO ou EDP é posta, é determinante na seleção do método discreto.

Dentre os métodos discretos clássicos para resolver EDO e EDP estão o Método de Diferenças Finitas e o Método de Elementos Finitos que generaliza os princípios de discretização do *continuum*.

1.2 Problemas do Continuum em 1D

Modelos analíticos unidimensionais constituem material fundamental para o estudo teórico e a análise numérica, pois conservam os elementos básicos para a generalização aos problemas multidimensionais.

A formulação diferencial

$$\begin{array}{ll} u''(x) = f(x), & \forall x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0, & \end{array} \tag{1.2.2}$$

representa abstratamente uma série de problemas da mecânica do *continuum* em 1D entre os quais:

- Um sólido elástico unidimensional

$$\begin{array}{ll} \sigma = Eu', & \text{(Lei de Hooke)} \\ -\sigma' = f, & \text{(Equação da Estática)} \\ u(0) = u(1) = 0, & \text{(Condições de Vinculação)} \end{array} \tag{1.2.3}$$

onde σ é a tensão, f é a força de corpo, E é o módulo de elasticidade e u é o deslocamento.

- Um sólido condutor térmico unidimensional

$$\begin{array}{ll} -q = ku', & \text{(Lei de Fourier)} \\ q' = f, & \text{(Equação da Energia Térmica)} \\ u(0) = u(1) = 0, & \text{(Temperatura Prescrita)} \end{array} \tag{1.2.4}$$

onde q é o fluxo de temperatura, f é uma fonte de calor, k é a condutividade térmica e u é a temperatura.

À guisa de ilustração, apresentar-se-á uma coletânea de modelos analíticos multidimensionais e unidimensionais, lineares e não-lineares.

1.2.1 Cabo Flexível Unidimensional Finito

A vibração elástica de um cabo flexível finito com extremidades fixas, deslocamento e velocidade iniciais conhecidos, é descrito pela equação da onda 1D

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \forall x \in (0, l),\ t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, l] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) & \forall x \in [0, l] \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & t \geq 0 \end{array} \tag{1.2.5}$$

onde $c^2 = \frac{T}{\rho}$, T tensão, ρ densidade mássica, l comprimento do cabo.

1.2.2 Condução de Calor em Sólidos 1D

A condução de calor em sólido, com temperaturas inicial e nas extremidades conhecidas, é descrito pelo problema de Cauchy:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{\rho c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \forall x \in (0, l), t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & \forall x \in (0, l), t \geq 0 \\ u(0, t) = u_0, & t \geq 0 \\ u(l, t) = u_l, & t \geq 0 \end{array} \tag{1.2.6}$$

onde $\alpha^2 = \frac{K}{\rho c}$ é a difusividade térmica do sólido.

1.2.3 Deflexão Elástica de Vigas

A deflexão elástica linear de uma viga é governada, segundo a Teoria de Vigas de Euler, pela EDO

$$\begin{array}{l} EI \frac{d^4 u}{dx^4}(x) + ku(x) = p(x), \quad \forall x \in (0, l_x) \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = \theta_0, \\ EIu''(l_x) = \overline{M},\ EIu'''(l_x) = \overline{V}, \end{array} \tag{1.2.7}$$

em que u_0 é um deslocamento prescrito, θ_0 é uma rotação prescrita, $\overline{M}$ é um momento fletor prescrito e $\overline{V}$ é uma força cortante prescrita. A constante EI é a rigidez flexional e k é a constante elástica do meio sob a qual a viga repousa. A função $p : [0, l_x] \to \mathbf{R}$ é a força distribuída sobre a viga.

1.2.4 Deformação de Barras Elásticas

O deslocamento axial elástico de uma barra uniforme geometricamente e materialmente homogênea é regido pela equação diferencial

$$\begin{array}{ll} AE \frac{d^2 u}{dx^2}(x) = -w(x), & \forall x \in (0, l_x) \\ u(0) = \overline{u}_0,\ E \frac{du}{dx}(x) = \overline{t}, & \end{array} \tag{1.2.8}$$

em que A é área seccional da barra, E é o módulo de elasticidade, $\overline{u}_0$ é um deslocamento axial prescrito e $\overline{t}$ é uma tensão prescrita. A função $w : [0, l_x] \rightarrow \mathbf{R}$ representa a força de corpo volumetricamente distribuída na barra.

1.2.5 Equação Diferencial das Placas

A configuração deformada de uma placa Ω, uniforme geometricamente e com contorno suave $\partial\Omega$, materialmente homogênea, é governada pela Equação Diferencial das Placas, isto é,

$$\begin{array}{ll} \mathbf{D}\nabla^4 u(x,y) = \mathbf{D}\Big[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\Big] = p(x,y), & \forall (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = 0, & \forall (x,y) \in \partial\Omega, \end{array} \tag{1.2.9}$$

em que $\mathbf{D}$ é a rigidez flexional da placa, $p : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ é a força transversal distribuída sobre a superfície da placa e $\mathbf{n}$ é a normal exterior à $\partial\Omega$. As condições $u\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0$ equivalem a uma placa engastada perfeitamente segundo a curva que descreve seu contorno.

1.2.6 Equação Reação-Difusão-Convecção

Uma clássica equação diferencial da Mecânica dos Fluidos é a equação reação-difusão-convecção. Se a concentração de uma dada espécie $u : [0, l_x] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ difunde-se num meio unidimensional com coeficiente de difusividade μ, é transportada segundo uma velocidade constante β e é gerada reativamente e proporcionalmente a um coeficiente σ, então $u(x,t)$ é governada pela equação diferencial homogênea

$$\begin{array}{ll} u_t = \mu u_{xx} + \beta u_x + \sigma u, & \forall (x,t) \in (0, l_x) \times (0, \infty), \\ u(x,0) = f(x), & \forall x \in (0, l_x), \\ u(0,t) = \overline{u}_0(t), & \forall t > 0, \\ u(l_x,t) = \overline{u}_l(t), & \forall t > 0. \end{array} \tag{1.2.10}$$

em que μ, β, e σ são constantes dadas; $f : (0, l_x) \rightarrow \mathbf{R}$, $\overline{u}_0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\overline{u}_l : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ são funções dadas.

1.2.7 Equação do Potencial Eletrostático

Se $\rho : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ representa uma densidade de distribuição de cargas elétricas num aberto $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ e $\vec{E} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ constitui o campo vetorial elétrico induzido pela densidade de cargas elétricas ρ, então, sabe-se da Teoria da Eletricidade e do Magnetismo que $\vec{E} = -\nabla V$, V é denominado potencial eletrostático. Então, a equação que governa a distribuição do campo escalar $V : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ é expressa pela Equação de Poisson

$$
\begin{aligned}
&-\nabla \cdot \nabla V = 4\pi\rho, \quad \forall x \in \Omega, \\
&V\Big|_{\partial\Omega} = V_0,
\end{aligned}
\tag{1.2.11}
$$

em que V_0 é o potencial eletrostático prescrito sobre o contorno suave $\partial\Omega$ que limita Ω.

1.2.8 Arranjos Biológicos-Geométricos

Um modelo não-linear da Biomatemática que descreve a geração de arranjos biológicos-geométricos unidimensionais e bidimensionais é governado pela EDP adimensionalizada que representa a combinação de difusão e fenômenos (chemotáticos) associados a bactérias como a *E.coli* e *S. typhimurium*:

$$
\frac{\partial b}{\partial t} = -\nabla \cdot J = -\nabla \cdot [-\mu \nabla b + \chi b \nabla c] \tag{1.2.12}
$$

onde μ é um coeficiente de motilidade, $\chi = \chi(c)$ é um coeficiente de chemoatração, b é a densidade celular bacteriana e c é a densidade do chemoatractante. A condição inicial é, em geral

$$
b(x, 0) = b_0 \delta(x - x_0) \tag{1.2.13}
$$

e a condição de contorno é do tipo Neumann homogênea, ou seja, fluxo nulo no contorno uma vez que é assumida inexistência de ação do meio exterior na geração de padrões biológicos.

1.3 Partição em 1D e Condições de Contorno

No caso de domínios unidimensionais limitados, indicado pelo domínio intervalar $I = [0, l]$, $l > 0$, a discretização I_h por diferenças finitas é uma partição composta dos pontos nodais $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ e tal que:

$$
\begin{aligned}
&i)\ I_h = \textstyle\bigcup_{i=1}^{N} I_i,\ \ I_i = (x_i, x_{i-1}), \\
&ii)\ I_i \cap I_j = \emptyset,\ \ i \neq j.
\end{aligned}
\tag{1.3.14}
$$

Genericamente, as condições de contorno são descritas pela condição do tipo misto de Robin

$$
Bu = \alpha u + \lambda \frac{\partial u}{\partial n} = \overline{u}, \qquad \alpha, \lambda \in \mathbf{R}, \mathbf{x} \in \partial\mathbf{\Omega} \tag{1.3.15}
$$

onde n é a normal exterior ao contorno $\partial\Omega$.

No caso unidimensinal, a condição é

$$\alpha u(\overline{x}) + \lambda \frac{du}{dx}(\overline{x}) = \overline{u} \tag{1.3.16}$$

$\overline{x}$ é um extremo do intervalo.

Quando $\lambda = 0$, a condição é do tipo Dirichlet, ou seja, $u(\overline{x}) = \overline{u}$; quando $\alpha = 0$, a condição é do tipo Neumann, ou seja,

$$\lambda \frac{du}{dx}(\overline{x}) = \overline{u}. \tag{1.3.17}$$

1.4 Teorema de Expansão em Série de Taylor

Para fixar idéias, seja $C^0(\Omega)$ o espaço das funções $u : \Omega \to \mathbf{R}$ contínuas em $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$, $d = 1, 2, 3$. Indique-se por $C^k(\Omega)$, o espaço da funções contínuas com derivadas até a ordem k contínuas. Prova-se que é possível expandir $u : \Omega \to \mathbf{R}$ no entorno de um ponto $\overline{x} \in \Omega$ polinomialmente.

1.4.1 Fórmula de Taylor com Erro de Lagrange em 1D

Seja $u : I \to \mathbf{R}$, $u \in C^{n+1}(I)$ no ponto $\overline{x} \in I$. Então,

$$u(x) = u(\overline{x} + h_x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{u^{(i)}(\overline{x})}{i!} h_x^i + E_n(\theta), \tag{1.4.18}$$

$$E_n(\theta) = \frac{u^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} h_x^{n+1}, \ \theta \in (\overline{x}, \overline{x} + h_x). \tag{1.4.19}$$

1.5 Notas Históricas sobre Brook Taylor

Brook Taylor foi um proeminente matemático inglês do século XVII, nascido em agosto de 1685 e falecido em dezembro de 1731 em Londres, Inglaterra. Brook Taylor teve uma educação regrada sob rígida disciplina, dada a cultura familiar em artes, especialmente música erudita. Em 1703, Taylor ingressou no Saint John College Cambridge onde envolveu-se e cultuou sua inclinação pela Matemática. Graduou-se em 1709, notabilizando-se com a escrita do seu primeiro paper em 1708 que seria publicado posteriormente no ano de 1714. Em 1714 é eleito secretário da Royal Society, posição que Taylor conservou até 1718. Neste período científico áureo, Taylor escreveu e imortalizou-se com seu livro *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* (1715).

Uma série de tragédias pessoais está associada ao nome desse matemático, iniciada em 1721 com o falecimento prematuro da esposa e de seu nati-morto.

Taylor é conclamado o criador de um ramo da Matemática Aplicada chamada Cálculo das Diferenças Finitas e estudou a série conhecida como a Expansão de Taylor cujos princípios estão em seu livro *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. A significância científicas das teorias e idéias de Brook Taylor permaneceu recôntida até 1772 quando o matemático francês Joseph Lagrange proclamou o Teorema da Expansão em Série de Taylor o fundamento do Cálculo Infinitesimal.

1.6 Notação de Landau e Ordem de Convergência

Sejam $\Omega \subset \mathbf{R^d}$, aberto, limitado, e $u, f : \Omega \to \mathbf{R}$ funções reais. Define-se a relação binária de equivalência, indicada por O, no espaço de funções reais $\mathcal{F}$ por

$$uOf,\ \forall\ u, f \in \mathcal{F}\ \Leftrightarrow\ \exists C_1, C_2\ >\ 0:\ C_1 f(x) \leq u(x) \leq C_2 f(x), \qquad \forall x \in \Omega.$$

Diz-se então, que as funções u e f são de ordem de grandeza equivalentes. Escreve-se $u = O(f)$ e lê-se *u é da ordem de f*.

Prova-se que a notação O que define a relação binária é na verdade, uma relação de equivalência que particiona as funções em classes de equivalência de funções. Essa notação é típica das demonstrações em análise numérica que combinada ao teorema do confronto dos limites possibilita o entendimento da convergência assintótica das aproximações.

A título de ilustração, assuma que $\exists\ C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1 h^p \leq E(x) \leq C_2 h^p, \qquad \forall x \in \Omega. \tag{1.6.20}$$

Por definição, escreve-se que $E = O(h^p)$, com p a ordem de convergência. Isto equivale a dizer que se $h \to 0$, a função erro $E(x)$ converge a zero de forma semelhante à de h^p.

Uma aplicação da notação de Landau ocorre na Série de Taylor com erro na forma de Lagrange. O erro de Lagrange satisfaz

$$E_n(\theta) = O(h_x^{n+1}), \tag{1.6.21}$$

pois

$$E_n(\theta) = \frac{u^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} h_x^{n+1}. \tag{1.6.22}$$

Quando p é fixado e uma sequência de refinamentos-h da discretização Ω_{h_1}, Ω_{h_2}, ..., com $h_i \to 0$ é gerada, diz-se tratar de uma *convergência* -h da solução aproximada. Quando h é fixado e uma sequência de refinamentos-p da discretização Ω^{p_1}, Ω^{p_2}, ..., com $p_i \to \infty$ é construída, diz-se consistir de uma *convergência-p* da solução aproximada. Se as variações na discretização são concomitantemente sobre h e p, diz-se de uma *convergência-hp*.

1.7 Aproximação de Derivadas Discretas

Seja $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ uma partição do intervalo $I = [0, l], l > 0$ e $u : I \to \mathbf{R}$, $u \in C^2(I)$. Aplicando o Teorema de Taylor Infinitesimal, tem-se num ponto arbitrário $x_i \in \mathcal{P}$ que:

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + u'(x_i)h_x + u''(\theta)\frac{h_x^2}{2}, \tag{1.7.23}$$

onde $\theta \in (x_i, x_{i+1})$.

Usando $u(x_i) = u_i$, por simplicidade de notação, tem-se:

$$u_{i+1} = u_i + h_x u'(x_i) + O(h_x^2). \tag{1.7.24}$$

Daí a proximação discreta da derivada é:

$$u'(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_x} + O(h_x^1). \tag{1.7.25}$$

Desprezando a magnitude do erro de truncamento de Lagrange, então:

$$u_i' \cong \frac{u_{i+1} - u_i}{h_x}, \tag{1.7.26}$$

que é a aproximação de diferença finita avançada para a derivada de primeira ordem. E, por argumentos análogos, tem-se a aproximação de diferença finita central para a derivada de primeira ordem:

$$u_i' \cong \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h_x}. \tag{1.7.27}$$

Da expansão de Taylor, tem-se, para $u : I \to \mathbf{R}$ num ponto $x_i \in \mathcal{P}$:

$$\begin{array}{rcl} u(x_i + h_x) & = & u(x_i) + \frac{h_x}{1!}u'(x_i) + \frac{h_x^2}{2!}u''(x_i) + \frac{h_x^3}{3!}u'''(x_i) + E_3(\theta_1), \\ u(x_i - h_x) & = & u(x_i) + \frac{-h_x}{1!}u'(x_i) + \frac{h_x^2}{2!}u''(x_i) + \frac{-h_x^3}{3!}u'''(x_i) + E_3(\theta_2), \end{array} \tag{1.7.28}$$

com $E_3(\theta) = \frac{d^4u(\theta)}{dx^4}\frac{h_x^4}{4!}$.

