

**Editado por**

**Eliana X.L. de Andrade**

Universidade Estadual Paulista - UNESP

São José do Rio Preto, SP, Brasil

**Rubens Sampaio**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro -

Rio de Janeiro, RJ, Brasil

**Geraldo N. Silva**

Universidade Estadual Paulista - UNESP

São José do Rio Preto, SP, Brasil

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7)**, as figuras em **eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página  
<http://www.sbmac.org.br/notas.php>

# ANÁLISE E PROCESSAMENTO DE SINAIS

Rubens Sampaio PUC-Rio  
rsampaio@mec.puc-rio.br

Departamento de Engenharia Mecânica  
PUC-Rio

Edson Luiz Cataldo Ferreira  
ecataldo@vm.uff.br

Departamento de Matemática Aplicada  
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica  
Programa de Pós-graduação em Engenharia de Telecomunicações  
Universidade Federal Fluminense

Alexandre de Souza Brandão  
brandaoalexandre@ig.com.br

Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica  
Universidade Federal Fluminense  
rogerms@ime.unicamp.br



**Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

São Carlos - SP, Brasil  
2012

Coordenação Editorial: Sandra Augusta Santos

Coordenação Editorial da Série: Eliana Xavier Linhares de Andrade

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2012 by Rubens Sampaio, Edson Cataldo e Alexandre S. Brandão. Direitos reservados, 2012 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

**Catálogo elaborado pela Biblioteca do IBILCE/UNESP  
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner**

Sampaio, Rubens

Análise e Processamento de Sinais

- São Carlos, SP: SBMAC, 2012, 130 p. - 20.5 cm

- (Notas em Matemática Aplicada; v. 21)

e-ISBN 978-85-86883-87-3

1. Análise de Sinais. 2. Análise de Fourier. 3. Modelagem da Voz.  
I. Sampaio, Rubens II. Cataldo, Edson. III. Brandão, Alexandre.  
IV. Título. V. Série.

CDD - 51

Esta é uma republicação em formato de e-book do livro original do mesmo título publicado em 2006 nesta mesma série pela SBMAC.

# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>9</b>
<b>1 Sinais Contínuos no Tempo</b>	<b>19</b>
1.1 Introdução . . . . .	19
1.2 Análise de Fourier . . . . .	19
1.2.1 Série de Fourier . . . . .	19
1.2.2 O espectro complexo de Fourier . . . . .	22
1.3 Transformada de Fourier . . . . .	25
1.3.1 Introdução . . . . .	25
1.3.2 A Transformada de Fourier . . . . .	25
1.3.3 Existência da transformada de Fourier . . . . .	27
1.4 Convolução . . . . .	29
1.4.1 Introdução . . . . .	29
1.4.2 Propriedades . . . . .	29
1.4.3 Propriedades da Transformada de Fourier . . . . .	31
<b>2 Sinais Discretos no Tempo</b>	<b>33</b>
2.1 Seqüências . . . . .	33
2.2 Operações com seqüências e seqüências básicas . . . . .	33
2.2.1 Operações com seqüências . . . . .	33
2.2.2 Seqüências básicas . . . . .	33
2.3 Sistemas discretos no tempo . . . . .	35
2.3.1 Introdução . . . . .	35
2.3.2 Alguns tipos de sistemas . . . . .	35
2.3.3 Sistemas Lineares Invariantes no Tempo . . . . .	36
2.3.4 Propriedades de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo . . . . .	37
2.3.5 Equações lineares de diferença de coeficientes constantes . . . . .	37
2.3.6 Representação no domínio da freqüência de sinais discretos no tempo . . . . .	38
2.3.7 Representação de seq. pela transformada de Fourier discreta(TFD) . . . . .	39
2.3.8 Propriedades da transformada de Fourier discreta . . . . .	43
2.4 Amostragem de sinais contínuos . . . . .	45

2.4.1	Introdução . . . . .	45
2.4.2	Amostragem periódica . . . . .	45
2.4.3	Representação das amostras no domínio da frequência . . . . .	47
2.4.4	Teorema da amostragem . . . . .	49
2.4.5	Reconstrução de um sinal limitado em faixa a partir de suas amostras . . . . .	54
2.4.6	Processamento discreto de sinal contínuo . . . . .	54
2.5	Considerações práticas . . . . .	56
2.5.1	Introdução . . . . .	56
2.5.2	Pré-filtragem para evitar <i>maskamento</i> . . . . .	56
2.5.3	Conversão analógica-digital . . . . .	56
2.5.4	Conversão digital-analógica . . . . .	59
2.6	Transformada Discreta de Fourier (TDF) . . . . .	61
2.6.1	Introdução . . . . .	61
2.6.2	A série discreta de Fourier . . . . .	61
2.6.3	A transformada discreta de Fourier (TDF) . . . . .	64
2.6.4	Transformada rápida de Fourier . . . . .	66
2.7	Análise de sinais usando TDF . . . . .	72
2.7.1	Introdução . . . . .	72
2.7.2	Janelas - vazamento . . . . .	73
2.7.3	Consequência da aplicação de janelas . . . . .	75
2.7.4	Tipos de janelas . . . . .	77
<b>3</b>	<b>Análise e Processamento de sinais aleatórios</b>	<b>83</b>
3.1	Processos Estocásticos . . . . .	83
3.2	Especificação de um processo estocástico . . . . .	84
3.3	Momentos . . . . .	86
3.3.1	Média . . . . .	86
3.3.2	Autocorrelação . . . . .	86
3.3.3	Autocovariância . . . . .	86
3.4	Processos estocásticos (estritamente) estacionários . . . . .	88
3.5	Processos estocásticos estacionários no sentido amplo ou fracamente estacionários . . . . .	88
3.5.1	Propriedades de estatísticas de processos estocásticos estacionários no sentido amplo . . . . .	89
3.6	Estatísticas conjuntas de processos estocásticos . . . . .	89
3.6.1	Especificação conjunta . . . . .	89
3.6.2	Momentos conjuntos . . . . .	89
3.6.3	Processos estocásticos conjuntamente estacionários . . . . .	90
3.6.4	Propriedades da função correlação cruzada de dois processos estocásticos conjuntamente estacionários . . . . .	90
3.6.5	Independência, não-correlação, e ortogonalidade . . . . .	90
3.6.6	Processos Ergódicos . . . . .	91
3.7	Processos estocásticos gaussianos . . . . .	92
3.8	Densidade espectral de potência . . . . .	92

3.9	Resposta de sistemas lineares a sinais aleatórios . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Aplicações</b>	<b>97</b>
4.1	Multiplexação . . . . .	97
4.1.1	Conceito . . . . .	97
4.1.2	Tipos de multiplexação . . . . .	98
4.1.3	Translação de frequências . . . . .	99
4.1.4	Modulação e demodulação . . . . .	100
4.2	Processamento de sinais provenientes de acelerômetros e transdutores de força . . . . .	105
4.3	Síntese de Voz . . . . .	106
4.3.1	A produção da voz humana . . . . .	107
4.3.2	Modelagem matemática . . . . .	108
4.3.3	Simulação Computacional . . . . .	118
4.3.4	Resultados Obtidos . . . . .	119
	<b>Bibliografia</b>	<b>125</b>



# Prefácio

Este é um curso de Análise e Processamento de Sinais. Trata-se de um curso formativo, essencial para que se tenha uma compreensão mínima dos desenvolvimentos tecnológicos modernos: rádio, televisão, telefonia, CD, radar, sistemas de controle, sistemas de medida, etc. O curso começa com o conceito de *signal*, que será exemplificado, mas não definido. A descrição de um sinal, sua análise, é feita decompondo-o numa base cujas componentes são sinais elementares, exponenciais complexas. As componentes do sinal na base de exponenciais descreve o espectro do sinal, ou seja, sua composição freqüencial. A melhor maneira de iniciar-se no estudo de sinais é vendo e ouvindo sinais e, paralelamente, vendo sua composição freqüencial. Estudaremos sinais de dois pontos de vista independentes, mas complementares: contínuo e discreto.

Ao lado da análise de um sinal, temos o seu processamento, que é a transformação de um sinal em outro (diremos que essa transformação é feita através de um sistema). Estudaremos tipos especiais de sistemas chamados de *filtros*. Na linguagem de Álgebra Linear os *filtros* são transformações lineares.

Devido a limitações de espaço, não cobrimos nessas Notas a parte operacional que será feita com o MATLAB. Análise e Processamento de Sinais é um assunto de razoável complexidade. Mesmo os cálculos mais simples são muito trabalhosos para serem feitos manualmente. Sem uma ferramenta como o MATLAB a teoria perde um pouco o sentido e, como cada um verá por si mesmo, a graça.

Há várias aplicações de Análise e Processamento de Sinais em diversas áreas, tais como Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica, Processamento de Imagens, Comunicação, Computação Gráfica e outras.

Discutiremos, a seguir, um pouco sobre aplicações de Processamento de Sinais, como uma forma de motivação para o estudo dessas Notas.

A história da comunicação nasce quando o homem sente a necessidade de expressar o seu pensamento a um semelhante. Isso pode ser feito de várias formas: pela palavra, pela mímica, por desenhos, etc. Porém, quando os homens estão distantes, a comunicação torna-se difícil ou mesmo impossível. Soluções técnicas desse problema surgiram com o invento da telegrafia, da comunicação via rádio, da telefonia, e outros. Mais recentemente, da Internet.

Para discutirmos a comunicação à distância de modo geral começaremos discutindo um pouco as características básicas de uma ligação telefônica, bem conhecida nossa.

Para entendermos essa comunicação discutiremos os fatores que a influenciam: o som, a voz, o ouvido, a faixa de frequências utilizadas, a transformação de energia acústica em energia elétrica e vice-versa, a ligação telefônica elementar, entre outros.

O som se produz por vibrações mecânicas, de frequências perceptíveis pelo ouvido humano, num meio elástico. Cada som emitido pode ser pensado como composto de vibrações elementares de diversas frequências, múltiplas de uma frequência fundamental. Para o homem essa frequência fundamental é de 125 Hz e para a mulher é de 250 Hz.

A faixa de frequências audíveis pelo ouvido humano vai desde 20 Hz até 20000 Hz, e os limites variam (um pouco) de pessoa para pessoa.

Diversos estudos foram realizados para determinar qual a faixa de frequências mais apropriada para as comunicações, sob os pontos de vista econômico e de qualidade. Para fonia foram levados em conta os fatores característicos da voz e do ouvido humano: inteligibilidade e energia da voz. Dessa forma foi escolhida a faixa de frequência entre 300 Hz e 3400 Hz para comunicações telefônicas. Para transmissão de música, a faixa vai de 50 a 10000 Hz.

A energia acústica produzida pela voz é transformada em energia elétrica por intermédio de um microfone. Para a transformação da energia elétrica em energia acústica geralmente utilizam-se cápsulas magnéticas e dinâmicas.

A ligação telefônica elementar, entre duas pessoas, digamos A e B, consiste de dois aparelhos telefônicos interligados por um par de fios em que a distância entre os aparelhos é pequena. Na realidade, a ligação é um pouco mais complexa, pois o interlocutor A deveria ter dois condutores ligando sua cápsula transmissora com a receptora de B, e vice-versa.

Porém, essa ligação envolve somente a necessidade de comunicação entre duas pessoas. Se o interlocutor A deseja se comunicar com outras pessoas, o número de condutores iria crescer muito. Como podemos perceber, a quantidade de condutores para um número grande de ligações, torna o sistema economicamente inviável. Dessa forma, para solucionar esse problema, os interlocutores, chamados assinantes, estão ligados a um centro telefônico onde é executada a interligação entre os assinantes que desejam comunicar-se, operação chamada de comutação telefônica.

Agora que já discutimos os conceitos básicos de comunicação telefônica desejamos saber como, através de um mesmo par de fios, várias pessoas podem se comunicar. A técnica a ser discutida é a multiplexação que pode ser tanto analógica como digital e será melhor discutida no último capítulo, após termos estudado conceitos básicos de sinais e relação entre o domínio do tempo e da frequência.

Uma outra utilização de Análise e Processamento de Sinais está ligada a Vibrações Mecânicas. A análise de vibrações em máquinas é caracterizada por um número de áreas distintas de aplicações. De modo geral, a análise de vibrações em máquinas visa um dos seguintes objetivos:

pesquisa e desenvolvimento de máquinas, controle de produção e de qualidade e manutenção e monitoramento das máquinas em serviço.

A implementação da Análise de Vibrações em máquinas é feita através de instrumentos de análise chamados de Analisadores Dinâmicos de Sinais. As vibrações mecânicas são combinações de sinais causados por uma grande variedade de fontes internas de vibração, como por exemplo, desbalanceamento do rotor de uma máquina rotativa, ou defeito em rolamentos, entre outros. Após a conversão do movimento mecânico em sinal elétrico, através de um dispositivo chamado de transdutor, podemos estudar esse sinal, visando, por exemplo, os objetivos: transformar a vibração de forma a facilitar a interpretação, prever possíveis falhas no funcionamento da máquina e verificar se há choque entre componentes da máquina.

O exemplo central do curso é o que trata da modelagem da voz. Digamos que um dos objetivos de se construir um modelo mecânico do processo de produção de voz seja usá-lo como uma ferramenta de diagnóstico para tratamento de problemas da fala. Suponhamos que alguém tenha um problema nas cordas vocais e que gostaríamos de através da análise da fala sermos capazes de diagnosticar o problema. Se o trato vocal fosse o mesmo para todas as pessoas esse problema não seria tão difícil, porém ele varia com a pessoa. Cada pessoa tem as suas características e toda vez que se deseja fazer um diagnóstico isso tem que ser levado em conta. Por esse motivo é necessário construir modelos que descrevam essa realidade: a variação de parâmetros com indivíduos. Esses são os modelos aleatórios, e foi por isso que o terceiro capítulo foi introduzido. Ele parece solto no curso, mas de fato é o mais importante pois visa dar aos alunos uma direção de pesquisa. Decidimos colocá-lo para alertar os estudantes que doravante esses modelos ocuparão o centro das atenções. Para considerarmos teorias mais realistas é necessário levar em conta que para cada caso observado há pequenas variações de parâmetros e essas variações podem ser muito importantes. A seguir descrevemos sucintamente os diferentes capítulos do curso.

No primeiro capítulo, estudaremos sinais contínuos no tempo. Trataremos da série e da Transformada de Fourier e mostraremos alguns exemplos. Depois, discutiremos filtros analógicos e suas Funções Resposta em Frequência (FRF). No segundo capítulo, tratamos de sinais digitais. Estudamos, nesse capítulo, a Transformada de Fourier Discreta, a série Discreta de Fourier e a Transformada Discreta de Fourier. Discutimos os problemas de *vazamento (leakage)* e *mascaramento (aliasing)* e também a utilização de janelas temporais. No terceiro capítulo apresentamos a teoria estatística envolvida com análise de sinais e, finalmente, no quarto capítulo apresentaremos algumas aplicações.

Finalmente uma última observação. Foi muito grande a vontade de fazer todo o desenvolvimento usando espaços funcionais como em Leckar e Sampaio, 1999. Porém como queríamos fazer um curso sem muitos pré-requisitos e, também, mostrar aspectos tecnológicos que não são descritos facilmente em contextos abstratos, resolvemos usar um mínimo de estrutura.

O maior objetivo do curso é, portanto, motivar os alunos para estudarem o tema. Se conseguirmos isso ficaremos muito felizes.

Rio de Janeiro, 03 de maio de 2006.

Rubens Sampaio  
Edson Luiz Cataldo Ferreira  
Alexandre de Souza Brandão

# Lista de Figuras

1.1	Gráfico da função periódica $f$ .	21
1.2	Amplitude e fase dos coeficientes da série de Fourier.	23
1.3	Função porta periódica.	23
1.4	Representação do espectro da função porta periódica.	24
1.5	Gráfico de uma função $f$ .	25
1.6	Construção de uma função periódica a partir de uma função $f$ dada.	25
1.7	função porta.	27
1.8	Representação do espectro da função porta.	28
2.1	Diagrama de bloco de uma equação de diferença recursiva representando um acumulador.	37
2.2	Resposta em frequência do filtro ideal passa-baixa.	39
2.3	Respostas em frequência para filtros ideais. (a) Filtro ideal passa-alta (b) Filtro ideal passa-faixa.	39
2.4	Gráficos de $H_M(e^{j\omega})$ .	42
2.5	(a) Magnitude; (b) Fase; (c) Parte real; (d) Parte Imaginária.	45
2.6	Diagrama de bloco de representação de um conversor ideal contínuo-discreto (C/D)	46
2.7	Diagrama de blocos representando a operação de amostragem.	46
2.8	Representação esquemática da amostragem.	47
2.9	(a) Transformada de Fourier limitada com freq. máx. $\Omega_N$ (b) Trem de impulsos periódicos $S(j\omega)$ (c) Gráfico de $X_S(j\omega)$ com $\Omega_s > 2\Omega_N$ (d) Gráfico de $X_S(j\Omega)$ com $\Omega_s < 2\Omega_N$	48
2.10	(a) Diagrama de blocos da recuperação do sinal; (b),(c),(d) e (e) reconstrução de $x_c(t)$ .	49
2.11	Transformada de Fourier de $x_c(t)$ .	50
2.12	Transformada de Fourier de $x_s(t)$ , com $T < \frac{\pi}{\Omega_o}$ .	50
2.13	Transformada de Fourier de $x_s(t)$ , com $T > \frac{\pi}{\Omega_o}$ .	50
2.14	(a) Sem ocorrência de <i>maskamento</i> . (b) Com ocorrência de <i>maskamento</i> .	51
2.15	(a) Gráfico de $x_c(t)$ . (b) Gráfico de $X_c(j\Omega)$ .	52
2.16	Gráficos de $x_1[n]$ e de $X_1(e^{j\omega})$ .	53
2.17	Gráficos de $x_2[n]$ e de $X_2(e^{j\omega})$ .	53
2.18	Diagrama de blocos representativo da reconstrução.	54

2.19	Processamento discreto de sinal contínuo. . . . .	55
2.20	Modelo mais realista de processamento digital de sinal analógico . .	56
2.21	Configuração do conversor analógico-digital . . . . .	56
2.22	Representação de uma sistema <i>amostra e mantém</i> ideal. . . . .	57
2.23	Sinais típicos de entrada e saída para o sistema <i>amostra e mantém</i> . .	58
2.24	Representação matemática do conversor A/D. . . . .	58
2.25	Diagrama de blocos de um conversor D/A . . . . .	59
2.26	Seqüência periódica com período $N=10$ . . . . .	62
2.27	Magnitude de $\tilde{X}[k]$ . . . . .	62
2.28	Magnitude de $X(e^{j\omega})$ . . . . .	63
2.29	União dos gráficos de $ \tilde{X}[k] $ e $ X(e^{j\omega}) $ . . . . .	64
2.30	Exemplo de TDF. . . . .	65
2.31	Resumo das relações entre os domínios do tempo e da freqüência, através das transformadas de Fourier. . . . .	67
2.32	Dualidade entre os diferentes tipos de transformadas. . . . .	68
2.33	Gráficos de (a) $x_c$ e de $X_c(j\Omega)$ .(b) $x[n]$ e de $ X[k] $ . . . . .	68
2.34	Gráficos de (a) $x_c$ e de $X_c(j\Omega)$ (b) de $x[n]$ e de $ X[k] $ . . . . .	69
2.35	Gráficos de $ X[k] $ . . . . .	70
2.36	Representação gráfica de uma seqüência. . . . .	70
2.37	Magnitude da TDF de $x[n]$ . . . . .	70
2.38	Gráficos: (a) $x[n]$ ; (b) $ X[k] $ . . . . .	71
2.39	Gráficos de $x[n]$ e de $ X[k] $ . . . . .	71
2.40	Diagrama de blocos dos passos básicos para a aplicação da TDF. . .	72
2.41	Gráfico de $G(\omega)$ . . . . .	74
2.42	(a) $ W(e^{j\omega}) $ .(b) $ V(e^{j\omega}) $ para $\omega_o = (2\pi)/6$ e $\omega_1 = (2\pi)/3$ . . . . .	76
2.43	(a) $ V(e^{j\omega}) $ para $\omega_o = (2\pi)/14$ e $\omega_1 = (4\pi)/15$ .(b) $ V(e^{j\omega}) $ para $\omega_o = (2\pi)/14$ e $\omega_1 = (2\pi)/12$ . . . . .	76
2.44	$ V(e^{j\omega}) $ para $\omega_o = (2\pi)/14$ e $\omega_1 = (4\pi)/25$ . . . . .	77
2.45	Janela retangular: $M=45$ . . . . .	78
2.46	Janela de Bartlett: $M=45$ . . . . .	78
2.47	Janela de Hanning: $M=45$ . . . . .	79
2.48	Janela de Hamming: $M=45$ . . . . .	79
2.49	Janela de Blackman: $M=45$ . . . . .	80
2.50	Janela de Kaiser: $M=45$ ; $\beta = 5.658$ . . . . .	80
2.51	(a) Utilização da janela retangular; (b) Utilização da janela de Han- ning; (c) Utilização da janela de Blackman. . . . .	81
4.1	Ligação telefônica através da multiplexação. . . . .	97
4.2	Ligação via rádio. . . . .	98
4.3	Serviços de telecomunicações. . . . .	99
4.4	Translação de freqüências. . . . .	100
4.5	Esquema da modulação. . . . .	100
4.6	(a) Domínio do tempo; (b) domínio da freqüência. . . . .	102
4.7	Modulação em amplitude de um canal de voz. . . . .	103
4.8	Esquema de multiplexação e demultiplexação de três canais de voz. .	105

4.9	Descrição da experiência . . . . .	106
4.10	Amplitude da função resposta em frequência. . . . .	106
4.11	Representação esquemática do sistema de produção da voz, adaptada de Titze (1994). . . . .	108
4.12	Aproximação do trato vocal por tubos cilíndricos (adaptada de Titze(1994)).	111
4.13	Circuito em T equivalente a um tubo cilíndrico. . . . .	112
4.14	Circuito Acústico. . . . .	112
4.15	Esquema do modelo FL68. . . . .	114
4.16	Visão do modelo FL68 na laringe, adaptada de Titze(1994) . . . . .	114
4.17	Esquema do modelo IF72. . . . .	116
4.18	Variação de pressão subglotal ( $P_s$ ) . . . . .	118
4.19	Resultados da simulação do modelo FL68 sem variação de pressão subglotal. (a) e (b) área do orifício glotal; (c) e (d) fluxo de ar glotal; (e) e (f) pressão acústica irradiada. . . . .	121
4.20	Resultados da simulação do modelo FL68 com variação de pressão sub-glotal. (a) e (b) área do orifício glotal; (c) e (d) fluxo de ar glotal; (e) e (f) pressão acústica irradiada. . . . .	122
4.21	área glotal (a), fluxo glotal (b) e pressão irradiada (c) para a simulação da palavra “papai”. . . . .	123



# Lista de Tabelas

1.1	Propriedades da transformada de Fourier . . . . .	31
1.2	Algumas transformadas que envolvem o impulso unitário. . . . .	32
1.3	Ordens de grandeza de sinais. . . . .	32
2.1	Propriedades da transformada de Fourier Discreta. . . . .	43
4.1	Freqüências de ondas portadoras e larguras de faixa selecionadas. . .	104



# Capítulo 1

## Sinais Contínuos no Tempo

### 1.1 Introdução

De modo geral, um *signal* é uma grandeza física variável no tempo, tal como tensão, corrente, aceleração de um ponto de um corpo, pressão num ponto do espaço, pH num ponto de uma solução, cor num pixel de uma tela de TV,... e que contém algum tipo de informação, geralmente sobre o estado ou comportamento de um sistema físico. Os sinais são representados matematicamente por uma função de uma ou mais variáveis. Trataremos, aqui, apenas de funções de uma variável. A variável considerada pode ser contínua ou discreta e chamaremos de sinais contínuos no tempo quando a variável for definida para um intervalo contínuo de tempo. Muitas vezes é importante que analisemos o sinal não no domínio do tempo, mas no domínio da frequência. Estritamente falando, imaginemos uma função temporal como sendo composta de várias componentes de frequência. Conseqüentemente, enquanto o sinal existe fisicamente no domínio do tempo, poderemos afirmar que ele consiste dessas componentes no domínio da frequência. A análise dos sinais no domínio da frequência será feita por intermédio da análise de Fourier, baseada nas séries e transformadas de Fourier.

Este capítulo é devotado a uma revisão da análise de Fourier e a estudar como um sinal no domínio do tempo pode ser representado no domínio da frequência.

### 1.2 Análise de Fourier

#### 1.2.1 Série de Fourier

Consideremos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $f$  é periódica de período  $T$ ;
- (ii)  $f$  é de classe  $C^2$  por partes em  $(t_0, t_0 + T)$ .

Em todo ponto de continuidade de  $f$ , podemos escrever:

$$S_f(t) = f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right] \quad (1.1)$$

onde

$$\begin{cases} a_o = \frac{2}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(t) dt, \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt \text{ e} \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt. \end{cases} \quad (1.2)$$

Em um ponto de descontinuidade, o lado esquerdo de 1.1 é substituído por :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} [f(t + \varepsilon) + f(t - \varepsilon)]. \quad (1.3)$$

A série 1.1 com coeficientes dados por 1.2 é chamada de **série de Fourier de  $f$  na forma trigonométrica**.

As condições (i) e (ii) são muitas vezes chamadas condições de Dirichlet e são suficientes (mas não necessárias) para a convergência da série de Fourier.

Em notação exponencial (ou complexa) a série de Fourier de  $f$  pode ser escrita como

$$S_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{j \frac{2n\pi t}{T}} \quad (1.4)$$

onde

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(t) e^{-j \frac{2n\pi t}{T}} dt. \quad (1.5)$$

Fazendo  $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$ , temos

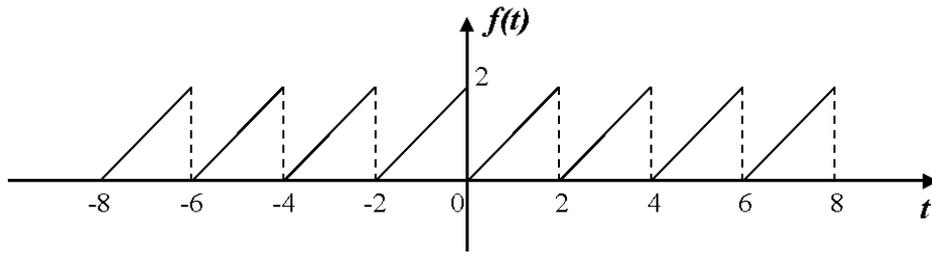
$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(t) e^{-jn\omega_o t} dt. \quad (1.6)$$

Observamos que, conhecido  $f$ , os coeficientes de 1.4 podem ser calculados e, reciprocamente, conhecidos os coeficientes  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $f$  pode ser sintetizada por 1.4. Dessa forma,  $f$  e  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  fornecem a mesma informação. Muda só o ponto de vista: um temporal, outro freqüencial.

**Exemplo 1.1.** Consideremos a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , periódica de período 2, dada por

$$f(t) = t, \quad 0 \leq t < 2. \quad (1.7)$$

O gráfico dessa função é mostrado na figura 1.1.

Figura 1.1: Gráfico da função periódica  $f$ .**Série de Fourier de  $f$  na forma trigonométrica****Cálculo dos coeficientes**

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 t dt = 2.$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^2 f(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt = \int_0^2 t \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt = \int_0^2 t \cos(n\pi t) dt = 0.$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^2 f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt = \int_0^2 t \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt = \int_0^2 t \operatorname{sen}(n\pi t) dt = \frac{-2}{n\pi}.$$

Assim,

$$S_f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi t).$$

**Série de Fourier de  $f$  na forma exponencial****Cálculo dos coeficientes**

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^2 f(t) e^{-j\frac{2n\pi t}{T}} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 t e^{-jn\pi t} dt = \frac{1}{n\pi} j, \quad n \neq 0$$

e

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 t dt = 1.$$

Assim,

$$F_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \frac{1}{n\pi} j, & n \neq 0. \end{cases}$$

Temos,

$$S_f(t) = 1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n\pi} j e^{jn\pi t}, \quad n \neq 0.$$

Observe que escrevemos  $S_f(t)$  para representar a série de Fourier de  $f$  em  $t$ . Isto é feito porque pode acontecer de  $S_f(t) \neq f(t)$ . Seria necessário estudar a convergência da série para verificar se  $S_f(t) = f(t)$  ou não. Este estudo de convergência é essencial.

### 1.2.2 O espectro complexo de Fourier

A expansão em série de Fourier de uma função periódica é a decomposição da função em termos das suas componentes de várias frequências. Uma função periódica de período  $T$  tem componentes de frequências dadas por  $n\nu$ , onde  $\nu = \frac{1}{T}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ . Em termos das frequências angulares (ou pulsações), as componentes são dadas por  $n\omega_o$  onde  $\omega_o = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$  e  $n \in \mathbb{Z}$ .

Chamamos de espectro da função  $f$  o conjunto de todos os coeficientes de Fourier  $F_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Se especificarmos  $f$  podemos encontrar seu espectro. Reciprocamente, se o espectro for conhecido podemos encontrar a função  $f$  correspondente.

Portanto, podemos especificar  $f$  de duas formas: a representação no domínio do tempo, onde  $f$  é expressa como função do tempo, e a representação no domínio da frequência, onde o espectro é especificado.

Observamos que o espectro de uma função periódica não é uma curva contínua, mas existe apenas para valores discretos de  $\omega$ , múltiplos de uma frequência básica  $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$  ( $\omega = n\omega_o$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ). Os coeficientes  $F_n$ , por serem complexos, são descritos por uma magnitude e uma fase (módulo e argumento).

**Exemplo 1.2.** Consideremos a função dada por 1.7. Temos que

$$F_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \frac{1}{n\pi}j, & n \neq 0. \end{cases}$$

Assim,

$$|F_n| = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \frac{1}{|n\pi|}, & n \neq 0 \end{cases} \quad e \quad \angle F_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n \text{ positivo} \\ \frac{-\pi}{2}, & n \text{ negativo.} \end{cases}$$

Fazendo  $\omega = n\omega_o = n\frac{2\pi}{T} = n\pi$ , temos :

$$|F_n| = \begin{cases} 1, & \omega = 0 \\ \frac{1}{|\omega|}, & \omega \neq 0 \end{cases} \quad e \quad \angle F_n = \begin{cases} 0, & \omega = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \omega \text{ positivo} \\ \frac{-\pi}{2}, & \omega \text{ negativo.} \end{cases}$$

Construímos os gráficos de  $|F_n|$  e  $\angle F_n$ , em termos da frequência  $\omega$ , apresentando-os na figura 1.2.

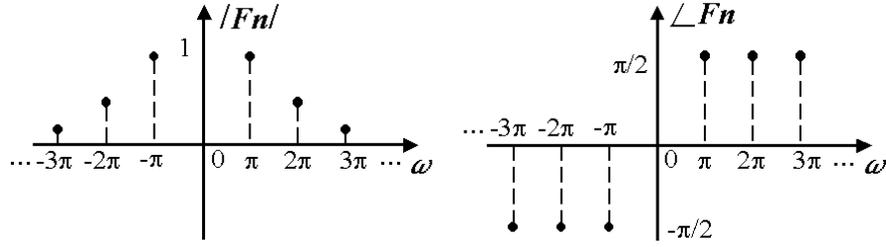


Figura 1.2: Amplitude e fase dos coeficientes da série de Fourier.

**Exemplo 1.3.** Consideremos, agora, a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , periódica de período  $T$ , dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & \frac{\tau}{2} < t < T - \frac{\tau}{2}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Essa função é conhecida como porta periódica, de largura  $\tau$ . Mostramos o seu gráfico na figura 1.3.

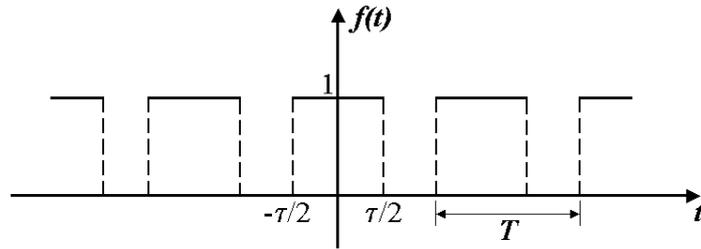


Figura 1.3: Função porta periódica.

Os coeficientes  $F_n$  da série de Fourier na forma exponencial são dados por:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{T-\tau/2} f(t) e^{-j \frac{2n\pi t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{\tau}{T} \left[ \frac{\text{sen}(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} \right], \quad n \neq 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

e

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{T-\tau/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt = \frac{\tau}{T}. \quad (1.10)$$

Dessa forma,

$$F_n = \begin{cases} \frac{\tau}{T}, & n = 0 \\ \frac{\tau}{T} \left[ \frac{\text{sen}(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} \right], & n \neq 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Definindo a função  $Sa$ , conhecida como função de amostragem, por

$$Sa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \rightarrow \begin{cases} 1, & t = 0 \\ \frac{\text{senc}t}{t}, & t \neq 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

e fazendo  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , temos

$$F_n = \frac{\tau}{T} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right). \quad (1.13)$$

A frequência fundamental é  $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$ . Se  $\omega = n\omega_o$  então

$$F_n = \frac{\tau}{T} Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right). \quad (1.14)$$

Mostramos o gráfico de  $F_n$  em termos da frequência  $\omega$  na figura 1.4.

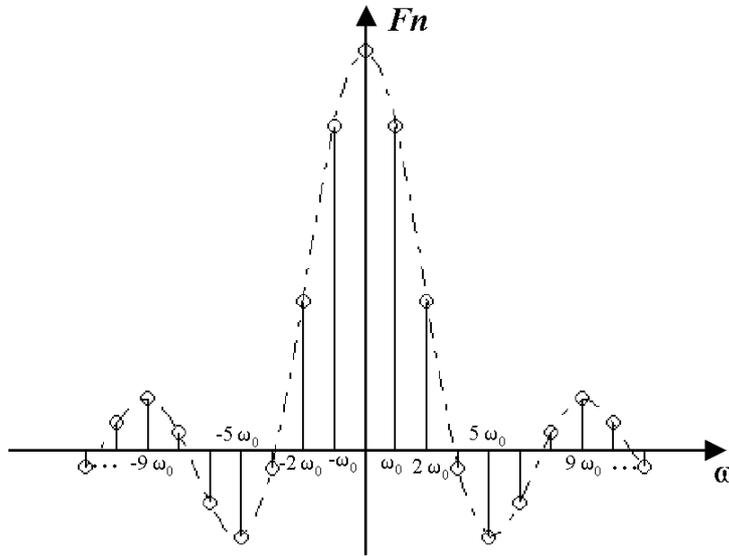


Figura 1.4: Representação do espectro da função porta periódica.

Podemos observar que à medida que  $T$  aumenta, a frequência fundamental,  $\frac{2\pi}{T}$ , se torna menor e o espectro torna-se, então, mais denso. Intuitivamente, somos levados a pensar que quando  $T$  tende ao infinito temos, no domínio do tempo, um único pulso retangular de largura  $\tau$  e no domínio da frequência um espectro contínuo com componentes em todas as frequências. Essa indução pode ser matematizada através de um processo de limite e de uma noção apropriada de convergência. A criação dessa noção de convergência é recente: a teoria das distribuições.

## 1.3 Transformada de Fourier

### 1.3.1 Introdução

Quando o sinal com o qual estamos trabalhando for não-periódico, ele pode ser expresso como uma soma contínua (integral) de sinais exponenciais. Em contraste com sinais periódicos, que podem ser representados por uma soma discreta de sinais exponenciais (série de Fourier - como já visto). Vejamos uma motivação para essa afirmação.

### 1.3.2 A Transformada de Fourier

Consideremos uma função  $f$  como mostra a figura 1.5 .

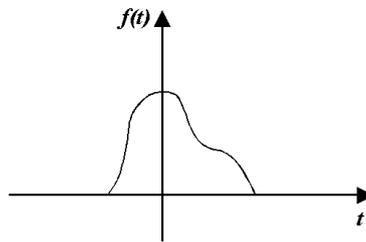


Figura 1.5: Gráfico de uma função  $f$ .

Construímos uma nova função  $f_T$ , periódica com período  $T$ , de acordo com a figura 1.6.

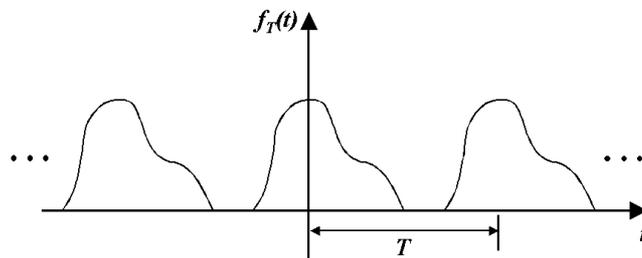


Figura 1.6: Construção de uma função periódica a partir de uma função  $f$  dada.

Tornamos o período  $T$  grande o suficiente para que não haja superposição entre os pulsos da forma de  $f$ . Essa nova função  $f_T$  é uma função periódica e pode ser representada por uma série exponencial de Fourier.

Em uma topologia adequada, quando  $T \rightarrow \infty$ ,  $f_T \rightarrow f$ . Desse modo, a série de Fourier que representa  $f_T$  também representará  $f$ .

A série de Fourier de  $f_T$  é dada por

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_o t} \quad (1.15)$$

onde  $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$  e

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_o t} dt. \quad (1.16)$$

Façamos  $n\omega_o = \omega_n$ . Assim,  $F_n = F_n(\omega_n)$ .

Consideremos  $TF_n(\omega_n) = F(\omega_n)$ , que é obviamente limitado (por construção). Temos,

$$f_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t}. \quad (1.17)$$

Substituindo  $T = \frac{2\pi}{\omega_o}$  em 1.17 temos

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \omega_o. \quad (1.18)$$

Quando  $T \rightarrow \infty$ ,  $\omega_o \rightarrow 0$  e  $f_T \rightarrow f$  obtemos :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.19)$$

e

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.20)$$

Observe que  $\omega_o$  foi substituído por  $d\omega$  e o somatório por uma integral.

O espectro de  $f$  será contínuo e representado pela função  $F$ .

A equação 1.20 é conhecida como transformada (direta) de Fourier de  $f$  e a equação 1.19 como transformada inversa de Fourier de  $F$ .

Simbolicamente, podemos escrever

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \quad (1.21)$$

e

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]. \quad (1.22)$$

Fazendo  $\omega = 2\pi\nu$  em 1.19 e 1.20 chegamos a uma formulação simétrica, o fator  $2\pi$  não aparece.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu \quad (1.23)$$

e

$$\hat{F}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\nu t} dt. \quad (1.24)$$

### 1.3.3 Existência da transformada de Fourier

#### O espaço $L^1(\mathbb{R})$

O espaço  $L^1(\mathbb{R})$  é o espaço de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tais que

$$\int_{\mathbb{R}} \|f\| dt < \infty. \quad (1.25)$$

#### O espaço $L^2(\mathbb{R})$

O espaço  $L^2(\mathbb{R})$  é o espaço de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , tais que

$$\int_{\mathbb{R}} \|f\|^2 dt < \infty. \quad (1.26)$$

**Teorema 1.1.** *Se a função  $f$  pertence ao espaço  $L^1(\mathbb{R})$  então a transformada de  $f$  existe.*

**Teorema 1.2.** *Se a função  $f$  pertence ao espaço  $L^2(\mathbb{R})$  então a transformada  $F$ , de  $f$ , existe e  $F \in L^2(\mathbb{R})$ .*

**Exemplo 1.4.** *Consideremos a função  $G_\tau$  (conhecida como função porta de largura  $\tau$ ) definida por*

$$G_\tau(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2}. \end{cases} \quad (1.27)$$

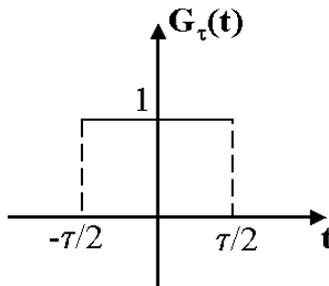


Figura 1.7: função porta.

Calculando a transformada de Fourier dessa função, temos:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{G_\tau(t)\} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{\tau \operatorname{sen}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}, \quad \omega \neq 0. \quad (1.28)$$

Para  $\omega = 0$ , temos :

$$\mathcal{F}\{G_\tau(t)\} |_{\omega=0} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt = \tau.$$

Logo,

$$\mathcal{F}\{G_\tau(t)\} = \tau \text{Sa} \left( \frac{\omega\tau}{2} \right).$$

A figura 1.8 mostra a representação do espectro da função porta. Neste caso,  $F$  é uma função real.

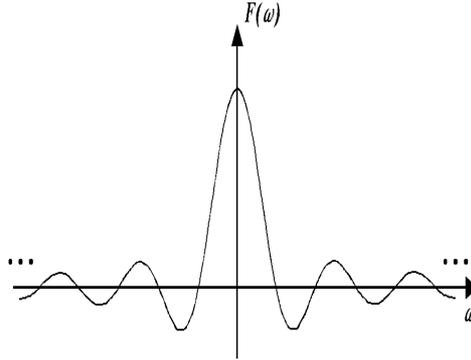


Figura 1.8: Representação do espectro da função porta.

**Exemplo 1.5.** Consideremos a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(t) = e^{-|t|}.$$

Calculando sua transformada de Fourier, obtemos :

$$\mathcal{F}\{e^{-|t|}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{1 + \omega^2}.$$

**Exemplo 1.6.** Consideremos a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

A sua transformada de Fourier é dada por:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{1 + j\omega}.$$

**Exemplo 1.7.** Consideremos a função  $G_\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$G_\tau(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \tau/2 \\ 0, & |\omega| > \tau/2. \end{cases}$$

Desejamos calcular sua transformada de Fourier inversa. Assim,

$$\mathcal{F}^{-1}\{G_\tau(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\tau}{2\pi} \frac{\text{sen}\left(\frac{t\tau}{2}\right)}{\frac{t\tau}{2}}, \quad t \neq 0.$$

Para  $t = 0$ , temos:

$$\mathcal{F}^{-1}\{G_\tau(\omega)\} |_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\omega = \frac{\tau}{2\pi}.$$

Assim,

$$\mathcal{F}^{-1}\{G_\tau(\omega)\} = \frac{\tau}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{\tau t}{2}\right).$$

Logo, a transformada de  $f(t) = \text{Sa}\left(\frac{t\tau}{2}\right)$  é igual a  $\frac{2\pi}{\tau} G_\tau(\omega)$ . Em particular,

$$\mathcal{F}\{\text{Sa}(t)\} = \pi G_\tau(\omega).$$

## 1.4 Convolução

### 1.4.1 Introdução

Dadas duas funções  $f_1$  e  $f_2$  formamos a integral

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (1.29)$$

Essa integral define a convolução das funções  $f_1$  e  $f_2$ . Simbolicamente, escrevemos

$$f = f_1 * f_2.$$

### 1.4.2 Propriedades

**Propriedade 1.1. Comutatividade**

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1. \quad (1.30)$$

**Propriedade 1.2. Distributividade**

$$f_1 * [f_2 + f_3] = f_1 * f_2 + f_1 * f_3. \quad (1.31)$$

**Propriedade 1.3. Associatividade**

$$f_1 * [f_2 * f_3] = [f_1 * f_2] * f_3. \quad (1.32)$$

**Teorema 1.3.** *Convolução no tempo*

Se  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$  e  $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$  então

$$f_1 * f_2 \leftrightarrow F_1 F_2. \quad (1.33)$$

Se  $f_1(t) \leftrightarrow \hat{F}_1(\nu)$  e  $f_2(t) \leftrightarrow \hat{F}_2(\nu)$  então

$$f_1 * f_2 \leftrightarrow \hat{F}_1 \hat{F}_2. \quad (1.34)$$

**Teorema 1.4.** *Convolução na frequência*

Se  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$  e  $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$  então

$$f_1 f_2 \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1 * F_2]. \quad (1.35)$$

Se  $f_1(t) \leftrightarrow \hat{F}_1(\nu)$  e  $f_2(t) \leftrightarrow \hat{F}_2(\nu)$  então

$$f_1 f_2 \leftrightarrow \hat{F}_1 * \hat{F}_2. \quad (1.36)$$

### 1.4.3 Propriedades da Transformada de Fourier

Algumas propriedades da transformada de Fourier estão apresentadas na tabela 1.1.

PROPRIEDADE	FUNÇÃO	TRANSFORMADA
	$f(t)$	$F(w)$
Simetria	$F(t)$	$2\pi f(-w)$
Linearidade	$a_1 f_1(t) + f_2(t)$	$a_1 F_1(w) + a_2 F_2(w)$
Mudança de escala	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{w}{a}\right)$
Translação em frequência	$f(t)e^{jw_0 t}$	$F(w - w_0)$
	$f(t)\cos(w_0 t)$	$\frac{1}{2}[F(w + w_0) + F(w - w_0)]$
	$f(t)\text{sen}(w_0 t)$	$\frac{j}{2}[F(w + w_0) - F(w - w_0)]$
Translação no tempo	$f(t - t_0)$	$e^{-jw t_0} F(w)$
Dualidade	$F(t)$	$f(w)$
Conjugação	$f^*(t)$	$F^*(-w)$
Diferenciação no tempo	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$(jw)^n F(w)$
Integração no tempo	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{jw} F(w)$
Diferenciação na frequência	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n f}{dw^n}$
Simetria	$f(t)$ real	$F(w) = F^*(-w)$
	$f(t)$ real	$\text{R}\{F(w)\} = \text{R}\{F^*(-w)\}$
	$f(t)$ real	$\text{I}\{F(w)\} = -\text{I}\{F^*(-w)\}$
	$f(t)$ real	$ F(w)  =  F(-w) $
	$f(t)$ real	$\angle F(w) = -\angle F(-w)$
	$f(t)$ real, par em $t$	$F(w)$ real, par em $w$
	$f(t)$ real, impar em $t$	$F(w)$ imaginária, impar em $w$

Tabela 1.1: Propriedades da transformada de Fourier

Apresentamos na tabela 1.2 algumas transformadas que envolvem o impulso unitário (Delta de Dirac) denotado por  $\delta$ .

FUNÇÃO	TRANSFORMADA
$f(t)$	$F(\omega)$
$A$	$2\pi A\delta$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\text{sen}(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$

Tabela 1.2: Algumas transformadas que envolvem o impulso unitário.

Para terminar o capítulo, apresentamos na tabela 1.3 as ordens de grandeza de alguns sinais característicos.

TIPO DE SINAL	BANDA EM Hz
corrente doméstica	60
quartzo de relógio	$10^5$
onda de radar	$10^{10}$
vibração de um átomo de Césio	$10^{14}$
ONDAS HERTZIANAS:	
muito longas (telégrafo)	$1,5 \times 10^4$ a $6 \times 10^4$
longas (rádio)	$6 \times 10^4$ a $3 \times 10^5$
médias (rádio)	$3 \times 10^5$ a $3 \times 10^6$
curtas (rádio)	$3 \times 10^6$ a $3 \times 10^7$
métricas (televisão)	$3 \times 10^7$ a $3 \times 10^8$
centimétricas (radar)	$3 \times 10^8$ a $10^{11}$
luz visível	$3,7 \times 10^{14}$ a $7,5 \times 10^{14}$

Tabela 1.3: Ordens de grandeza de sinais.

## Capítulo 2

# Sinais Discretos no Tempo

### 2.1 Seqüências

Sinais discretos no tempo são representados matematicamente como seqüências de números,  $x$ , cujo  $n$ -ésimo termo é  $x[n]$ , e denotamos por  $x = \{x[n]\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Em geral, uma seqüência deste tipo origina-se da amostragem de um sinal contínuo. Se o sinal contínuo for  $x_a(t)$  podemos dizer que  $x[n] = x_a(nT)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .  $T$  é chamado de período de amostragem e  $\frac{1}{T}$  é a freqüência de amostragem. Usaremos, às vezes, a notação  $x[n]$  para nos referirmos, também, à seqüência.

### 2.2 Operações com seqüências e seqüências básicas

#### 2.2.1 Operações com seqüências

O produto e a soma de duas seqüências  $x[n]$  e  $y[n]$  são definidos termo a termo, isto é, dos elementos que se correspondem. A multiplicação de uma seqüência  $x[n]$  por um número  $\alpha$  é definida como a multiplicação de cada elemento de  $x[n]$  por  $\alpha$ .

#### 2.2.2 Seqüências básicas

##### Impulso unitário

A seqüência impulso unitário é definida por

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Qualquer seqüência pode ser expressa, em termos do impulso unitário, por

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]. \quad (2.2)$$

### Degrau Unitário

A seqüência degrau unitário é definida por

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Podemos escrever

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k - n] \quad (2.4)$$

ou

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k]. \quad (2.5)$$

### Seqüência Exponencial

Definimos a seqüência exponencial por

$$x[n] = A\alpha^n. \quad (2.6)$$

onde  $A$  e  $\alpha$  são constantes.

### Seqüência Senoidal

Uma seqüência senoidal tem a forma

$$x[n] = A\cos(\omega_o n + \phi), \quad (2.7)$$

onde  $A$ ,  $\omega_o$  e  $\phi$  são constantes.

### Seqüência Periódica

Uma seqüência periódica é aquela tal que

$$x[n] = x[n + N], \text{ para todos } n \text{ e } N \in \mathbb{Z}. \quad (2.8)$$

Devemos observar que seqüências senoidais e exponenciais não são necessariamente periódicas.

Observamos, por exemplo, que a condição de periodicidade para um sinal senoidal é obtida da seguinte forma :

$$A\cos(\omega_o n + \phi) = A\cos(\omega_o n + \omega_o N + \phi). \quad (2.9)$$

Requerendo que,

$$\omega_o N = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.10)$$

Analogamente, as seqüências exponenciais complexas da forma  $Ce^{j\omega_o n}$  serão periódicas se  $e^{j\omega_o(n+N)} = e^{j\omega_o n}$ . Isso só é verdade se  $\omega_o N = 2k\pi$ . Conseqüentemente, exponenciais complexas e seqüências senoidais não são necessariamente periódicas,

dependendo do valor de  $\omega_o$ . Por exemplo, para  $\omega_o = \frac{3\pi}{4}$ , o menor valor de  $N$  que satisfaz 2.10, com  $k$  inteiro, é  $N = 8$  (correspondendo a  $k = 3$ ). Para  $\omega_o = 1$ , não existem valores inteiros de  $N$  ou  $k$  que satisfaçam 2.10. Do que foi visto, para sinais discretos, a interpretação do que sejam altas e baixas frequências é distinta do que foi visto quando tratamos de sinais senoidais e exponenciais complexas para sinais contínuos. Para um sinal senoidal contínuo  $x(t) = A\cos(\Omega_o t + \phi)$ , à medida que  $\Omega_o$  cresce,  $x(t)$  oscila mais rapidamente. Para um sinal senoidal discreto  $x[n] = A\cos(\omega_o n + \phi)$ , à medida que  $\omega_o$  varia de  $\omega_o = 0$  até  $\omega_o = \pi$ ,  $x[n]$  oscila mais rápido. Mas, à medida que  $\omega_o$  varia de  $\omega_o = \pi$  até  $\omega_o = 2\pi$  as oscilações tornam-se mais lentas. Dessa forma, valores de  $\omega_o$  na vizinhança de  $\omega_o = 2k\pi$ , para  $k \in \mathbb{Z}$ , são ditas baixas frequências e valores de  $\omega_o$  na vizinhança de  $\omega_o = (2k + 1)\pi$  para  $k \in \mathbb{Z}$  são ditas altas frequências.

## 2.3 Sistemas discretos no tempo

### 2.3.1 Introdução

Um sistema discreto no tempo é definido matematicamente por um operador que transforma uma seqüência de entrada numa seqüência de saída.

Se  $x$  é a seqüência de entrada,  $y$  a de saída, e  $T$  o operador que representa o sistema, temos

$$y = T\{x\}. \quad (2.11)$$

Como exemplo consideremos o conhecido sistema ideal de atraso definido pela equação

$$y[n] = x[n - n_d], \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.12)$$

onde  $n_d$  é um inteiro fixo chamado de atraso do sistema.

### 2.3.2 Alguns tipos de sistemas

#### Sistemas sem memória

Um sistema é dito sem memória se a saída  $y[n]$  depende somente da entrada  $x[n]$  para o mesmo valor de  $n$ .

#### Sistemas Lineares

Se  $y_1$  e  $y_2$  são as respostas de um sistema quando  $x_1$  e  $x_2$  são as respectivas entradas então o sistema é dito linear se e só se

$$T\{a_1x_1 + a_2x_2\} = a_1T\{x_1\} + a_2T\{x_2\}. \quad (2.13)$$

### Sistemas invariantes no tempo

Um sistema é dito invariante no tempo se um deslocamento no tempo na seqüência de entrada causa um igual deslocamento no tempo na seqüência de saída, isto é, se para todo  $n_o$  a seqüência de entrada  $x_1[n] = x[n - n_o]$  produz uma seqüência de saída  $y_1[n] = y[n - n_o]$ .

### Estabilidade

Um sistema é dito estável se e somente se toda seqüência de entrada limitada produz uma seqüência de saída também limitada.

A entrada  $x$  é limitada se existir um valor positivo finito  $M$  tal que

$$|x[n]| \leq M \text{ para todo } n. \quad (2.14)$$

Estabilidade requer que para toda entrada limitada exista um valor positivo finito  $N$  fixo tal que

$$|y[n]| \leq N \text{ para todo } n. \quad (2.15)$$

### 2.3.3 Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Uma classe importante de sistemas consiste daqueles que são lineares e invariantes no tempo.

Considere que  $h_k[n]$  é a resposta do sistema cuja entrada é  $\delta[n - k]$ .

Consideremos, agora, a entrada  $x$ . Assim, a saída  $y$  será dada por

$$y[n] = T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - k] \right\}. \quad (2.16)$$

Da condição de linearidade, temos

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] T\{\delta[n - k]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h_k[n]. \quad (2.17)$$

A propriedade de invariância no tempo implica que se  $h[n]$  (resposta ao impulso) é a resposta para  $\delta[n]$  então a resposta para  $\delta[n - k]$  é  $h[n - k]$ . Assim,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n - k] h[k]. \quad (2.18)$$

Portanto, um sistema linear invariante no tempo (abreviado como LIT) é completamente caracterizado por sua resposta ao impulso.

A equação 2.18 é chamada de convolução entre  $x$  e  $h$  e representamos na forma

$$y = x * h. \quad (2.19)$$

### 2.3.4 Propriedades de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Como todos os sistemas lineares invariantes no tempo são descritos pela operação de convolução, as propriedades dessa classe de sistemas são definidas pelas propriedades da convolução discreta no tempo.

**Propriedade 2.1.** *Comutatividade*

$$x * h = h * x. \quad (2.20)$$

**Propriedade 2.2.** *Distributividade*

$$x * (h_1 + h_2) = x * h_1 + x * h_2. \quad (2.21)$$

### 2.3.5 Equações lineares de diferença de coeficientes constantes

Uma subclasse de sistemas lineares invariantes no tempo consiste de sistemas nos quais a entrada e a saída satisfazem uma equação de diferença linear de n-ésima ordem de coeficientes constantes da forma

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]. \quad (2.22)$$

Como exemplo consideremos o sistema conhecido como acumulador, no qual a saída no instante  $n$  é igual à soma da entrada no instante  $n$  e do valor da saída no instante anterior  $n - 1$ .

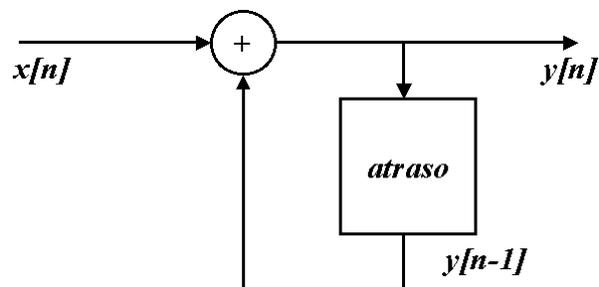


Figura 2.1: Diagrama de bloco de uma equação de diferença recursiva representando um acumulador.

A equação de diferença que representa esse sistema é dada por

$$y[n] = y[n-1] + x[n]. \quad (2.23)$$

### 2.3.6 Representação no domínio da frequência de sinais discretos no tempo

Seqüências exponenciais complexas têm um lugar de destaque na representação de sinais discretos no tempo. Isto deve-se ao fato de que exponenciais complexas são autofunções de sistemas lineares invariantes no tempo. Esta propriedade permite que sinais discretos possam ser representados em termos de exponenciais complexas.

Para demonstrar a propriedade de autofunção de exponenciais complexas para sistemas discretos considere uma entrada  $x[n] = e^{j\omega n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . A saída correspondente de um sistema linear invariante no tempo com resposta ao impulso  $h[n]$  é

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right). \quad (2.24)$$

Definindo

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}, \quad (2.25)$$

podemos escrever

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}. \quad (2.26)$$

Conseqüentemente,  $e^{j\omega n}$  é uma autofunção do sistema e o autovalor associado é  $H(e^{j\omega})$ . A função  $\omega \mapsto H(e^{j\omega})$  é chamada de função resposta em frequência (FRF) do sistema linear invariante no tempo. O conceito de função de resposta em frequência é praticamente o mesmo seja o sistema contínuo ou discreto no tempo. Porém, para sistemas discretos lineares invariantes no tempo, a função resposta em frequência é sempre uma função periódica da frequência com período  $2\pi$ . De fato,

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j(\omega+2\pi)n}.$$

Mas,

$$e^{\pm j2\pi n} = 1 \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}.$$

Assim,

$$e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j\omega n} \cdot e^{-j2\pi n} = e^{-j\omega n}.$$

Logo,

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = H(e^{j\omega}).$$

De modo geral,

$$H(e^{j(\omega+2\pi r)}) = H(e^{j\omega}), \quad r \in \mathbb{Z};$$

isto é,  $H(e^{j\omega})$  é periódica com período  $2\pi$ .