Segue-se daí a derivada discreta de segunda ordem:

$$u''(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h_x^2} + O(h_x^2). \tag{1.7.29}$$

Logo, a derivada segunda discreta é:

$$u''(x_i) \cong \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h_x^2}. \tag{1.7.30}$$

1.8 Método de Diferenças Finitas em 1D

Sem restrição da generalidade, limitar-nos-emos ao problema de valor de contorno descrito por um operador diferencial $\mathcal{L}$ de segunda ordem a coeficientes constantes:

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}u = (a_2 D_x^2 + a_1 D_x^1 + a_0)u(x) = f(x), \quad \forall x \in (0, l) \\ \mathcal{B}u = (u(0), u(l)) = (0, 0), \end{array} \tag{1.8.31}$$

onde $D_x^i = \frac{d^i}{dx^i}$.

Assuma uma partição $\mathcal{P}$ de $I = [0, l]$, constituida de $N + 1$ pontos nodais x_i. Daí, num ponto interior de I, tem-se:

$$(a_2 D_x^2 + a_1 D_x^1 + a_0)u(x_i) = f(x_i) \quad \forall x_i \in \mathcal{P}. \tag{1.8.32}$$

Logo, as derivadas discretas para $u''(x_i)$ e $u'(x_i)$ substituídas em $\mathcal{L}u = f$ conduzem a

$$\begin{array}{l} a_2(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h_x^2}) \ + \ a_1(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h_x}) \ + \ a_0 u_i = f_i, \\ i = 1, \ldots, N - 1. \end{array} \tag{1.8.33}$$

O sistema algébrico resultante, na incógnita vetorial $U = (u_1, \ldots, u_{N-1})$, é definido pelas equações lineares

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2(\frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{h_x^2}) \ + \ a_1(\frac{u_2 - u_0}{2h_x}) \ + \ a_0 u_1 = f_1, \\ a_2(\frac{u_3 - 2u_2 + u_1}{h_x^2}) \ + \ a_1(\frac{u_3 - u_1}{2h_x}) \ + \ a_0 u_2 = f_2, \\ a_2(\frac{u_4 - 2u_3 + u_2}{h_x^2}) \ + \ a_1(\frac{u_4 - u_2}{2h_x}) \ + \ a_0 u_3 = f_3, \\ \vdots \\ a_2(\frac{u_N - 2u_{N-1} + u_N}{h_x^2}) \ + \ a_1(\frac{u_N - u_{N-2}}{2h_x}) \ + \ a_0 u_N = f_{N-1}. \end{array} \right. \tag{1.8.34}$$

Matricialmente, tem-se o sistema tridiagonal $KU = F$ em que os termos da diagonal são $k_{ii} = \frac{-2a_2}{h_x^2} + a_0$, os termos da diagonal superior são $k_{ij} = \frac{a_2}{h_x^2} + \frac{a_1}{2h_x}$, e os termos da diagonal inferior são $k_{ij} = \frac{a_2}{h_x^2} - \frac{a_1}{2h_x}$, com $F = (f_1 - \frac{a_2 u_0}{h_x^2} + \frac{a_1 u_0}{2h_x}, f_2, f_3, \ldots, f_{N-1} - \frac{a_2 u_N}{h_x^2} - \frac{a_1 u_N}{2h_x})$.

1.9 Métodos Discretos para EDO: a viga de Euler-Bernoulli

A distribuição de momento fletor M em uma viga sob ação de uma carga externa w distribuída no segmento retilíneo que define a viga indeformada de comprimento l é governada pela EDO [1]:

$$EI\frac{d^2M(x)}{dx^2} = w \qquad ,\forall x \in (0,l), \tag{1.9.35}$$

onde EI é constante positiva (rigidez flexional).

Assuma que os extremos da viga estejam simplesmente apoiados o que equivale às condições de contorno:

$$M(0) = M(l) = 0. \tag{1.9.36}$$

A fim de resolver o problema de valor de contorno formulado, imagine-se que $\overline{I} = [0,l]$ particionado em subintervalos igualmente espaçados, $h_x = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,\ldots,N$.

Segue-se da aproximação discreta da derivada segunda que

$$\begin{array}{l} EI(\frac{M_{i+1}-2M_i+M_{i-1}}{h_x^2}) = w_i, \quad i = 1,\ldots,N-1. \\ M_0 = M_N = 0. \end{array} \tag{1.9.37}$$

Por simplicidade, assumir-se-á que $\frac{w_i}{EI} = 1$, e daí:

$$\begin{array}{l} M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1} = h_x^2, \quad i = 1,\ldots,N-1. \\ M_0 = M_N = 0. \end{array} \tag{1.9.38}$$

A formulação discreta precedente equivale à formulação matricial definida pelo sistema tridiagonal $KU = F$, onde $U = (M_1, M_2, \ldots, M_{N-1})$ é o vetor de momentos fletores incógnitos, $F = h_x^2(1,1,\ldots,1)$ é o vetor $(N-1)$-dimensional de forças externas e K é uma matriz de banda tridiagonal com $k_{ii} = -2$ e subdiagonais inferior e superior unitárias.

Para ilustrar, faça $l = 1$ e $N = 5$, isto conduz ao sistema linear de quarta ordem

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \frac{h_x^2}{EI} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix} \tag{1.9.39}$$

Nota-se a estrutura de banda tridiagonal de K, que é típica dos modelos originados de discretizações *via* Método de Diferenças Finitas.

1.10 Teorema de Taylor Multidimensional

Objetivando estender o método de diferenças finitas a problemas multidimensionais, generalizar-se-á a Expansão de Taylor para funções reais de várias variáveis reais.

Seja $u : \Omega \to \mathbf{R}$, Ω aberto, limitado no espaço euclidiano bidimensional e $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x}, \overline{y}) \in \Omega$. Admitindo que $u \in C^{n+1}(\Omega)$, então é possível expandir $u(\mathbf{x})$ como uma representação em série da forma:

$$u(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\Big(h_x \frac{\partial}{\partial x} + h_y \frac{\partial}{\partial y}\Big)^i u(\overline{x}) \;+\; E_n(h_x, h_y), \qquad (1.10.40)$$

onde $h_x = x - \overline{x}, h_y = y - \overline{y}$ são incrementos direcionais em x e y em torno de $(\overline{x}, \overline{y})$. As potências do operador $D = h_x \frac{\partial}{\partial x} + h_y \frac{\partial}{\partial y}$ são calculadas por uma definição indutiva. Semelhantemente, para $u : \Omega \to \mathbf{R},\ \mathbf{\Omega} \subset \mathbf{R^3}$, *mutatis mutandis*

$$u(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\Big(h_x \frac{\partial}{\partial x} + h_y \frac{\partial}{\partial y} + h_z \frac{\partial}{\partial z}\Big)^i u(\overline{x}) \;+\; E_n(h_x, h_y, h_z), \qquad (1.10.41)$$

onde $h_x = x - \overline{x},\ h_y = y - \overline{y},\ h_z = z - \overline{z}$ são incrementos direcionais segundo x, y, z em torno de $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}),\ E_n(h_x, h_y, h_z)$ é o erro de Lagrange.

1.11 Derivadas Discretas Mistas de Ordem Superior

Para EDO e EDP cujos operadores diferenciais das equações governantes do problema são de ordem superior e postos em domínios multidimensionais, a generalização das derivadas discretas é natural e segue das Expansões de Taylor Multidimensionais.

O cálculo analítico das derivadas mistas fundamenta-se na definição indutiva do operador diferencial de ordem superior, isto é,

$$D_x = \frac{d}{dx},\ D_x^n u = D_x(D_x^{n-1} u),\ n = 1, 2, \ldots$$

Seja $u : \Omega \to \mathbf{R},\ \mathbf{\Omega} \subset \mathbf{R^2}$, função bivariável real dada e $\mathcal{Q} = \bigcup_{i,j} I_{x_i} \times I_{y_j}$ partição uniforme de Ω com $I_{x_i} = (x_i, x_{i+1}),\ I_{y_j} = (y_i, y_{i+1})$ com $h_x = x_{i+1} - x_i,\ h_y = y_{i+1} - y_i$. Então, a derivada discreta mista em um ponto genérico (x_i, y_j) é, por definição,

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{(x_i, y_j)} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}_{(x_i, y_j)}. \qquad (1.11.42)$$

Usando a derivada discreta central para a derivada de primeira ordem em x e y sequencialmente, tem-se que:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{(x_i,y_j)} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u(x,y_j+h_y)-u(x,y_j-h_y)}{2h_y} \; + \; O(h_y^2) \right] \right\}_{x=x_i} \tag{1.11.43}$$

E segue-se da linearidade do operador derivada que:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{(x_i,y_j)} &= \frac{1}{2h_y}\left\{ \frac{u(x_i+h_x,y_j+h_y)-u(x_i-h_x,y_j+h_y)}{2h_x} \right.\\ &\left. - \frac{u(x_i+h_x,y_j-h_y)-u(x_i-h_x,y_j-h_y)}{2h_x} + O(h_x^2) \right\} + O(h_y^2)\end{aligned} \tag{1.11.44}$$

Se os infinitésimos de ordem superior são de magnitude desprezível, então:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{(x_i,y_j)} \cong \frac{u_{i+1,j+1}-u_{i-1,j+1}-u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1}}{4h_x^2 h_y^2}. \tag{1.11.45}$$

Generalizações semelhantes são possíveis para $3D$ e fórmulas análogas são deduzidas para derivadas mistas do tipo

$$\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}\right|_{(x_i,y_j,z_k)}.$$

1.12 Derivadas Discretas Direcionais

Seja $\Omega = I_x \times I_y,\ I_x = (0,l_x),\ I_y = (0,l_y),\ \Omega$ um domínio retangular em $2D$ e $\mathcal{Q} = \{(x_i,y_j),\ i = 0,\ldots,n_x,\ j = 0,\ldots,n_y\}$ um conjunto discreto de pares ordenados $(x_i,y_j) \in \Omega$, uniformemente espaçados em x e y com $h_x = x_i - x_{i-1},\ h_y = y_j - y_{j-1}$.

Da Expansão de Taylor, se $h_y = 0$ e para $\overline{x} = x_i,\ \overline{y} = y_j$ vale:

$$u(x_{i+1},y_j) \;=\; u(x_i,y_j) \;+\; \frac{h_x}{1!}\frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial x} \;+\; \frac{h_x^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial x^2} \;+\ldots \tag{1.12.46}$$

Analogamente, com $h_x = 0$, vale escrever:

$$u(x_i,y_{j+1}) \;=\; u(x_i,y_j) \;+\; \frac{h_y}{1!}\frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial y} \;+\; \frac{h_y^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial y^2} \;+\ldots \tag{1.12.47}$$

Combinando as fórmulas precedentes com os argumentos análogos aos do caso unidimensional, prova-se que a derivada de primeira ordem discreta com diferença finita central segundo x é:

$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} \cong \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x}. \tag{1.12.48}$$

Analogamente, a derivada direcional discreta de segunda ordem é expressa por:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} \cong \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2}. \tag{1.12.49}$$

Naturalmente, fórmulas similares são dedutíveis para $\frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial y}$ e para $\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial y^2}$. É óbvio que a derivação de tais expressões é de suma importância para a aproximação de operadores diferenciais que usualmente definem EDO e EDP clássicas.

1.13 Métodos Discretos para EDP

Para introduzir os fundamentos, nesse tópico, estudar-se-á o caso de torção linear elástica de um sólido prismático.

A função de tensão $\phi : \Omega \to \mathbf{R}$ governa a torção elástica de sólido homogêneo prismático segundo a equação de Poisson em $2D$ [1]:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta, \tag{1.13.50}$$

em que G é o módulo de cisalhamento elástico, θ é um ângulo de torção, $\Omega = (0, l_x) \times (0, l_y)$ é o área seccional do sólido. A função de tensão está sujeita à condição de Dirichlet homogênea

$$\phi\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

onde $\partial\Omega$ é o contorno poligonal do domínio retangular Ω. Por simplicidade, far-se-á $G\theta = 1$.

Seja $\mathcal{Q} = \{(x_i, y_j) \mid \; i = 0, \ldots, n_x, \; j = 0, \ldots, n_y\}$ um conjunto discreto de pares ordenados tais que $\Omega = \bigcup_{i,j} I_{x_i} \times I_{y_j}, \; I_{x_i} = (x_{i-1}, x_i), \; I_{y_j} = (y_{j-1}, y_j)$, com $h_x = x_i - x_{i-1}, \; h_y = y_j - y_{j-1}$. Para um ponto arbitrário (x_i, y_j) da partição de Ω vale

$$\frac{\partial^2 \phi(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x_i, y_j)}{\partial y^2} = -2. \tag{1.13.51}$$

Das fórmulas das derivadas direcionais discretas de segunda ordem, tem-se, nos pontos nodais interiores:

$$\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{h_y^2} = -2, \tag{1.13.52}$$

$i = 1, \ldots, n_x - 1,\ j = 1, \ldots, n_y - 1.$

Rearranjando os termos, tem-se

$$h_y^2(\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j}) + h_x^2(\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1}) - 2(h_x^2 + h_y^2)\phi_{i,j} = -2h_x^2 h_y^2. \tag{1.13.53}$$

As condições de contorno de Dirichlet homogêneas são, semelhantemente, discretizadas e definidas sobre os segmentos retilíneos que limitam $\Omega = (0, l_x) \times (0, l_y)$, isto é,

$$\phi_{0,j} = \phi_{n_x,j} = 0, \quad j = 0, \ldots, n_y,\ e \tag{1.13.54}$$

$$\phi_{i,0} = \phi_{i,n_y} = 0, \quad i = 0, \ldots, n_x. \tag{1.13.55}$$

À guisa de ilustração, faça $n_x = n_y = 3$, então, a formulação discreta conduz à formulação matricial $KU = F$ onde o vetor de incógnitas é $U = (\phi_{1,1}, \phi_{2,1}, \phi_{1,2}, \phi_{2,2})$, o vetor de termos independentes é $F = -2h_x^2 h_y^2(1, 1, 1, 1)$ e K a matriz de quarta ordem:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -2(h_x^2 + h_y^2) & h_y^2 & h_x^2 & 0 \\ h_y^2 & -2(h_x^2 + h_y^2) & 0 & h_x^2 \\ h_x^2 & 0 & -2(h_x^2 + h_y^2) & h_y^2 \\ 0 & h_x^2 & h_y^2 & -2(h_x^2 + h_y^2) \end{pmatrix} \tag{1.13.56}$$

A medida que n_x e n_y aumentam, evidencia-se a esparsidade da matriz $\mathbf{K}$. A esparsidade é uma propriedade típica de modelos discretos e é fundamental na modelagem computacional de EDO e EDP.

1.14 Condições de Contorno Tipo Neumann

Problemas industriais, reais da engenharia e ciências exatas, usualmente apresentam condições de contorno na derivada da função incógnita. Condições de contorno sobre a derivada prescreve o valor do fluxo da variável dependente segundo a normal ao contorno.

Em uma dimensão espacial, a derivada ordinária é prescrita nos extremos do intervalo. Para regiões bidimensionais, a derivada direcional segundo a normal à curva que descreve o contorno é pré-definida. E, similarmente, em domínios sólidos tridimensionais, a derivada direcional segundo a normal à superfície que limita o sólido é prescrita.

Uma condição de Neumann para 1D é a clássica condição da viga biengastada, isto é:

$$\frac{du(0)}{dx} = \frac{du(l_x)}{dx} = 0. \tag{1.14.57}$$

Equivalentemente, para o fluxo unidimensional de calor (ou gradiente de temperatura), a condição de Neumann não-homogênea é:

$$-k\frac{dT}{dx}(0) = \overline{q}_0, \; -k\frac{dT}{dx}(l_x) = \overline{q}_{l_x}, \tag{1.14.58}$$

onde k é a condutividade térmica do meio e $\overline{q}$ é o fluxo de calor prescrito.