Como  $H(e^{j\omega})$  é periódica com período  $2\pi$ , só precisamos especificar  $H(e^{j\omega})$  num intervalo de comprimento  $2\pi$ . Normalmente especificamos  $H(e^{j\omega})$  no intervalo  $-\pi < \omega \leq \pi$ . Com relação a esse intervalo, as baixas frequências são as frequências próximas de zero e as altas frequências são as frequências próximas de  $\pi$  ou  $-\pi$ .

Chamaremos os sistemas lineares invariantes no tempo de *filtros*.

Uma classe importante de sistemas lineares invariantes no tempo são aqueles cuja resposta em frequência vale 1 numa determinada faixa de frequências e zero fora dessa faixa. Esses são os chamados *filtros seletivos ideais*.

Consideremos, como exemplo, a resposta em frequência de um filtro ideal passa-baixa.

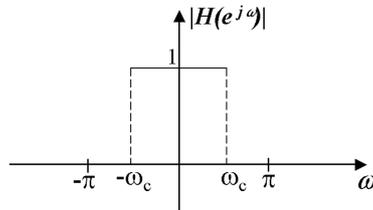


Figura 2.2: Resposta em frequência do filtro ideal passa-baixa.

Devido à periodicidade da resposta em frequência, parece que o filtro funciona como um filtro multifaixa. Porém, o filtro rejeita altas frequências e só permite a passagem de baixas frequências. Como a resposta em frequência é completamente especificada no intervalo  $-\pi < \omega \leq \pi$ , a amplitude da resposta em frequência do filtro ideal passa-baixa é tipicamente mostrado somente nesse intervalo como indica a figura 2.2.

As amplitudes das respostas em frequência para filtros ideais passa-alta e passa-faixa são mostrados na figura 2.3. Mostramos somente um período da resposta em frequência.

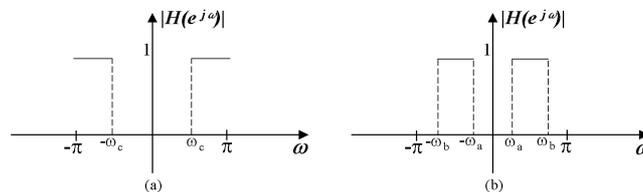


Figura 2.3: Respostas em frequência para filtros ideais. (a) Filtro ideal passa-alta (b) Filtro ideal passa-faixa.

### 2.3.7 Representação de seqüências pela transformada de Fourier Discreta (TFD)

Definimos a transformada de Fourier discreta de uma seqüência  $x$  por

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (2.27)$$

e a transformada inversa de  $X(e^{j\omega})$  por

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (2.28)$$

Poderíamos, para a definição, ter escolhido qualquer intervalo de comprimento  $2\pi$ .

De modo geral  $X(e^{j\omega})$  é complexo e podemos escrevê-lo na forma

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})} \quad (2.29)$$

onde  $|X(e^{j\omega})|$  e  $\angle X(e^{j\omega})$  são, respectivamente, a magnitude e a fase de  $X(e^{j\omega})$ .

Observando as equações 2.25, 2.27 e 2.28 podemos ver que a resposta em frequência de um sistema linear invariante no tempo é a transformada de Fourier discreta da resposta ao impulso e a resposta ao impulso pode ser obtida calculando a transformada inversa de Fourier da função resposta em frequência, isto é,

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (2.30)$$

Podemos observar que a equação 2.27 é uma série de Fourier complexa para uma função periódica de variável contínua e que 2.28 fornece os coeficientes da série.

Desejamos, agora, estudar a convergência da série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

isto é, desejamos encontrar as condições para que

$$|X(e^{j\omega})| < \infty \text{ para todo } \omega.$$

Uma condição suficiente para a convergência é encontrada da seguinte forma :

$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega})| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| |e^{-j\omega n}| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty. \end{aligned}$$

Assim, se  $x[n]$  for absolutamente somável, então  $X(e^{j\omega})$  existe. Neste caso podemos mostrar que a série converge para uma função contínua em  $\omega$ .

Como uma seqüência estável é, por definição, absolutamente somável, todas as seqüências estáveis possuem transformada de Fourier. E, também, qualquer sistema estável terá resposta em frequência finita e contínua.

A somabilidade absoluta é uma condição suficiente para a existência da transformada de Fourier e também garante a convergência uniforme, isto é, se

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

e

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n]e^{-j\omega n}$$

então

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})| d\omega = 0.$$

Algumas seqüências, porém, não são absolutamente somáveis, mas são quadrado somáveis, isto é,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty.$$

Tais seqüências podem ser representadas por uma transformada de Fourier discreta se nós ‘relaxamos’ a condição de convergência uniforme. Temos, assim, o caso de convergência média-quadrática, isto é, se

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

e

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n]e^{-j\omega n}$$

então

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0.$$

Como exemplo calculemos a resposta ao impulso do filtro ideal passa-baixa cuja resposta em frequência é

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (2.31)$$

com periodicidade  $2\pi$ .

Assim,

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n}, \quad n \neq 0.$$

Para  $n = 0$  temos

$$h[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi}.$$

Definindo,  $Sa[n] = \frac{\text{sen}(n)}{n}$ , temos

$$h[n] = \frac{\omega_c}{\pi} Sa(\omega_c n).$$

Observamos que como  $h[n]$  é não nula para  $n < 0$ . Observamos também que  $h[n]$  não é absolutamente somável. Isto ocorre pois  $H(e^{j\omega})$  é descontínua em  $\omega = \omega_c$ . Como  $h[n]$  não é absolutamente somável,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_c}{\pi} Sa(\omega_c n) e^{-j\omega n}$$

não converge uniformemente para todos os valores de  $\omega$ .

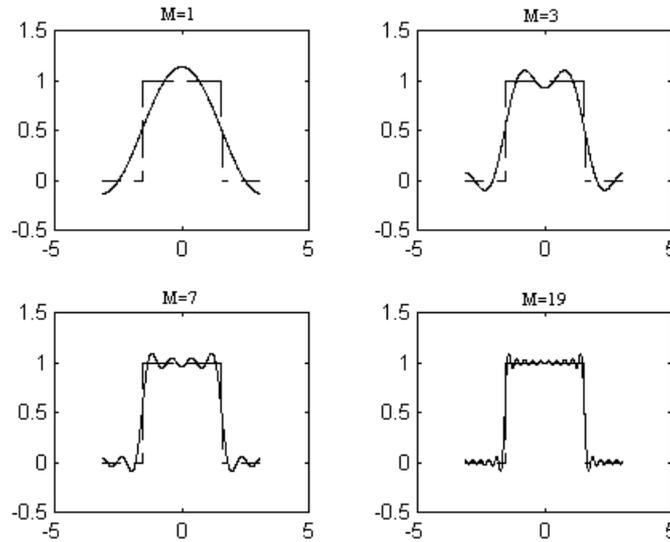


Figura 2.4: Gráficos de  $H_M(e^{j\omega})$ .

Podemos dar uma noção intuitiva para este fato considerando

$$H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M \frac{\omega_c}{\pi} Sa(\omega_c n) e^{-j\omega n}.$$

A função  $H_M(e^{j\omega})$  é mostrada na figura 2.4 para vários valores de  $M$  e  $\omega_c = \pi/2$ . Note que à medida que  $M$  aumenta, o comportamento oscilatório em  $\omega =$

PROPRIEDADE	DOMÍNIO DO TEMPO	DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA
Linearidade	$a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$	$a_1X_1(e^{j\omega}) + a_2X_2(e^{j\omega})$
Deslocamento no tempo e na frequência	$x[n - n_d] \leftrightarrow e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$	$e^{j\omega n_d} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_d)})$
Diferenciação na frequência	$nx[n]$	$j \frac{dX}{d\omega}(e^{j\omega})$

Tabela 2.1: Propriedades da transformada de Fourier Discreta.

$\omega_c$  (chamado de fenômeno de Gibbs) é mais acentuado. Podemos mostrar que quando  $M \rightarrow \infty$  a amplitude máxima das oscilações não converge a zero. A soma infinita não converge uniformemente para  $H(e^{j\omega})$ , porém  $h[n]$  é quadrado somável e  $H_M(e^{j\omega})$  converge no sentido médio-quadrático para  $H(e^{j\omega})$ , isto é,

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(e^{j\omega}) - H_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0.$$

Embora a diferença entre  $\lim_{M \rightarrow \infty} H_M(e^{j\omega})$  e  $H(e^{j\omega})$  não pareça importante, ela deve ser considerada na construção de filtros.

### 2.3.8 Propriedades da transformada de Fourier discreta

**Teorema 2.1.** *Teorema de Parseval*

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega. \quad (2.32)$$

A função  $|X(e^{j\omega})|^2$  é chamada de espectro de densidade de energia e só é definida para sinais de energia finita.

**Teorema 2.2.** *Teorema da Convolução*

Se

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega}), \quad h[n] \leftrightarrow H(e^{j\omega}),$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega})$$

então

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}). \quad (2.33)$$

**Propriedade 2.3.** *Periodicidade*

A transformada de Fourier  $X(e^{j\omega})$  é periódica em  $\omega$ , com período  $2\pi$ . Pois,

$$\begin{aligned} X(e^{j(\omega+2\pi)}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j(\omega+2\pi)n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \cdot e^{-j2\pi n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\ &= X(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

Dessa forma só precisamos especificar os valores de  $X(e^{j\omega})$  em um período.

**Propriedade 2.4. Simetria**

Para  $x[n]$  real,

$$X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$$

onde \* significa conjugado complexo.

Assim, para traçarmos os gráficos representativos de  $X(e^{j\omega})$  só precisamos considerar metade do domínio. Geralmente, escolhemos  $\omega \in [0, \pi]$ .

Se  $x[n]$  for de duração finita, então podemos fazer um programa para calcular  $X(e^{j\omega})$  numericamente para qualquer frequência  $\omega$ . Vamos supor que  $x[n]$  tenha  $N$  amostras entre  $n_1 \leq n \leq n_N$ .

Desejamos calcular  $X(e^{j\omega_k})$  para  $\omega_k = \frac{\pi}{M}k$ ,  $k = 0, 1, \dots, M$  que são  $(M+1)$  frequências igualmente espaçadas entre  $[0, \pi]$ . Dessa forma, podemos escrever

$$X(e^{j\omega_k}) = \sum_{l=1}^N e^{-j(\pi/M)kn_l} x(n_l), \quad k = 0, 1, \dots, M.$$

Quando  $x[n_l]$  e  $X(e^{j\omega_k})$  são colocadas como vetores coluna  $x$  e  $X$ , respectivamente. Temos,

$$X = Wx$$

onde  $W$  é uma matriz  $(M+1) \times N$  dada por

$$W = \{e^{-j(\pi/M)kn_l}, \quad n_1 \leq n \leq n_N, \quad k = 0, 1, \dots, M\}.$$

Se escrevemos  $\{k\}$  e  $\{n_l\}$  como vetores linha  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{n}$ , temos

$$W = [\exp(-j\frac{\pi}{M}\mathbf{k}^T \mathbf{n})].$$

Dessa forma, temos

$$X^T = x^T [\exp(-j\frac{\pi}{M}\mathbf{n}^T \mathbf{k})]. \quad (2.34)$$

Como exemplo, consideremos a seqüência  $x[n] = (0.9) \exp(j\pi/3)^n$ ,  $0 \leq n \leq 10$ . Vamos calcular  $X(e^{j\omega})$  e investigar sua periodicidade. Para investigarmos a periodicidade, vamos calcular e mostrar os gráficos representativos de  $X(e^{j\omega})$  em 401 freqüências no intervalo  $[-3\pi, 3\pi]$ . Os gráficos de magnitude, fase, parte real e parte imaginária de  $X(e^{j\omega})$  estão mostrados na figura 2.5.

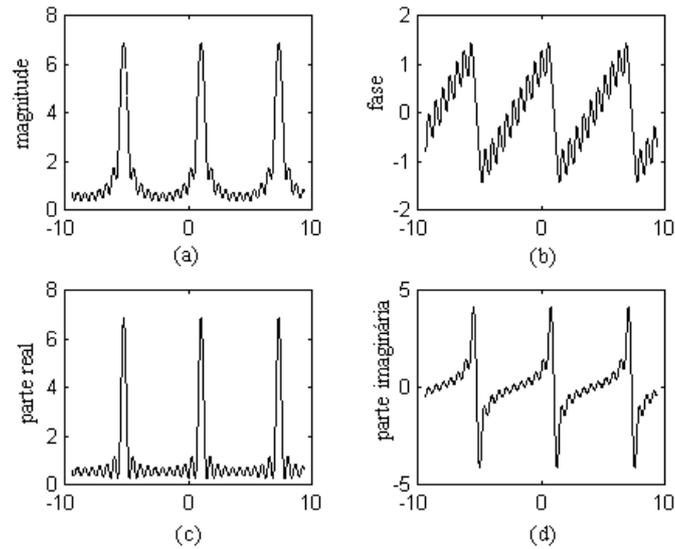


Figura 2.5: (a)Magnitude;(b)Fase;(c)Parte real;(d)Parte Imaginária.

## 2.4 Amostragem de sinais contínuos

### 2.4.1 Introdução

Normalmente, o processamento de sinais contínuos é implementado através de um processo de amostragem do sinal, seguido do processamento do sinal discreto obtido, isto é, sua transformação em um outro sinal discreto, que depois é transformado num sinal contínuo.

### 2.4.2 Amostragem periódica

O método usual de obtermos um sinal discreto a partir de um sinal contínuo é através da amostragem periódica (digamos de período  $T$ ) do sinal contínuo. Obtemos, assim, uma seqüência de amostras  $x[n]$  a partir do sinal contínuo  $x_c(t)$  através da relação

$$x[n] = x_c[nT], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.35)$$

$T$  é o período de amostragem e  $f_s = \frac{1}{T}$  é a frequência de amostragem.

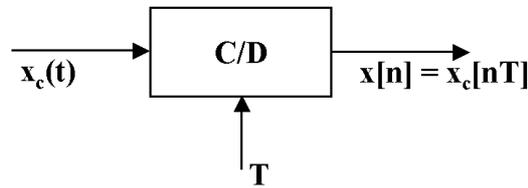


Figura 2.6: Diagrama de bloco de representação de um conversor ideal contínuo-discreto (C/D)

Nos referimos ao sistema que implementa a operação dada pela equação 2.35 como um conversor ideal contínuo-discreto (C/D) e a representação em diagrama de blocos é dada na figura 2.6. Na prática, a operação de amostragem é implementada por um conversor analógico-digital (A/D) que será estudado mais tarde.

A operação de amostragem, geralmente, não é inversível. Ou seja, dada a saída  $x[n]$  não é possível, de modo geral, reconstruir  $x_c(t)$ .

O diagrama de blocos da operação que representa a obtenção de  $x[n]$  a partir de  $x_c(t)$  é dada na figura 2.7

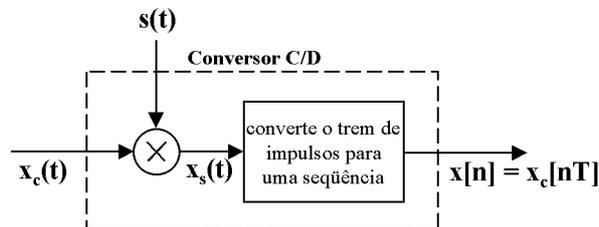


Figura 2.7: Diagrama de blocos representando a operação de amostragem.

O processo de amostragem é feito em dois estágios. No primeiro estágio o sinal  $x_c(t)$  é multiplicado por uma seqüência de impulsos  $s(t)$  e no segundo estágio a seqüência de impulsos obtida,  $x_s(t)$ , é convertida para uma seqüência  $x[n]$ .

Esquemáticamente temos a representação na figura 2.8.

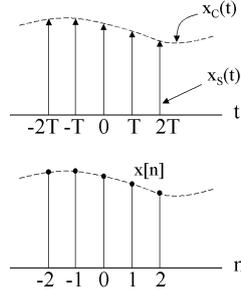


Figura 2.8: Representação esquemática da amostragem.

### 2.4.3 Representação das amostras no domínio da frequência

Para obtermos a relação no domínio da frequência entre a entrada e a saída de um conversor C/D, vamos considerar a conversão de  $x_c(t)$  para  $x_s(t)$ .

Seja  $s(t)$  uma seqüência de impulsos periódicos. Assim,

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (2.36)$$

onde  $\delta$  é o impulso unitário.

Daí,

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (2.37)$$

ou

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(t - nT). \quad (2.38)$$

Desejamos obter a transformada de Fourier de  $x_s(t)$ . Podemos mostrar que

$$s(t) \leftrightarrow S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s), \quad (2.39)$$

onde  $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$  é a frequência de amostragem em rad/s.

Mas

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega). \quad (2.40)$$

Logo

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega - kj\Omega_s). \quad (2.41)$$

Observamos que  $X_s(j\Omega)$  consiste de cópias repetidas da transformada de Fourier de  $x_c(t)$ .

A figura 2.9 mostra o processo de amostragem no domínio da frequência.

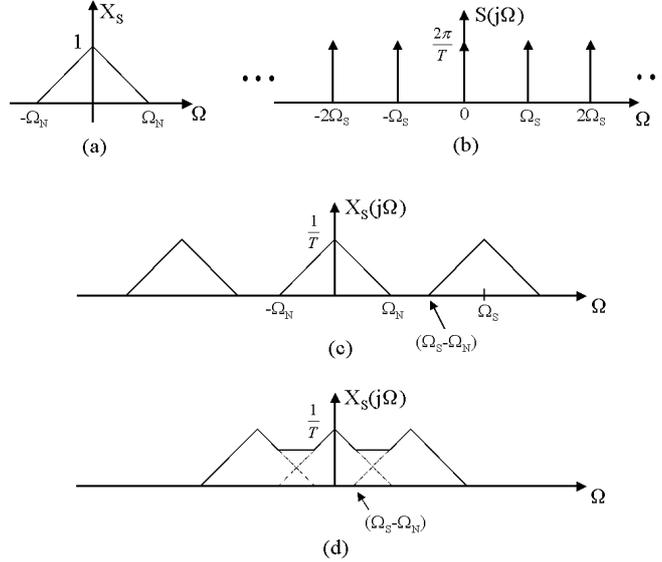


Figura 2.9: (a) Transformada de Fourier limitada com freq. máx.  $\Omega_N$  (b) Trem de impulsos periódicos  $S(j\omega)$  (c) Gráfico de  $X_S(j\omega)$  com  $\Omega_s > 2\Omega_N$  (d) Gráfico de  $X_S(j\Omega)$  com  $\Omega_s < 2\Omega_N$

Observamos que quando

$$\Omega_s - \Omega_N \geq \Omega_N \text{ ou } \Omega_s \geq 2\Omega_N \quad (2.42)$$

as réplicas de  $X_c(j\omega)$  não se sobrepõem. Assim,  $x_c(t)$  pode ser recuperado, a partir de  $x_s(t)$ , usando um filtro ideal passa-baixa conveniente, com frequência de corte  $\Omega_c$ ,  $\Omega_N < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_N$ .

A figura 2.10 mostra o esquema de recuperação de  $x_c(t)$ .

Porém, se

$$\Omega_s < 2\Omega_N \quad (2.43)$$

então as cópias de  $X_c(j\Omega)$  se sobrepõem (observado na figura 2.9) e  $X_c(j\Omega)$  não é recuperável por um filtro passa-baixa. A distorção ocorrida no sinal de saída, neste caso, denomina-se *maskamento* (ou *aliasing*) pois um sinal é substituído por outro. A discussão acima é a base para um teorema conhecido como *Teorema da Amostragem*.

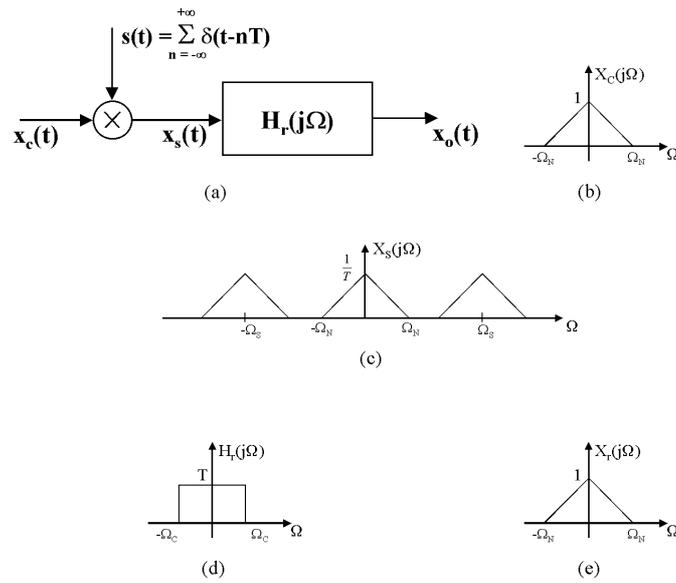


Figura 2.10: (a) Diagrama de blocos da recuperação do sinal; (b),(c),(d) e (e) reconstrução de  $x_c(t)$ .

### 2.4.4 Teorema da amostragem

**Teorema 2.3.** *Um sinal limitado em faixa, i.e., que não tem nenhuma componente espectral acima da frequência  $\Omega_N$  rad/s, é determinado univocamente por suas amostras,  $x[n] = x_c\{nT\}$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$  tomadas a intervalos uniformes menores do que  $\frac{\pi}{\Omega_N}$  segundos. Isto é, o período de amostragem deve satisfazer  $T < \frac{\pi}{\Omega_N}$ . A frequência de amostragem  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$  deve, então, satisfazer  $\Omega > 2\Omega_N$ . Chamamos o número  $2\Omega_N$  de frequência de Nyquist.*

Esse teorema é conhecido como Teorema da Amostragem Uniforme. Discutiremos um pouco mais o Teorema da Amostragem e o problema de *maskamento*.

Consideremos um sinal dado por

$$x_c(t) = \cos(\Omega_o t).$$

A transformada de Fourier desse sinal é mostrada na figura 2.11.

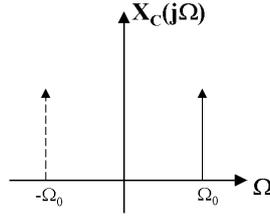


Figura 2.11: Transformada de Fourier de  $x_c(t)$ .

Fazemos a amostragem do sinal, obtendo:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(t - nT).$$

Primeiro, usamos uma frequência de amostragem  $\Omega_s > 2\Omega_o$ , isto é, usamos  $T < \frac{\pi}{\Omega_o}$ . A transformada de Fourier de  $x_s(t)$  para esse caso é mostrada na figura 2.12.

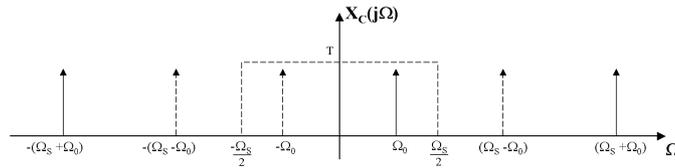


Figura 2.12: Transformada de Fourier de  $x_s(t)$ , com  $T < \frac{\pi}{\Omega_o}$ .

Agora, usamos uma frequência de amostragem  $\Omega_s < 2\Omega_o$ , isto é, usamos  $T > \frac{\pi}{\Omega_o}$ . A transformada de Fourier de  $x_s(t)$  para esse caso é mostrada na figura 2.13.

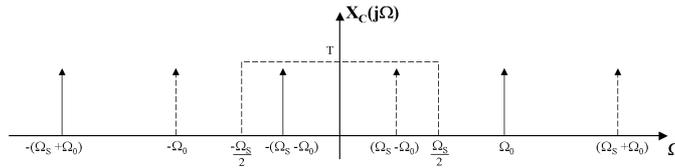


Figura 2.13: Transformada de Fourier de  $x_s(t)$ , com  $T > \frac{\pi}{\Omega_o}$ .

A figura 2.14 (a) mostra a transformada de Fourier após a passagem pelo filtro passa-baixa, para o caso em que  $\Omega_o < \Omega_s/2$ , isto é, sem ocorrência de *maskamento*. A frequência de corte do filtro é  $\Omega_c = \Omega_s/2$ .

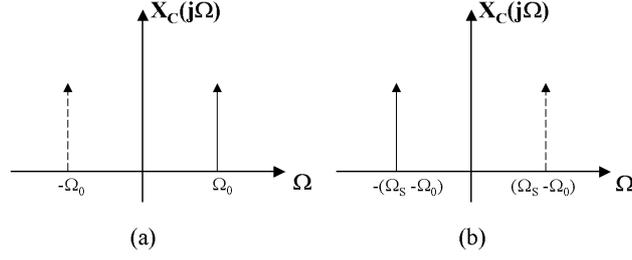


Figura 2.14: (a) Sem ocorrência de *mascaramento*. (b) Com ocorrência de *mascaramento*.

A figura 2.14 (b) mostra a transformada de Fourier após a passagem pelo filtro passa-baixa, para o caso em que  $\Omega_o > \Omega_s/2$ , isto é, com ocorrência de *mascaramento*. A frequência de corte do filtro é a mesma do caso anterior.

Sem a presença de *mascaramento*, a saída reconstruída  $x_r(t)$  é

$$x_r(t) = \cos(\Omega_o t)$$

e com a presença de *mascaramento*, a saída reconstruída será

$$x_r(t) = \cos(\Omega_s - \Omega_o)t.$$

Observamos que o sinal  $\cos(\Omega_o t)$  trocou de identidade (*alias*) e foi mascarado pelo sinal de frequência mais baixa  $\cos(\Omega_s - \Omega_o)t$ .

Desejamos, agora, encontrar uma relação entre  $X(e^{j\omega})$ , a transformada de Fourier discreta de  $x[n]$  e as transformadas de Fourier  $X_s(j\Omega)$  e  $X_c(j\Omega)$  de  $x_s(t)$  e  $x_c(t)$ , respectivamente.

Sabemos que

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(t - nT).$$

Aplicando a transformada de Fourier a essa equação, temos

$$X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega T n}.$$

Como  $x[n] = x_c(nT)$  e

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

temos,

$$X_s(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = X(e^{j\Omega T}).$$

Por outro lado, sabemos que

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega - kj\Omega_s).$$

Assim,

$$X(e^{j\Omega T}) = X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}). \quad (2.44)$$

Observamos que  $X(e^{j\omega})$  é uma versão de  $X_c(j\omega)$ , transladada e com uma mudança de escala tanto em amplitude como em freqüência.

Para entendermos o que foi dito até aqui, consideremos o sinal

$$x_c(t) = e^{-1000|t|}.$$

Usando a aproximação  $e^{-5} \simeq 0$ , notamos que  $x_c(t)$  pode ser aproximado por um sinal de duração finita no intervalo  $-0.005 \leq t \leq 0.005$ . Mostramos esse sinal na figura 2.15 (a).

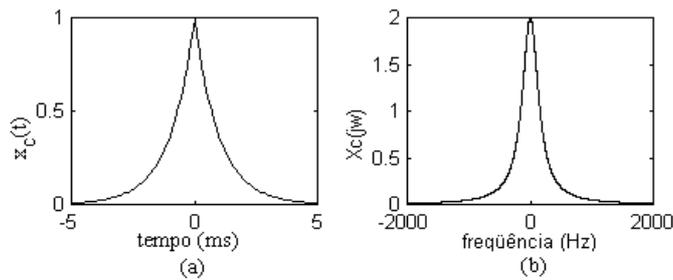


Figura 2.15: (a)Gráfico de  $x_c(t)$ .(b)Gráfico de  $X_c(j\Omega)$ .

Desejamos analisar esse sinal no domínio da freqüência.

Sua transformada de Fourier pode ser calculada da seguinte forma :

$$\begin{aligned} X_c(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_c(t)e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{1000t} e^{-j\Omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-1000t} e^{-j\Omega t} dt \\ &= \frac{0.002}{1 + \left(\frac{\Omega}{1000}\right)^2}. \end{aligned}$$

Usando também a aproximação  $e^{-5} \simeq 0$ , temos que  $X_c(j\Omega) \simeq 0$  para  $\Omega \geq 2\pi(2000)$ . O gráfico de  $X_c(j\Omega)$  (nesse caso será real), é mostrado na figura 2.15 (b).

Amostremos, então,  $x_c(t)$  com frequência de amostragem de  $\Omega_s = 5000Hz$ , obtendo a sequência  $x_1[n]$ . O gráfico de  $x_1[n]$  assim como o gráfico de sua transformada de Fourier discreta  $X_1(e^{j\omega})$  são mostrados na figura 2.16. Mostramos mais de um período de  $X_1(e^{j\omega})$ . Com essa frequência de amostragem não observamos a presença de *maskamento*.