A generalização natural da Condição de Neumann para uma placa circular engastada no bordo definido por uma curva $\mathcal{C}$ de normal exterior $\vec{n}$ é:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\mathcal{C}} = 0. \tag{1.14.59}$$

Analogamente, para a condução do calor em $2D$ com distribuição de temperatura indicada pela função $T = T(x, y)$, a condição de Neuman não-homogênea associada ao gradiente da temperatura constante e independente do tempo dada por $\overline{q}$ no contorno $\partial\Omega$ de uma palca retangular $\Omega = (0, l_x) \times (0, l_y)$ é:

$$\nabla T \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = \overline{q}. \tag{1.14.60}$$

Explicitamente:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial T}{\partial x}(x, y) = \overline{q} \quad & \forall x \in [0, l_x], \; y = 0 \text{ ou } y = l_y, \\ \tfrac{\partial T}{\partial y}(x, y) = \overline{q} \quad & \forall y \in [0, l_y], \; x = 0 \text{ ou } x = l_x. \end{aligned} \tag{1.14.61}$$

Para ilustrar a discretização de condições de contorno, imagine que o domínio retangular $\Omega = (0, l_x) \times (0, l_y)$ seja subdividido uniformemente em $n_x + 1$ pontos nodais na direção x e $n_y + 1$ pontos nodais na direção y e com espaçamentos h_x e h_y nessa ordem.

Com isso, a versão discreta da condição de contorno relativa ao fluxo de calor é, para $j = 1, \ldots, n_y - 1$ e $i = 1, \ldots, n_x - 1$, dada por:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial T}{\partial x}(l_x, y_j) \cong \tfrac{T_{n_x,j} - T_{n_x-1,j}}{h_x} = \overline{q}(l_x, y_j) = \overline{q}_{n_x,j}, \\ \tfrac{\partial T}{\partial y}(x_i, l_y) \cong \tfrac{T_{i,n_y} - T_{i,n_y-1}}{h_y} = \overline{q}(x_i, l_y) = \overline{q}_{i,n_y}. \end{aligned} \tag{1.14.62}$$

Tal é a generalidade das técnicas de discretização, que fórmulas absolutamente análogas se aplicam ao caso de placas retangulares quadriengastadas cuja rotação prescrita nula nos bordos com normal $\mathbf{n}$ é

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

$w = w(x, y)$ é o deslocamento transversal à superfície da placa, $\Omega = (0, l_x) \times (0, l_y)$.

Modelando a condição de contorno de rotação em termos de diferenças finitas, tem-se nos bordos $x = 0$ e $y = 0$ sob iguais condições de discretização, para $j = 1, \ldots, n_y - 1$ e $i = 1, \ldots, n_x - 1$:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial w}{\partial x}(0, y_j) &\cong \tfrac{w_{1,j} - w_{0,j}}{h_x} = 0, \\ \tfrac{\partial w}{\partial y}(x_i, 0) &\cong \tfrac{w_{i,1} - w_{i,0}}{h_y} = 0. \end{aligned} \tag{1.14.63}$$

Condições de contorno complexas, envolvendo derivadas de ordem superior são possíveis, e o tratamento por meio de diferenças finitas é inteiramente idêntico.

Na Engenharia Estrutural, o momento fletor prescrito está associado à curvatura e é calculado de M_x e M_y conforme abaixo:

$$\begin{aligned} M_x &= D\Big(\tfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \tfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big), \\ M_y &= D\Big(\tfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \tfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big). \end{aligned} \tag{1.14.64}$$

Portanto, uma placa retangular quadriapoiada equivale a condições homogêneas $M_x\Big|_{\partial\Omega} = M_y\Big|_{\partial\Omega} = 0$ as quais se simplificam para $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, y) = 0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l_x, y) = 0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, l_y) = 0$, $x \in (0, l_x)$, $y \in (0, l_y)$.

Como exemplificação, a discretização da condição $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, y) = 0$, usando diferença finita é, para $j = 1, \ldots, n_y - 1$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, y) \cong \frac{w_{2,j} - 2w_{1,j} + w_{0,j}}{h_x^2} = 0.$$

Em conclusão, a composição completa da formulação matricial depende de uma consistente seleção das versões discretas das condições de contorno e das equações diferenciais governantes, daí a preferência por discretizações ortogonais, uniformes.

1.15 Geometrias Irregulares

Enfatiza-se que a aproximação das derivadas ordinárias ou direcionais no contorno não é, em geral, tão simples, pois, depende sua definição de pontos interiores e exteriores à discretização. A ocorrência dessas limitações no cálculo das derivadas discretas no contorno é típico de geometrias irregulares em domínios de forma arbitrária e restringe sobremodo o campo de aplicação do Método de Diferenças Finitas.

Imagine-se, e.g., a discretização espacial da condição de viga de Euler-Bernoulli biengastada. Tem-se, por diferença finita central que no extremo x_0

$$u'(x_0) \cong \frac{u(x_0+h_x)-u(x_0-h_x)}{2h_x} = 0. \tag{1.15.65}$$

Note que o ponto nodal $x_0 - h_x$ é imaterial, hipotético, pois a viga se materializa em $[0, l_x]$ e a discretização é $\{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$. Introduziu-se uma incógnita extra no vetor de incógnitas, sem significância física. Entretanto, as aproximações construídas para a condição de contorno discreta de derivada nula e para a EDO de Euler-Bernoulli são ambas de $O(h_x^2)$.

Alternativamente e fisicamente coerente com os pontos nodais existentes na partição, constrói-se a aproximação das condições de contorno conforme as diferenças finitas:

$$\begin{aligned} u'(x_0) &= \tfrac{u(x_1)-u(x_0)}{h_x} + O(h_x) = 0, \\ u'(x_N) &= \tfrac{u(x_N)-u(x_{N-1})}{h_x} + O(h_x) = 0, \end{aligned} \tag{1.15.66}$$

e para a EDO da Teoria das Vigas de Euler-Bernoulli a aproximação:

$$EI\Big(\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h_x^2}\Big) + O(h_x^2) = w_i, \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{1.15.67}$$

Para esse caso, a aproximação discreta conduz a um vetor de incógnitas $U = (u_0, u_1, \ldots, u_N)$ em que inexiste pontos nodais extras ou incógnitas extras na formulação matricial. Observa-se, porém, que a condição de contorno é aproximada com uma ordem $O(h_x)$, enquanto a EDO com uma ordem $O(h_x^2)$.

Para compor a formulação matricial, forma-se o arranjo retangular que se origina da formação discreta

$$\begin{cases} -u_0 + u_1 = 0, \\ u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = \frac{h_x^2 w_i}{EI} \quad , i = 1, \ldots, N-1, \\ -u_{N-1} + u_N = 0. \end{cases} \tag{1.15.68}$$

Equivalentemente, tem-se a formulação matricial

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{Bmatrix} = \frac{h_x^2}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.15.69}$$

Nota-se, obviamente, a esparsidade da matriz de rigidez e a propriedade de banda tridiagonal típica dos modelos discretos fundamentados em MDF.

Capítulo 2

Métodos de Erros Ponderados em EDO e EDP

2.1 Métodos Integrais de Erros Ponderados

Os Métodos Integrais de Erros ponderados são métodos gerais para a aproximação de soluções de equações diferenciais ordinárias e de equações diferenciais parciais. A aproximação da função-solução é centrada fundamentalmente na idéia de sistematicidade e generalidade de um conjunto de funções-base. O *continuum* é simplificado para um conjunto finito, discreto, de unidades elementares sobre as quais as funções-base são definidas e as coordenadas generalizadas determinadas.

2.1.1 Funções de Forma

As funções-base ou funções de forma são funções selecionadas num espaço de funções pré-fixado a fim de gerar a solução aproximada u_h. Para fixar idéias, seja $u : \Omega \to \mathbf{R}$ uma função real dada, definida sobre um domínio limitado Ω com contorno definido por uma curva $\partial\Omega$. Seja $\beta = \{L_i(x)\}_{i=1}^{N}$, conjunto de funções de forma linearmente independentes, tal que $L_i\Big|_{\partial\Omega} = 0 \ \forall i$, $N \in \mathbf{N}$ é dado.

Seja a aproximação de u expressa pela interpolante

$$u_h(x) \ = \ \overline{u} \ + \ \sum_{i=1}^{N} c_i L_i(x) \tag{2.1.1}$$

onde $\overline{u}\Big|_{\partial\Omega} \ = \ u\Big|_{\partial\Omega}$ e c_i são coordenadas generalizadas. Note que tal definição implica automaticamente que a função aproximadora de $\mathbf{u}$ tem a seguinte propriedade

$$u_h\Big|_{\partial\Omega} \ = \ u\Big|_{\partial\Omega}.$$

O conjunto-base β de funções de forma é esperado ser tal que quando a aproximante u_h é associada a um refinamento do tipo p ou a um refinamento do tipo h, a condição de convergência é configurada, i.e.,

$$\lim_{N\to\infty} u_h(x) \;=\; \lim_{h\to 0\;\, p\to\infty} u_h(x) \;=\; u(x), \qquad N = N(h,p).$$

Basicamente, isto equivale a dizer que a base β satisfaz a condição de completeza e, portanto, uma função arbitrária $u : \Omega \to \mathbf{R}$, suficientemente contínua, é representável pela combinação linear

$$\overline{u} \;+\; \sum_{i=1}^{N} c_i L_i(x) \tag{2.1.2}$$

quando $N = N(h,p) \to \infty$, com h o parâmetro de discretização e p a ordem espectral da aproximação.

2.1.2 Espaço de Funções Contínuas por Partes

Seja $u : \Omega \to \mathbf{R}$ uma função real dada e Ω um domínio limitado e aberto do $\mathbf{R}^d$, $d = 1, 2, 3$ com contorno descrito pela curva suave $\partial\Omega$, uma união finita de contornos suaves sem auto-interseção com normal exterior $\vec{n}$.

Indique-se por $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i$ uma partição de Ω em N subdomínios Ω_i com contornos $\partial\Omega_i$ de normal $\vec{n}_i$.

Diz-se que u é contínua por partes quando

i) $\forall\Omega_i \in \mathcal{P},\ u|_{\Omega_i} \in C^0(\Omega_i)$ (*Continuidade de u por partes*)
ii) $|\lim_{\lambda\to 0^+} u(x+\lambda\vec{n}_i)| \leq C,\ |\lim_{\lambda\to 0^-} u(x+\lambda\vec{n}_i)| \leq C,$ *com* $0 < C < \infty$, $\forall x_0 \in \partial\Omega_i,\ \forall\partial\Omega_i$ (*Finitude de u interelemento*).

Em $1D$, a partição de um intervalo finito $\overline{I} = [0, l_x]$ é simplesmente $\mathcal{P} = \bigcup_{i=0}^{N-1} I_i$, $I_i = (x_i, x_{i+1})$ com $x_0 = 0$ e $x_N = l_x$. A função arbitrária dada $u : I \to \mathbf{R}$ assume no caso unidimensional uma versão definida em subintervalos (x_i, x_{i+1}) com limites laterais finitos em cada ponto nodal x_i de descontinuidade, com u contínua em cada parte ou subintervalo I_i.

A simplicidade e generalidade das funções do espaço de funções contínuas por partes para fins de aproximação numérica serão posteriormente entendidas.

Seja $I \subset \mathbf{R}$ um intervalo finito, $\overline{I} = [0, l_x]$ e $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{N} I_i$, $I_i = (x_i, x_{i+1})$ partição de I. Define-se a função indicatriz por

$$X_{I_i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_i, \\ 0, & x \in I - I_i. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Faça, então, $\{X_{I_i}\}_{i=0}^{N-1}$ as funções de forma associadas à partição $\mathcal{P}$. Uma interpolante para uma função $u : I \to \mathbf{R}$ dada é representada por

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i X_{I_i}(x). \tag{2.1.4}$$

Note a descontinuidade da interpolante u_h definida sobre $\mathcal{P}$ que constitui a mais simples interpolante do tipo constante por partes. É interessante observar para a interpolante constante por partes que as coordenadas generalizadas c_i são definidas por elemento, ou seja, sobre cada subintervalo.

2.2 Interpolação Lagrangeana em 1D

Por simplicidade e sem restrição da generalidade, limitar-nos-emos ao caso de Interpolação de Lagrange em 1D.

Imagine-se que $u : I \to \mathbf{R}$ é uma função real arbitrária dada definida no intervalo finito $\overline{I} = [0, l_x],\ u \in C^0(\overline{I})$.

Sejam dados o conjunto discreto de pares de pontos $\{(x_i, u_i)\}_{i=0}^{N_x}$ com $u_i = u(x_i),\ N_x \in \mathbf{N},\ x_i$ é um ponto genérico. Assumindo que a base de funções de forma é $\beta = \{L_i(x)\}_{i=0}^{N_x}$ onde $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$ são os polinômios de Lagrange, então, a interpolante é $u_h(x) = \sum_{i=0}^{N_x} c_i L_i(x)$. Por definição, modelar os dados discretos $\{(x_i, u_i)\}_{i=0}^{N_x}$ segundo a interpolação lagrangeana equivale a impor:

$$u_h(x_j) = \textstyle\sum_{i=0}^{N_x} c_i L_i(x_j) = u(x_j), \quad j = 0, \ldots, N_x. \tag{2.2.5}$$

Isto equivale a um sistema algébrico linear nas incógnitas $(c_0, c_1, \ldots, c_{N_x})$ formulado em termos matriciais como:

$$\begin{pmatrix} L_0(x_0) & L_1(x_0) & \cdots & L_{N_x}(x_0) \\ L_0(x_1) & L_1(x_1) & \cdots & L_{N_x}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_0(x_{N_x}) & L_1(x_{N_x}) & \cdots & L_{N_x}(x_{N_x}) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N_x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N_x} \end{Bmatrix}. \tag{2.2.6}$$

Obviamente, os polinômios de Lagrange satisfazem

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}. \tag{2.2.7}$$

Logo, a solução do sistema diagonal unitário precedente é obviamente $c_i = u_i = u_(x_i),\ i = 0, \ldots, N_x$. Daí, a interpolante lagrangeana de u é

$$u(x) \cong u_h(x) = \sum_{i=0}^{N_x} c_i L_i(x) \tag{2.2.8}$$

Esta propriedade simples da base lagrangeana sumariza a potente versatilidade e generalidade do seu uso para o cálculo de soluções aproximadas de EDO e EDP. Explicitamente, nesse caso as coordenadas generalizadas c_i significam fisicamente os valores prescritos da função arbitrária dada $u = u(x)$, calculada nos pontos nodais da partição.

2.3 Erros Ponderados

Para introduzir um método geral de aproximação da solução de EDO e EDP, fixemos inicialmente a notação. Seja $u : \Omega \to \mathbf{R}^n$ uma função real multivariável definida em $\Omega \subset \mathbf{R}^d,\ d = 1, 2, 3$.

Define-se o erro pontual no interior do domínio Ω de u por:

$$E_\Omega(x) = u(x) - u_h(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.3.9}$$

Seja $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^{N_x}$ um conjunto de funções de forma completo, linearmente independente e admissível relativamente às condições de vinculação e $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{N_x}$ um conjunto de funções de ponderação, linearmente independente e variacionalmente admissível.

A formulação de Erro Ponderado é posto nessas condições como:

$$\textit{Determinar } u_h \in S \textit{ tal que } \forall \varphi_j \in S,\ \int_\Omega \varphi_j(x) E_\Omega(x) d\Omega = 0, \quad j = 0, \ldots, N_x,$$

com S o espaço de funções contínuas por partes sobre Ω. Introduzindo a notação de produto interno sobre S tem-se semelhantemente que

$$(\varphi_j, E_\Omega)_\Omega = \int_\Omega \varphi_j(x) E_\Omega(x) d\Omega = 0 \tag{2.3.10}$$

e a formulação do Método Integral de Erros Ponderados é posto abstratamente e compactamente na forma:

$$\textit{Determinar } u_h \in S \textit{ tal que } \forall \varphi_j \in S,\ (\varphi_j, E_\Omega)_\Omega = 0, \quad j = 0, \ldots, N_x.$$

Substituindo a expressão de u_h no erro ponderado E_Ω, tem-se:

$$\forall \varphi_j \in S, (\varphi_j,\ u - \sum_{i=0}^{N_x} c_i \phi_i)_\Omega = 0.$$

Segue-se da bilinearidade do produto interno $(\cdot,\ \cdot)_\Omega$ que:

$$\forall \varphi_j \in S, (\varphi_j, \sum_{i=0}^{N_x} c_i \phi_i)_\Omega = (\varphi_j, u)_\Omega.$$

Donde obtém-se, equivalentemente:

$$\forall \varphi_j \in S, \sum_{i=0}^{N_x} (\varphi_j, \phi_i)_\Omega c_i = (\varphi_j, u)_\Omega.$$

Geralmente, o sistema linear algébrico precedente é posto na forma matricial compacta $Kd = F$, onde $d = (c_0, c_1, \ldots, c_{N_x})$ é o vetor de incógnitas, F é vetor de termos independentes expresso por

$$F = [f_j] = \int_\Omega \varphi_j(x) u(x) d\Omega = 0 \qquad j = 0, \ldots, N_x. \tag{2.3.11}$$

e K a matriz de rigidez representada por

$$K = [k_{ji}] = \int_\Omega \varphi_j(x) \phi_i(x) d\Omega = 0, \qquad i, j = 0, \ldots, N_x. \tag{2.3.12}$$

Uma infinidade de Métodos de Erros Ponderados são gerados, principiando da formulação apresentada, variando-se a base de funções de ponderação $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{N_x}$. Para fixar idéias, limitar-nos-emos ao estudo de modelos unidimensionais, porém as versões multidimensionais são possíveis.

2.3.1 Colocação Pontual

A base de funções de ponderação $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{N_x}$ no Método de Colocação Pontual é composta por

$$\varphi_j(x) = \delta(x - x_j) = \delta_j(x), \tag{2.3.13}$$

onde δ é a função generalizada Delta de Dirac e x_j são pontos nodais pré-selecionados.

Por definição da função generalizada Delta de Dirac tem-se que a formulação de erros ponderados conduz a:

$$(\delta_j, E_\Omega) = 0, \qquad \forall j,\ j = 0, \ldots, N_x. \tag{2.3.14}$$

Segue-se das propriedades do Delta de Dirac que:

$$E_\Omega(x_j) = 0 \qquad \forall j,\ j = 0, \ldots, N_x. \tag{2.3.15}$$

Isto equivale a

$$u(x_j) = u_h(x_j) = \sum_{i=0}^{N_x} c_i \phi_i(x_j), \qquad j = 0, \ldots, N_x. \tag{2.3.16}$$

Observe que existe uma família de métodos de colocação pontual possíveis, dependendo dos pontos de colocação $\{x_j\}_{j=0}^{N_x}$ selecionados e da base de funções de forma $\{\phi_i\}_{i=0}^{N_x}$.

Uma variante especial do Método de Colocação Pontual é obtida quando uma base de Polinômios Ortogonais é usada em associação com pontos de colocação definidos como os zeros dos polinômios da base.

Determinados os valores pontuais $\{(x_j, u_j)\}_{j=0}^{N_x}$ com $u_j = u(x_j)$, a aproximante é calculada do sistema linear:

$$\begin{pmatrix} P_0(x_0) & P_1(x_0) & \cdots & P_{N_x}(x_0) \\ P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & P_{N_x}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0(x_{N_x}) & P_1(x_{N_x}) & \cdots & P_{N_x}(x_{N_x}) \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N_x} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N_x} \end{array} \right\}, \tag{2.3.17}$$

onde $\{P_i(x)\}_{i=0}^{N_x}$ forma uma base ortogonal polinomial e $\{x_j\}_{j=0}^{N_x}$ são os zeros dos $P_i(x)$. Nesse caso, a colocação pontual é chamada Colocação Ortogonal. Geralmente $\{P_i(x)\}_{i=0}^{N_x}$ são polinômios especiais como os polinômios de Legendre.

2.3.2 Colocação por Subdomínios

Seja a base de funções de ponderação composta por funções indicatrizes dos subdomínios, isto é,

$$\varphi_j(x) = \chi_{I_j}(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_j = (x_j, x_{j+1}), \\ 0, & x \notin I_j. \end{cases} \tag{2.3.18}$$

É observável que a Colocação por Subdomínios é intrinsecamente uma formulação local, e as coordenadas generalizadas estão desacopladas mutuamente.

A formulação de erros ponderados implica que

$$(\chi_{I_j}, E_\Omega) = 0 \quad \forall j,\ j = 0, \ldots, N_x - 1. \tag{2.3.19}$$

Daí:

$$\textstyle\sum_{i=0}^{N_x-1} c_i (\chi_{I_j}, \varphi_i) = (\chi_{I_j}, u), \quad \forall j,\ j = 0, \ldots, N_x - 1. \tag{2.3.20}$$

Explicitamente, tem-se:

$$k_{ji} = (\chi_{I_j}, \varphi_i) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_i(x)dx \tag{2.3.21}$$

$$f_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(x)dx \tag{2.3.22}$$

E, matricialmente, a Colocação por Subdomínios é representada por $Kd = F$ com $d = (c_0, \ldots, c_{N_x-1})$, $F = [f_j]$ e $K = [k_{ji}]$.

2.4 Método de Bubnov-Galerkin

As funções de ponderação e as funções de forma são igualadas na formulação de erro ponderado denominado Método de Bubnov-Galerkin, isto é,

$$\varphi_j(x) = \phi_j(x), \quad j = 0, \ldots, N_x. \tag{2.4.23}$$

Daí segue-se que a formulação de erro ponderado é transformada em

$$(\phi_j, E_\Omega) = 0 \quad \forall j,\ j = 0, \ldots, N_x. \tag{2.4.24}$$

Implicando no conjunto de equações lineares:

$$\textstyle\sum_{i=0}^{N_x} c_i(\phi_j, \phi_i) = (\phi_j, u), \quad \forall j,\ j = 0, \ldots, N_x. \tag{2.4.25}$$

Matricialmente, esse sistema linear algébrico é posto como $Kd = F$ com $d = (c_0, \ldots, c_{N_x})$ e

$$F = [f_j] = \int_0^{l_x} \phi_j(x)u(x)dx \tag{2.4.26}$$

$$K = [k_{ji}] = \int_0^{l_x} \phi_j(x)\phi_i(x)dx \tag{2.4.27}$$

2.4.1 Propriedades Elementares do Método de Galerkin

É trivial provar que o método de Bubnov-Galerkin tem como propriedade fundamental o fato da matriz de rigidez ser uma matriz simétrica ou hermitiana. A simetria da matriz é de suma importância na modelagem computacional de EDO e EDP *via* Métodos Numéricos da classe de formulação de Erros Ponderados.

São propriedades notáveis do Método de Galerkin a simplicidade, a generalidade e a sistematicidade tanto em termos de análise matemática quando de análise numérica de convergência e estabilidade.

Especialmente na Teoria da Mecânica dos Sólidos, o Método de Bubnov-Galerkin é um clássico e consagrado método de aproximação de Equações Diferenciais.

Variantes do Método de Bubnov-Galerkin existem para a modelagam computacional e análise numérica de problemas em Mecânica dos Fluidos e dos Meios Porosos quando o Método usual de Galerkin não apresenta estabilidade (Métodos de Elementos Finitos Estabilizados).

Bases de funções de forma e ponderação ortogonais representam uma possibilidade especial e atrativa para a Formulação de Galerkin, pois nesse caso $(\varphi_j, \varphi_i) = 0,\ j \neq i$, gerando uma matriz de rigidez puramente diagonal cujo sistema associado tem solução óbvia e instantânea.

2.5 Método de Mínimos Quadrados Contínuo

Para colocar a formulação de erros ponderados no contexto de mínimos quadrados contínuo, define-se o funcional quadrático $\epsilon_\Omega : \mathbf{R}^{N_x+1} \rightarrow \mathbf{R}$ por

$$\epsilon_\Omega(c_0, c_1, \ldots, c_{N_x}) = \int_\Omega [E_\Omega(x)]^2 d\Omega. \tag{2.5.28}$$

O método consiste, então, em extremizar o funcional erro quadrático ϵ_Ω relativamente às coordenadas generalizadas c_i, calculando a interpolante extremizante da Condição de Otimalidade

$$\delta^1 \epsilon_\Omega = 0, \tag{2.5.29}$$

onde δ^1 indica a primeira variação do funcional erro ϵ_Ω. Pré-selecionando as funções de forma e substituindo $E_\Omega(x) = u(x) - u_h(x),\ u_h(x) = \sum_{i=0}^{N_x} c_i \varphi_i(x)$ em ϵ_Ω, então, o valor minimizado de ϵ_Ω segue de:

$$\textstyle\int_\Omega E_\Omega(x) \varphi_i(x) d\Omega = 0, \quad i = 0, \ldots, N_x. \tag{2.5.30}$$

Obviamente isto equivale a

$$(E_\Omega(x), \varphi_i(x))_\Omega = 0, \quad i = 0, \ldots, N_x. \tag{2.5.31}$$

Donde conclui-se a equivalência do Método de Mínimos Quadrados Contínuo com o Método de Bubnov-Galerkin com funções peso φ_j iguais às funções de forma ψ_j.

A interpolante extremizante calculada otimizando o funcional convexo ϵ_Ω é, de fato uma interpolante minimizante, posto que a segunda variação de ϵ_Ω conduz a

$$\delta^2 \epsilon_\Omega = \textstyle\int_\Omega [\varphi_i(x)]^2 d\Omega > 0, \quad i = 0, \ldots, N_x. \tag{2.5.32}$$

Logo, o erro quadrático é realmente minimizado pela formulação de mínimos quadrados contínuo.

2.6 Métodos de Mínimos Quadrados Discreto

Em analogia com o Método de Mínimos Quadrados Contínuo, o Método de Mínimos Quadrados Discreto define o funcional quadrático $\epsilon_\Omega : \mathbf{R}^{N_x+1} \to \mathbf{R}$ com o análogo da soma contínua definida pela integral que é a soma discreta expressa pelo somatório

$$\epsilon_\Omega(c_0, c_1, \ldots, c_{N_x}) = \textstyle\sum_{i=0}^{M_x} [E_\Omega(x_i)]^2. \tag{2.6.33}$$

A extremização do funcional ϵ_Ω deriva da Condição de Otimalidade dada pelo gradiente de ϵ_Ω, isto é,

$$\tfrac{\partial \epsilon_\Omega}{\partial c_j} = 0, \quad j = 0, \ldots, N_x. \tag{2.6.34}$$

Derivando formalmente ϵ_Ω em relação às coordenadas generalizadas c_j, tem-se que

$$\textstyle\sum_{i=0}^{M_x} E_\Omega(x_i)\varphi_j(x_i) = 0, \quad j = 0, \ldots, N_x. \tag{2.6.35}$$

Isto equivale ao sistema linear algébrico

$$\sum_{i=0}^{M_x} c_i \varphi_i(x_i)\varphi_j(x_i) = \sum_{i=0}^{M_x} u(x_i)\varphi_j(x_i), \quad j = 0, \ldots, N_x. \tag{2.6.36}$$

Semelhantemente ao caso contínuo, no caso discreto prova-se, por algebrismo simples, que o funcional erro quadrático discreto ϵ_Ω é de fato minimizado.

Calculando-se a derivada segunda de ϵ_Ω, tem-se que

$$\tfrac{\partial^2 \epsilon_\Omega}{\partial c_j^2} = \textstyle\sum_{i=0}^{M_x} [\varphi_j(x_i)]^2 > 0, \quad j = 0, \ldots, N_x. \tag{2.6.37}$$

Logo, o erro quadrático é realmente minimizado pela formulação de mínimos quadrados discretos, o que ratifica a denominação dada ao método.

2.7 Generalização de Erros Ponderados a EDO's

Nessa parte do texto limitar-nos-emos ao estudo dos métodos discretos de análise numérica de EDO's. Seja, então, o operador diferencial linear, a coeficientes variáveis de ordem n

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) D_x^i \tag{2.7.38}$$

com a_i funções contínuas no domínio $\Omega = I = (0, l_x)$. Sejam $\mathcal{B}$ um operador diferencial, $\overline{u}$ e f funções reais dadas contínuas. Formule-se, então, o problema de valor de contorno posto na forma denominada Formulação Pontual ou Diferencial, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f \quad \forall x \in I, \\ \mathcal{B}u &= \overline{u} \quad \forall x \in \partial I = \{0, l_x\}. \end{aligned} \tag{2.7.39}$$

A fim de constituir uma aproximação no sentido do Método de Erros Ponderados, introduz-se analogamente o erro associado à EDO definido por

$$E_\Omega = \mathcal{L}u(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I = (0, l_x). \tag{2.7.40}$$

Então, se $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{N_x}$ é uma base de funções de ponderação, o análogo do Método de Erros Ponderados para EDO's se escreve como a Formulação Integral

$$\forall \varphi_j, \quad \int_\Omega \varphi_j(x) E_\Omega(x) d\Omega = 0. \tag{2.7.41}$$

Mas segue-se da linearidade da integral de Riemann que a formulação precedente equivale a

$$\forall \varphi_j, \quad \int_\Omega \varphi_j(x) \mathcal{L}u(x) d\Omega = \int_\Omega \varphi_j(x) f(x) d\Omega. \tag{2.7.42}$$

Compactamente, na notação de produto interno:

$$\forall \varphi_j, (\varphi_j, \mathcal{L}u)_\Omega = (\varphi_j, f)_\Omega. \tag{2.7.43}$$

Observe-se, porém, que o problema é posto num espaço funcional de dimensão infinita e, portanto, em termos de cálculo computacional, a formulação é intratável. O objetivo central é compor uma representação aproximada na qual a solução numérica $u_h \in S_h \subset S$ substitui u da Formulação Variacional Contínua, descrita simbolicamente como

$$\textit{Determinar } u \in S \textit{ tal que } \forall \varphi_j \in \mathcal{W} (\varphi_j, \mathcal{L}u)_\Omega = (\varphi_j, f)_\Omega \tag{2.7.44}$$

em que S é um espaço de funções admissíveis com produto interno e $\mathcal{W}$ é um espaço de funções de ponderação variacionalmente compatíveis pela Formulação Integral Discreta

$$\textit{Determinar } u_h \in S_h \textit{ tal que } \forall \varphi_j \in \mathcal{W}_h (\varphi_j, \mathcal{L}u_h)_\Omega = (\varphi_j, f)_\Omega, \tag{2.7.45}$$

em que $S_h \subset S$ e $\mathcal{W}_h \subset \mathcal{W}$ são espaços conformes, de dimensão finita, associados a S e W, nessa ordem. Assumindo que u_h é uma interpolante satisfazendo a condição de contorno a priori e definida por

$$u_h(x) = \overline{u}(x) + \sum_{i=0}^{N_x} c_i \phi_i(x), \; u_h\Big|_{\partial I} = \overline{u}, \tag{2.7.46}$$

então, a Formulação Variacional Discreta é reescrita como:

$$\begin{aligned} &\textit{Determinar } u_h \in S_h \textit{ tal que } \forall \varphi_j \in \mathcal{W}_h, \; (\varphi_j, \mathcal{L} \textstyle\sum_{i=0}^{N_x} c_i \phi_i)_\Omega = \\ &= (\varphi_j, f)_\Omega - (\varphi_j, \mathcal{L}\overline{u}). \end{aligned} \tag{2.7.47}$$

Isto conduz à formulação matricial $Kd = F$ com $d = (c_1, c_2, \ldots, c_{N_x})$ o vetor de coordenadas generalizadas incógnitas, $F = [f_j]$ é o vetor de ações externas definidos por

$$f_j = \int_\Omega \varphi_j(x) f(x) d\Omega - \int_\Omega \varphi_j(x) \mathcal{L}\overline{u}(x) d\Omega \tag{2.7.48}$$

e $K = [k_{ji}]$ é a matriz de rigidez definida por

$$k_{ji} = \int_\Omega \varphi_j(x) \mathcal{L} \phi_i(x) d\Omega. \tag{2.7.49}$$

É importante observar que geralmente a matriz de rigidez K da formulação precedente não apresenta estrutura de banda ou esparsidade e nem é uma matriz simétrica.

2.7.1 Equação Diferencial de Euler-Bernoulli

Uma clássica EDO da Engenharia Estrutural origina-se da Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli [1]. A equação governante dos deslocamentos transversais de uma viga de área seccional uniforme e rigidez flexional constante EI sob uma base de constante elástica k é:

$$EI \tfrac{d^4 u}{dx^4} + ku = f \quad \forall x \in (0, l_x), \tag{2.7.50}$$

em que f é a ação de cargas externas e l_x é o comprimento finito da viga.