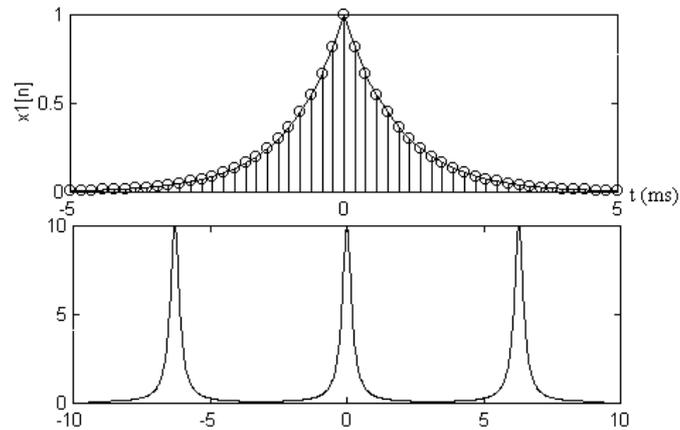


Figura 2.16: Gráficos de  $x_1[n]$  e de  $X_1(e^{j\omega})$ .

Amostramos, agora,  $x_c(t)$  com frequência de amostragem  $\Omega_s = 1000Hz$  e obtemos  $x_2[n]$ . Mostramos o gráfico de  $x_2[n]$  assim como de sua transformada  $X_2(e^{j\omega})$  na figura 2.17.

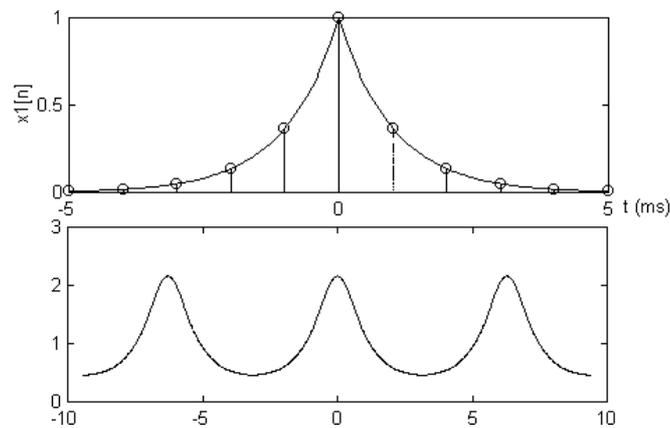


Figura 2.17: Gráficos de  $x_2[n]$  e de  $X_2(e^{j\omega})$ .

Observamos, assim, a presença de *maskamento*. Como era de se esperar pois a frequência de 1000 Hz é menor que a frequência de Nyquist (no nosso caso 4000 Hz).

### 2.4.5 Reconstrução de um sinal limitado em faixa a partir de suas amostras

Vimos que se as condições do teorema da amostragem são satisfeitas e se a seqüência de impulsos ( $x_s(t)$ ) é filtrada por um filtro passa-baixa apropriado então a transformada de Fourier da saída do filtro será idêntica à transformada de Fourier do sinal original  $x_c(t)$ . Se uma seqüência de amostras  $x[n]$  for conhecida, podemos formar uma seqüência de impulsos  $x_s(t)$  descrita matematicamente por

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta(t - nT) \quad (2.45)$$

onde  $T$  é o período de amostragem associado a  $x[n]$ .

A representação do processo de reconstrução é mostrada na figura 2.18.

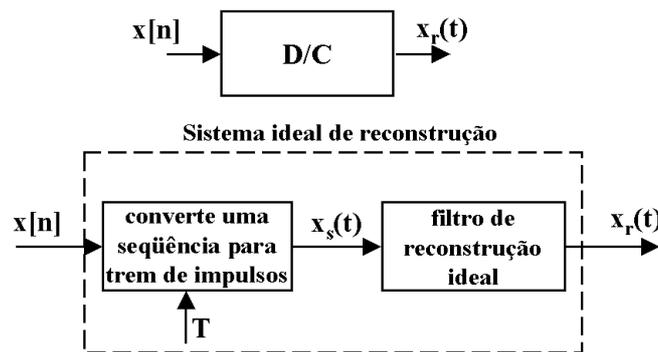


Figura 2.18: Diagrama de blocos representativo da reconstrução.

### 2.4.6 Processamento discreto de sinal contínuo

Uma das aplicações de sistemas discretos é no processamento de sinais contínuos. Este processamento é realizado por um sistema cuja forma geral é dado na figura 2.19.

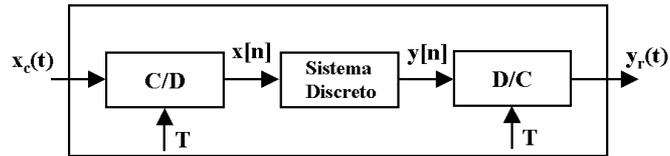


Figura 2.19: Processamento discreto de sinal contínuo.

Nesse esquema consideramos o mesmo período de amostragem para os conversores C/D e D/C, mas isso não é essencial.

Um sinal contínuo  $x_c(t)$  entra no conversor C/D gerando uma seqüência  $x[n]$ . Essa seqüência é a entrada para um sistema discreto cuja saída, após a transformação imposta pelo sistema discreto é  $y[n]$ . A seqüência  $y[n]$  é então convertida em um sinal analógico  $y_r(t)$ .

Se o sistema discreto for linear e invariante no tempo, então

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad (2.46)$$

sendo  $H(e^{j\omega})$  a resposta em freqüência do sistema,  $X(e^{j\omega})$  e  $Y(e^{j\omega})$  são as transformadas de Fourier de  $x[n]$  e  $y[n]$ .

Após certos cálculos podemos obter

$$Y_r(j\Omega) = H_{eff}(j\omega)X_c(j\Omega) \text{ onde } \Omega = \frac{\omega}{T} \quad (2.47)$$

e

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases} \quad (2.48)$$

é a chamada resposta em freqüência efetiva, isto é, o sistema total é equivalente a um sistema linear invariante no tempo com resposta em freqüência  $H_{eff}(j\Omega)$ .

## 2.5 Considerações práticas

### 2.5.1 Introdução

Na prática sinais contínuos não são limitados em faixa, filtros ideais não são realizáveis e conversores ideais C/D e D/C não existem. O diagrama de blocos da figura 2.20 mostra um modelo mais realista para processamento digital de sinais contínuos (analógicos).

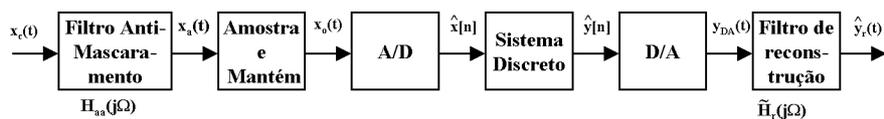


Figura 2.20: Modelo mais realista de processamento digital de sinal analógico

### 2.5.2 Pré-filtragem para evitar *mascaramento*

Se a entrada não for limitada em faixa ou se a frequência de Nyquist da entrada for muito alta, a pré-filtragem é frequentemente usada. Isso pode ser obtido pela filtragem, através de um filtro passa-baixa, do sinal contínuo antes de entrar no conversor C/D. O filtro passa-baixa que precede o conversor C/D é chamado de filtro *anti-mascaramento*. Idealmente, a resposta em frequência do filtro *anti-mascaramento* deve ser

$$H_{aa}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_c < \pi/T \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c. \end{cases} \quad (2.49)$$

Na prática  $H_{aa}(j\Omega)$  deve ser pequeno para  $|\Omega| > \frac{\pi}{T}$ .

### 2.5.3 Conversão analógica-digital

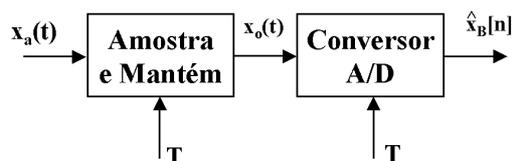


Figura 2.21: Configuração do conversor analógico-digital

Um conversor ideal C/D converte um sinal contínuo num sinal discreto em matemática real, isto é, cada amostra é conhecida com precisão infinita. Na prática

isto não é possível e assim o sistema da figura 2.21 converte um sinal analógico  $x_a(t)$  num sinal digital  $\hat{x}_B[n]$ , isto é, uma seqüência de precisão finita de amostras quantizadas. Quantização aparece sempre que se trabalha com matemática finita.

O conversor A/D é um dispositivo que converte amplitude de tensão ou corrente da sua entrada num código binário representativo do valor de amplitude quantizada mais próxima da amplitude de entrada. Sob o controle de um relógio externo, o conversor A/D começa e completa uma conversão A/D a cada T segundos. Porém, a conversão não é instantânea e por essa razão inclui-se o bloco com o título *Amostra e Mantém*. Esse sistema, no caso *ideal*, terá como saída:

$$x_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]h_o(t - nT) \quad (2.50)$$

onde  $x[n] = x_a(nT)$  são as amostras de  $x_a(t)$  e  $h_o(t)$  é a resposta ao impulso do sistema, isto é,

$$h_o(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{caso contrário} . \end{cases} \quad (2.51)$$

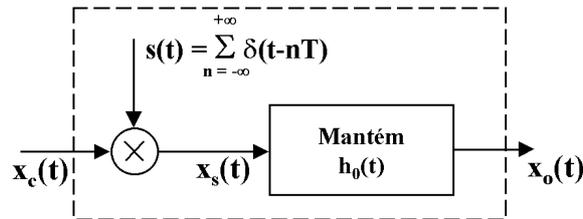


Figura 2.22: Representação de uma sistema *amostra e mantém* ideal.

Especificamente a saída desse sistema é uma onda com a forma de escada onde os valores de amostragem são mantidos constantes durante o período de amostragem de  $T$  segundos, conforme mostra a figura 2.23.

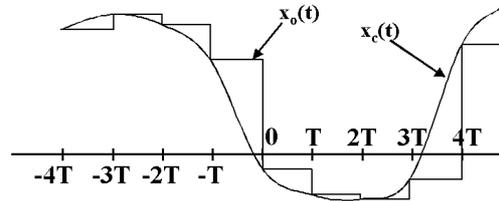


Figura 2.23: Sinais típicos de entrada e saída para o sistema *amostra e mantém*.

A representação por diagrama de blocos, do conversor A/D, numa forma mais completa é dada na figura 2.24

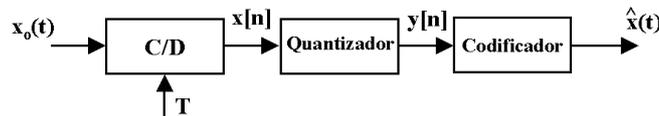


Figura 2.24: Representação matemática do conversor A/D.

O quantizador é um sistema não-linear cujo objetivo é transformar a seqüência de entrada  $x[n]$  num conjunto finito de valores prescritos. Representamos esta operação como

$$\hat{x}[n] = Q(x[n]) \quad (2.52)$$

e chamamos  $\hat{x}[n]$  de amostra quantizada. Após a quantização, os níveis serão rotulados por um código que de modo geral é um código binário ( $2^{B+1}$  níveis podem ser codificados com um código binário de  $(B+1)$  bits).

As amostras quantizadas  $\hat{x}[n]$  são, em geral, diferentes das verdadeiras  $x[n]$ . A diferença entre elas é chamada de erro de quantização, definida por

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n]. \quad (2.53)$$

Geralmente  $e[n]$  não é conhecido e um modelo estatístico deve ser usado.

A representação estatística de erros de quantização é baseada nas seguintes considerações :

- (i) A seqüência  $e[n]$  é uma seqüência de amostras de um processo aleatório estacionário.
- (ii) A seqüência de erro  $e[n]$  não é correlata com a seqüência  $x[n]$ .
- (iii) As variáveis aleatórias do processo de erro não são correlatas, isto é, o erro é um processo de ruído branco.
- (iv) A distribuição de probabilidade do processo de erro é uniforme.

### 2.5.4 Conversão digital-analógica

O sistema que toma a seqüência  $y[n]$  como entrada e produz  $y_r(t)$  como saída é chamado conversor ideal D/C. Um dispositivo fisicamente realizável próximo do conversor ideal D/C é um conversor digital-analógico (D/A) acompanhado por um filtro passa-baixa.

Um conversor D/A toma uma seqüência de palavras código binárias  $\hat{y}_B[n]$  como entrada e produz uma saída contínua da forma

$$y_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_m \hat{y}_B[n] h_o(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{y}[n] h_o(t - nT) \quad (2.54)$$

onde  $Y_m$  é um parâmetro relacionado com o quantizador,  $\hat{y}_B[n]$  é a seqüência de palavras código,  $\hat{y}[n]$  é a seqüência quantizada representativa do sinal digital e  $h_o(t)$  é a resposta ao impulso de um sistema 'Amostra e Segura'. O diagrama de blocos de um conversor D/A é mostrado na figura 2.25.



Figura 2.25: Diagrama de blocos de um conversor D/A

Se usarmos o modelo de ruído aditivo para representar os efeitos de quantização podemos escrever

$$y_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] h_o(t - nT) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e[n] h_o(t - nT). \quad (2.55)$$

Definindo

$$y_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]h_o(t - nT) \quad (2.56)$$

e

$$e_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e[n]h_o(t - nT) , \quad (2.57)$$

temos,

$$y_{DA}(t) = y_o(t) + e_o(t). \quad (2.58)$$

A componente  $y_o(t)$  está relacionada com o sinal desejado  $y_a(t)$  e o ruído  $e_o(t)$  depende da quantização.

Podemos mostrar, após alguns cálculos, que definindo um filtro com resposta em frequência

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega T/2}{\text{sen}(\Omega T/2)} e^{j\Omega T/2}, & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| > \pi/T \end{cases} \quad (2.59)$$

podemos obter a saída  $y_a(t)$  se a entrada do filtro for  $y_o(t)$ .

Porém, a entrada do filtro é  $y_{DA}(t) = y_o(t) + e_o(t)$  e a saída será

$$\hat{y}_r(t) = y_a(t) + e_a(t) \quad (2.60)$$

onde  $e_a(t)$  será um ruído branco limitado em faixa.

De modo geral teremos

$$Y_a(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega)H_o(j\Omega)H(e^{j\Omega T})H_{aa}(j\Omega)X_c(j\Omega) \quad (2.61)$$

onde  $H_{aa}(j\Omega)$ ,  $H_o(j\Omega)$  e  $\tilde{H}_r(j\Omega)$  são as respostas em frequência do filtro *anti-mascaramento*, ‘amostra e segura’ e do filtro passa-baixa de reconstrução, respectivamente.  $H(e^{j\Omega T})$  é a resposta em frequência do sistema discreto.

## 2.6 Transformada Discreta de Fourier (TDF)

### 2.6.1 Introdução

Nós já discutimos a representação de seqüências e sistemas lineares invariantes no tempo em termos da transformada de Fourier. Para seqüências de duração finita é possível desenvolver uma representação de Fourier alternativa, referida como *Transformada Discreta de Fourier* (TDF). A TDF é uma seqüência e não uma função de variável contínua e corresponde as amostras, igualmente espaçadas em freqüência, da transformada de Fourier do sinal. A TDF tem um papel importante na implementação de algoritmos de processamento de sinais digitais.

### 2.6.2 A série discreta de Fourier

Considere uma seqüência  $\tilde{x}[n]$  periódica de período  $N$  tal que  $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + rN]$  para qualquer inteiro  $r$ . Como no caso de sinais contínuos, tal seqüência pode ser representada por uma soma de seqüências exponenciais complexas harmonicamente relacionadas. A representação em série de Fourier de  $\tilde{x}[n]$  tem a forma

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn} \quad (2.62)$$

onde

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn}. \quad (2.63)$$

Note que  $\tilde{X}[k]$  é periódica de período  $N$ .

Normalmente definimos  $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$  e escrevemos 2.62 e 2.63 como

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn} \quad (2.64)$$

e

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{-kn}. \quad (2.65)$$

Consideremos, como exemplo, que a seqüência  $\tilde{x}[n]$  é dada pela figura 2.26.

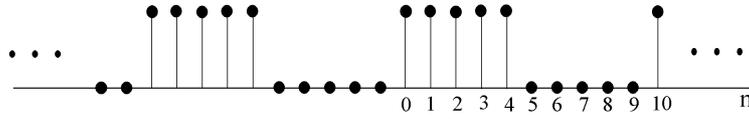


Figura 2.26: Seqüência periódica com período  $N=10$

Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{X}[k] &= \sum_{n=0}^9 \tilde{x}[n] e^{-j(\frac{2\pi}{10})kn} = \\ &= \sum_{n=0}^4 e^{-j(2\pi/10)kn} = e^{-j(4k\pi/10)} \frac{\text{sen}(k\pi/2)}{\text{sen}(k\pi/10)}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

O gráfico da magnitude de  $\tilde{X}[k]$  é dado na figura 2.27.

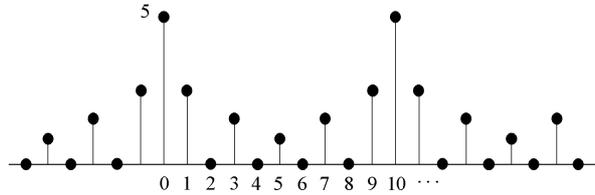


Figura 2.27: Magnitude de  $\tilde{X}[k]$ .

A seqüência periódica na equação 2.66 pode ser interpretada como amostras igualmente espaçadas da transformada de Fourier discreta de um período de  $\tilde{x}[n]$ .

Consideremos

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.67)$$

Assim,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\omega n}. \quad (2.68)$$

Comparando 2.63 com 2.68 observamos que

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega}) \text{ para } \omega = 2k\pi/N \quad (2.69)$$

que corresponde à transformada de Fourier discreta para  $N$  freqüências igualmente espaçadas entre  $\omega = 0$  e  $\omega = 2\pi$  com o espaço entre freqüências de  $2\pi/N$ .

Vendo que a seqüência dada pela figura 2.26 é periódica, tomemos apenas um período. Assim,

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & 5 \leq n \leq 9. \end{cases} \quad (2.70)$$

A transformada de Fourier discreta de  $x[n]$  é

$$X(e^{j\omega}) = \sum_0^4 e^{-j\omega n} = e^{-j2\omega} \frac{\text{sen}(5\omega/2)}{\text{sen}(\omega/2)}. \quad (2.71)$$

O gráfico da magnitude de  $X(e^{j\omega})$  é dado pela figura 2.28.

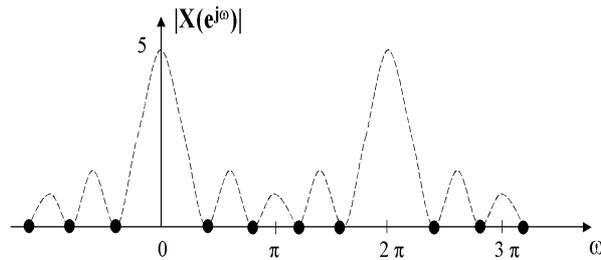


Figura 2.28: Magnitude de  $X(e^{j\omega})$ .

Unindo as figuras 2.27 e 2.28 num único gráfico observamos o gráfico da figura 2.29.

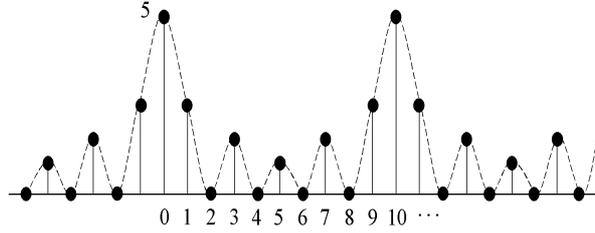


Figura 2.29: União dos gráficos de  $|\tilde{X}[k]|$  e  $|X(e^{j\omega})|$ .

### 2.6.3 A transformada discreta de Fourier (TDF)

Observamos anteriormente que dada uma seqüência periódica  $\tilde{x}[n]$ , os coeficientes da série discreta de Fourier de  $\tilde{x}[n]$  são as amostras da transformada de Fourier discreta de um período de  $\tilde{x}[n]$ . Dada uma seqüência de comprimento finito  $x[n]$  nós podemos formar uma seqüência periódica  $\tilde{x}[n]$  dada por

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(n + rN) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n + rN] \quad (2.72)$$

que pode ser representada por uma série de Fourier. Alternativamente, dada a seqüência de coeficientes de Fourier  $\tilde{X}[k]$ , podemos achar  $\tilde{x}[n]$  e usar a relação

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.73)$$

para obter  $x[n]$ .

Podemos então usar a série discreta de Fourier para representar seqüências de comprimento finito e chamamos de Transformada Discreta de Fourier (TDF).

Consideremos uma seqüência  $x[n]$  de comprimento  $N$  (finito) tal que  $x[n] = 0$  fora do intervalo  $0 \leq n \leq N - 1$ . Associemos uma seqüência periódica  $\tilde{x}[n]$  dada por

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n + rN]. \quad (2.74)$$

A seqüência  $x[n]$  pode ser recuperada de  $\tilde{x}[n]$  por

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.75)$$

Os coeficientes da série discreta de Fourier  $\tilde{X}[k]$  da seqüência periódica  $\tilde{x}[n]$  é uma seqüência periódica de período  $N$ . Escolhemos uma seqüência formada por

elementos compreendidos em um período de  $\tilde{X}[k]$ . Esta seqüência de duração finita,  $X[k]$ , é referida como a transformada discreta de Fourier (TDF) de  $x[n]$ . Assim, se  $x[n]$  é uma seqüência de comprimento finito e sua transformada discreta de Fourier é  $X[k]$  então

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \tag{2.76}$$

e

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}. \tag{2.77}$$

Como exemplo, consideremos a seqüência de duração finita  $x[n]$  mostrada na figura 2.30 (a), com  $N=10$ . Construímos a seqüência periódica  $\tilde{x}[n]$  a partir de  $x[n]$ , mostrada na figura 2.30 (b). Os coeficientes da série discreta de Fourier são mostrados na figura 2.30 (c), assim como a magnitude da Transformada de Fourier discreta,  $|X(e^{j\omega})|$ , de  $x[n]$ . Claramente,  $\tilde{X}[k]$  é uma seqüência de amostras de  $X(e^{j\omega})$  nas freqüências  $\omega_k = 2k\pi/N$ . A TDF de 10 pontos de  $x[n]$  corresponde à seqüência de comprimento finito obtida ao extrairmos um período de  $\tilde{X}[k]$ . A magnitude da TDF de 10 pontos de  $x[n]$  é mostrada na figura 2.30 (d).

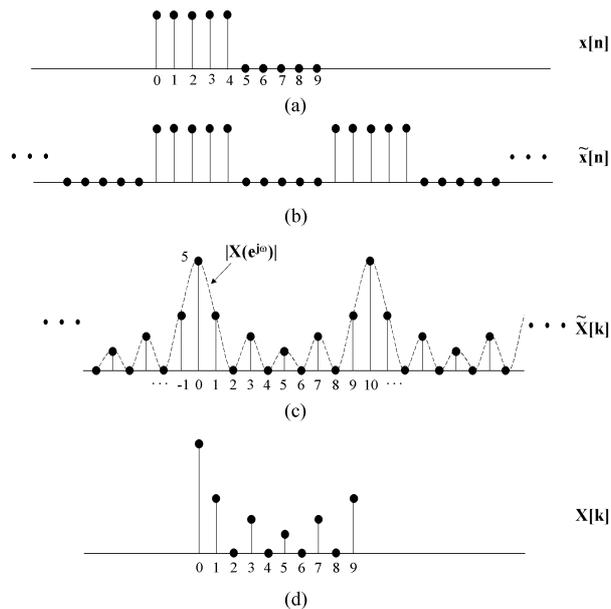


Figura 2.30: Exemplo de TDF.

### 2.6.4 Transformada rápida de Fourier

A TDF é a única transformada que é discreta no tempo e na frequência e é definida para seqüências de duração finita. Embora ela possa ser calculada numericamente, a implementação direta da equação 2.76 é ineficiente, especialmente quando o comprimento  $N$  da seqüência for grande. Vários algoritmos eficientes foram desenvolvidos e esses algoritmos são conhecidos coletivamente como *transformada rápida de Fourier (FFT)*.

Considere uma seqüência de  $N$  pontos  $x[n]$ . Sua TDF de  $N$  pontos é dada pela equação 2.76 e reproduzida a seguir

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (2.78)$$

onde  $W_N = e^{-j2\pi/N}$ . Para obtermos uma amostra de  $X[k]$  nós precisamos de  $N$  multiplicações complexas e  $(N-1)$  adições complexas. Daí, para obtermos um conjunto completo dos coeficientes da TDF, nós precisamos de  $N^2$  multiplicações complexas e  $N(N-1) \sim N^2$  adições complexas. Claramente, o número de cálculos para achar a TDF de uma seqüência de  $N$  pontos depende quadraticamente de  $N$ , que será denotado por  $C_N = o(N^2)$ .

Para  $N$  grande,  $o(N^2)$  é inaceitável na prática. Geralmente, o tempo de processamento para uma adição é muito menor que para uma multiplicação. Por isso, a partir de agora nos concentraremos apenas no número de multiplicações complexas, onde cada multiplicação requer quatro multiplicações reais e duas adições reais. A dependência quadrática pode ser reduzida se observarmos que muitos cálculos podem ser eliminados usando as propriedades de periodicidade  $W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$  e de simetria  $W_N^{kn+N/2} = -W_N^{kn}$  do fator  $\{W_N^{kn}\}$ .

O MATLAB possui uma função chamada **fft** para calcular a TDF de um vetor  $x$ . A sintaxe é  $X = \text{fft}(x, N)$  que calcula a TDF de  $N$  pontos. Se o comprimento de  $x$  é menor que  $N$ , então  $x$  é completado com zeros. Se o argumento  $N$  é omitido então o comprimento da TDF é o comprimento de  $x$ . Se  $N$  for uma potência de 2 então um algoritmo FFT de raio 2 é utilizado. Se  $N$  não for uma potência de 2, então  $N$  é decomposto em fatores primos e um algoritmo FFT de raio misto é utilizado. Finalmente, se  $N$  for primo, então a função **fft** calcula a TDF diretamente pela fórmula. A TDF inversa é calculada usando a função **ifft**, que tem as mesmas características da **fft**.

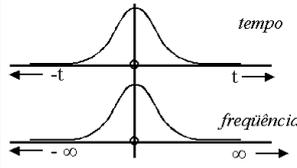
Apresentamos, na figura 2.31, um resumo das relações entre o domínio do tempo e da frequência através da transformada de Fourier, analógica e digital.

Mostramos na figura 2.32 um resumo mostrando a dualidade entre os diferentes tipos de transformadas.

**Transformada de Fourier**

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

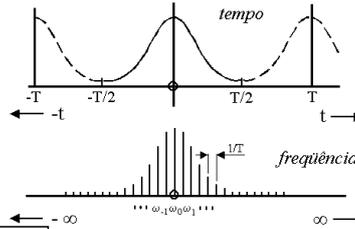


Contínuo nos domínios do tempo e da frequência.

**Série de Fourier**

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j\frac{2n\pi}{T}t}$$

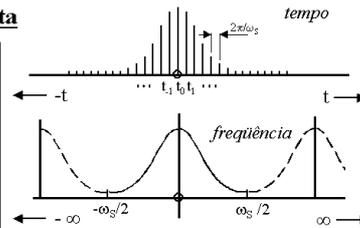


Periódico no domínio do tempo  
Discreto no domínio da frequência

**Transformada de Fourier Discreta**

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

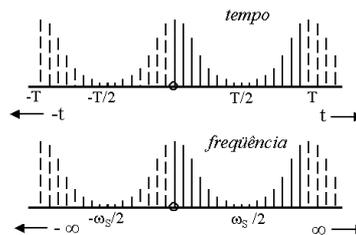


Discreto no domínio do tempo  
Periódico no domínio da frequência

**Transformada Discreta de Fourier**

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\omega n}$$



Discreta nos domínios do tempo e da frequência.

Figura 2.31: Resumo das relações entre os domínios do tempo e da frequência, através das transformadas de Fourier.

	Sinal contínuo		Sinal discreto	
	Domínio do tempo	Domínio da frequência	Domínio do tempo	Domínio da frequência
<b>Série de Fourier</b>	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$ contínuo no tempo periódico no tempo	$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt$ discreto na frequência aperiódico na frequência	$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$ discreto no tempo periódico no tempo	$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$ discreto na frequência periódico na frequência
<b>Transformada de Fourier</b>	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ contínuo no tempo aperiódico no tempo	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ contínuo na frequência aperiódico na frequência	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ discreto no tempo aperiódico no tempo	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ contínuo na frequência periódico na frequência

Figura 2.32: Dualidade entre os diferentes tipos de transformadas.

**Exemplo 2.1.** Consideremos o sinal contínuo  $x_c$  dado por

$$x_c(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 7.$$

Tomemos oito amostras desse sinal nesse intervalo, construindo a seqüência

$$x[n] = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}.$$

Mostramos os gráficos de  $x_c$  e de  $|X_c(j\Omega)|$  na figura 2.33 (a).

Na figura 2.33 (b) mostramos os gráficos de  $x[n]$  e da amplitude da FFT de  $x[n]$ , isto é,  $|X[k]|$ , para  $0 \leq k \leq 7$ .

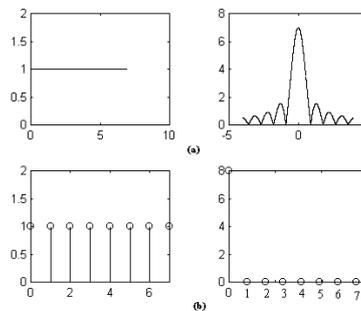


Figura 2.33: Gráficos de (a)  $x_c$  e de  $X_c(j\Omega)$ . (b)  $x[n]$  e de  $|X[k]|$ .

**Exemplo 2.2.** Consideremos, agora, o sinal  $x_c$  dado por :

$$x_c(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 7 \\ 0, & 7 < t \leq 15. \end{cases}$$

Tomemos 16 amostras desse sinal, construindo a seqüência

$$x[n] = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}.$$

Mostramos os gráficos de  $x_c$  e de  $|X_c(j\Omega)|$  na figura 2.34 (a). Na figura 2.34 (b) mostramos os gráficos de  $x[n]$  e da amplitude da TDF de  $x[n]$ , isto é,  $|X[k]|$  para  $0 \leq k \leq 15$ .

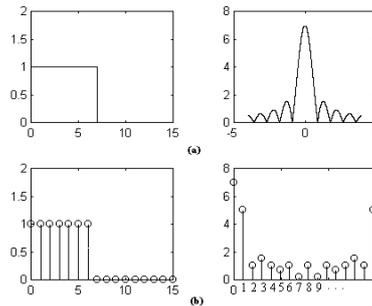


Figura 2.34: Gráficos de (a)  $x_c$  e de  $X_c(j\Omega)$  (b) de  $x[n]$  e de  $|X[k]|$ .

Observamos que  $|X[k]|$ , na figura 2.33 (b) não representa significativamente  $|X_c(j\Omega)|$ . Porém, na figura 2.34 a representação é significativa. Esse problema será discutido mais adiante.

Lembramos que a TDF de uma seqüência  $x[n]$  de  $N$  termos representa amostras igualmente espaçadas de  $X_c(j\Omega)$  para  $\omega = \frac{2k\pi}{N}$  com  $0 \leq k \leq N - 1$ . Mostramos nas figuras 2.33 e 2.34, os gráficos da amplitude da TDF colocando no eixo horizontal os valores de  $n$ .

Se desejássemos mostrar, no eixo horizontal, os valores da freqüência  $\Omega$ , basta que façamos uma mudança de escala. Teríamos assim os gráficos mostrados na figura 2.35.

**Exemplo 2.3.** Consideremos o sinal contínuo  $x_c$  dado por

$$x_c(t) = \text{sen}(2\pi t), 0 \leq t \leq 1.$$

Desejamos obter 64 amostras, igualmente espaçadas, desse sinal. Dessa forma, formamos a seqüência :

$$x[n] = \text{sen}\left(2\pi \frac{N}{64}\right) \text{ para } N = 0, 1, \dots, 63.$$

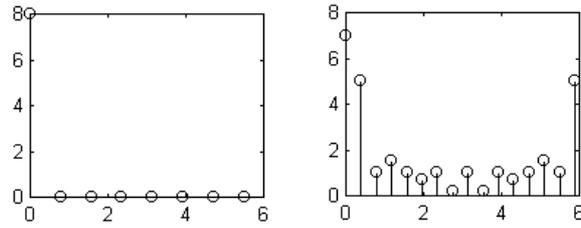
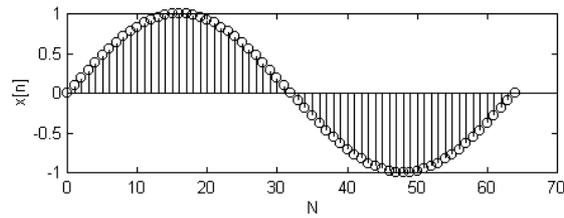
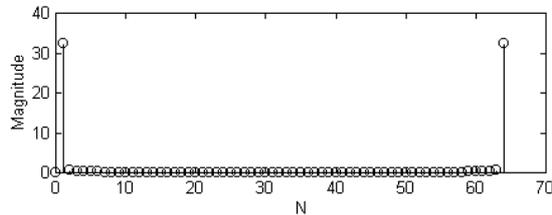
Figura 2.35: Gráficos de  $|X[k]|$ .

Figura 2.36: Representação gráfica de uma seqüência.

Mostramos a representação gráfica dessa seqüência na figura 2.36.

Calculamos a TDF dessa seqüência, usando o MATLAB e mostramos o gráfico de sua amplitude na figura 2.37.

Figura 2.37: Magnitude da TDF de  $x[n]$ .

O gráfico mostrado na figura 2.37 é formado por amostras igualmente espaçadas de um período da transformada de Fourier Discreta,  $X(e^{j\omega})$ , de  $x[n]$ . Devemos interpretá-lo da seguinte forma : os termos da seqüência correspondentes aos valores de  $N$  entre 0 e 31 correspondem às amostras de  $X(e^{j\omega})$  entre 0 e  $\pi$  e para os valores de  $N$  entre 32 e 63 correspondem às amostras de  $X(e^{j\omega})$  entre  $-\pi$  e 0.

**Exemplo 2.4.** Consideremos o sinal  $x_c$  dado por

$$x_c(t) = \begin{cases} \text{sen}(2\pi t), & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

Tomemos 128 amostras desse sinal. Calculamos a TDF e mostramos os gráficos da seqüência obtida em 2.38 (a) e da magnitude da TDF em 2.38 (b).

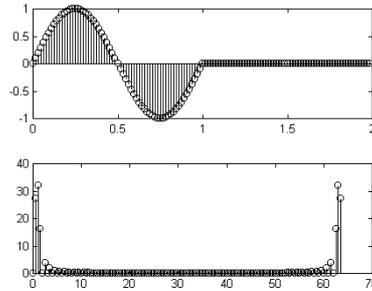


Figura 2.38: Gráficos: (a)  $x[n]$ ; (b)  $|X[k]|$ .

Observamos diferenças entre os gráficos das amplitudes da TDF, da mesma forma que no exemplo 1.

**Exemplo 2.5.** Consideremos o sinal  $x_c$  dado por

$$x_c(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

Tomemos 16 amostras desse sinal e calculemos a TDF. Mostramos os gráficos da seqüência obtida assim como da magnitude da TDF na figura 2.39.

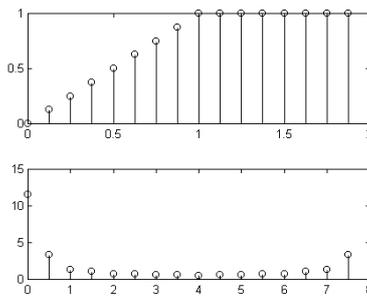


Figura 2.39: Gráficos de  $x[n]$  e de  $|X[k]|$ .

Desta vez não observamos quase a totalidade das amostras, em  $|X[k]|$ , nulas como nos casos anteriores e não precisamos acrescentar zeros no final da seqüência.

A aparência das TDFs obtidas nas figuras 2.33 e 2.37 é uma ilusão resultante da amostragem espectral. A razão disto é que a transformada discreta de Fourier é exatamente zero nas freqüências que são amostradas, exceto para alguns poucos valores de  $k$ . Dessa forma, é recomendável que acrescentemos zeros no final da seqüência de forma a obtermos uma amostragem mais refinada do espectro.

## 2.7 Análise de sinais usando TDF

### 2.7.1 Introdução

Uma das aplicações de TDF é na análise em freqüência de sinais contínuos. Os passos básicos para a aplicação da TDF a sinais contínuos são indicados na figura 2.40.

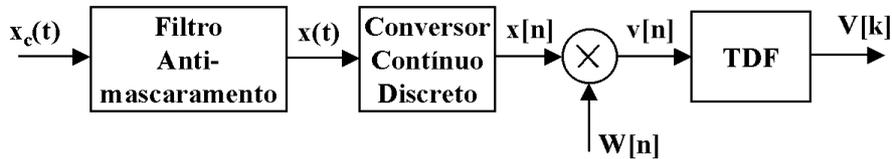


Figura 2.40: Diagrama de blocos dos passos básicos para a aplicação da TDF.

O filtro *anti-mascaramento* é usado para eliminar ou minimizar o *mascaramento*. A necessidade da multiplicação de  $x[n]$  por uma seqüência finita chamada  $w[n]$  (também chamada de janela) é uma consequência da necessidade da seqüência ser de comprimento finito para que possamos aplicar a TDF.

Nós desenvolvemos a transformada discreta de Fourier (TDF) como uma representação de sinais de comprimento finito. Discutimos, também, uma forma de calculá-la numericamente usando os algoritmos chamados conjuntamente de TDF. Para sinais de comprimento finito, a TDF consiste de amostras no domínio da freqüência igualmente espaçadas da transformada de Fourier discreta (TFD) e as implicações dessa amostragem devem ser claramente entendidas.

Começamos com um sinal contínuo  $x_c(t)$  que após a passagem pelo filtro *anti-mascaramento*, se transforma no sinal  $x(t)$ . O sinal  $x(t)$  é então convertido em uma seqüência  $x[n]$ . No domínio da freqüência, a conversão de  $x(t)$  para a seqüência  $x[n]$  é representada por réplicas periódicas da transformada de Fourier de  $x(t)$  ( $X(j\Omega)$ ) e normalização da freqüência, isto é,

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2k\pi}{T}).$$

Lembramos que na prática o filtro *anti-mascaramento* não tem atenuação infinita na banda de passagem e assim alguma presença de *mascaramento* pode ocorrer, porém o erro cometido será muito pequeno. Também, se  $x[n]$  for um sinal digital, um erro de quantização pode ser introduzido.

A seqüência  $x[n]$  é então multiplicada por uma seqüência de comprimento finito  $w[n]$  (janela) pois a entrada da DFT deve ser de duração finita. Se  $w[n]$  for constante para todos os valores de  $n$  considerados, chamamos de janela retangular temporal. Porém, existem outros tipos de janelas que serão discutidos mais tarde. A operação final é a TDF da seqüência  $v[n]$  e é dada por

$$V[k] = \sum_{n=0}^{N-1} v[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

$V[k]$  corresponde a amostras igualmente espaçadas da transformada de Fourier discreta de  $v[n]$ , isto é,

$$V[k] = V(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2k\pi/N}.$$

Conhecemos a relação  $\omega = \Omega T$  e assim as freqüências obtidas na TDF correspondem às freqüências  $\Omega_k$  dadas por :

$$\Omega_k = \frac{2k\pi}{NT}.$$

Muitos analisadores de espectro comerciais são baseados no que foi discutido aqui. Porém, devemos estar cientes que muitos fatores afetam a interpretação da transformada de Fourier da entrada em termos da TDF de uma seqüência formada das amostras do sinal. Desejamos estudar posteriormente as conseqüências da multiplicação da seqüência por uma janela e das amostras no domínio da freqüência e para isso consideramos desprezíveis os problemas de mascaramento e o erro de quantização introduzido na conversão A/D.

## 2.7.2 Janelas - vazamento

### Introdução

Em muitas aplicações os sinais não têm comprimento finito. Desejando analisar apenas determinado intervalo de tempo, truncamos o sinal em um determinado intervalo. Essa operação equivale a multiplicar o sinal por uma janela retangular temporal. Porém, essa multiplicação pode levar a resultados indesejáveis que podem ser observados no domínio da freqüência. Observamos assim o fenômeno conhecido como *vazamento*, ou *leakage*, que será estudado adiante.

Considere o sinal senoidal dado por

$$f(t) = \cos(\omega_0 t).$$

Sabemos que a transformada de Fourier desse sinal é dada por

$$F(\omega) = \frac{1}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

ou seja, dois impulsos localizados em  $+\omega_0$  e  $-\omega_0$ .

Consideremos, agora, a multiplicação de  $f(t)$  por uma janela retangular temporal dada por

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1, & -T \leq t \leq T \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Obtemos, assim, uma nova função

$$g(t) = \cos(\omega_0 t) \Pi_T(t)$$

cuja transformada de Fourier é dada por

$$G(\omega) = \frac{\text{sen}(\omega - \omega_0)T}{\omega - \omega_0} + \frac{\text{sen}(\omega + \omega_0)T}{\omega + \omega_0}.$$

$G(\omega)$  está representada na figura 2.41 .

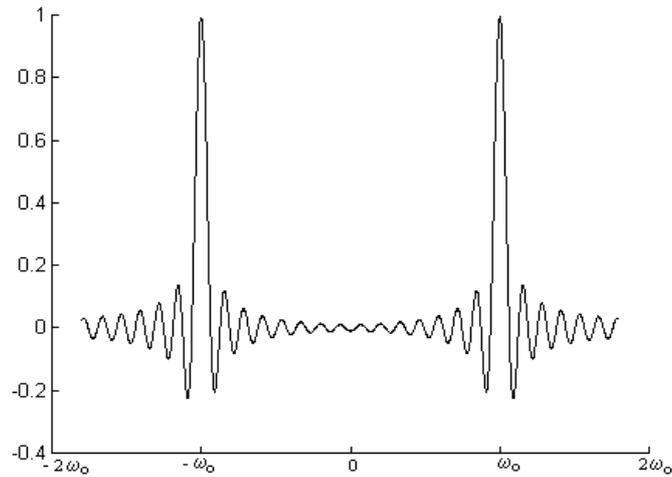


Figura 2.41: Gráfico de  $G(\omega)$ .

Devido à truncagem do sinal ocorreu um "espalhamento" para frequências diferentes de  $\omega_0$ . O espalhamento é maior se  $T$  for menor.

### 2.7.3 Consequência da aplicação de janelas

Consideremos um sinal contínuo consistindo da soma de duas componentes senoidais, isto é,

$$x_c(t) = A_o \cos(\Omega_o t + \theta_o) + A_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1) , \quad -\infty < t < \infty. \quad (2.79)$$

Considerando amostragem ideal sem a presença de *maskamento* e nenhum erro de quantização, obtemos o sinal discreto

$$x[n] = A_o \cos(\omega_o n + \theta_o) + A_1 \cos(\omega_1 n + \theta_1) , \quad -\infty < n < +\infty. \quad (2.80)$$

onde  $\omega_o = \Omega_o T$  e  $\omega_1 = \Omega_1 T$ . Após a aplicação da janela  $w[n]$  em  $x[n]$  obtemos

$$v[n] = A_o w[n] \cos(\omega_o n + \theta_o) + A_1 w[n] \cos(\omega_1 n + \theta_1). \quad (2.81)$$

A transformada de Fourier discreta de  $v[n]$  será

$$\begin{aligned} V(e^{j\omega}) &= \frac{A_o}{2} e^{j\theta_o} W(e^{j(\omega-\omega_o)}) + \frac{A_o}{2} e^{-j\theta_o} W(e^{j(\omega-\omega_o)}) \\ &+ \frac{A_1}{2} e^{j\theta_1} W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + \frac{A_1}{2} e^{-j\theta_1} W(e^{j(\omega+\omega_1)}) , \end{aligned} \quad (2.82)$$

onde  $W(e^{j\omega})$  é a transformada de Fourier discreta de  $w[n]$ . Assim, a transformada de Fourier discreta de  $v[n]$  consiste de réplicas da transformada de Fourier de  $w[n]$  com diferente escala de amplitude.

**Exemplo 2.6.** Consideremos o sinal dado por 2.79 e obtemos a seqüência dada por 2.80 com freqüência de amostragem de  $1/T = 10\text{kHz}$ . Consideremos uma janela retangular  $w[n]$  de comprimento igual a 64. Consideremos, ainda,  $A_o = 1$ ,  $A_1 = 0.75$  e por conveniência  $\theta_o = \theta_1 = 0$ . Calculemos  $V(e^{j\omega})$  para vários valores de  $\Omega_o$  e  $\Omega_1$ . Mostraremos apenas os gráficos relativos às magnitudes da transformada de Fourier discreta.

Na figura 2.42 (a) mostramos o gráfico de  $|W(e^{j\omega})|$  e nas figuras 2.42 (b), 2.43 (a), (b) e 2.44 mostramos o gráfico de  $|V(e^{j\omega})|$  para vários valores de  $\Omega_o$  e  $\Omega_1$  ou equivalentemente  $\omega_o$  e  $\omega_1$ .

A equação 2.82 mostra que se não houver superposição entre as réplicas de  $W(e^{j\omega})$  em  $\omega_o$  e  $\omega_1$ , haverá um pico de amplitude  $32A_o$  em  $\omega_o$  e um pico de amplitude  $32A_1$  em  $\omega_1$ , pois  $W(e^{j\omega})$  tem um pico de amplitude 64. Na figura 2.42 (b) os dois picos estão, aproximadamente, em  $\omega_o = 2\pi/6$  e  $\omega_1 = 2\pi/3$  e as amplitudes dos picos estão aproximadamente na razão  $\frac{1}{0.75}$ . Na figura 2.43 (a) há superposição entre as réplicas de  $W(e^{j\omega})$  em  $\omega_o$  e  $\omega_1$ . Observamos dois picos distintos, porém a amplitude do espectro em  $\omega_o$  é afetada pela amplitude do sinal senoidal na freqüência  $\omega_1$  e vice-versa. Esta interação é chamada de vazamento: a componente em uma freqüência "vaza" na vizinhança de outra componente devido ao "espalhamento" espectral introduzido pela janela. A figura 2.43 (b) mostra o caso onde o vazamento

é maior. Observe como as amplitudes dos picos são reduzidas. Na figura 2.44 a superposição entre as réplicas de  $W(e^{j\omega})$  é tão significativa que não são mais visíveis dois picos mas apenas um. Em outras palavras, com esta janela as duas frequências correspondentes não são diferenciadas no espectro.

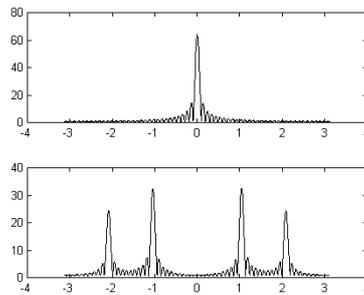


Figura 2.42: (a)  $|W(e^{j\omega})|$ . (b)  $|V(e^{j\omega})|$  para  $\omega_o = (2\pi)/6$  e  $\omega_1 = (2\pi)/3$ .

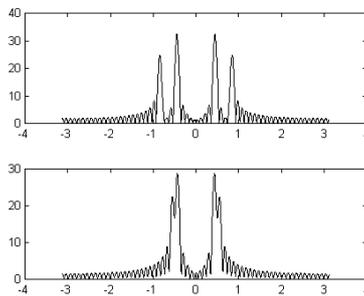


Figura 2.43: (a)  $|V(e^{j\omega})|$  para  $\omega_o = (2\pi)/14$  e  $\omega_1 = (4\pi)/15$ . (b)  $|V(e^{j\omega})|$  para  $\omega_o = (2\pi)/14$  e  $\omega_1 = (2\pi)/12$ .

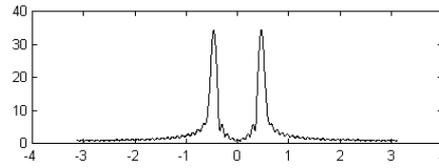


Figura 2.44:  $|V(e^{j\omega})|$  para  $\omega_o = (2\pi/14)$  e  $\omega_1 = (4\pi/25)$ .

Resolução reduzida e *vazamento* são dois efeitos que ocorrem como resultado da aplicação de janelas ao sinal. A resolução é influenciada pela largura do lobo principal (distância entre as duas primeiras freqüências simétricas) de  $W(e^{j\omega})$ , enquanto o grau de *vazamento* depende do quociente entre a amplitude máxima do lobo principal e a amplitude máxima do primeiro lobo secundário de  $W(e^{j\omega})$ . Chamaremos esse valor de  $A_s$ . Geralmente este valor é dado em dB (decibel), isto é, calculamos  $20 \log |A_s|$ . A largura do lobo principal depende do comprimento da janela (quanto maior o comprimento da janela, menor a largura do lobo principal) e a amplitude relativa do lobo principal e dos lobos secundários depende do formato da janela (quanto mais "bruscamente" a janela vai de um a zero ou de zero a um, maior o valor de  $A_s$ ). Há várias janelas conhecidas e elas estão disponíveis no MATLAB (toolbox "signal processing"). São elas: janela retangular, janela de Bartlett, janela de Hanning, janela de Hamming, janela de Blackman e janela de Kaiser. Os nomes foram dados em homenagem a seus autores. Discutiremos um pouco sobre cada uma delas.

## 2.7.4 Tipos de janelas

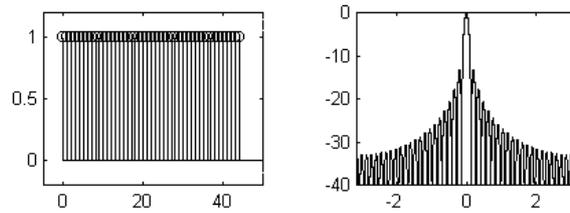
### Janela retangular

A janela retangular é definida por

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A largura do lobo principal para esta janela é igual a  $\frac{4\pi}{M}$ . O valor de  $A_s$  é igual a 13 dB. Para um comprimento dado, esta janela possui a menor largura de lobo principal, mas o maior valor de  $A_s$  comparando com as outras janelas conhecidas.

Mostramos os gráficos de  $w[n]$  e de  $|W(e^{j\omega})|$  (em dB), na figura 2.45, para  $M=45$ .

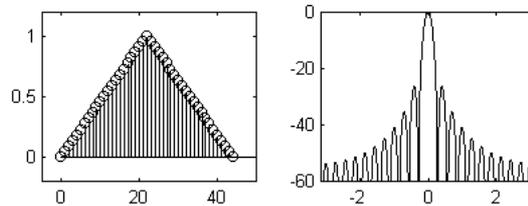
Figura 2.45: Janela retangular:  $M=45$ 

### Janela de Bartlett

Bartlett sugeriu uma janela que possui uma transição mais gradual do que a janela retangular (transição entre 1 e 0). Essa janela é definida por

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{M-1}, & 0 \leq n \leq \frac{M-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{M-1}, & \frac{M-1}{2} \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.83)$$

A largura do lobo principal neste caso é aproximadamente igual a  $\frac{8\pi}{M}$  e o valor de  $A_s$  é igual a 25 dB. Mostramos os gráficos de  $w[n]$  e de  $|W(e^{j\omega})|$ , na figura 2.46.

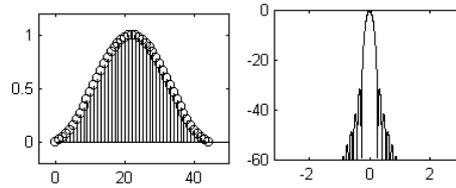
Figura 2.46: Janela de Bartlett:  $M=45$ .

### Janela de Hanning

Esta janela é definida por

$$w[n] = \begin{cases} 0.5[1 - \cos(\frac{2\pi n}{M-1})], & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.84)$$

Neste caso, o comprimento do lobo principal é aproximadamente igual a  $\frac{8\pi}{M}$  e  $A_s = 31dB$ . Mostramos os gráficos de  $w[n]$  e de  $|W(e^{j\omega})|$  na figura 2.47.

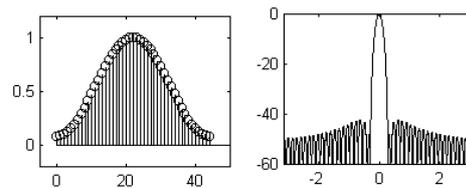
Figura 2.47: Janela de Hanning:  $M=45$ 

### Janela de Hamming

Esta janela é definida por

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{M-1}\right), & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.85)$$

Neste caso, o comprimento do lobo principal é aproximadamente igual a  $\frac{8\pi}{M}$  e  $A_s = 41dB$ . Mostramos os gráficos de  $w[n]$  e de  $|W(e^{j\omega})|$  na figura 2.48.

Figura 2.48: Janela de Hamming:  $M=45$ .

### Janela de Blackman

Esta janela é definida por

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{M-1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{M-1}\right), & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.86)$$

Neste caso, o comprimento do lobo principal é aproximadamente igual a  $\frac{8\pi}{M}$  e  $A_s = 57dB$ . Mostramos os gráficos de  $w[n]$  e de  $|W(e^{j\omega})|$  na figura 2.49.

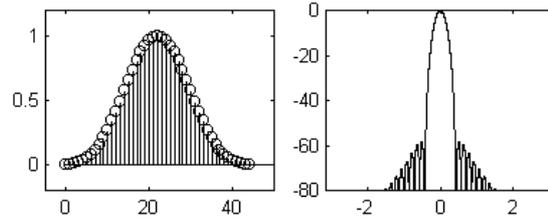


Figura 2.49: Janela de Blackman:  $M=45$ .

### Janela de Kaiser

Esta janela é definida por

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0[\beta(1-[(n-\alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.87)$$

onde  $\alpha = \frac{M}{2}$  e  $I_0$  representa a função de Bessel modificada de ordem zero de primeiro tipo. A janela de Kaiser tem dois parâmetros: o comprimento ( $M+1$ ) e um parâmetro de forma ( $\beta$ ). Mostramos na figura 2.50 os gráficos de  $w[n]$  e de  $|W(e^{j\omega})|$  para o caso em que  $M = 45$  e  $\beta = 5.658$ . Nesse caso, o comprimento do lobo principal é igual a  $\frac{7.8}{M}$  e  $A_s = 42$  dB.

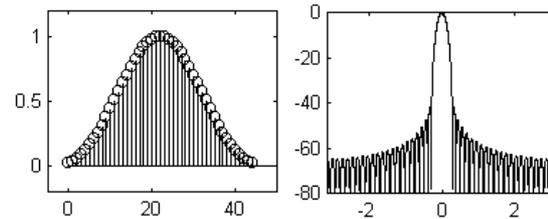


Figura 2.50: Janela de Kaiser:  $M=45$ ;  $\beta = 5.658$

Devemos ressaltar que cada uma dessas janelas tem uma determinada aplicação.

**Exemplo 2.7.** Consideremos a seqüência do exemplo anterior, tomando as frequências  $w_0 = 2\pi/14$  e  $w_1 = 2\pi/8$ . Faremos uma comparação entre os gráficos de  $|V(e^{j\omega})|$  utilizando as janelas retangular, de Blackman e de Hanning.

Utilizamos a seqüência,

$$v[n] = w[n]\cos\left(\frac{2\pi}{14}n\right) + w[n]0.75\cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right)$$

para  $n$  entre 0 e 63.

Mostramos na figura 2.51 (a) o gráfico de  $|V(e^{j\omega})|$  utilizando a janela retangular, na figura 2.51 (b), utilizando a janela de Hanning e na figura 2.51 (c), utilizando a janela de Blackman.

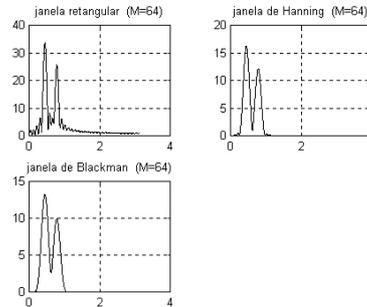


Figura 2.51: (a) Utilização da janela retangular; (b) Utilização da janela de Hanning; (c) Utilização da janela de Blackman.

Observamos que o quociente entre os dois picos de amplitude deveria ser igual a  $\frac{1}{0.75} = 1.333$ . Com a janela retangular obtivemos 1.3097, com a janela de Hanning obtivemos 1.3348 e com a janela de Blackman obtivemos 1.32211. Assim, as janelas de Blackman e de Hanning reduziram o problema de vazamento, como era esperado. Com janela de Hanning obtivemos o melhor resultado.



## Capítulo 3

# Análise e Processamento de sinais aleatórios

O estudo da análise e do processamento de sinais aleatórios requer a definição prévia de alguns conceitos relacionados com a Estatística. Pois sendo o sinal aleatório, a sua modelagem matemática é probabilística e não-determinística como no caso dos sinais com funções predeterminadas. Nas seções seguintes será feita uma breve revisão dos conceitos mencionados, em especial dos *processos estocásticos*, que são modelos probabilísticos que descrevem sinais aleatórios.

### 3.1 Processos Estocásticos

Considere um experimento aleatório especificado pelos resultados  $\xi$  de algum conjunto de amostras ou espaço amostral  $S$ , pelos eventos definidos em  $S$  e pelas probabilidades desses eventos.

Suponha que para todo resultado  $\xi \in S$ , exista uma função  $X$  dada por  $X(t, \xi)$  para todo  $t$  pertencente a um intervalo  $I$  e  $\xi \in S$ .