Se a condição de vinculação é tal que os deslocamentos e os momentos fletores são nulos nos extremos $x = 0$ e $x = l_x$, então as condições de contorno são simplesmente

$$u(0) = u''(0) = 0, \tag{2.7.51}$$

$$u(l_x) = u''(l_x) = 0. \tag{2.7.52}$$

Selecione-se para a base de funções-solução o conjunto ortogonal da série de Fourier $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^{\infty} = \{\sin(\frac{i\pi x}{l_x})\}_{i=1}^{\infty}$. Notando que esse conjunto de funções satisfaz as condições de contorno *ab initio*, assumir-se-á que $\overline{u}(x) = 0,\ \forall x \in [0, l_x]$.

Daí, a interpolante $u_h(x)$ será definida pela combinação linear infinita:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \sin\Big(\frac{i\pi x}{l_x}\Big). \tag{2.7.53}$$

Fixando-se as funções de ponderação compatíveis com a vinculação do sólido unidimensional finito em estudo, isto é, $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty} = \{\sin(\frac{j\pi x}{l_x})\}_{j=1}^{\infty}$, então, o Método de Erros Ponderados conduz a

$$\int_0^{l_x} \varphi_j(x)[EI\frac{d^4 u_h}{dx^4} + ku_h - f](x)dx = 0,\ \forall\varphi_j. \tag{2.7.54}$$

Substituindo a expressão da interpolante $u_h(x)$, tem-se:

$$\int_0^{l_x} \varphi_j(x)[EI\sum_{i=1}^{\infty} c_i \frac{d^4\phi_i}{dx^4} + k\sum_{i=1}^{\infty} c_i\phi_i - f](x)dx = 0,\ \forall\varphi_j. \tag{2.7.55}$$

Segue-se das propriedades da integral de Riemann que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_0^{l_x}\Big(EI\frac{d^4\phi_i}{dx^4} + k\phi_i\Big)(x)\varphi_j(x)dx\right]c_i = \int_0^{l_x} f(x)\varphi_j(x)dx,\ \forall\varphi_j. \tag{2.7.56}$$

Mas $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ é um conjunto ortogonal, logo, a expressão precedente reduz-se, com $i = 1, \ldots, \infty$, a

$$\left\{\Big[EI\Big(\frac{i\pi}{l_x}\Big)^4 + k\Big]\int_0^{l_x}\phi_i(x)\varphi_i(x)dx\right\}c_i = \int_0^{l_x} f(x)\varphi_i(x)dx. \tag{2.7.57}$$

Portanto, as coordenadas generalizadas c_i são simplesmente expressas pela fórmula

$$c_i = \frac{\int_0^{l_x} f(x)\phi_j(x)dx}{\Big[EI\Big(\frac{i\pi}{l_x}\Big)^4 + k\Big]l_x}, \quad i = 1, \ldots, \infty. \tag{2.7.58}$$

Faça, por simplicidade, $k = EI = 1$ e $f(x) = 1$, então, as coordenadas generalizadas c_i são:

$$
\begin{aligned}
c_{2n+1} &= \frac{2(-1)^{2n+1}}{(2n+1)\pi\left\{\left[\frac{(2n+1)\pi}{l_x}\right]^4+1\right\}}, \quad && n=0,1,2,\ldots \\
c_{2n} &= 0, && n=0,1,2,\ldots
\end{aligned}
\tag{2.7.59}
$$

Prova-se por um algebrismo simples que $\lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = 0$. Nota-se que as funções de forma ou modos de deformação $\{\phi_{2n+1}(x)\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{l_x}\right]\right\}_{n=0}^{\infty}$ de ordem superior decaem a zero celeremente em contribuição para a deformada u_h da viga birotulada como é possível inferir da fórmula para c_{2n+1}.

2.8 Generalização do Método de Erros Ponderados

Objetivando generalizar o Método de Erros Ponderados e sistematizar a derivação de modelos discretos para EDO e EDP, desenvolver-se-á uma expansão em termos de uma base de funções de forma sem satisfazer *a priori* as condições de contorno. Obviamente, tal restrição limita as possíveis interpolantes para a solução exata da Equação Diferencial.

Imagine-se, então, $u : \Omega \to \mathbf{R}$ função real solução do problema de valor de contorno

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}u &= f, \quad \forall x \in \Omega, \\
\mathcal{B}u &= \overline{u} \quad \forall x \in \partial\Omega.
\end{aligned}
\tag{2.8.60}
$$

Define-se, então, o erro ε_Ω no interior do domínio Ω, como

$$
\varepsilon_\Omega(x) = \mathcal{L}u(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \tag{2.8.61}
$$

e o erro $\varepsilon_{\partial\Omega}$ no contorno $\partial\Omega$ expresso por

$$
\varepsilon_{\partial\Omega}(x) = \mathcal{B}(u) - \overline{u} = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega. \tag{2.8.62}
$$

Pré-selecionando a base de funções de forma como $\beta = \{\phi_i(x)\}_{i=1}^N$ e duas bases de funções de ponderação $w_\Omega = \{\varphi_j^\Omega(x)\}_{i=1}^N$ e $w_{\partial\Omega} = \{\varphi_j^{\partial\Omega}(x)\}_{i=1}^N$, a formulação de erros ponderados para a equação diferncial e a condição de contorno, simultaneamente, conduz à Formulação Variacional Contínua

$$
\int_\Omega \varepsilon_\Omega(x)\varphi_j^\Omega(x)dx + \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{\partial\Omega}(x)\varphi_j^{\partial\Omega}(x)ds = 0, \quad \forall\varphi_j^\Omega,\ \forall\varphi_j^{\partial\Omega}. \tag{2.8.63}
$$

Substituindo as expressões da interpolante $u_h = \sum_{i=1}^N c_i\phi_i(x)$, e dos erros $\varepsilon_\Omega(x) = \mathcal{L}u_h(x) - f(x)$, e $\varepsilon_{\partial\Omega}(x) = \mathcal{B}u_h(x) - \overline{u}$, tem-se, $\forall\varphi_j^\Omega \in w_\Omega,\ \forall\varphi_j^{\partial\Omega} \in w_{\partial\Omega}$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi_j^\Omega(x)\mathcal{L}u_h(x)dx + \int_{\partial\Omega} \varphi_j^{\partial\Omega}(x)\mathcal{B}u_h(x)ds = \int_\Omega \varphi_j^\Omega(x)f(x)dx+ \\ + \int_{\partial\Omega} \varphi_j^{\partial\Omega}(x)\overline{u}ds\end{aligned} \tag{2.8.64}$$

que é a Formulação Variacional Discreta associada.

Abstratamente, a formulação precedente equivale à Formulação Matricial $Kd = F$, em que $d = (c_1, c_2, \ldots, c_N)$ é o vetor de coordenadas generalizadas, $F = [f_j]$ é o vetor de termos independentes definidos por

$$F = [f_j] = \int_\Omega \varphi_j^\Omega(x)f(x)dx + \int_{\partial\Omega} \varphi_j^{\partial\Omega}(x)\overline{u}ds, \tag{2.8.65}$$

e a matriz de rigidez associada ao problema de valor de contorno discreto é

$$K = [k_{ji}] = \int_\Omega \varphi_j^\Omega(x)\mathcal{L}\phi_i(x)dx + \int_{\partial\Omega} \varphi_j^{\partial\Omega}(x)\mathcal{B}\phi_i(x)ds. \tag{2.8.66}$$

2.8.1 Equação Diferencial de Quarta Ordem em 1D

A fim de ilustrar a aplicação da generalização do método de erros ponderados, seja a equação governante dos deslocamentos transversais de uma viga monoengastada segundo a Teoria de Vigas Clássica de Euler-Bernoulli [1]

$$\begin{aligned}&EI\tfrac{d^4u}{dx^4} = f(x), \forall x \in (0, l_x)\\ &u(0) = \overline{u}_0,\ u'(0) = \overline{\theta}_0,\\ &\tfrac{d^2u}{dx^2}(l_x) = \overline{M}_1,\ \tfrac{d^3u}{dx^3}(l_x) = \overline{V}_1,\end{aligned}$$

em que EI é a rigidez flexional, l_x é o comprimento da viga, $\overline{u}_0$ é um deslocamento prescrito, $\overline{\theta}_0$ é uma rotação prescrita, $\overline{M}_1$ é um momento fletor prescrito e $\overline{V}_1$ é uma cortante prescrita e f é uma distribuição de cargas.

Selecione-se como base de funções de forma a base canônica do Espaço de Polinômios de grau menor ou igual k, $\beta = \{x^i\}_{i=0}^k$ com a qual construir-se-á a expansão da interpolante $u_h = \sum_{i=0}^k c_i x^i$. A condição de admissibilidade das funções de forma relativamente às condições de vinculação do sólido unidimensional é fundamental. Isto posto, definem-se os erros no interior do domínio e no contorno por

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_\Omega(x) = EI\tfrac{d^4u_h}{dx^4}(x) - f(x), \qquad \forall x \in (0, l_x)\\
&\varepsilon_{\partial\Omega}(x)\Big|_{x=0} = u_h(0) - \overline{u}_0,\\
&\varepsilon_{\partial\Omega}(x)\Big|_{x=0} = u_h'(0) - \overline{\theta}_0,\\
&\varepsilon_{\partial\Omega}(x)\Big|_{x=l_x} = \tfrac{d^2u_h}{dx^2}(l_x) - \overline{M}_1,\\
&\varepsilon_{\partial\Omega}(x)\Big|_{x=l_x} = \tfrac{d^3u_h}{dx^3}(l_x) - \overline{V}_1.
\end{aligned}$$

Segue-se, após aplicar o Princípio Geral de Erros Ponderados, que

$$\begin{aligned}
\int_0^{l_x}\left[EI\frac{d^4u_h}{dx^4}(x) - f(x)\right]\varphi^\Omega(x)dx \;+\; [(u_h(x) - \overline{u}_0)\varphi^{\partial\Omega}(x)]_{x=0} \;+\\
+\; [(u_h'(x) - \overline{\theta}_0)\varphi^{\partial\Omega}(x)]_{x=0} \;+\; \left[\left(\frac{d^2u_h}{dx^2}(x) - \overline{M}_1\right)\varphi^{\partial\Omega}(x)\right]_{x=l_x} \;+\\
+\left[\left(\frac{d^3u_h}{dx^3}(x) - \overline{V}_1\right)\varphi^{\partial\Omega}(x)\right]_{x=l_x} = 0.
\end{aligned} \tag{2.8.67}$$

Por simplicidade e sem restrição de generalidade assumir-se-á nos cálculos subsequentes que $\overline{u}_0 = \overline{\theta}_0 = 0,\ f(x) = 1,\ EI = 1,\ l_x = 1,\ \overline{V}_1 = \overline{M}_1$. E se uma expansão do tipo $u_h(x) = \sum_{i=0}^{4} c_i x^i$ é assumida, então, usando funções de ponderação do tipo delta de Dirac independentemente, tem-se o conjunto de equações lineares

$$\begin{aligned}
&24c_4 - 1 = 0,\\
&c_0 - \overline{u}_0 = 0,\\
&c_1 - \overline{\theta}_0 = 0,\\
&2c_2 + 6c_3 + 12c_4 - \overline{M}_1 = 0,\\
&6c_3 + 24c_4 - \overline{V}_1 = 0.
\end{aligned} \tag{2.8.68}$$

Resolvendo-se para $c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3$ e c_4 obtém-se

$$c_0 = \overline{u}_0, c_1 = \overline{\theta}_0, c_2 = \frac{(\overline{M}_1 - \overline{V}_1)}{2} + \frac{1}{4}, c_3 = \frac{(\overline{V}_1 - 1)}{6}, c_4 = \frac{1}{24}.$$

Logo, a interpolante calculada é:

$$u_h = \overline{u}_0 + \overline{\theta}_0 x + \Big(\frac{\overline{M}_1 - \overline{V}_1}{2} + \frac{1}{4}\Big)x^2 + \Big(\frac{\overline{V}_1 - 1}{6}\Big)x^3 + \frac{1}{24}x^4.$$

Pondo os valores prescritos para a viga monoengastada, obtém-se

$$u_h = \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24}.$$

É interessante observar que a interpolante determinada é igual à solução exata do problema. Importante é enfatizar que a base assumida para a interpolante consiste exatamente do conjunto gerador do espaço nulo do operador $\frac{d^4}{dx^4}$ completada com uma função geradora da parte não-homogênea da EDO associada, isto é, $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Tal consistência entre a formulação de erros ponderados e a solução exata em geral não é tão óbvia, mas depende intrinsecamente da base geradora da interpolante a qual não é simples de determinar para operadores arbitrários *a priori*.

2.8.2 Barra Elástica sob Tração Axial

Seja a equação governante dos deslocamentos axiais de um corpo sólido linearmente elástico, unidimensional finito quando sob ação das forças axiais de corpo $f = f(x)$ distribuída por unidade linear em $[0, l_x]$:

$$\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right] + f = 0 \quad \forall x \in (0, l_x). \tag{2.8.69}$$

Para fins de ilustração, admite-se que a barra prismática tem área seccional A constante e está vinculada rigidamente num extremo enquanto o outro está tracionado. A condição de contorno associada é, portanto:

$$u(0) = \overline{u}_0 \tag{2.8.70}$$

$$E\frac{du}{dx}(l_x) = \overline{t} \tag{2.8.71}$$

em que $\overline{t}$, é uma tração prescrita em $x = l_x$ e $\overline{u}_0$ é um deslocamento prescrito em $x = 0$. Definem-se os erros por:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_\Omega(x) = EA\frac{d^2u_h}{dx}(x) + f(x), & \forall x \in (0, l_x), \\ \varepsilon_{\partial\Omega}(x) = u_h(x) - \overline{u}_0, & x = 0, \\ \varepsilon_{\partial\Omega}(x) = Eu_h'(x) - \overline{t}, & x = l_x. \end{array} \tag{2.8.72}$$

Selecione-se para base da interpolante u_h o conjunto de funções de forma $\{x^i\}_{i=0}^2$. Logo, $u_h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$. Formando os erros ponderados independentemente, obtém-se

$$\begin{array}{l} \int_0^{l_x}(2EAc_2 + f(x))\varphi^\Omega(x)dx = 0, \\ \{(c_0 + c_1x + c_2x^2 - \overline{u}_0)\varphi^{\partial\Omega}(x)\}_{x=0} = 0, \\ \{[E(c_1 + 2c_2x) - \overline{t}]\varphi^{\partial\Omega}(x)\}_{x=l_x} = 0. \end{array} \tag{2.8.73}$$

Resolvendo-se para $c_0,\ c_1,\ c_2$ segue-se que:

$$c_0 = \overline{u}_0, \tag{2.8.74}$$

$$c_1 = \frac{\bar{t}}{E} + \frac{l_x}{EA}, \tag{2.8.75}$$

$$c_2 = \frac{-1}{2EA}. \tag{2.8.76}$$

Portanto, a interpolante que descreve o deslocamento axial da barra prismática é:

$$u_h = \overline{u}_0 + \left(\frac{\bar{t}}{E} + \frac{l_x}{EA}\right)x + \frac{1}{2EA}x^2. \tag{2.8.77}$$

Para os valores prescritos $f(x) = 1,\ l_x = 1,\ E = A = 1,\ \overline{u}_0 = 0$, a solução aproximada é:

$$u_h(x) = \left(\bar{t} + 1\right)x + \frac{1}{2}x^2. \tag{2.8.78}$$

Naturalmente, esta é a solução analítica exata.

2.8.3 Equação de Poisson em 2D. Torção Linear Elástica de um Sólido

Seja a equação de Poisson em 2D que rege a torção linear elástica de um sólido prismático $[0, l_x] \times [0, l_y] \times [0, l_z]$, isto é,

$$\Delta\phi = \tfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -2G\theta, \quad \forall(x, y) \in \Omega = (0, l_x) \times (0, l_y), \tag{2.8.79}$$

com G, módulo cisalhante e θ, um ângulo de torção dado, ϕ é a função de tensão de Airy.