Para  $\xi$  fixo,  $X(t, \xi)$  é chamada de função amostra. Por outro lado, para cada  $t$  fixo,  $X(t, \xi)$  é uma variável aleatória.

Dessa forma, criamos uma família indexada de variáveis aleatórias  $\{X(t, \xi), t \in I\}$ .

Esta família recebe o nome de **Processo Estocástico** (ou processo aleatório). Normalmente, denotamos o processo estocástico por  $X(t)$ , omitindo o argumento  $\xi$ .

Um processo estocástico é dito discreto se o conjunto  $I$  dos índices for contável. Quando tratamos de processos estocásticos discretos usamos, normalmente,  $n$  para denotar o índice e  $X_n$  para denotar o processo estocástico.

Se o conjunto  $I$  dos índices for contínuo então o processo estocástico é dito contínuo.

Processos estocásticos aparecem em sistemas de reconhecimento de fala, sistemas de processamento de imagens, sistemas de filas, ruído térmico nos terminais de um resistor e outros.

**Exemplo 3.1.** *Seqüência binária aleatória*

Seja  $\xi$  um número selecionado ao acaso, do intervalo  $S = [0, 1]$  e seja  $b_1 b_2 \dots$  a expansão binária de  $\xi$ .

$$\text{Assim, } \xi = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i 2^{-i}, \quad b_i \in \{0, 1\}.$$

Defina o processo estocástico  $X_n = X(n, \xi)$  por  $X_n = b_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , onde  $b_n$  é o  $n$ -ésimo número da expansão binária de  $\xi$ .

**Exemplo 3.2.** *Senóides com amplitudes aleatórias*

Seja  $\xi$  um número selecionado ao acaso do intervalo  $[-1, 1]$ . Defina o processo aleatório  $X(t, \xi)$  por

$$X(t, \xi) = \xi \text{sen}(2\pi t), \quad t \in \mathbb{R}$$

As amostras desse processo são senóides com amplitude  $\xi$ .

**Exemplo 3.3.** *Senóides com fase aleatória*

Seja  $\xi$  um número selecionado ao acaso do intervalo  $(-\pi, \pi)$  e seja  $Y(t, \xi) = \cos(2\pi t + \xi)$ . As amostras do processo estocástico  $Y$  são versões de  $\cos 2\pi t$  deslocadas no tempo.

## 3.2 Especificação de um processo estocástico

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_k$  variáveis aleatórias obtidas pela amostragem do processo  $X(t, \xi)$  em  $t_1, t_2, \dots, t_k$ . Assim,

$$X_1 = X(t_1, \xi), X_2 = X(t_2, \xi), \dots, X_k = X(t_k, \xi).$$

Um processo estocástico é especificado pela coleção de funções de distribuição de probabilidade conjunta de  $k$ -ésima ordem,

$$F_{X_1 X_2 \dots X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_k \leq x_k]$$

para todo  $k$  e para qualquer escolha dos instantes  $t_1, t_2, \dots, t_k$ .

Se o processo estocástico for discreto, uma coleção de funções de massa de probabilidade pode ser usada:

$$f_{X_1 X_2 \dots X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k]$$

Se o processo for contínuo então uma coleção de funções densidade de probabilidade, f. d. p., pode ser usada:

$$f_{X_1 X_2 \dots X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

**Exemplo 3.4.** Considere  $\xi$  um número selecionado do intervalo  $[0, 1]$  e escreva

$$\xi = \sum_{i=1}^n b_i 2^{-i}, \quad b_i \in \{0, 1\}$$

Defina o processo  $X(n, \xi) = X_n = b_n$ , sendo  $b_n$  o  $n$ -ésimo número da expansão binária.

Determine:

(i)  $P[X(1, \xi) = 0]$

**Solução:**

$X(1, \xi) = b_1$ . Logo,  $P[b_1 = 0] = P[0 \leq \xi < 1/2] = 1/2$ .

(ii)  $P[X(1, \xi) = 0 \text{ e } X(2, \xi) = 1]$

$P[b_1 = 0 \text{ e } b_2 = 1] = P[1/4 \leq \xi < 1/2] = 1/4$ .

**Exemplo 3.5.** Seja  $\xi$  um número escolhido no intervalo  $[-1, 1]$  e seja  $X(t)$  o processo estocástico definido por

$$X(t, \xi) = \xi \cos(2\pi t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Ache a f. d. p. de  $X_0 = X(t_0, \xi)$ .

**Solução:**

Temos que  $X_0 = X(t_0, \xi) = \xi \cos(2\pi t_0)$ .

Como  $\xi$  é uniformemente distribuída em  $[-1, 1]$ , temos que  $X_0$  será uniformemente distribuída em  $[-\cos(2\pi t_0), \cos(2\pi t_0)]$  com  $t_0$  sendo tal que  $\cos 2\pi t_0 \neq 0$ .

Assim,

$$f_{X_0}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\cos 2\pi t_0}, & -\cos 2\pi t_0 < x < \cos 2\pi t_0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Porém, se  $t_0$  for tal que  $\cos(2\pi t_0) = 0$ , então  $f_{X_0}(t) = \delta(t)$ .

Ao fixarmos um valor para o parâmetro  $t$  de um processo estocástico  $X(t, \xi)$ , obtemos uma variável aleatória  $X$  com f. d. p.  $F_{X(t)}(x) = P[X(t) \leq x]$ . A f. d. p.

correspondente é  $f_{X(t)}(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_{X(t)}(x)$ .

Para cada  $t$  teremos uma variável aleatória  $X(t)$  distinta.

Quando, para qualquer  $t$ , conhecemos  $f_{X(t)}(x)$  ou  $F_{X(t)}(x)$ , dizemos que o processo estocástico  $X(t, \xi)$  está especificado até a primeira ordem.

Um processo estocástico  $X(t)$  fica especificado até a segunda ordem se, para qualquer par de instantes  $(t_1, t_2)$ , a f. d. p.  $f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2)$  das variáveis aleatórias  $X(t_1)$  e  $X(t_2)$  é conhecida.

Um processo estocástico  $X(t)$  está especificado até a ordem  $m$ , quando é conhecida a f. d. p. conjunta das  $m$  variáveis aleatórias  $X(t_1)$  para qualquer conjunto de valores  $\{t_i, i = 1, \dots, m\}$ .

Em outras palavras, quando se conhece  $f_{X(t_1)X(t_2)\dots X(t_m)}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

Dizemos que um processo estocástico está especificado completamente se ele está especificado para todas as ordens.

### 3.3 Momentos

Os momentos (ou estatísticas) de um processo estocástico são os momentos das variáveis aleatórias definidas em quaisquer instantes do processo.

#### 3.3.1 Média

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x) dx$$

#### 3.3.2 Autocorrelação

Uma das características mais importantes de um processo estocástico é, sem dúvida, sua *função autocorrelação*, que nos levará a conhecer a sua *densidade espectral*. A composição freqüencial de um processo depende da velocidade com que a amplitude muda com o tempo. Isso pode ser medido pela correlação entre as amplitudes em  $t_1$  e em  $t_1 + \tau$ .

Se as amplitudes de um processo  $X(t)$  (das amostras de  $X(t)$ ) são similares nos instantes  $t_1$  e  $t_1 + \tau$ ; dizemos que as respectivas variáveis aleatórias têm *forte correlação*. Por outro lado, se as amplitudes em  $t_1$  e em  $t_1 + \tau$  forem diferentes, dizemos que as respectivas variáveis aleatórias têm *fraca correlação*.

É o momento conjunto das variáveis aleatórias  $X(t_1)$  e  $X(t_2)$  definidas para todo par  $(t_1, t_2)$ ; isto é,

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X(t_1)X(t_2)} dx dy$$

sendo  $f_{X(t_1)X(t_2)}(x, y)$  a f. d. p. de segunda ordem de  $X(t)$ .

#### 3.3.3 Autocovariância

A (função) autocovariância de um processo  $X(t)$  é o momento conjunto central das variáveis aleatórias  $X(t_1)$  e  $X(t_2)$  para quaisquer  $(t_1, t_2)$ ; isto é,

$$C_X(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))] , \forall (t_1, t_2)$$

Podemos mostrar que:

$$(i) C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$$

$$(ii) \sigma_X^2(t) = R_X(t, t) - m_X^2(t)$$

Observe que  $\sigma_X^2(t) = C_X(t, t)$  e que  $E[(X - m_X)(Y - m_Y)] = E[XY] - E[X]E[Y]$ .

O coeficiente de correlação de  $X(t)$  é definido como o coeficiente de correlação de  $X(t_1)$  e  $X(t_2)$ :

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sqrt{C_X(t_1, t_1)}\sqrt{C_X(t_2, t_2)}}$$

com  $|\rho_X(t_1, t_2)| \leq 1$ .

**Exemplo 3.6.** *Seja  $A$  uma variável aleatória e seja  $X(t) = A\cos(2\pi t)$  um processo estocástico.*

(i) *Determine a média de  $X(t)$ , em função da média da variável aleatória  $A$ .*

**Solução:**

$$m_X(t) = E[X(t)] = E[A\cos(2\pi t)] = \cos(2\pi t)E[A].$$

(ii) *Determine  $R_X(t_1, t_2)$ .*

**Solução:**

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[A^2]\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2).$$

**Exemplo 3.7.** *Seja  $X(t) = \cos(\omega t + \Theta)$  um processo estocástico onde  $\Theta$  é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo  $(-\pi, \pi)$ .*

*Determine:*

(i) *A média de  $X(t)$*

**Solução:**

$$m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t + \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta = 0.$$

(ii) *A autocorrelação de  $X(t)$*

**Solução:**

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[\cos(\omega t_1 + \Theta)\cos(\omega t_2 + \Theta)] \\ &= \frac{1}{2}E[\cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\Theta) + \cos(\omega(t_1 - t_2))] = \frac{1}{2}\cos(\omega(t_1 - t_2)). \end{aligned}$$

### 3.4 Processos estocásticos (estritamente) estacionários

Seja  $X(t)$  um processo estocástico. Se, para qualquer inteiro  $n$ , a f. d. p. conjunta de ordem  $n$  não varia com um deslocamento no tempo; isto é,

$$f_{X(t_1)X(t_2)\dots X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X(t_1+\tau)X(t_2+\tau)\dots X(t_n+\tau)}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \forall \tau$$

então o processo estocástico é dito estritamente estacionário até a ordem  $n$ .

Obs:

- (i) A mesma definição vale se considerarmos a f. d. p. conjunta
- (ii)  $m_X(t) = E[X(t)] = m$
- (iii)  $\sigma_{X(t)}^2 = E[(X(t) - m)^2] = \sigma^2$
- (iv) Um processo estocástico é estacionário até a primeira ordem se, e só se,

$$f_{X(t)}(x) = f_{X(t+\tau)}(x) = F_X(x), \quad \forall t, \tau$$

- (v) Um processo estocástico é estacionário até a segunda ordem se, e só se,

$$f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) = f_{X(t_1+\tau)X(t_2+\tau)}(x_1, x_2), \quad \forall \tau$$

- (vi) Se  $X(t)$  é estacionário até a  $n$ -ésima ordem então também será até a ordem  $k$ ,  $k < n$ .
- (vii) A verificação de estacionaridade estrita é uma tarefa difícil, motivando a verificação de formas mais fracas de estacionaridade.

### 3.5 Processos estocásticos estacionários no sentido amplo ou fracamente estacionários

**Definição 3.1.** Um processo estocástico  $X(t)$  é dito estacionário no sentido amplo se sua média for constante; isto é,  $m_X(t) = m$ ,  $\forall t$  e se a sua autocorrelação é função, apenas, da diferença entre dois instantes; isto é,

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau), \quad \tau = t_1 - t_2, \quad \forall t_1, t_2$$

Obs: Se um processo estocástico é estritamente estacionário até a segunda ordem então ele é estacionário no sentido amplo. Porém, a recíproca não é verdadeira.

**Exemplo 3.8.** Considere o processo estocástico  $X(t) = A \sin(\omega t + \Theta)$  sendo  $\Theta$  uma variável aleatória uniformemente distribuída em  $[0, 2\pi]$ . Verifique se este processo é estacionário no sentido amplo.

**Solução:**

$$m_X(t) = \int_0^{2\pi} A \sin(\omega t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

e

$$R_X(t_1, t_2) = \dots = \frac{A^2}{2} \cos[\omega(t_1 - t_2)]$$

### 3.5.1 Propriedades de estatísticas de processos estocásticos estacionários no sentido amplo

- (i)  $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$
- (ii)  $R_X(0) = E[X^2(t)]$
- (iii) Se  $X(t) = X(t + nT)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  então  $R_X(\tau) = R_X(\tau + nT)$
- (iv)  $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$ ,  $\forall \tau$

## 3.6 Estatísticas conjuntas de processos estocásticos

### 3.6.1 Especificação conjunta

Dois processos estocásticos, digamos  $X(t)$  e  $Y(t)$ , estão conjuntamente especificados até a ordem  $m + n$ , quando é conhecida a f. d. p. conjunta das  $m + n$  variáveis aleatórias  $\{X(t_i), Y(t_j)\}$  para quaisquer conjuntos de valores. Isto é,

$$f_{X(t_1)X(t_2)\dots X(t_m)Y(t'_1)Y(t'_2)\dots Y(t'_n)}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

para todos  $t_1, t_2, \dots, t_m, t'_1, t'_2, \dots, t'_n$ .

### 3.6.2 Momentos conjuntos

#### Correlação cruzada

A função correlação cruzada de dois processos estocásticos  $X(t)$  e  $Y(t)$ , representada por  $R_{XY}(t_1, t_2)$ , é o momento conjunto das variáveis aleatórias  $X(t_1)$  e  $Y(t_2)$  definidas para quaisquer par  $(t_1, t_2)$ ; isto é,

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X(t_1)Y(t_2)}(x, y) dx dy, \quad \forall t_1, t_2$$

### Covariância cruzada

A função covariância cruzada de dois processos estocásticos  $X(t)$  e  $Y(t)$ , representada por  $C_{XY}(t_1, t_2)$ , é o momento conjunto central das variáveis aleatórias  $X(t_1)$  e  $Y(t_2)$  definidas para qualquer par  $(t_1, t_2)$ ; isto é,

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][Y(t_2) - m_Y(t_2)]\}$$

Podemos mostrar que  $C_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2)$ .

### 3.6.3 Processos estocásticos conjuntamente estacionários

Dois processos estocásticos  $X(t)$  e  $Y(t)$  são ditos conjuntamente estacionários até a ordem  $k + \ell$  se a f. d. p. conjunta das  $k + \ell$  variáveis aleatórias  $\{X(t_i), Y(t'_j), i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, \ell\}$  não varia com um deslocamento no tempo; isto é,

$$f_{X(t_1)\dots X(t_k)Y(t'_1)\dots Y(t'_\ell)} = f_{X(t_1+\tau)\dots X(t_k+\tau)Y(t'_1+\tau)\dots Y(t'_\ell+\tau)}$$

Dois processos estocásticos  $X(t)$  e  $Y(t)$  são ditos conjuntamente estacionários no sentido amplo quando cada um deles é estacionário no sentido amplo e  $R_{XY}(t_1, t_2)$  só depende da diferença  $(t_1 - t_2)$ ; isto é,

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1 - t_2) = R_{XY}(\tau), \quad \tau = t_1 - t_2$$

### 3.6.4 Propriedades da função correlação cruzada de dois processos estocásticos conjuntamente estacionários

- (i)  $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$
- (ii)  $R_{XY}^2(\tau) \leq R_X(0)R_Y(0)$
- (iii)  $2 | R_{XY}(\tau) | \leq R_X(0) + R_Y(0)$

### 3.6.5 Independência, não-correlação, e ortogonalidade

Dois processos estocásticos  $X(t)$  e  $Y(t)$  são estatisticamente independentes quando para quaisquer  $m$  e  $n$  a f. d. p. conjunta de ordem  $m + n$  pode ser escrita como o produto da f. d. p. de ordem  $m$  do processo  $X(t)$  pela f. d. p. de ordem  $n$  do processo  $Y(t)$ ; isto é,

$$\begin{aligned} f_{X(t_1)\dots X(t_m)Y(t'_1)\dots Y(t'_n)}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = \\ f_{X(t_1)\dots X(t_m)}(x_1, \dots, x_m) f_{Y(t'_1)\dots Y(t'_n)}(y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Dois processos estocásticos  $X(t)$  e  $Y(t)$ , conjuntamente estacionários no sentido amplo são ditos não-correlatos quando  $C_{XY}(\tau) = 0$ .

$$C_{XY}(\tau) = 0 \Rightarrow R_{XY}(\tau) = m_X m_Y.$$

Dois processos estocásticos  $X(t)$  e  $Y(t)$ , conjuntamente estacionários no sentido amplo são ortogonais quando  $R_{XY}(\tau) = 0$ .

**Exemplo 3.9.** *Sejam  $X(t)$  e  $Y(t)$  processos estocásticos dados por  $X(t) = \cos(\omega t + \Theta)$  e  $Y(t) = \sin(\omega t + \Theta)$ , sendo  $\Theta$  uma v.a. uniformemente distribuída o intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Ache  $C_{XY}(t_1, t_2)$ .*

**Solução:**

$$C_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2)$$

$$\text{Mas, } m_X(t_1) = m_Y(t_2) = 0.$$

$$\text{E, } R_{XY}(t_1, t_2) = -\frac{1}{2} \text{sen}(\omega(t_1 - t_2)).$$

Logo,

$$C_{XY}(t_1, t_2) = -\frac{1}{2} \text{sen}(\omega(t_1 - t_2)).$$

**Exemplo 3.10.** *Seja  $Y(t) = X(t) + N(t)$ , onde  $X(t)$  é um sinal desejado e  $N(t)$  um ruído.*

*Ache  $R_{XY}(t_1, t_2)$  supondo que  $X(t)$  e  $N(t)$  são processos estocásticos independentes.*

**Solução:**

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = E[X(t_1)X(t_2)] + E[X(t_1)N(t_2)] = R_X(t_1, t_2) + m_X(t_1)m_N(t_2).$$

### 3.6.6 Processos Ergódicos

Vimos que a caracterização completa de um processo estocástico exige o conhecimento de todas as suas funções amostra. Esta caracterização permitiu a determinação de diversas estatísticas de processos como, por exemplo, sua média e sua função autocorrelação. Para alguns processos estocásticos, entretanto, estas estatísticas podem ser determinadas a partir de apenas uma função amostra do processo. Esses processos estocásticos são determinados ergódicos.

Para processos ergódicos, os valores médios e os momentos podem ser determinados através de médias temporais.

$$\text{Assim, } E[X^n(t)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [X(t)]^n dt$$

onde  $X(t)$  é uma função amostra típica do processo.

A autocorrelação será dada por

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)X(t + \tau) dt$$

### 3.7 Processos estocásticos gaussianos

Um processo  $X(t)$  é um processo estocástico gaussiano se as amostras  $X_1 = X(t_1)$ ,  $X_2 = X(t_2)$ ,  $\dots$ ,  $X_k = X(t_k)$  são variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas para todo  $k$  e todas as escolhas de  $t_1, \dots, t_k$ .

Assim, a f. d. p. tem a forma

$$f_{X_1 X_2 \dots X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{m})^T K^{-1}(\vec{x}-\vec{m})}}{(2\pi)^{k/2} |K|^{1/2}}$$

onde

$$\vec{m} = \begin{bmatrix} m_X(t_1) \\ m_X(t_2) \\ \dots \\ m_X(t_k) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K = \begin{bmatrix} C_X(t_1, t_2) & C_X(t_1, t_2) & \dots & C_X(t_1, t_k) \\ C_X(t_2, t_1) & C_X(t_2, t_2) & \dots & C_X(t_2, t_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_X(t_k, t_1) & C_X(t_k, t_2) & \dots & C_X(t_k, t_k) \end{bmatrix}$$

Observamos que processos estocásticos gaussianos têm a propriedade que suas f. d. p.'s conjuntas são completamente especificadas pela média do processo  $m_X(t)$  e pela função covariância  $C_X(t_1, t_2)$ .

Se um processo gaussiano é estacionário no sentido amplo então sua média é constante e sua autocovariância só depende da diferença entre dois instante. Além disso, ele será também estritamente estacionário.

**Exemplo 3.11.** *Seja  $X(t)$  um processo gaussiano com função média e função autocorrelação dadas por  $m_X(t) = 1$  e  $R_X(\tau = t_1 - t_2) = 2^{-|t_1 - t_2|} + 1$ . Determine  $P[1 < X(4) < 3]$ .*

**Solução:**

$X(4) = X_4$  é uma variável aleatória gaussiana com  $E[X_4] = 1$  e  $\sigma_{X_4}^2 = E[X_4^2] - [E(X_4)]^2 = R_X(0) - m_X^2(4) = 2 - 1 = 1$ .

$$\text{Assim, } P[1 < X_2 < 3] = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_4-1)^2}{2}} dx_4 \simeq 0.477.$$

### 3.8 Densidade espectral de potência

Seja  $X(t)$  um processo estocástico estacionário no sentido amplo, com média  $m_X$  e função autocorrelação  $R_X(\tau)$ .

A densidade espectral de potência de  $X(t)$  é definida por

$$S_X(\omega) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$\text{Também, } R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

**Obs:** Podemos provar que para processos estocásticos reais,  $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$ . A potência média de  $X(t)$  é o seu segundo momento e é dada por

$$E[X^2(t)] = R_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_X(\omega)}{2\pi} d\omega .$$

Temos,

$$R_X(\tau) = C_X(\tau) + m_X^2 \Rightarrow S_X(\omega) = \mathcal{F}\{C_X(\tau)\} + m_X^2 \cdot 2\pi\delta(\omega)$$

Observe que  $m_X$  é a componente "dc" de  $X(t)$ .

Para processos estocásticos conjuntamente estacionários no sentido amplo, definimos a densidade espectral cruzada por  $S_{XY}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{XY}(\tau)\}$ , onde  $R_{XY}(\tau) = E[X(t+\tau)Y(t)]$ .

**Exemplo 3.12. Sinal aleatório de telégrafo**

"Considere um processo estocástico  $X(t)$  que assume apenas os valores  $\pm 1$ . Suponha que  $X(0) = \pm 1$  com probabilidade  $\frac{1}{2}$  e suponha que  $X(t)$  troque a polaridade com cada ocorrência de um processo de Poisson à taxa  $\alpha$ ".

Podemos provar que a autocorrelação desse processo é dada por  $R_X(\tau) = \frac{1}{2}e^{-\alpha|\tau|}$ .

Isto é, as amostras de  $X(t)$  se tornam menos correlatas à medida que a diferença de tempo entre elas aumenta.

Determine a densidade espectral de potência deste sinal.

**Solução:**

$$\text{Temos, } S_X(\omega) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\} = \frac{1}{2} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} .$$

**Exemplo 3.13.** Considere o processo estocástico  $X(t) = a\cos(\omega_0 t + \Theta)$ , sendo  $\Theta$  uma variável aleatória uniformemente distribuída em  $[0, 2\pi]$ .

Determine:

(i)  $R_X(\tau)$

**Solução:**

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = E[a^2 \cos(\omega_0 t + \Theta) \cos(\omega_0(t+\tau) + \Theta)] \\ &= \frac{a^2}{2} E[\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\Theta) + \cos(\omega_0 \tau)] = \frac{a^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \end{aligned}$$

(ii)  $S_X(\omega)$

**Solução:**

$$S_X(\omega) = \frac{a^2}{2} \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

(iii) A potência média do sinal

**Solução:**

$$E[X^2(t)] = R_X(0) = \frac{a^2}{2}.$$

### 3.9 Resposta de sistemas lineares a sinais aleatórios

Considere um sistema com sinal de entrada  $X(t)$  e saída  $Y(t)$  tal que  $Y(t) = T[X(t)]$ .

Suponhamos que  $T$  seja uma transformação linear e invariante no tempo.

Obs: Se  $T$  é linear então  $T[\alpha X_1 + \beta X_2] = \alpha T[X_1] + \beta T[X_2]$  e se  $T$  é invariante no tempo então  $T[X(t-s)] = Y(t-s)$ .

A resposta ao impulso deste sistema é definida por  $h(t) = T[\delta(t)]$  e a resposta a uma entrada arbitrária  $X(t)$  é dada por

$$Y(t) = h(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)X(t-s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s)X(s)ds$$

A função resposta em frequência é dada por

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt$$

Um sistema é dito causal se  $h(t) = 0$ ,  $t < 0$ .

Se a entrada do sistema linear invariante no tempo for um processo estocástico  $X(t)$  então

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)X(t-s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s)X(s)ds.$$

A média de  $Y(t)$  é dada por

$$E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)X(t-s)ds\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)E[X(t-s)]ds \Rightarrow m_Y(t) = m_X(t)*h(t)$$

Devemos observar que se  $X(t)$  é estacionário no sentido amplo  $m_Y(t) = H(0)m_X$ .

A função autocorrelação de  $Y(t)$  é dada por

$$\begin{aligned}
R_Y(t_1, t_2) &= E[Y(t_1)Y(t_2)] = E[Y(t)Y(t + \tau)] \\
&= E \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} X(t-s)h(s)ds \int_{-\infty}^{+\infty} X(t + \tau - r)h(r)dr \right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)h(r)E[X(t-s)X(t + \tau - r)]drds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)h(r)R_X(\tau + s - r)dsdr
\end{aligned}$$

Considerando  $X(t)$  estacionário no sentido amplo,  $R_X$  dependerá só de  $\tau$  e, conseqüentemente,  $E[Y(t)Y(t + \tau)]$  dependerá só de  $\tau$ .

Como  $E[Y(t)]$  é constante, concluímos que  $Y(t)$  é estacionário no sentido amplo.

A densidade espectral de  $Y(t)$  é dada por

$$\begin{aligned}
S_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_Y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)h(r)R_X(u)e^{-j\omega(u-s+r)}dsdrdu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)e^{j\omega s}ds \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)e^{-j\omega r}dr \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(u)e^{-j\omega u}du \\
&= H^*(\omega)H(\omega)S_X(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega)
\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
R_{YX}(\tau) &= E[Y(t + \tau)X(t)] = E \left[ X(t) \int_{-\infty}^{+\infty} X(t + \tau - r)h(r)dr \right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t)X(t + \tau - r)]h(r)dr = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau - r)h(r)dr = R_X(\tau) * h(\tau)
\end{aligned}$$

E,  $S_{YX}(\omega) = H(\omega)S_X(\omega)$ .

Como  $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$ , temos:

$$S_{XY}(\omega) = S_{YX}^*(\omega) = H^*(\omega)S_X(\omega)$$

### RESUMO:

- (i)  $S_X(\omega) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}$
- (ii)  $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$
- (iii)  $m_Y(t) = m_X(t) * h(t)$
- (iv)  $S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) = H^*(\omega)H(\omega)S_X(\omega)$
- (v)  $S_{XY}(\omega) = S_{YX}^*(\omega) = H^*(\omega)S_X(\omega)$
- (vi)  $S_{YX}(\omega) = H(\omega)S_X(\omega)$

**Exemplo 3.14.** Encontre a densidade espectral da saída de um sistema linear invariante no tempo, com função resposta em frequência  $H(\omega)$ , cuja entrada é um processo de ruído branco, com densidade espectral de potência  $\frac{N_0}{2}$ .

**Solução:**

$$\text{Temos, } S_X(\omega) = \frac{N_0}{2}, \forall \omega.$$

$$\text{Assim, } S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 \frac{N_0}{2}.$$

**Exemplo 3.15.** Ache a função resposta ao impulso de um filtro causal que pode ser usado para gerar um processo aleatório gaussiano com função autocorrelação dada por  $R_Y(\tau) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$ .

**Solução:**

$$\text{Temos, } R_Y(\tau) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|} \Rightarrow S_Y(\omega) = \frac{\sigma^2}{\alpha^2 + \omega^2}$$

E,

$$S_Y(\omega) = \frac{1}{(\alpha + j\omega)(\alpha - j\omega)} \sigma^2$$

$$\text{Consideramos } H(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} \Rightarrow h(t) = e^{-\alpha t}, t \geq 0.$$

# Capítulo 4

## Aplicações

### 4.1 Multiplexação

#### 4.1.1 Conceito

Se um circuito utilizando um par de condutores permite que duas pessoas possam estabelecer um diálogo sem problemas, podemos perceber que, se quatro assinantes tirassem o telefone do gancho ao mesmo tempo, todos ouviriam a conversa dos outros. Quanto maior o número de assinantes, maior seria o problema. Assim, há a necessidade da utilização de uma técnica que possibilite a comunicação, sem interferência entre os circuitos, porém utilizando o mesmo meio de transmissão. A multiplexação é essa técnica. Ela utiliza circuitos a quatro fios com canais de ida (dois fios) e canais de volta (dois fios). A figura 4.1 mostra esquematicamente a ligação utilizando a técnica de multiplexação.