Se $\partial\Omega$ é o contorno de Ω, então ϕ satisfaz a condição de contorno do tipo Dirichlet homogênea

$$\phi\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.8.80}$$

A fim de constituir aproximações para ϕ, definem-se os erros no interior do domínio retangular $\Omega = (0, l_x) \times (0, l_y)$ e no contorno poligonal $\partial\Omega$, composto por segmentos retos, expressos por

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_\Omega(x,y) = \Delta\phi + 2G\theta = 0,\\
&\varepsilon_{\partial\Omega}(x,y)\Big|_{x=0} = \phi\Big|_{x=0} = 0,\\
&\varepsilon_{\partial\Omega}(x,y)\Big|_{x=l_x} = \phi\Big|_{x=l_x} = 0,\\
&\varepsilon_{\partial\Omega}(x,y)\Big|_{y=0} = \phi\Big|_{y=0} = 0,\\
&\varepsilon_{\partial\Omega}(x,y)\Big|_{y=l_y} = \phi\Big|_{y=l_y} = 0.
\end{aligned}$$

As funções de forma são selecionadas para ser $\beta = \{\phi_i(x,y)\} = \{1, x^2, y^2, x^2y^2\}$ e a interpolante da função de tensão ϕ é, portanto,

$$\phi_h = \sum_{i=0}^{3} c_i\phi_i(x,y) = c_0 + c_1x^2 + c_2y^2 + c_3x^2y^2. \tag{2.8.81}$$

Fixando-se as funções de ponderação como $\omega_\Omega = \{\phi_i^\Omega(x,y)\}$ em que $\varphi_i^\Omega(x,y) = \phi_i(x,y)$ e $\varphi_i^{\partial\Omega}(x,y) = \phi_i(x,y)\Big|_{\partial\Omega}$. Isto posto, tem-se que a formulação de erros ponderados reduz-se simplesmente a

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_0^{l_x}\int_0^{l_y}(\Delta\phi_h + 2G\theta)\varphi_i^\Omega(x,y)dxdy + \int_0^{l_y}\phi_h(x,y)\Big|_{x=0}\varphi_i^{\partial\Omega}(x,y)\Big|_{x=0}dy+\\
&\textstyle+\int_0^{l_y}\phi_h(x,y)\Big|_{x=l_x}\varphi_i^{\partial\Omega}(x,y)\Big|_{x=l_x}dy + \int_0^{l_x}\phi_h(x,y)\Big|_{y=0}\varphi_i^{\partial\Omega}(x,y)\Big|_{y=0}dx+\\
&\textstyle+\int_0^{l_x}\phi_h(x,y)\Big|_{y=l_y}\varphi_i^{\partial\Omega}(x,y)\Big|_{y=l_y}dx = 0, \qquad \forall\varphi_i^{\partial\Omega},\ \forall\varphi_i^\Omega.
\end{aligned} \tag{2.8.82}$$

Para simplificar os cálculos far-se-á $l_x = l_y = 1$, $G\theta = 1$. Assumindo que $\phi_h(x,y) = c_0 + c_1x^2 + c_2y^2 + c_3x^2y^2$, tem-se os erros:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_\Omega(x,y) = 2[c_1 + c_2 + c_3(x^2+y^2) + 1],\\
&\varepsilon_{\partial\Omega}(x,y)\Big|_{x=0} = c_0 + c_2y^2,\\
&\varepsilon_{\partial\Omega}(x,y)\Big|_{x=l_x} = c_0 + c_1 + (c_2+c_3)y^2,\\
&\varepsilon_{\partial\Omega}(x,y)\Big|_{y=0} = c_0 + c_1x^2,\\
&\varepsilon_{\partial\Omega}(x,y)\Big|_{y=l_y} = c_0 + c_2 + (c_1+c_3)x^2.
\end{aligned}$$

Substituindo os erros precedentes nas integrais, tem-se $\forall\varphi_i^{\partial\Omega},\ \forall\varphi_i^\Omega$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1[c_1+c_2+c_3(x^2+y^2)+1]\varphi_i^{\Omega}(x,y)dxdy\ + \\
&\int_0^1(c_0+c_2y^2)\varphi_i^{\partial\Omega}(x,y)\Big|_{x=0}dy\ + \\
&\int_0^1[c_0+c_1+(c_2+c_3)y^2]\varphi_i^{\partial\Omega}(x,y)\Big|_{x=l_x}dy\ + \\
&\int_0^1(c_0+c_1x^2)\varphi_i^{\partial\Omega}(x,y)\Big|_{y=0}dx\ + \\
&\int_0^1[c_0+c_2+(c_1+c_3)x^2]\varphi_i^{\partial\Omega}(x,y)\Big|_{y=l_y}dx=0.
\end{aligned} \tag{2.8.83}$$

Usando sequencialmente as funções de ponderação $\varphi_i^{\Omega}(x,y)=\phi_i(x,y)$ e $\varphi_i^{\partial\Omega}(x,y)=\phi_i(x,y)\Big|_{\partial\Omega}$ com $\{\varphi_i^{\partial\Omega}(x,y)\}=\{1,x^2,y^2,x^2y^2\}$ na formulação de erros ponderados, obtém-se o sistema algébrico linear $Kd=F$. Explicitamente:

$$\begin{bmatrix} 4 & \frac{13}{3} & \frac{10}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{31}{15} & \frac{4}{3} & \frac{52}{45} \\ \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{31}{15} & \frac{52}{45} \\ \frac{2}{3} & \frac{34}{45} & \frac{34}{45} & \frac{10}{15} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -2 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} \end{matrix} \right\}. \tag{2.8.84}$$

Resolvendo-se o sistema para $d=(c_0,c_1,c_2,c_3)$, tem-se que a solução aproximada para a função de tensão ϕ é:

$$\phi_h(x,y)=-\frac{577}{174}+\frac{105}{58}x^2+\frac{105}{58}y^2-\frac{65}{58}x^2y^2. \tag{2.8.85}$$

É notório que a medida que a dimensão da base β aumenta, o grau de exatidão da aproximação deve crescer e, evidentemente, é imperativo a automatização dos cálculos *via* computador.

Capítulo 3

Métodos de Erros Ponderados e Fórmulas de Green Generalizadas

3.1 Formulações de Erros Ponderados Simétricas

Estudar-se-á nesse capítulo uma formulação de erros ponderados especialmente direcionada a operadores diferenciais de ordem par em associação com o Teorema de Gauss e suas formas equivalentes que são o Teorema de Green e a integração por partes unidimensional.

Seja, então, $\mathcal{L}(D) = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha D^\alpha$ um operador diferencial linear de ordem par $2m$ em que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$ é um multi-índice, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ é um ponto do $\mathbf{R}^d$ e

$$D_i^{\alpha_i} = \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}, \ D^\alpha = \Pi_{i=1}^d D_i^{\alpha_i} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}. \tag{3.1.1}$$

Semelhantemente, $\mathcal{B}$ é um operador diferencial linear associado às condições de contorno usuais, isto é, dos tipos Dirichlet, Neumann ou Robin. Seja $u : \Omega \to \mathbf{R}$ uma função real dada definida no aberto, limitado $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ e $\partial\Omega$, o contorno poligonal de Ω, composto por uma união finita de curvas suaves sem auto-interseções.

Definem-se no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ os produtos internos $\forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}$:

$$(\psi, \varphi)_\Omega = \int_\Omega \psi(x)\varphi(x)dx, \tag{3.1.2}$$

$$(\psi, \varphi)_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \psi(x)\varphi(x)dx. \tag{3.1.3}$$

Para fins de explanação dos fundamentos, reapresenta-se o problema de valor de contorno usual

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(D)u(x) = f(x), \quad &\forall x \in \Omega,\\ &\mathcal{B}u(x) = \overline{u}(x), \quad &\forall x \in \partial\Omega,\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

em que $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ é função dada e $\overline{u} : \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}$ é função real dada com valores prescritos de u e suas derivadas.

Se $u_h \in \mathcal{S}$ é uma interpolante de u, o erro no interior do domínio Ω é simplesmente

$$\varepsilon_\Omega(x) = \mathcal{L}u_h(x) - f(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.1.5}$$

E daí, a clássica formulação de erros ponderados é

$$(\varphi^\Omega, \varepsilon_\Omega)_\Omega = 0, \quad \forall \varphi^\Omega \in \mathcal{V}, \tag{3.1.6}$$

com $\mathcal{S}$ o espaço de funções contínuas por partes e $\mathcal{V}$, o espaço de funções de ponderação variacionalmente admissíveis.

Para a forma pré-definida do operador $\mathcal{L}(D)$ é possível rearranjar a formulação

$$\textstyle\int_\Omega \varphi^\Omega(x)[\mathcal{L}u_h(x) - f(x)]dx = 0, \quad \forall \varphi^\Omega \in \mathcal{V} \tag{3.1.7}$$

com a aplicação do Teorema de Gauss que equivale à Identidade de Green ou à integração por partes em $1D$.

O fundamento dessa formulação consiste em ter ordens de derivadas inferiores e equitativas sobre as funções de forma e sobre as funções de ponderação.

Basicamente, isto equivale a reduzir

$$(\varepsilon_\Omega, \varphi^\Omega)_\Omega = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega \varphi^\Omega(x)\mathcal{L}u_h(x)dx = \int_\Omega \varphi^\Omega(x)f(x)dx, \tag{3.1.8}$$

após aplicar a Integração por Partes Multidimensional, à formulação integral

$$-\int_\Omega \mathcal{D}\varphi^\Omega(x)\mathcal{D}u_h(x)dx + \int_{\partial\Omega} \varphi^\Omega(x)\frac{\partial u_h}{\partial n}(x)ds = \int_\Omega \varphi^\Omega(x)f(x)dx, \tag{3.1.9}$$

em que $\mathcal{D}$ é um operador diferencial associado a $\mathcal{L}$ e $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior a $\partial\Omega$. Ou, mais compactamente

$$(\mathcal{D}\varphi^\Omega, \mathcal{D}u_h)_\Omega = \left(\varphi^\Omega, \tfrac{\partial u_h}{\partial n}\right)_{\partial\Omega} - (\varphi^\Omega, f)_\Omega, \quad \forall \varphi^\Omega \in \mathcal{V}. \tag{3.1.10}$$

Isto posto, a Formulação Geral de Erros Ponderados obtida, somando-se a condição complementar associada ao erro no contorno, é transformada $\forall \varphi^{\Omega}, \varphi^{\partial\Omega} \in \mathcal{V}$ em

$$(\mathcal{D}\varphi^{\Omega}, \mathcal{D}u_h)_{\Omega} + (\varphi^{\partial\Omega}, \mathcal{B}u_h)_{\partial\Omega} = \left(\varphi^{\Omega}, \frac{\partial u_h}{\partial n}\right)_{\partial\Omega} + (\varphi^{\partial\Omega}, \overline{u})_{\partial\Omega} - (\varphi^{\Omega}, f)_{\Omega}. \quad (3.1.11)$$

3.1.1 Propriedades Especiais

Notáveis propriedades são inerentes à formulação precedente como a simetria da forma bilinear associada

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (\psi, \varphi) \longmapsto (\mathcal{D}\psi, \mathcal{D}\varphi)_{\Omega} \in \mathbf{R}. \quad (3.1.12)$$

É que eventualmente, parte dos termos nas integrais de contorno podem ser anuladas se determinada função-ponderação pré-definida é selecionada. Isto configura a condição de contorno denominada Condição de Contorno Natural que está associada a uma condição sobre o fluxo ou o gradiente no contorno $\partial\Omega$ (Condição de Contorno de Neumann).

Some-se a isto, a intrínseca estrutura da forma bilinear em que os integrandos são definidos em termos de operadores diferenciais $\mathcal{D}$ cuja ordem é inferior à ordem do operador $\mathcal{L}$. Portanto, o grau de regularidade e de continuidade necessário às funções de forma e às funções-ponderação possibilitam uma extensa e versátil variedade de funções-base.

Mutatis mutandis, vários operadores diferenciais clássicos podem ser gerados da fórmula geral para $\mathcal{L}(D)$, dependendo da dimensão do espaço euclideano em estudo onde é posto o problema. Clássicos operadores diferenciais estudados na análise numérica de EDO e EDP são:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(D)u = \tfrac{d^2u}{dx^2} + \lambda u \quad (\textit{Operador de Segunda Ordem em } 1D),\\
&\mathcal{L}(D)u = \tfrac{d^4u}{dx^4} + \lambda\tfrac{d^2u}{dx^2} + ku \quad (\textit{Operador de Quarta Ordem em } 1D),\\
&\mathcal{L}(D)u = \tfrac{\partial^2u}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2u}{\partial y^2} = \nabla^2u \quad (\textit{Operador de Laplace em } 2D),\\
&\mathcal{L}(D)u = \tfrac{\partial^2u}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2u}{\partial y^2} + \tfrac{\partial^2u}{\partial z^2} = \nabla^2u \quad (\textit{Operador de Laplace em } 3D),\\
&\mathcal{L}(D)u = \nabla^2u + \lambda u \quad (\textit{Operador de Helmholtz em } 3D),\\
&\mathcal{L}(D)u = \tfrac{\partial^4u}{\partial x^4} + 2\tfrac{\partial^4u}{\partial x^2\partial y^2} + \tfrac{\partial^4u}{\partial y^4} = \nabla^4u \quad (\textit{Operador } \text{Biharmônico}).
\end{aligned}$$

Parte das EDP's que estão associadas a fenômenos de fluxo em meios porosos, e a condução do calor em sólidos é descrita pelo Operador de Laplace ∇^2. O Operador Biharmônico, ∇^4, está associado à estática da deformação e à dinâmica de vibração de placas. O operador de Helmholtz está relacionado à propagação de ondas elásticas e ondas acústicas em meios sólidos deformáveis.

3.2 Teoremas de Green-Gauss, Fórmulas de Green Generalizadas

A fim de sistematizar a formulação de erros ponderados, fundamentados nos Teoremas de Green-Gauss, os quais implicam formas bilineares simétricas, seram apresentadas variantes $1D$, $2D$, $3D$ do Teorema de Gauss para subsidiar as deduções posteriores.

Em $1D$, a fórmula de integração por partes verifica que, para um intervalo finito $[0, l_x]$:

$$\int_0^{l_x} \varphi(x) \frac{d\psi}{dx}(x) dx = \varphi(x)\psi(x)\Big|_0^{l_x} - \int_0^{l_x} \psi(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) dx. \tag{3.2.13}$$

Se $\psi(x) = \frac{du}{dx}(x),\ u : [0, l_x] \to \mathbf{R}$ função dada, então:

$$\int_0^{l_x} \varphi(x) \frac{d^2u}{dx^2}(x) dx = \varphi(x) \frac{du}{dx}(x)\Big|_0^{l_x} - \int_0^{l_x} \frac{du}{dx}(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) dx. \tag{3.2.14}$$

Analogamente, o Teorema de Green em $2D$ para $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$, domínio aberto limitado com contorno $\partial\Omega$ cuja normal exterior é $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ consiste em

$$\int_\Omega \varphi[div\ \psi] d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \varphi\psi \cdot \mathbf{n} ds - \int_\Omega \psi \cdot \nabla\varphi d\Omega. \tag{3.2.15}$$

Se $\psi(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \nabla u(x, y),\ u : \Omega \to \mathbf{R}$ função dada, então tem-se a Identidade de Green:

$$\int_\Omega \varphi \nabla^2 u d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla u d\Omega, \tag{3.2.16}$$

em que $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y$ é a derivada direcional de u segundo $\mathbf{n}$.

Identidades integrais semelhantes podem ser deduzidas pela aplicação recorrente da Fórmula de Green sequencialmente. Com isto, prova-se que o operador biharmônico é redutível a

$$\begin{aligned}\textstyle\int_\Omega \varphi \nabla^4 u d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n}(\nabla^2 u)\varphi ds - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n}(\nabla u)\nabla\varphi ds + \\ \textstyle + \int_\Omega (\nabla^2\varphi)(\nabla^2 u) d\Omega.\end{aligned}$$

A versão unidimensional da identidade anterior é demonstrada com relativa simplicidade se a integração por partes é aplicada reiteradamente para conduzir a

$$\int_0^{l_x} \varphi(x)\tfrac{d^4u}{dx^4}(x)dx = \varphi(x)\tfrac{d^3u}{dx^3}(x)\Big|_0^{l_x} - \tfrac{d\varphi}{dx}(x)\tfrac{d^2u}{dx^2}(x)\Big|_0^{l_x} +$$

$$\int_0^{l_x} \tfrac{d^2\varphi}{dx^2}(x)\tfrac{d^2u}{dx^2}(x)dx.$$

É importante observar que para esse caso existem duas condições de contorno naturais, uma sobre u'' e outra sobre u'''.

Sumarizando: é possível, para a classe de operadores descrita, compor formas bilineares simétricas que simplificam sobremodo os cálculos computacionais além de condicionar o estudo abstrato com base na Análise Numérica.

3.2.1 Barra Elástica sob Tração Coaxial

Seja a EDO que governa os deslocamentos axiais de uma barra geometricamente uniforme e materialmente homogênea sob tensão coaxial

$$\begin{array}{l} AEu''(x) = -w(x), \quad \forall x \in (0, l_x), \\ u(0) = \overline{u}, \\ Eu'(l_x) = \overline{t}, \end{array} \tag{3.2.17}$$

em que A é a seção transversal, E é o módulo de elasticidade, $\overline{t}$ é tração prescrita, $w : [0, l_x] \to \mathbf{R}$ é a força distribuida ao longo da barra na direção x e $\overline{u}$ é o deslocamento prescrito que será assumido nulo.

Do Modelo de Erros Ponderados segue-se que

$$[AEu'(x)\varphi(x)]\Big|_0^{l_x} - \int_0^{l_x} AEu'(x)\varphi'(x)dx = \int_0^{l_x} w(x)\varphi(x)dx. \tag{3.2.18}$$

Admite-se que a base de funções de forma cinematicamente admissíveis com a condição de vinculação do sólido é $\beta = \left\{ \frac{x}{l_x} \right\} = \{\phi_1(x)\}$. Como funções de ponderação variacionalmente admissíveis será selecionado o conjunto simples unitário $\omega = \left\{ \frac{x}{l_x} \right\} = \{\phi_1(x)\}$. Sob tais definições a interpolante linear de $u : [0, l_x] \to \mathbf{R}$ é expressa simplesmente como

$$u_h(x) = u_1\phi_1(x). \tag{3.2.19}$$

Substituindo na formulação de erros ponderados, obtém-se:

$$A\overline{t} - \int_0^{l_x} AE\frac{u_1}{l_x}\frac{1}{l_x}dx = -\int_0^{l_x} w(x)\frac{x}{l_x}dx. \tag{3.2.20}$$

Resolvendo para o grau de liberdade u_1, tem-se:

$$u_1 = \frac{l_x}{AE}\left[A\bar{t} + \frac{1}{l_x}\int_0^{l_x} w(x)xdx\right]. \tag{3.2.21}$$

Se é assumido uma carga constante $w(x) = \overline{w}$ atuando axialmente na barra, então, u_1 é:

$$u_1 = \frac{l_x}{AE}\left[A\bar{t} + \frac{\overline{w}}{l_x}\int_0^{l_x} xdx\right] = \frac{l_x\bar{t}}{E} + \frac{l_x^2\overline{w}}{2AE}. \tag{3.2.22}$$

Por fim, a solução aproximada é escrita como:

$$u_h(x) = \left[\frac{\bar{t}}{E} + \frac{l_x\overline{w}}{2AE}\right]x. \tag{3.2.23}$$

No sentido de compor uma aproximação não-linear para a interpolante u_h, admitir-se-á a base de funções de forma $\beta = \left\{\frac{x}{l},\ \left(\frac{x}{l}\right)^2\right\} = \{\phi_1(x), \phi_2(x)\}$.

Nesse caso, a interpolante com dois graus de liberdade é definida por:

$$u_h(x) = u_1\frac{x}{l} + u_2\left(\frac{x}{l}\right)^2. \tag{3.2.24}$$

Conforme usual, a substituição na formulação de erros ponderados conduz a

$$\begin{aligned} &A(\bar{t})\varphi_i(l) - \textstyle\int_0^{l_x} AE\left(\frac{u_1}{l_x} + \frac{2xu_2}{l_x^2}\right)\varphi_i'(x)dx = -\textstyle\int_0^{l_x} w(x)\varphi_i(x)dx \\ &\forall\varphi_i,\ i = 1, 2. \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

Daí, segue-se o sistema linear em u_1 e u_2, dado por:

$$\frac{AE}{l_x}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} A\bar{t} + \frac{\overline{w}l}{2} \\ A\bar{t} + \frac{\overline{w}l}{3} \end{array}\right\}. \tag{3.2.26}$$

Resolvido em (u_1, u_2), o sistema tem como solução

$$\begin{aligned} u_1 &= \tfrac{\bar{t}l}{E} + \tfrac{\overline{w}l_x^2}{AE}, \\ u_2 &= \tfrac{-\overline{w}l_x^2}{2AE}. \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

Portanto, a solução aproximada que representa os deslocamentos axiais da barra é

$$u_h(x) = \left(\frac{\bar{t}l}{E} + \frac{\overline{w}l_x^2}{AE}\right)\frac{x}{l} + \left(-\frac{\overline{w}l_x^2}{2AE}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2. \tag{3.2.28}$$

Compare-se essa solução para a interpolante com a solução exata, isto é,

$$u(x) = \left(\frac{\bar{t}}{E} + \frac{\overline{w}l_x}{AE}\right)x - \frac{\overline{w}}{2AE}x^2. \tag{3.2.29}$$

É um truísmo a igualdade entre a interpolante $u_h(x) = u_1\left(\frac{x}{l_x}\right) + u_2\left(\frac{x}{l_x}\right)^2$ e a solução exata da equação diferencial da barra sob força axial que é $u(x) = \left(\frac{\bar{t}}{E} + \frac{\overline{w}l_x}{AE}\right)x - \frac{\overline{w}}{2AE}x^2$. Tal equivalência entre a solução do modelo variacional e a do modelo diferencial constitui-se um dos princípios fundamentais dos Métodos de Erros Ponderados e especialmente para as formulações da família dos Métodos de Elementos Finitos e suas variantes.

3.2.2 Viga de Euler-Bernoulli Mono-Engastada

Nessa seção, estudar-se-á a formulação de erros ponderados simétrica no caso da equação governante das deflexões da Viga de Euler-Bernoulli com uma vinculação do tipo mono-engastada expressa no problema de valor de contorno clássico

$$\begin{array}{l} EI\frac{d^4u}{dx^4}(x) = f(x), \quad \forall x \in (0, l_x), \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ EI\frac{d^2u}{dx^2}(l_x) = \overline{M}, \\ EI\frac{d^3u}{dx^3}(l_x) = \overline{V}. \end{array}$$

A formulação geral de erros ponderados no interior do sólida elástico linear em $(0, l_x)$, no engaste em $x = 0$ e no extremo livre $x = l_x$ conduz, após duas integrações por partes sequencialmente, a

$$\int_0^{l_x} EI\varphi''u''dx - [\varphi'(x)EIu''(x)]\Big|_0^{l_x} + [\varphi(x)EIu'''(x)]\Big|_0^{l_x} - \int_0^{l_x} f\varphi dx +$$

$$+[u(x)\overline{\varphi}(x)]_{x=0} + [u'(x)\overline{\varphi}(x)]_{x=0} + [(EIu''(x) - \overline{M})\overline{\varphi}(x)]_{x=l_x} +$$

$$+[(EIu'''(x) - \overline{V})\overline{\varphi}(x)]_{x=l_x} = 0, \quad \forall \varphi,\ \overline{\varphi},$$

em que $\varphi, \overline{\varphi}$ são funções de ponderação cinematicamente admissíveis com a vinculação.

Pré-selecione as funções de ponderaçaõ para satisfazer concomitantemente

$$\begin{aligned} &\varphi\Big|_{x=0} = 0,\ \varphi'\Big|_{x=0} = 0, \\ &-\varphi'\Big|_{x=l_x} = \overline{\varphi}(l), \varphi\Big|_{x=l_x} = \overline{\varphi}(l), \\ &\overline{\varphi}\Big|_{x=0} = 0,\ \overline{\varphi}\Big|_{x=0} = 0. \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

Daí, por substituição na formulação geral de erros ponderados obtém-se

$$\int_0^{l_x} EI\varphi''(x)u''(x)dx = \int_0^{l_x} f(x)\varphi(x)dx - \overline{M}\varphi'(x)\Big|_{x=l_x} + \overline{V}\varphi(x)\Big|_{x=l_x}. \tag{3.2.31}$$

Para fins operacionais, imagine-se que a base de funções de forma seja $\beta = \{x^2, x^3, x^4\}$ com a qual compõe-se a interpolante

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^{2} c_i x^{i+2} = c_0x^2 + c_1x^3 + c_2x^4. \tag{3.2.32}$$

E, usando como base para as funções de ponderação o conjunto $\omega = \{x^2, x^3, x^4\}$. Com isto é possível compor o sistema linear $KU = F$, em que o vetor de incógnitas é $U = (c_0, c_1, c_2)$, o vetor de termos independentes é:

$$\begin{aligned} F = [f_i] = \textstyle\int_0^{l_x} f(x)\varphi_i(x)dx + \overline{M}\varphi_i'(x)\Big|_{x=l_x} + \\ -\overline{V}\varphi_i(x)\Big|_{x=l_x}, \quad i = 0, 1, 2, \end{aligned} \tag{3.2.33}$$

e a matriz de rigidez simétrica é

$$K = [k_{ij}] = \int_0^{l_x} EI\varphi_i''(x)\varphi_j''(x)dx. \tag{3.2.34}$$

Matricialmente, o sistema linear equivalente é simplesmente, se $f(x) = \overline{f}$ com f constante:

$$EI \begin{bmatrix} 4l_x & 6l_x^2 & 8l_x^3 \\ 6l_x^2 & 12l_x^3 & 18l_x^4 \\ 8l_x^3 & 18l_x^4 & \frac{12^2}{5}l_x^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{l_x^3}{3}\overline{f} + 2\overline{M}l_x - \overline{V}l_x^2 \\ \frac{l_x^4}{4}\overline{f} + 3\overline{M}l_x^2 - \overline{V}l_x^3 \\ \frac{l_x^5}{5}\overline{f} + 4\overline{M}l_x^3 - \overline{V}l_x^4 \end{Bmatrix}. \tag{3.2.35}$$

Para simplificar os algebrismos, far-se-á $\overline{f} = 0$, daí segue-se que a solução em termos das coordenadas generalizadas $U = (c_0, c_1, c_2)$ é

$$c_0 = \frac{\overline{V}}{6EI}, c_1 = \frac{\overline{M}-\overline{V}l_x}{2EI}, c_2 = 0. \tag{3.2.36}$$

E, por fim, a solução aproximada é:

$$u_h(x) = \frac{\overline{V}}{6EI}x^3 + \frac{\overline{M} - \overline{V}l_x}{2EI}x^2, \tag{3.2.37}$$

que evidentemente coincide com a solução exata.

3.2.3 Funções de Forma de Hermite

Inúmeras variantes da formulação de erros ponderados são possíveis de serem idealizadas, modificando-se, e.g., as funções de forma da base de soluções admissíveis.

Para bem entender tais modificações, fixe-se a base de Hermite para compor o conjunto $\beta = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$ em que

$$\begin{array}{l} H_0(x) = 1 - \frac{3x^2}{l_x^2} + \frac{2x^3}{l_x^3}, \\ H_1(x) = x - \frac{2x^2}{l_x} + \frac{x^3}{l_x^2}, \\ H_2(x) = \frac{3x^2}{l_x^2} - \frac{2x^3}{l_x^3}, \\ H_3(x) = -\frac{x^2}{l_x} + \frac{x^3}{l_x^2}. \end{array} \tag{3.2.38}$$

Observa-se que, por definição de Interpolação Hermitiana em $1D$, a base supra-referida satisfaz

$$\begin{array}{llll} H_0(0) = 1, & H_0'(0) = 0, & H_0(l_x) = 0, & H_0'(l_x) = 0, \\ H_1(0) = 0, & H_1'(0) = 1, & H_1(l_x) = 0, & H_1'(l_x) = 0, \\ H_2(0) = 0, & H_2'(0) = 0, & H_2(l_x) = 1, & H_2'(l_x) = 0, \\ H_3(0) = 0, & H_3'(0) = 0, & H_1(l_x) = 0, & H_1'(l_x) = 1. \end{array} \tag{3.2.39}$$

Daí, a interpolante cinematicamente compatível com a condição de vinculação da viga mono-engastada é representada por:

$$u_h(x) = \overline{u}H_0(x) + \overline{\theta}H_1(x) + u_2H_2(x) + u_3H_3(x), \tag{3.2.40}$$

em que $\overline{u}$ e $\overline{\theta}$ são os deslocamentos e rotação prescritos no extremo engastado de abscissa $x = 0$.

A derivação formal das funções de Hermite mostra que

$$\begin{array}{l} H_0''(x) = -\frac{6}{l_x^2} + \frac{12x}{l_x^3}, \\ H_1''(x) = -\frac{4}{l_x} + \frac{6x}{l_x^2}, \\ H_2''(x) = \frac{6}{l_x^2} - \frac{12x}{l_x^3}, \\ H_3''(x) = -\frac{2}{l_x} + \frac{6x}{l_x^2}. \end{array} \tag{3.2.41}$$

Notando que existem simplesmente dois graus de liberdade que são u_2 e u_3 e selecionando para funções de ponderação $\omega = \{H_2, H_3\}$, então, a formulação de erros ponderados de Galerkin implica, $\forall H_j, j = 2, 3$,

$$\begin{gathered}\left(EI \int_0^{l_x} H_2''(x)H_j''(x)dx\right)u_2 + \left(EI \int_0^{l_x} H_3''(x)H_j''(x)dx\right)u_3 = \\ \int_0^{l_x} f(x)H_j(x)dx - \overline{V}H_j(l_x) + \overline{M}H_j'(l_x) - \\ \left(EI \int_0^{l_x} H_0''(x)H_j''(x)dx\right)\overline{u} - \left(EI \int_0^{l_x} H_1''(x)H_j''(x)dx\right)\overline{\theta}.\end{gathered} \tag{3.2.42}$$

Para simplicidade de explanação, assumir-se-á que a carga uniformemente distribuída $f : [0, l_x] \to \mathbf{R}$ é identicamente nula e para uma viga mono-engastada, $\overline{u} = \overline{\theta} = 0$. Logo, usando as propriedades da interpolante de Hermite, tem-se que, $\forall H_j, j = 2, 3$,

$$\left(EI \int_0^{l_x} H_2''H_j''dx\right)u_2 + \left(EI \int_0^{l_x} H_3''H_j''dx\right)u_3 = -\overline{V}H_j(l_x) + \overline{M}H_j'(l_x). \tag{3.2.43}$$

Desenvolvendo o cálculo das integrais definidas anteriores, o conjunto de equações lineares em u_2 e u_3 posto matricialmente equivale ao sistema linear se $l_x = 1$:

$$EI \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\overline{V} \\ +\overline{M} \end{Bmatrix} - EI \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{u} \\ \overline{\theta} \end{Bmatrix}. \tag{3.2.44}$$

Com $\overline{u} = \overline{\theta} = 0$, resolvendo-se para as incógnitas u_2 e u_3, obtém-se

$$\begin{aligned} u_2 &= \tfrac{1}{EI}\left(\tfrac{\overline{M}}{2} - \tfrac{\overline{V}}{3}\right), \\ u_3 &= \tfrac{1}{EI}\left(\overline{M} - \tfrac{\overline{V}}{2}\right). \end{aligned} \tag{3.2.45}$$

Portanto, a solução aproximada é dada por

$$\begin{aligned} u_h(x) = &\left[\frac{1}{EI}\left(\frac{\overline{M}}{2} - \frac{\overline{V}}{3}\right)\right](3x^2 - 2x^3) + \\ &+\left[\frac{1}{EI}\left(\overline{M} - \frac{\overline{V}}{2}\right)\right](-x^2 + x^3). \end{aligned} \tag{3.2.46}$$

A solução exata da EDO da viga sem carga externa ($f(x) = 0,\ \forall x \in [0, 1]$) é

$$u(x) = \frac{\overline{V}}{6EI}x^3 + \left(\frac{\overline{M} - \overline{V}l_x}{2EI}\right)x^2 + \overline{\theta}x + \overline{u}. \tag{3.2.47}$$

Um algebrismo simples prova que a solução exata e a solução aproximada são coincidentes se condições iguais sobre $\overline{u}$, $\overline{\theta}$ e l_x são prescritas.