O meio de transmissão descrito pode ser um par de fios, o ar (radioenlace), fibra ótica, etc.

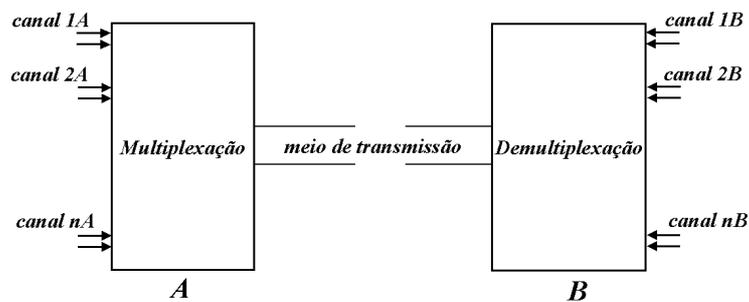


Figura 4.1: Ligação telefônica através da multiplexação.

### 4.1.2 Tipos de multiplexação

Atualmente são utilizados diversos tipos de multiplexação, divididos em dois grupos, de acordo com a técnica utilizada.

- Técnica digital : A multiplexação que utiliza esta técnica é a chamada *multiplexação por divisão de tempo*.
- Técnica analógica : A multiplexação que utiliza essa técnica é a chamada *multiplexação por divisão em frequência*.

A escolha do meio de transmissão a ser utilizado num sistema multiplex é primordialmente baseado no número de canais a serem transmitidos, porém a distância entre os pontos que desejam se comunicar, as dificuldades geográficas entre os mesmos, bem como a confiabilidade e qualidade desejadas para o sistema também irão ditar qual o processo mais econômico a ser utilizado.

Os meios de transmissão basicamente não alteram o equipamento multiplex, sendo divididos em dois grupos, conforme a propagação do sinal seja no espaço ou num meio físico: sistemas de transmissão via rádio e sistemas de transmissão via linha física.

A configuração geral para a ligação via rádio é mostrada na figura 4.2.

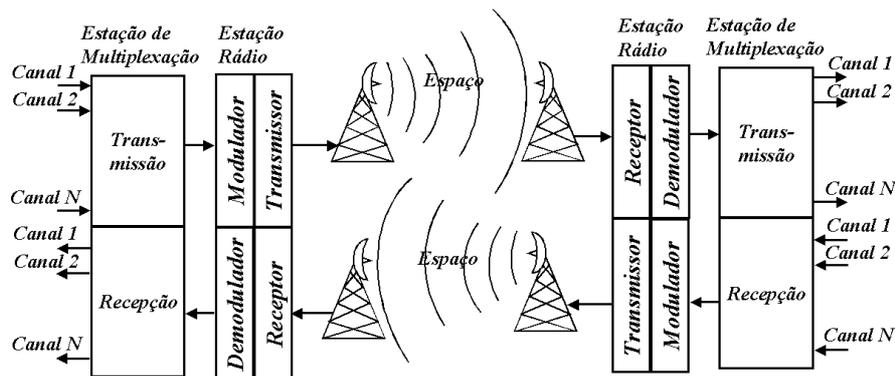


Figura 4.2: Ligação via rádio.

O sinal que representa a informação e que variará uma característica de uma onda, chamada de *onda portadora*, chama-se *onda moduladora*. Ao processo de variação de uma característica da onda portadora de acordo com o sinal da informação, chamamos de modulação. A característica que sofre variação pode ser a amplitude e chamamos de *modulação em amplitude (AM)*, ou a característica é a frequência e chamamos de *modulação em frequência (FM)*.

Embora o multiplex telefônico se destine primordialmente à transmissão de sinais de voz, ele também é utilizado para o envio de informações sob outras formas de sinais, tais como: sinais telegráficos, sinais de fax, sinais de dados, etc.

Assim, o multiplex telefônico é empregado por quase todos os serviços de telecomunicações, onde tem a função de concentrador a fim de utilizar de maneira mais racional um meio de transmissão de alta capacidade.

A figura 4.3 mostra um esquema de um sistema de telecomunicações onde vários serviços podem ser prestados.

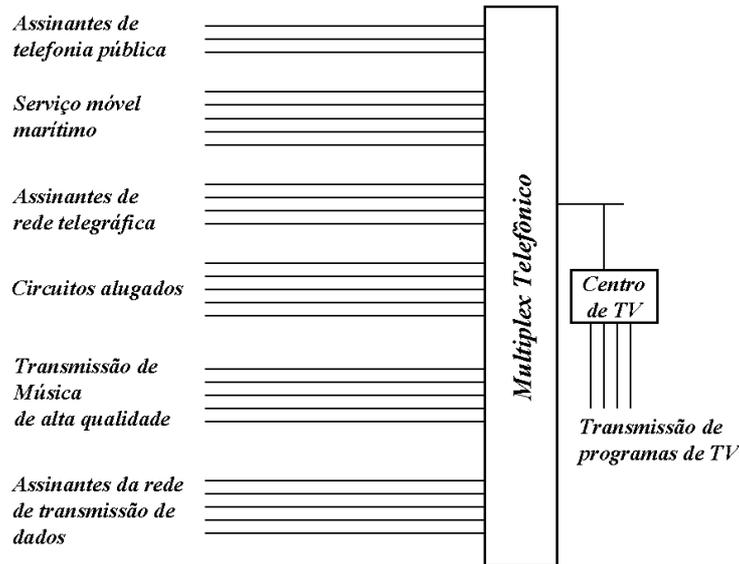


Figura 4.3: Serviços de telecomunicações.

Como a utilização primordial do multiplex é para comunicações telefônicas, o canal utilizado neste sistema é chamado de *canal multiplex telefônico* ou *canal de voz* e o circuito será chamado de *circuito multiplex telefônico* ou *circuito de voz*.

Há vários tipos de canais disponíveis dependendo da aplicação. Por exemplo um canal de 6 KHz de faixa tem emprego em sistemas de pequena capacidade, onde o baixo preço do equipamento é mais importante que o aproveitamento do meio para transmissão de um maior número de canais.

### 4.1.3 Translação de freqüências

Chamamos de translação (ou conversão de freqüências) a transferência de sinais que ocupam uma determinada faixa no espectro de freqüências para uma outra posição deste espectro, de tal maneira que seja mantida a posição relativa das freqüências dentro da faixa. A translação é a operação básica da multiplexação, sendo realizada por processos de modulação, que podem ser em amplitude(AM), freqüência(FM) ou fase (PM).

A figura 4.4 mostra esquematicamente a translação de freqüências.

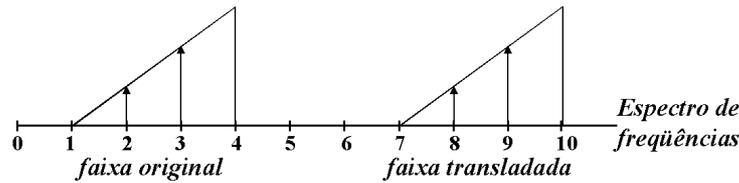


Figura 4.4: Translação de frequências.

#### 4.1.4 Modulação e demodulação

A modulação é um processo onde duas frequências ou sinais são combinados, de tal maneira que são criadas novas frequências.

A figura 4.5 mostra esse processo esquematicamente.

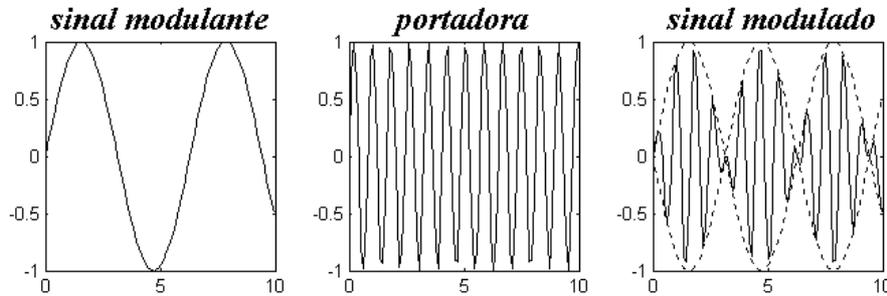


Figura 4.5: Esquema da modulação.

Na modulação um dos sinais que será combinado é chamado de *onda portadora* e o outro, *sinal modulante*. Ao produto da modulação damos o nome de *sinal modulado*. Ao processo de restauração do sinal modulante, a partir do sinal modulado e da onda portadora, chamamos de *demodulação*.

#### Tipos de modulação

Há várias formas de se modular um sinal e, geralmente, a onda portadora é uma onda senoidal que pode ser dada por

$$a_P = A_P \cos(2\pi f_P t + \theta).$$

A *modulação em amplitude* é obtida somente pela variação da amplitude  $A_P$ , de forma que o desvio resultante, em relação à amplitude, seja diretamente proporcional ao valor instantâneo do sinal modulante, porém independente da sua frequência.

A *modulação em ângulo*, que pode ser por amplitude ou por frequência, é obtida quando faz-se variar o ângulo  $2\pi f_P t + \theta$ .

### Modulação em amplitude

Na modulação em amplitude, o valor máximo da onda portadora é variado pela intensidade do sinal modulante, que é a quantidade moduladora.

Consideremos a onda portadora representada por

$$a_P = A_P \cos(2\pi f_P t)$$

e a onda modulante por

$$a_m = A_m \cos(2\pi f_m t).$$

Desejamos obter a onda modulada em amplitude. A variação de amplitude em torno de  $E_P$  será senoidal, de forma que a amplitude em função do tempo é dada por

$$A_P + A_M \cos(2\pi f_m t)$$

sendo o valor máximo da amplitude igual a  $A_P + A_m$  e o valor mínimo igual a  $A_P - A_m$ . A onda modulada será dada por

$$A = [A_P + A_m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_P t).$$

Chamando a razão  $\frac{A_m}{A_P}$  de  $m$ , temos :

$$A = A_P [1 + m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_P t).$$

Expandindo a expressão acima temos

$$A = \underbrace{A_P \cos(2\pi f_P t)}_{\text{onda portadora}} + \underbrace{\frac{mA_P}{2} \cos 2\pi(f_P - f_m)t}_{\text{frequência lateral inferior}} + \underbrace{\frac{mA_P}{2} \cos 2\pi(f_P + f_m)t}_{\text{frequência lateral superior}} .$$

Essa equação indica a existência de três frequências distintas na onda modulada, a saber, a frequência da onda portadora, uma frequência superior  $A_P + A_m$  e uma inferior  $A_P - A_m$ .

Como exemplo desse processo consideremos a onda portadora dada por  $a_p = 2 \cos(40\pi t)$  e o sinal modulante dado por  $a_m = \cos(2\pi t)$ . Representamos na figura 4.6 o sinal modulante, a onda portadora e o sinal modulado, no domínio do tempo e da frequência.

Neste caso o sinal modulante foi considerado como um sinal senoidal. No entanto, nos casos reais, o sinal varia continuamente numa faixa considerável, fazendo com que as frequências laterais que encontramos sejam substituídas por faixas de frequências, denominadas *banda lateral inferior* e *banda lateral superior*, cuja largura é igual à diferença entre o valor máximo e o valor mínimo das frequências do sinal modulante.

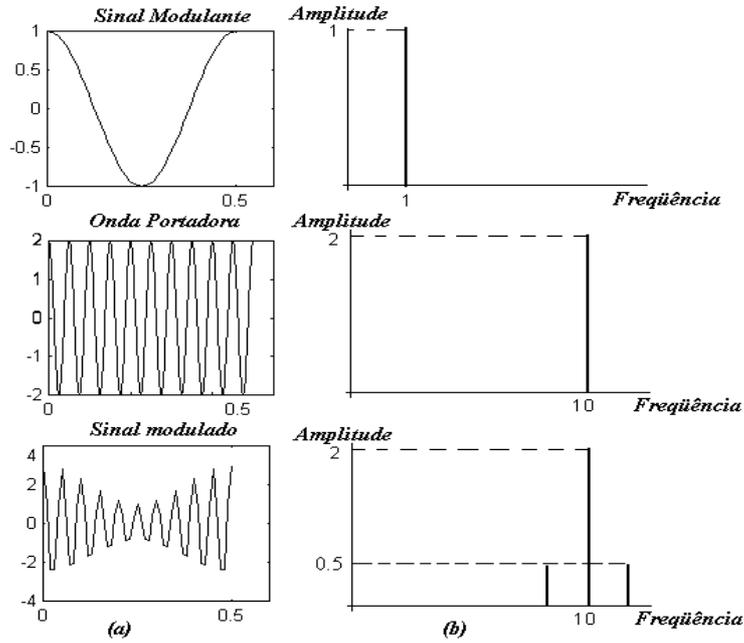


Figura 4.6: (a) Domínio do tempo; (b) domínio da frequência.

Consideremos, como exemplo, que o sinal  $x(t)$  contém a informação que desejamos transmitir. Consideremos o sinal da onda portadora dado por  $x_P(t) = A_P \cos(2\pi f_P t)$ . Assim, o sinal modulado será dado por

$$\begin{aligned} x_m(t) &= A_P \cos(2\pi f_P t) + m x(t) A_P \cos(2\pi f_P t) \\ &= A_P [1 + m x(t)] \cos(2\pi f_P t). \end{aligned}$$

$m$  é denominado índice de modulação e é dado por  $m = \frac{A_m}{A_P}$ .

No domínio da frequência, a transformada de Fourier do sinal  $x_m$  é dado por

$$X_P(f) = \frac{A_P}{2} [\delta(f - f_P) + \delta(f + f_P)] + \frac{m A_P}{2} [X(f - f_P) + X(f + f_P)].$$

Assim, o espectro de um sinal modulado AM é o espectro da mensagem deslocado, mais um par de impulsos, em  $\pm f_P$ , que representam a onda portadora do sinal.

Por exemplo, quando uma onda portadora de 1000 KHz é modulada por um sinal de áudio que varia de 100 Hz a 5000 Hz, a frequência máxima da faixa superior será de 1005 KHz e a frequência mínima da faixa inferior será de 995 KHz, como ilustramos na figura 4.7.

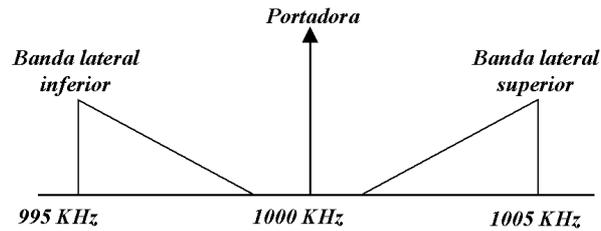


Figura 4.7: Modulação em amplitude de um canal de voz.

Há vários processos de modulação AM utilizados pela técnica pelo método da divisão em frequência. São eles :

- AM-DSB - Modulação em amplitude com faixa lateral dupla
- AM-DSB/SC - Modulação em amplitude com faixa lateral dupla e onda portadora suprimida
- AM-SSB - Modulação em amplitude com faixa lateral única
- AM-SSB/SC - Modulação em amplitude com faixa lateral única e onda portadora suprimida.

De todos esses processos o mais empregado é o AM-SSB/SC. Esse é o mais utilizado pois a transmissão da onda portadora é desnecessária pois não contém informação e além disso gastaríamos energia para a sua transmissão. Verificamos também que as duas bandas laterais possuem a mesma informação e por isso só se faz necessária a transmissão de uma delas o que traz duas vantagens : economia de potência e de faixa de frequência (ocupa-se uma faixa menor). A onda portadora só será necessária para a demodulação, podendo ser gerada novamente após a recepção no outro extremo. A supressão da onda portadora é realizada por moduladores chamados de *moduladores balanceados*. A seleção da banda lateral a ser transmitida é executada por dispositivos chamados de *filtros passa-faixa*.

A figura 4.7 apresenta o diagrama em blocos de uma modulação em amplitude com onda portadora suprimida e transmissão de uma só banda lateral, bem como a indicação das operações no domínio da frequência.

A título de curiosidade, a tabela 4.1 mostra as frequências de onda portadoras e as larguras de faixa para determinados tipos de sinais.

## Demodulação

Ao processo de restauração do sinal modulante ou informação, a partir do sinal modulado e da onda portadora, chamamos de demodulação.

Utilizaremos, como ilustração, a forma senoidal para a demodulação tal como fizemos para a modulação.

Banda de frequência	Frequência de onda portadora	Largura de faixa
Ondas longas de rádio	100 kHz	2 kHz
Ondas curtas de rádio	5 MHz	100 kHz
VHF	100 MHz	2 MHz
Microondas	5 GHz	100 MHz
Ondas milimétricas	100 GHz	2 GHz
Faixa ótica	$5 \times 10^{14} Hz$	$10^{13} Hz$

Tabela 4.1: Frequências de ondas portadoras e larguras de faixa selecionadas.

Tomemos como exemplo um sinal modulado a frequência lateral inferior, cuja expressão a seguir representa um sinal senoidal de frequência  $(f_P - f_m)$ :

$$a_{BLI} = \frac{mA_P}{2} \cos[2\pi(f_P - f_m)t].$$

A onda portadora, idêntica em frequência à modulação, é representada pela expressão:

$$a_P = A_P \cos(2\pi f_P t).$$

Assim, o sinal demodulado será dado por

$$a = [A_P + \frac{mA_P}{2} \cos[2\pi(f_P - f_m)t]] \cos(2\pi f_P t).$$

Após algumas manipulações algébricas chegamos a :

$$a = \underbrace{A_P \cos(2\pi f_P t)}_{\text{onda portadora}} + \underbrace{\frac{A_m}{4} \cos(2\pi f_m t)}_{\text{frequência lateral inferior}} + \underbrace{\frac{A_m}{4} \cos 2\pi(2f_P - f_m)t}_{\text{frequência lateral superior}} .$$

Podemos observar que a demodulação é a modulação na direção inversa, na qual obtemos uma frequência lateral inferior idêntica à informação original, porém com uma amplitude menor.

Devemos observar que não consideramos nesta análise a variação de fase entre as ondas portadoras na transmissão e na recepção, somente levando em conta a igualdade de frequência. Porém, se estivermos transmitindo um tipo de informação que tenha necessidade do reconhecimento de sua forma de onda na recepção, uma defasagem entre as ondas portadoras pode deformar o sinal, a ponto de torná-lo irreconhecível.

Mostramos na figura 4.8 um esquema do processo de multiplexação e de demultiplexação.

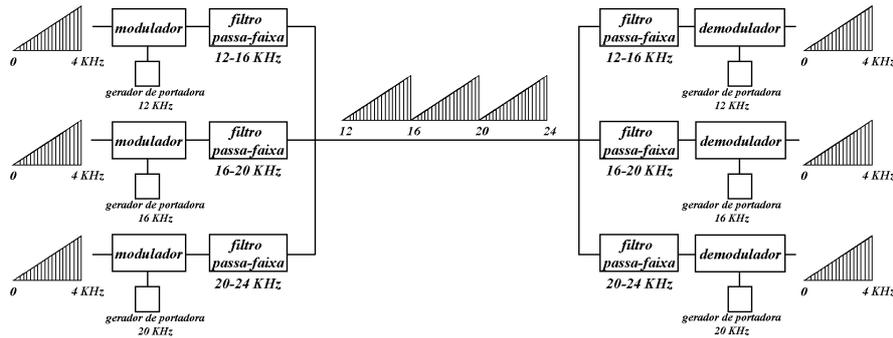


Figura 4.8: Esquema de multiplexação e demultiplexação de três canais de voz.

## 4.2 Processamento de sinais provenientes de acelerômetros e transdutores de força

Para estudarmos a aplicação de análise e processamento de sinais na Engenharia Mecânica, discutiremos uma experiência realizada para determinar frequências naturais e modos de vibração de uma viga em balanço. A configuração utilizada é a da figura 4.9. A viga é excitada através de um vibrador, utilizando, para isso, um sinal aleatório. Os sinais da excitação, captado por um transdutor de força, e da resposta, captada por um acelerômetro, são analisados e processados por um analisador de sinais. Escolhemos no analisador a opção de função resposta em frequência. Nesse caso, os sinais provenientes do acelerômetro e do transdutor de força são transformados para o domínio da frequência e divididos um pelo outro (determinação da função resposta em frequência : saída dividida pela entrada). Como exemplo, podemos observar o gráfico da magnitude da função resposta em frequência, mostrada na figura 4.10. A partir dos “picos” desse gráfico podemos determinar as frequências naturais da estrutura. Para determinar os modos de vibração, excitamos a estrutura em cada uma das frequências naturais, usando um sinal senoidal. Os modos de vibrações podem ser visualizados usando mascaramento com um estroboscópio.

Porém, as principais aplicações são na área de controle de Sistemas Dinâmicos, mas fica para uma outra vez ...

Estas notas, feitas como um roteiro para o nosso mini-curso, não são auto-suficientes. Recomendamos que os interessados consultem os livros de Oppenheim e o manual do Toolbox MATLAB de Processamento de Sinais . O uso desse Toolbox será coberto nas apresentações do minicurso.

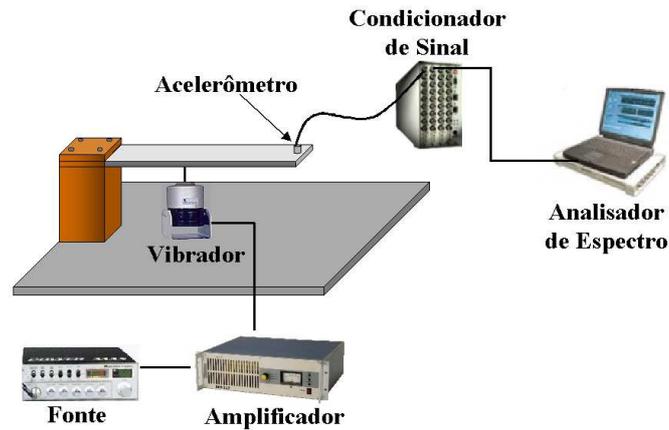


Figura 4.9: Descrição da experiência

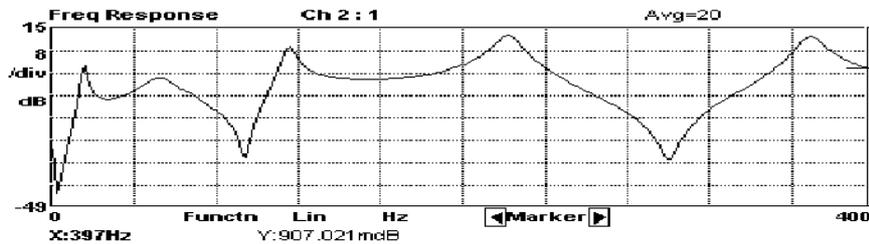


Figura 4.10: Amplitude da função resposta em frequência.

### 4.3 Síntese de Voz

A voz é o principal instrumento utilizado para a comunicação entre os seres humanos. A linguagem humana, como a conhecemos, desenvolveu-se a partir da utilização da voz de forma articulada e contextualizada, permitindo a transmissão de idéias concretas e abstratas. Sendo a voz uma ferramenta essencial, a conservação da saúde dos órgãos responsáveis pela sua produção é de extrema importância para o indivíduo e a sociedade. Com a invenção do telefone, no século XIX, a comunicação através da voz ganhou um alcance antes inimaginável, e a compreensão dos mecanismos de produção da voz torna-se cada vez mais importante para a crescente indústria de telecomunicações.

Apesar disso, durante muito tempo os mecanismos responsáveis pela produção da voz permaneceram como um mistério para a humanidade. Somente a partir da década de 1950, estudos teóricos e experimentais mais consistentes começaram a

ser realizados, inicialmente por grupos isolados. Trabalhos pioneiros importantes foram publicados nessa época, como o de Van den Berg (1958). No final da década de 1960, Flanagan e Landgraf (1968) publicaram um trabalho propondo um modelo matemático para as oscilações das cordas vocais, para utilização em síntese de voz.

Após a criação da Fundação da Voz, em 1972, pelo físico Wilbur James Gould, as pesquisas tornaram-se mais numerosas, e hoje envolve uma grande quantidade de físicos, matemáticos, engenheiros, biólogos, médicos, fonoaudiólogos e outros profissionais em todo o mundo. A compreensão dos processos envolvidos na produção da voz está, entretanto, somente engatinhando, e ainda há muito para pesquisar.

### 4.3.1 A produção da voz humana

A produção da voz se inicia com uma contração-expansão dos pulmões. Cria-se, assim, uma diferença entre a pressão do ar nos pulmões e a pressão do ar na frente da boca, causando um escoamento de ar. O fluxo de ar passa pela laringe onde, ao gerar a oscilação das cordas vocais que abrem e fecham o orifício glotal, vai se transformando em uma série de pulsos (conhecidos como trem de pulsos ou sinal glotal) de ar que chegam na boca e na cavidade nasal. Os pulsos de ar são modulados pela língua, pelos dentes e lábios; isto é, pela geometria destes órgãos, de forma a produzir o que conhecemos por voz. O sinal glotal, porém, possui propriedades importantes de difícil reprodução que estão intimamente ligadas às características anatômicas e fisiológicas da laringe.

Atualmente, a teoria mais aceita para a descrição do sinal glotal (isto é, o aparecimento do trem de pulsos) é a teoria chamada de aerodinâmica-mioelástica, proposta por van den Berg (1958) e Titze (1980). Esta teoria postulou que o movimento de abrir e fechar as cordas vocais é regido pelas propriedades mecânicas dos tecidos musculares que constituem, principalmente, as cordas vocais e pelas forças aerodinâmicas que se distribuem ao longo da laringe durante a fonação. A ação neural consiste apenas em comandar a ativação de músculos que contribuem de forma indireta para o movimento oscilatório, aproximando as cordas vocais de tal forma que a superfície destas vibrem, e regulando o nível de tensão à qual estão submetidas as mesmas.

Para facilitar o estudo do sistema de produção da voz, normalmente o reduzimos a quatro grupos distintos, em relação à onda sonora que é produzida ou modificada pelos órgãos. O primeiro grupo, que chamaremos de *grupo da respiração*, corresponde à produção de um fluxo de ar; que inicia-se nos pulmões e termina no final da traquéia. Na faringe, encontram-se os órgãos do segundo grupo, responsáveis pela produção do sinal glotal, que chamaremos de *grupo da vocalização*. As cordas vocais pertencem a este grupo. O sinal glotal é um sinal de baixa intensidade, que necessita ser amplificado e que determinadas componentes harmônicas sofram “ênfase”, de maneira que os fonemas sejam caracterizados. Chamaremos este grupo de *grupo de ressonância*. Esse fenômeno ocorre na passagem do ar pelo chamado trato vocal (porção que vai da laringe até a boca). Finalmente, as ondas de pressão são irradiadas quando chegam à boca. A esse grupo chamaremos de *grupo da irradiação*.

Na produção de vogais, o fluxo de ar proveniente dos pulmões é interrompido

pela vibração quase-periódica das cordas vocais. Na Fig. 4.11 mostramos uma representação esquemática do sistema de produção da voz.

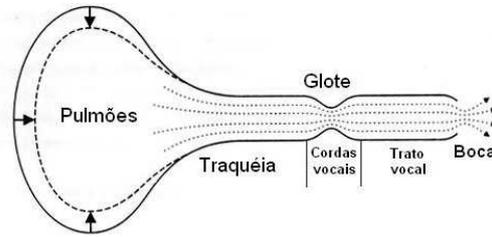


Figura 4.11: Representação esquemática do sistema de produção da voz, adaptada de Titze (1994).

Na representação esquemática do sistema de produção de voz, podemos observar os quatro grupos destacados anteriormente: *respiração* (pulmões e traquéia), *vocalização* (cordas vocais), *ressonância* (trato vocal) e *radiação* (boca).

### 4.3.2 Modelagem matemática

#### Visão geral

Apesar do recente desenvolvimento da compreensão acerca dos processos responsáveis pela produção da voz, a aplicação de modelos matemáticos a sistemas de síntese de voz é ainda pequena. Uma das objeções feitas comumente a essa abordagem é a pouca naturalidade da voz sintetizada. Além disso, há outros métodos capazes de sintetizar a voz. Tais métodos, contudo, não apresentam qualquer relação com os processos físicos reais. Mesmo programas ditos de “síntese articulatória” normalmente utilizam somente relações obtidas empiricamente entre a articulação do trato vocal e parâmetros arbitrários do programa. Tais metodologias são inúteis quando estamos interessados em estudar as relações entre a fisiologia e o som produzido.

Iremos discutir aqui um pouco da modelagem matemática relacionada à produção da voz, no caso de síntese de vogais e, também, discutiremos um pouco sobre a implementação computacional de um programa capaz de simular tais modelos e, conseqüentemente, sintetizar a voz (no caso de vogais). Propomos, ainda, modificações dos modelos, de forma a obtermos síntese de voz com boa qualidade, que possa ser utilizada em aplicações onde a correspondência com a fisiologia seja importante, como, por exemplo, no estudo de patologias da laringe e do trato vocal.