Possibilidades sem-limite para a criação de funções de forma sumariza o quão atrativa é a modelagem numérico-computacional centrada nas generalizações do Método de Erros Ponderados. Propriedades de ortogonalidade das funções de forma e conformidade, combinadas à conservação da estrutura matricial das formulações discretas, conduzem a *Funções de Forma Hierárquicas* que são determinantes na idealização da Versão-p do Método de Elementos Finitos. A noção de funções hierárquicas fundamenta-se em gerar uma sequência numérica de aproximações em que o cálculo numérico-matricial usa cálculos computacionais precendentes, uma vez que o refinamento subsequente é definido por uma composicão aditiva, e não-destrutiva, com graus de liberdade hierárquicos.

Em conclusão, a versatilidade da análise numérica de EDO e EDP *via* Métodos Discretos está associado fortemente à criação de funções-base que respondem em conformidade com a Física do fenômeno, dando significância aos graus de liberdade.

3.3 Notas Históricas sobre Boris Grigoryevich Galerkin

Boris Grigoryevich Galerkin é um preeminente Engenheiro Estrutural bielo-russo, nascido em 1871 em Polotsk. Em 1893, Galerkin iniciou estudos no Departamento de Mecânica do Instituto Politécnico de St. Petersburg. À semelhança de graduandos contemporâneos seus, Boris envolveu-se em ativismo político e uniu-se ao Partido Social-Democrata que transformar-se-ia posteriormente no Partido Comunista Russo.

Galerkin obteve uma cátedra no Instituto Politécnico de St. Petersburg em 1908 e naquele mesmo ano publicou seu primeiro artigo científico no jornal *Transactions* do instituto supracitado.

O artigo intitulado *A theory of longitudinal curving and an experience of longitudinal curving theory application to many-storied frames, frames with rigid junctions and frames systems* compunha-se de um texto tão extenso quanto o título e perfazia 130 páginas. O Instituto Politécnico de St. Petersburg era um lugar formidável, e Galerkin estava cercado por cientistas colossais igualmente notáveis como I.G. Bubnov, A.N. Krylov e S.P. Timoshenko.

Ponto áureo na biografia desse expoente da Análise Numérica é a publicação de um artigo em 1915 acerca de métodos de solução aproximada de problemas de valor de contorno para a Equação Diferencial das Placas.

O método descrito por Galerkin centrava-se objetivamente em resolver equações diferenciais e associava-se a princípios variacionais da Engenharia Estrutural, mas que posteriormente mostrar-se-iam de tal generalidade que unificaria e sistematizaria a análise numérica de problemas de Física-Matemática *via* Métodos de Elementos Finitos. Entre 1917 e 1919, Galerkin publicou uma série de artigos técnicos sobre flexão de placas triangulares e retangulares em periódicos e jornais científicos como *Engineering News* e *Russian Academy of Sciences Transactions*.

Eleito em 1928, Galerkin integrou a Academia Russa de Ciências, posição que simbolizou a significância técnico-científica de seus artigos e a singular notoriedade intelectual que gozava entre seus pares. Galerkin lecionava Teoria da Elasticidade no Instituto Hidrotécnico e no de Engenharia Industrial e Civil. Sua figura singela e humana contrastava com a autoridade incomparável de ilustre cientista russo do século XX.

Boris Grigoryevich Galerkin morreu em 1945, mas a generalidade de suas teorias e dos fundamentos do Método de Elementos Finitos continua viva, atual e imutável[4].

Capítulo 4

Exercícios

1. Resolver pelo Método de Diferenças Finitas a EDO

$$\begin{aligned}
&u''''(x) = 1, \quad \forall x \in (0,1)\\
&u(0) = 0\\
&u'(0) = 0\\
&u''(1) = 1\\
&u'''(1) = 1
\end{aligned}$$

com a partição de $(0,1)$ condicionada ao número mínimo de graus de liberdade.

2. Resolver pelo Método de Diferenças Finitas a EDP das Placas

$$\begin{aligned}
&\nabla^4 u = 1, \quad \forall (x,y) \in (0,1)\times(0,1) = \Omega\\
&u\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_{\partial\Omega} = 0,
\end{aligned}$$

$\partial\Omega$ é o contorno poligonal de $\Omega = [0,1]^2$. Faça $h_x = h_y$.

3. Resolver pelo Método de Diferenças Finitas a EDP de Poisson com condição de Neumann

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 u = 1, \quad \forall (x,y) \in (0,1)\times(0,1) = \Omega,\\
&\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 1,
\end{aligned}$$

$\partial\Omega$ é o contorno poligonal de $\overline{\Omega} = [0,1]^2$. Faça $h_x = h_y$.

4. Deduzir a formulação de erros ponderados simétrica, contínua e discreta para a EDO

$$\begin{aligned}
&u''''(x) = 1, \quad \forall x \in (0,1)\\
&u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0.
\end{aligned}$$

Selecionar uma base polinomial admissível com três funções de forma e comparar a solução aproximada com a solução exata.

5. Deduzir a formulação de erros ponderados simétrica, contínua e discreta para a Equação Biharmônica

$$\begin{aligned} &\nabla^4 u(x) = 1, \quad \forall (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \\ &u\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}$$

$\partial\Omega$ é o contorno poligonal de $\overline{\Omega} = [0,1]^2$. Selecionar uma base polinomional admissível com três funções de forma e escrever a formulção matricial associada.

6. Deduzir a formulação de erros ponderados simétrica, contínua e discreta para a EDO de quarta ordem com condições de contorno de Robin

$$\begin{aligned} &u''''(x) = 1, && \forall x \in (0,1), \\ &u(0) = 0, && u'(0) - u''(0) = 0, \\ &u(1) = 0, && u'(1) + u''(1) = 0. \end{aligned}$$

7. Resolver a EDO dada pelo Método de Colocação Pontual e pelo Método de Colocação por Sub-domínios, usando funções de forma polinomiais pré-selecionadas.

$$\begin{aligned} &u''(x) = 1, \forall x \in (0,1) \\ &u(0) = u(1) = 0. \end{aligned}$$

Comparar as soluções aproximadas com a solução exata.

8. Resolver a EDO dada, pelo Método de Galerkin com um conjunto de funções de forma polinomiais,

$$\begin{aligned} &u''(x) + u = 1, \quad \forall x \in (0,1), \\ &u(0) = 0, \ u'(1) = -u(1). \end{aligned}$$

Comparar as soluções aproximadas com a solução exata.

9. Resolver a EDO pelo Método de Mínimos Quadrados, usando uma base de funções de forma compatíveis com a vinculação,

$$\begin{aligned} &u'' - u = -1, \forall x \in (0,1), \\ &u(0) = u(1) = 0. \end{aligned}$$

Comparar as soluções aproximadas com a solução exata.

10. Deduzir a formulação de erros ponderados para a Equação de Poisson com condição mista

$$\begin{aligned} &\nabla^2 u = f, \quad \forall (x,y) \in \Omega \\ &u\Big|_{\partial\Omega_u} = \overline{u} \\ &\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_q} = \overline{q} + \beta(u - u_0) \end{aligned}$$

em que $\partial\Omega$ é ocontorno de Ω com $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_q, \ \partial\Omega_u \cap \partial\Omega_q = \phi$.

11. Mostre que o operador Laplaciano discreto obedece a

$$\nabla^2 u\Big|_{i,j} \cong \tfrac{1}{2h^2}(u_{i+1,j-i} + u_{i+1,j+i} + u_{i-1,j-i} + u_{i-1,j+i} - 4u_{i,j}) +$$

$$-\tfrac{h^2}{12}\left[\tfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6\tfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \tfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right]_{i,j} + O(h^4).$$

12. Mostre que o operador biharmônico discreto é

$$\nabla^4 u\Big|_{i,j} \cong \tfrac{1}{h^4}(u_{i-2,j} - 8u_{i-1,j} - 8u_{i+1,j} + u_{i+2,j} + u_{i,j-2} - 8u_{i,j-1} - 8u_{i,j+1} +$$
$$+ u_{i,j+2} + 2u_{i+1,j+1} + 2u_{i+1,j-1} + 2u_{i-1,j-1} + 2u_{i-1,j+1} + 20u_{i,j}).$$

13. Mostre que o operador biharmônico discreto unidimensional é

$$\tfrac{d^4u}{dx^4}\Big|_i \cong \tfrac{1}{h^4}(u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}).$$

14. Mostre que o operador de terceira ordem discreto unidimensional é

$$\tfrac{d^3u}{dx^3}\Big|_i \cong \tfrac{1}{h^3}(u_{i+3} - 3u_{i+2} + 3u_{i+1} - 4u_i).$$

15. Resolver a Equação de Laplace com condição de contorno de Dirichlet não-homogênea descritos por

$$\begin{aligned} &\nabla^2 u(x) = 0, \quad \forall (x,y) \in \Omega = (0,1) \times (0,1), \\ &u\Big|_{\partial\Omega} = x^2 + y^2, \end{aligned}$$

em que $\partial\Omega$ é o contorno poligonal de Ω. Definir a interpolante como a expansão de três termos de funções de forma harmônicas dadas por

$$u_h(x,y) = c_1 + c_2(x^2 - y_2) + c_3(x^4 - 6x^2y^2 + y^4).$$

a) Provar que $\nabla^2 u_h = 0$ e, então, aplicar o Método de Colocação Pontual usando os pontos médios dos lados em $\partial\Omega$.

b) Aplicar o Método de Mínimos Quadrados Discreto, usando o conjunto de pontos P, composto pelos vértices de Ω e os pontos médios dos lados do contorno $\partial\Omega$ como dados, para extremizar o erro

$$E(c_1,c_2,c_3) = \sum_{(x_i,y_i)\in P} [u_h(x_i,y_i) - x_i^2 - y_i^2]^2.$$

c) Aplicar o Método de Mínimos Quadrados Contínuo sobre a curva poligonal $\partial\Omega$ para extremizar o erro

$$E(c_1,c_2,c_3) = \int_{\partial\Omega} [u_h(x,y) - x^2 - y^2]^2 dxdy.$$

d) Aplicar o Método de Erros Ponderados de Galerkin com $\varphi^{\partial\Omega} = \phi^{\Omega}\Big|_{\partial\Omega}$, onde a base de funções de forma é $\beta = \{\phi_i^{\Omega}\}_{i=0}^{3} = \{1, x^2 - y^2, x^4 - 6x^2y^2 + y^4\}$. Observar que a parte do erro ponderado relativa ao domínio é nula e, portanto, deve-se resolver simplesmente:

$$\int_{\partial\Omega} [u_h(x,y) - x^2 - y^2]\varphi^{\partial\Omega} ds = 0, \quad \forall\varphi^{\partial\Omega}.$$

16. Determinar as funções de forma hierárquicas unidimensionais $\{N_i(\xi)\}_{i=1}^{p}$ sobre $[-1,+1]$, definidas por:

$$N_1(\xi) = L_0(\xi), \;\; N_2(\xi) = L_1(\xi),$$

chamadas de funções de forma externas ou modos externos, L_0 e L_1 são os polinômios de Lagrange lineares em $[-1,+1]$ com $x_0 = -1$ e $x_1 = +1$; e $N_i(\xi) = \phi_{i-1}(\xi), \; i = 3, 4, \ldots, p+1$, chamadas de funções de forma internas ou modos internos, definidas por:

$$\phi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{+\xi} P_{j-1}(s) ds, \quad j = 2, 3, \ldots,$$

e P_{j-1} é o Polinômio de Legendre.

Mostre que $\{N_i(\xi)\}_{i=1}^{3} = \left\{\frac{1-\xi}{2}, \frac{1+\xi}{2}, \frac{5}{2\sqrt{10}}\xi(\xi^2 - 1)\right\}$. Calcular a matriz de rigidez definida por

$$K = [k_{ij}] = \int_{-1}^{+1} N_i'(\xi) N_j'(\xi) d\xi$$

de ordem 2 e ordem 3, e mostrar que

$$K_{2\times 2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \; e \; K_{3\times 3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Concluir, então, sobre o arranjo hierárquico matricial de K.

Bibliografia

[1] O.C. Zienkiewicz and K. Morgan, ”Finite Elements and Approximation”, John Wiley () Sons, New York, 1983.

[2] Claes Johnson, Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method, Cambridge University Press, 1987.

[3] David Kincaid and Ward Cheney, Numerical Analysis-Mathematics of Scientific Computing, 2^{nd} Edition, Brooks/Cole Publishing Company, 1996.

[4] K.K. Gupta and J.L. Meek, A Brief History of the Beginning of the Finite Element Method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 39, pp. 3761-3774, 1996.

Índice

Notas em Matemática Aplicada

1. Restauração de Imagens com Aplicações em Biologia e Engenharia

    Geraldo Cidade, Antônio Silva Neto e Nilson Costa Roberty

2. Fundamentos, Potencialidades e Aplicações de Algoritmos Evolutivos

    Leandro dos Santos Coelho

3. Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Águas Subterrâneas

    Edson Wendlander

4. Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais

    Maria Cristina de Castro Cunha e Maria Amélia Novais Schleicher

5. Modelagem em Biomatematica

    Joyce da Silva Bevilacqua, Marat Rafikov e Cláudia de Lello Courtouke Guedes

6. Métodos de Otimização Randômica: algoritmos genéticos e "simulated annealing"

    Sezimária F. Pereira Saramago

7. "Matemática Aplicada à Fisiologia e Epidemiologia"

    H.M. Yang, R. Sampaio e A. Sri Ranga

8. Uma Introdução à Computação Quântica

    Renato Portugal, Carlile Campos Lavor, Luiz Mariano Carvalho e Nelson Maculan

9. Aplicações de Análise Fatorial de Correspondências para Análise de Dados

    Dr. Homero Chaib Filho, Embrapa

10. Modelos Matemáticos baseados em autômatos celulares para Geoprocessamento

    Marilton Sanchotene de Aguiar, Fábia Amorim da Costa, Graçaliz Pereira Dimuro e Antônio Carlos da Rocha Costa

11. Computabilidade: os limites da Computação
    Regivan H. N. Santiago e Benjamín R. C. Bedregal
12. Modelagem Multiescala em Materiais e Estruturas
    Fernando Rochinha e Alexandre Madureira
13. Modelagem em Biomatemática (Coraci Malta ed.)
    1 - "Modelagem matemática do comportamento elétrico de neurônios e algumas aplicações"
        Reynaldo D. Pinto
    2 - "Redes complexas e aplicações nas Ciências"
        José Carlos M. Mombach
    3 - "Possíveis níveis de complexidade na modelagem de sistemas biológicos"
        Henrique L. Lenzi, Waldemiro de Souza Romanha e Marcelo Pelajo-Machado
14. A lógica na construção dos argumentos
    Angela Cruz e José Eduardo de Almeida Moura
15. Modelagem Matemática e Simulação Numérica em Dinâmica dos Fluidos
    Valdemir G. Ferreira, Hélio A. Navarro, Magda K. Kaibara
16. Introdução ao Tratamento da Informação nos Ensinos Fundamental e Médio
    Marcilia Andrade Campos, Paulo Figueiredo Lima
17. Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações
    Rosana Sueli da Motta Jafelice, Laércio Carvalho de Barros, Rodney Carlos Bassanezi
18. Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira
    Socorro Rangel
19. Observar e Pensar, antes de Modelar
    Flavio Shigeo Yamamoto, Sérgio Alves, Edson P. Marques Filho, Amauri P. de Oliveira
20. Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações
    Eliana Xavier Linhares de Andrade, Cleonice Fátima Bracciali