Nas últimas décadas, o processo da produção da voz tem sido extensivamente estudado e, também, alguns modelos matemáticos para descrever os processos envolvidos. Esses modelos tentam capturar as características fundamentais do sistema, embora muitos detalhes fisiológicos sejam de difícil equacionamento.

Para facilitar a modelagem desse sistema complexo, podemos identificar na produção da voz dois processos básicos que acontecem simultaneamente: o processo da

geração, propagação e filtragem de uma onda acústica; e o processo de oscilação das cordas vocais. Esses processos possuem características físicas distintas, e devem ser modelados separadamente. Existe, entretanto, uma interdependência entre tais processos, resultado da transferência de energia do fluxo de ar para as cordas vocais, que será traduzido matematicamente como um acoplamento entre as equações que descrevem os dois sistemas.

A seguir, faremos uma revisão da modelagem do sistema acústico e de dois modelos distintos para a dinâmica das cordas vocais, conforme descritos em Flanagan e Landgraf (1968) e Ishisaka e Flanagan (1972).

O som emitido pela fonação em seres humanos inicia-se com uma contração pulmonar que eleva a pressão sub-glotal. A diferença entre a pressão sub-glotal e a pressão supra-glotal faz com que surja um escoamento de ar através da glote. Caso as cordas vocais estejam suficientemente próximas, o fluxo de ar irá impulsioná-las, dando início a um movimento oscilatório. A abertura e fechamento da glote fazem com que o fluxo de ar através da mesma varie no tempo, ao que corresponde uma variação de pressão. Essas variações de pressão e fluxo de ar se propagam na forma de uma onda acústica pelo trato vocal. No trato vocal a onda sofre diversas reflexões, formando padrões de onda estacionária, que amplificam algumas frequências, enquanto outras são atenuadas. Finalmente, a onda sonora é irradiada no ambiente externo ao corpo através da abertura da boca.

Esse processo é bastante similar ao que ocorre com uma onda eletromagnética ao propagar-se por um guia de onda metálico e ao ser irradiado por uma antena de abertura, num sistema de comunicações de microondas. Assim, um tratamento matemático similar será adotado.

Embora existam muitos estudos sobre a solução da equação de onda para o caso de ondas acústicas propagando-se em meios confinados, para o caso do som audível é possível adotar uma forma de equacionamento bem mais simples. Para um estudo recente sobre a propagação de ondas acústicas e sua aplicação à modelagem, veja, por exemplo, Berners (1999).

De forma similar ao que ocorre com sistemas de propagação eletromagnética, é possível descrever sistemas acústicos através de uma analogia com circuitos elétricos. Nessa analogia é feita a equivalência entre diferença de pressão e tensão elétrica (diferença de potencial elétrico) e entre fluxo de ar (volume de ar deslocado por unidade de tempo) e corrente elétrica (quantidade carga elétrica deslocada por unidade de tempo).

Aqui introduzimos o conceito de impedância acústica, que é equivalente ao conceito de impedância elétrica em teoria de circuitos. A impedância acústica  $Z(s)$  é definida como a razão entre a transformada de Laplace  $P(s)$  da diferença de pressão  $p(t)$  e a transformada  $U(s)$  do fluxo de ar  $u(t)$  em um determinado ramo do circuito, ou seja

$$Z(s) = \frac{P(s)}{U(s)} \text{ ou } P(s) = Z(s)U(s)$$

que corresponde à lei de Ohm.

Se visualizarmos a relação no domínio do tempo, vemos que a impedância acústica descreve a equação diferencial que relaciona a diferença de pressão e o fluxo de ar em um determinado elemento acústico. Dessa forma, é possível associar circuitos elétricos equivalentes aos mais diversos tipos de sistemas acústicos. Uma discussão sobre a aplicação dessa teoria à modelagem do sistema de produção da voz pode ser encontrada em Avanzini (2001).

Seguindo a analogia com circuitos elétricos, o sistema acústico da produção da voz pode ser modelado como um circuito elétrico equivalente ao sistema acústico, ou simplesmente “circuito acústico”.

Modelamos os pulmões como uma fonte ideal de pressão, que equivale a uma fonte de tensão elétrica.

A glote, devido a seu comprimento desprezível, quando comparado ao comprimento de onda do som, pode ser modelada simplesmente como uma impedância que varia no tempo, conforme a glote se abre e fecha de acordo com o movimento das cordas vocais. Devido a seu tamanho reduzido, contudo, aparecem certas características não-lineares na relação entre queda de pressão e fluxo glotal. Dessa forma, consideraremos a glote como uma impedância acústica formada por três componentes: uma resistência estática independente do fluxo ( $R_V$ ), uma resistência cinética não-linear dependente do fluxo ( $R_K$ ) e uma inertância (ou indutância) glotal ( $L_g$ ). As expressões dessas componentes dependem do modelo específico adotado para a dinâmica das cordas vocais.

Representaremos o trato vocal por uma seqüência de  $n$  tubos cilíndricos, de paredes rígidas, com áreas das seções transversais  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , e os comprimentos dos cilindros  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ , conforme mostrado na figura 4.12.

Essa representação é suficiente, pois não consideraremos sons nasalados, os quais requereriam a modelagem da cavidade nasal, de muito maior complexidade.

Cada um desses tubos pode ser visto como uma linha de transmissão com um “circuito em T” equivalente, mostrado na Fig. 4.13.

Os valores das indutâncias, capacitâncias e resistências são dados por:

$$L_j = \frac{\rho \ell_j}{2A_j}, \quad C_j = \frac{\ell_j A_j}{\rho c^2} \quad \text{e} \quad R_j = \frac{s_j}{A_j^2} \sqrt{\rho \mu \omega / 2}, \quad j = 1, \dots, n$$

onde  $c$  é a velocidade do som,  $\rho$  é a densidade do ar,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do ar,  $s_j$  o perímetro da circunferência da  $j$ -ésima seção e  $\omega$  é a frequência em radianos por segundo.

Finalmente, a irradiação do som pela boca é modelada como uma impedância de radiação, de forma similar à modelagem de uma antena em sistemas elétricos, formada por uma resistência  $R_r$  e por uma indutância  $L_r$  colocadas em paralelo.

O som sintetizado corresponde à diferença de pressão entre os terminais dessa impedância, ou seja, ao produto do fluxo  $U_r$  pela resistência  $R_r$ . Os valores dos elementos são dados por

$$R_r = \left( \frac{128\rho c}{9\pi^2 A_n} \right) \quad \text{e} \quad L_r = \frac{8\rho}{3\pi} \sqrt{\pi A_n}.$$

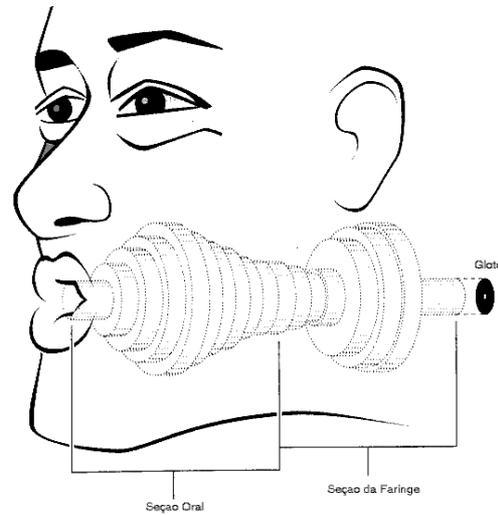


Figura 4.12: Aproximação do trato vocal por tubos cilíndricos (adaptada de Titze(1994)).

Reunindo todos esses elementos chegamos ao circuito acústico mostrado na Fig. 4.14:

Usando leis das malhas, obtemos as seguintes equações para o circuito da figura:

**Malha 0:** correspondente à seção das cordas vocais

$$(R_{k1} + R_{k2})|U_g|U_g + (R_{v1} + R_{v2})U_g + (L_{g1} + L_{g2})\frac{dU_g}{dt} + L_1\frac{dU_g}{dt} + R_1U_g + \frac{1}{C_1}\int_0^t (U_g - U_1)dt - P_s = 0$$

**Malha 1:** correspondente à primeira seção do trato vocal

$$(L_1 + L_2)\frac{dU_1}{dt} + (R_1 + R_2)U_1 + \frac{1}{C_2}\int_0^t (U_1 - U_2)dt + \frac{1}{C_1}\int_0^t (U_1 - U_g)dt = 0$$

**Malha 2:** correspondente à segunda seção do trato vocal

$$(L_2 + L_3)\frac{dU_2}{dt} + (R_2 + R_3)U_2 + \frac{1}{C_3}\int_0^t (U_2 - U_3)dt + \frac{1}{C_2}\int_0^t (U_2 - U_1)dt = 0$$

e, assim por diante, até a penúltima malha.

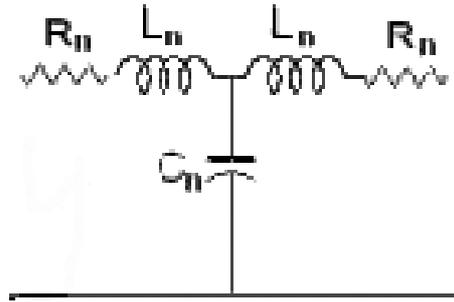


Figura 4.13: Circuito em T equivalente a um tubo cilíndrico.

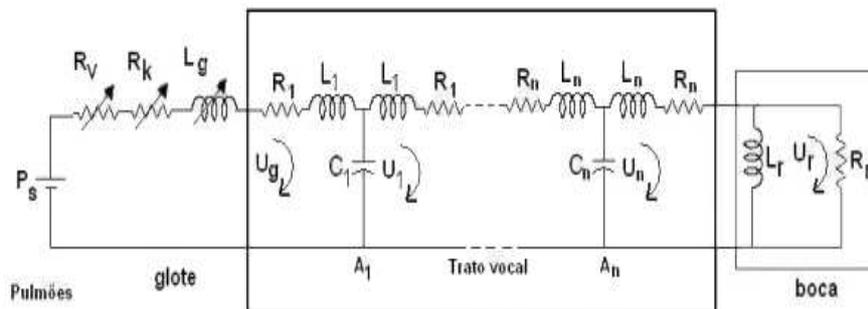


Figura 4.14: Circuito Acústico.

**Malha n:** correspondente à última seção do trato vocal - n-ésima seção

$$(L_n + L_R) \frac{dU_n}{dt} + R_n U_n - L_R \frac{dU_R}{dt} + \frac{1}{C_n} \int_0^t (U_n - U_{n-1}) dt = 0$$

**Malha da irradiação na boca:**

$$L_R \frac{d(U_R - U_n)}{dt} + R_R U_R = 0$$

A equação da malha glotal (0) será não-linear, devido à resistência dependente do fluxo ( $R_K$ ), e tem coeficientes variáveis no tempo, devido à dependência da impedância em relação à área glotal. Essa equação está acoplada às equações do movimento das cordas vocais pelo fluxo  $U_g$  (fluxo glotal) e pela área  $A_g$  (área glotal).

### **Modelagem da dinâmica das cordas vocais**

O movimento auto-oscilatório das cordas vocais é resultado da ação de forças externas provenientes do fluxo de ar que atravessa a glote, o qual desloca a corda vocal de sua posição de equilíbrio. Devido às propriedades elásticas do tecido, surgem forças restauradoras sobre as cordas vocais que tentam fazê-la retornar a sua posição original. Durante a fonação normal, o equilíbrio entre esses dois movimentos é obtido de forma a sustentar um movimento quase periódico de abertura-fechamento da glote, responsável pela vocalização.

Diversos modelos foram desenvolvidos para explicar o funcionamento desse mecanismo, com diversas abordagens. Aqui descreveremos dois dos primeiros modelos propostos, que, como veremos, são capazes de explicar boa parte dos fenômenos observados.

#### **Modelo FL68 - uma massa**

Nesse modelo, proposto por Flanagan e Landgraf (1968), as cordas vocais são consideradas como um sistema massa-mola-amortecedor ( $M$  é a massa,  $K$  é a constante da mola e  $B$  é a constante do amortecedor). O sistema é excitado por uma força  $F(t)$ , dada pelo produto da pressão do ar na glote pela área da superfície intraglotal. A força age na face da corda vocal, como esquematizado na Fig. 4.15.

A força é distribuída e sua resultante, que não aparece na figura, pode ser pensada como aplicada na massa  $M$ .

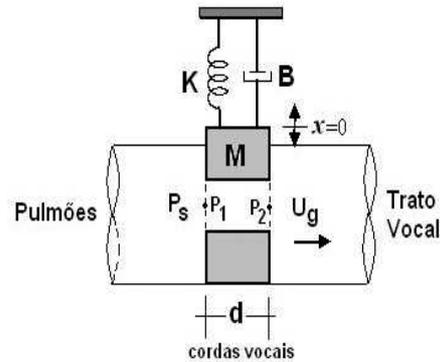


Figura 4.15: Esquema do modelo FL68.

A Fig. 4.16 mostra a visão de perfil do modelo FL68.

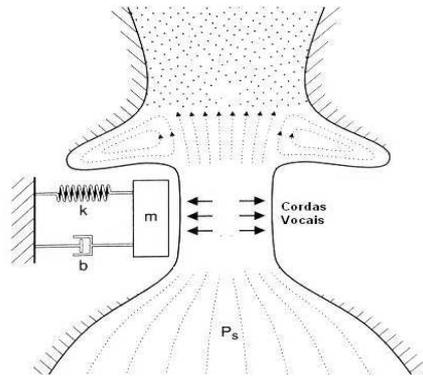


Figura 4.16: Visão do modelo FL68 na laringe, adaptada de Titze(1994)

A equação que fornece a dinâmica do sistema (das cordas vocais) é:

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = F(x, t)$$

onde  $x(t)$  é o deslocamento da massa  $M$ . O sistema é forçado com uma força  $F(t)$ . No presente estudo, a função de forçamento é considerada como a média entre as pressões de entrada e saída multiplicada pela área de contato, agindo na face da corda vocal. Temos,

$$F(x, t) = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) (\ell d) .$$

Medidas experimentais mostram que essas pressões podem ser aproximadas por  $P_1 = (P_s - 1, 37P_B)$  e  $P_2 = -0, 50P_B$

onde  $P_B = \frac{1}{2}\rho|U_g|^2 A_g^{-2}$ ,  $P_s$  é a pressão sub-glotal,  $\rho$  é a densidade do ar,  $U_g$  é a velocidade de volume de ar que passa pelo orifício glotal e  $A_g$  é a área do orifício glotal. As constantes  $\ell$  e  $d$  são o comprimento e espessura das cordas vocais, respectivamente. A área  $A_g$  é variável e dada por  $A_g = A_{g0} + \ell x$ , onde  $A_{g0}$  é área glotal neutra, ou seja, a área entre as cordas vocais quando para a situação de repouso.

Quando o deslocamento  $x(t)$  é menor do que um valor limite  $x_0 = -A_{g0}/\ell$ , há o fechamento da glote. Então o fluxo glotal passa a ser zero e o amortecimento do sistema é acrescido de um valor  $B'$ , até que a glote se abra novamente.

A relação entre a queda de pressão na glote e o fluxo de ar glotal é modelada como uma impedância equivalente. Para esse modelo temos

$$R_v = 12\mu d\ell^2 A_g^{-3}, R_k = 0, 44\rho A_g^{-2} \text{ e } L_g = \rho d A_g^{-1}$$

onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do ar.

Esse modelo relativamente simples é capaz de capturar as propriedades básicas do movimento das cordas vocais, e, como mostraremos mais adiante, é suficiente para a produção de sons convincentes. Contudo, existem certas características fisiológicas que estão ausentes desse modelo, ou deficientemente representadas. O modelo apresenta condições para a fonação mais restritas do que o observado em laringes reais, além de não ser capaz de descrever certos movimentos sutis, como a diferença de fase entre os movimentos da face superior e da face inferior da corda vocal.

### Modelo IF72 - duas massas

Para um maior detalhamento do funcionamento da glote, foram introduzidos modelos de múltiplos graus de liberdade. Um dos primeiros modelos a adotar essa estratégia foi introduzido por Ishizaka e Flanagan (1972) e será brevemente revisto a seguir.

Tal modelo considera cada uma das cordas vocais como um sistema de duas massas, ligadas às paredes da laringe por duas molas não lineares  $S_1$  e  $S_2$ , e ligadas entre si por uma mola linear  $K_c$ . As massas movem-se somente na direção transversal. Novamente, o movimento das duas cordas vocais é considerado simétrico, e só será equacionado o movimento de uma delas. O modelo está esquematizado na Fig. 4.17.

Os deslocamentos  $x_j(t)$  de cada uma das massas são regidos pelo sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1 + S_1(x_1) + B_1(\dot{x}_1) + k_c(x_1 - x_2) = F_1 \\ M_2\ddot{x}_2 + S_2(x_2) + B_2(\dot{x}_2) + k_c(x_2 - x_1) = F_2 \end{cases}$$

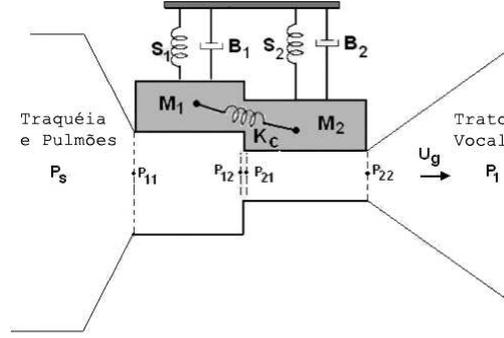


Figura 4.17: Esquema do modelo IF72.

onde  $S_1$  e  $S_2$  são as relações das molas não-lineares dadas por  $S_j(x) = K_j x(1 + \eta_j x^2)$ , para  $j=1,2$ . Os coeficientes  $K_j$  representam a rigidez linear e  $\eta_j$  são coeficientes positivos que caracterizam a não-linearidade das molas. As forças  $F_1$  e  $F_2$  dependem da pressão sub-glotal, do fluxo glotal e da área da região entre as cordas vocais. Seus valores podem ser encontrados no referido artigo.

Quando ocorre a colisão entre as duas cordas vocais, uma força de contato aparece em cada uma das massas, da forma

$$f_{h_j} = h_j \left( x_j + \frac{A_{g0j}}{2\ell} \right) \left\{ 1 + \eta_{h_j} \left( x_j + \frac{A_{g0j}}{2\ell} \right)^2 \right\}$$

para

$$x_j + \frac{A_{g0j}}{2\ell} \leq 0, \quad j = 1, 2$$

onde  $A_{g0j}$  são as áreas das seções inferior e superior da glote (correspondendo às massas 1 e 2), quando as cordas vocais estão em repouso.

Novamente, a relação entre a queda de pressão na glote e o fluxo glotal é modelada através de uma impedância acústica equivalente.

Nesse caso temos que  $R_k = R_{k1} + R_{k2}$ ,  $R_v = R_{v1} + R_{v2}$  e  $L_g = L_{g1} + L_{g2}$

sendo  $R_{k1} = \frac{0,19\rho}{A_{g1}^2}$ ,  $R_{k2} = \frac{\rho \left[ 0,5 - \frac{A_{g2}}{A_1} \quad 1 - \frac{A_{g2}}{A_1} \right]}{A_{g2}^2}$ ,  $R_{v1} = 12 \frac{\mu l_g^2 d_1}{A_{g1}^3}$ ,  $L_{g1} = \frac{\rho d_1}{A_{g1}}$ ,  $R_{v2} = 12 \frac{\mu l_g^2 d_2}{A_{g2}^3}$ ,  $L_{g2} = \frac{\rho d_2}{A_{g2}}$ ,  $A_{g1} = A_{g01} + 2\ell_g x_1$ ,  $A_{g2} = A_{g02} + 2\ell_g x_2$

onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do ar,  $\rho$  é a densidade do ar,  $d_1$  e  $d_2$  são as espessuras das seções inferior e superior das cordas vocais,  $\ell_g$  é o comprimento das cordas vocais igual e  $A_{g01}$ ,  $A_{g02}$  são as áreas neutras do orifício glotal, ou seja a área entre as seções das cordas vocais quando as mesmas se encontram em repouso.

### Variações dos parâmetros dos modelos

Os modelos acima descritos são suficientes para explicar o funcionamento do sistema de produção da voz. Entretanto, as informações fisiológicas disponíveis não são completas, de forma que é impossível determinar diretamente muitos dos parâmetros. Muitas das medidas podem ser efetuadas direta e indiretamente em laringes e tratos vocais dissecados. Entretanto, no que se refere a valores que dependem da atividade de músculos a determinação torna-se difícil, uma vez que a atividade muscular pode variar com o tempo.

Alguns dos parâmetros que apresentam maior dependência com a atividade muscular, e, portanto, não podem ser determinados facilmente a priori, são: a pressão sub-glotal, que depende da contração dos pulmões; a rigidez das cordas vocais, que varia conforme é aplicada tensão muscular; a forma do trato vocal, que varia com movimentos da boca e dos lábios.

A seguir descreveremos variações utilizadas neste trabalho para esses parâmetros. Para os demais parâmetros dos modelos, foram utilizados valores constantes que podem ser encontrados em Flanagan e Landgraf (1968) e Ishizaka e Flanagan (1968).

### Variações de pressão sub-glotal e de rigidez

Nos artigos citados, a pressão sub-glotal e a rigidez das cordas vocais são supostas constantes. Entretanto, sons sintetizados através da simulação dos modelos descritos mostraram-se muito pouco “naturais”, isto é, não se assemelham aos sons produzidos por seres humanos reais. Investigações posteriores nos mostraram que tal suposição não é fisiologicamente convincente, principalmente quando se trata da simulação de vogais curtas.

Gardner et al. (2001) mostraram que a complexidade do canto de pássaros pode ser obtida a partir de um sistema massa-mola simples, com pressão sub-glotal e rigidez variando de forma senoidal no tempo. Embora existam diferenças fundamentais entre a produção do canto nos pássaros e a produção da voz humana, existem semelhanças suficientes para que uma abordagem semelhante seja experimentada para a modelagem da voz humana.

A variação senoidal da pressão sub-glotal é coerente com o comportamento cíclico da respiração, e parece ser importante durante a fala conectada e sílabas curtas isoladas. A variação da rigidez, entretanto, aparentemente não ocorre durante a fala normal, embora seja fundamental durante o canto. Decidimos, então, não implementar qualquer variação temporal de rigidez das cordas vocais, restringindo-nos às variações da pressão-subglotal. Essa variação segue a equação:

$$P_S(t) = P_0 \text{sen} \left( \frac{\pi t}{T} \right) \quad (4.1)$$

onde  $T$  é a duração da sílaba e  $P_0$  é a pressão sub-glotal máxima durante a sílaba. Essa variação, como veremos mais adiante, é suficiente para produzir vogais isoladas e ditongos de curta duração com um grau de realismo considerável, como mostrado por Cataldo et al. (2004, 2005, e 2006).

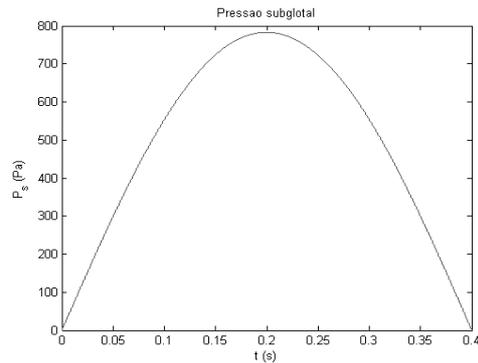


Figura 4.18: Variação de pressão subglotal ( $P_s$ )

### Variações da forma do trato vocal

Acrescentamos ao modelo a possibilidade de variar a forma do trato vocal no tempo, para permitir a síntese de ditongos. Nesse caso, as áreas das seções do trato vocal são mantidas na configuração correspondente à primeira vogal por um determinado tempo, após o qual há uma transição por interpolação linear para os valores da segunda vogal, cuja configuração também é mantida por mais um tempo. Os valores das capacitâncias, indutâncias e resistências do circuito acústico são recalculados a cada amostra, uma vez que dependem da geometria do trato vocal, que varia no tempo.

### 4.3.3 Simulação Computacional

A modelagem matemática discutida no capítulo precedente nos fornece um sistema de equações íntegro-diferenciais que descrevem o processo de produção da voz. Tal sistema, contudo, não admite soluções analíticas, devido à presença de não-linearidades e ao acoplamento entre as equações acústicas e a dinâmica das cordas vocais.

Podemos, por exemplo, usar o método de “Euler regressivo” que consiste na realização de um mapeamento do domínio da frequência contínua  $s$  no domínio da frequência discreta  $z$  na forma:

$$s \approx \frac{1 - z^{-1}}{2T}$$

onde  $T$  é o período de amostragem utilizado. No domínio do tempo, podemos escrever a relação equivalente

$$\frac{d}{dt}x(nT) \approx \frac{x[n] - x[n-1]}{T}$$

onde  $x[n]$  é amostra do sinal  $x(t)$  no instante  $t = nT$ . Analogamente, aproximamos a derivada segunda de um sinal por:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x(nT) &\approx \frac{1}{T} \left( \frac{x[n] - x[n-1]}{T} - \frac{x[n-1] - x[n-2]}{T} \right) = \\ &= \frac{x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]}{T^2} \end{aligned}$$

Para as equações integro-diferenciais do circuito acústico do trato vocal, adotamos ainda uma aproximação adicional:

$$\int_0^{nT} x(\tau) d\tau \approx T \sum_{i=0}^n x[i]$$

Dessa forma obtemos uma aproximação do sistema de equações integro-diferenciais por um sistema de equações de diferenças.

A aplicação direta das aproximações apresentadas na seção precedente geraria um sistema de equações ainda com certas dificuldades de solução, devido à presença de termos quadráticos e cúbicos e acoplamentos não lineares. Aparece novamente, portanto, a necessidade de solução numérica. Tal problema é solucionado pela introdução de atrasos fictícios, isto é, a utilização da aproximação:

$$x[n] \approx x[n-1]$$

em alguns pontos específicos.

#### 4.3.4 Resultados Obtidos

Neste capítulo mostraremos os resultados obtidos com a simulação dos modelos discutidos, fazendo comparações entre os mesmos e avaliando sua qualidade. Os sons sintetizados podem ser ouvidos na página

<http://www.professores.uff.br/ecataldo/resultados.htm>

#### Simulações de vogais sem variação de pressão sub-glotal

Nesta seção apresentamos gráficos resultantes da simulação dos modelos apresentados para uma situação de pressão sub-glotal constante, de 783 Pa. O trato vocal foi configurado para a vogal “a”, e sua aproximação foi feita com quatro tubos. As simulações foram realizadas com uma frequência de amostragem de 22050 Hz. Cada simulação foi realizada com o tempo variando de 0 a 0,5s.

Apresentaremos alguns resultados obtidos com a simulação do modelo FL68.

Na Fig. 4.19 apresentamos gráficos correspondentes às variações no tempo da área glotal ( $A_g$ ), fluxo glotal ( $U_g$ ) e pressão acústica irradiada ( $P_r$ ), sendo que os gráficos à esquerda mostram uma visão total das variações, em todo o domínio simulado, enquanto os gráficos à direita mostram uma ampliação, mostrando apenas um pequeno trecho da simulação.

No gráfico (e), em particular, podemos notar a natureza quase periódica do som produzido. Tal comportamento é condizente com observações realizadas em cordas vocais reais. Entretanto, verificamos que o som produzido dessa forma, embora reconhecível, não possui uma qualidade satisfatória, como pode ser constatado na referida página na internet.

Na Fig. 4.20 mostramos os resultados obtidos para a simulação do modelo FL68, considerando a variação da pressão subglotal. A naturalidade da voz produzida é surpreendente, como pode ser constatado na página citada.

### **Simulação de ditongos e outros sons**

Como já dito, os modelos utilizados permitem, além da síntese de vogais isoladas, a simulação de outros sons, como, por exemplo, ditongos. A seguir, mostramos e avaliamos alguns resultados obtidos com tais simulações.

Para a simulação de ditongos foi utilizado um trato vocal com forma que varia no tempo. Aqui mostramos os resultados obtidos para a simulação do ditongo “ai”. Foi utilizado o modelo FL68, com variação de pressão sub-glotal. A duração do som foi de 0,4s e a frequência de amostragem utilizada foi de 22050 Hz. Foi utilizada uma aproximação do trato vocal com dez tubos cilíndricos.

Além da síntese de ditongos, realizamos tentativas da síntese de algumas consoantes, dentre as quais a plosiva “p” apresenta por enquanto o melhor resultado. Para sua síntese, fazemos com que a forma do trato vocal modifique-se somente na última seção, que tem sua área reduzida em 1000 vezes, para simular o fechamento dos lábios. Uma redução a zero não é possível, pois acarretaria em divisões por zero na solução numérica do sistema.

Nesse exemplo simulamos a palavra “papai”. Foi utilizado o modelo FL68, com variação de pressão sub-glotal, o trato vocal foi aproximado com 10 seções e a frequência de amostragem utilizada é de 22050 Hz. Os gráficos da Fig. 4.21 mostram a área glotal, o fluxo glotal e a pressão irradiada.

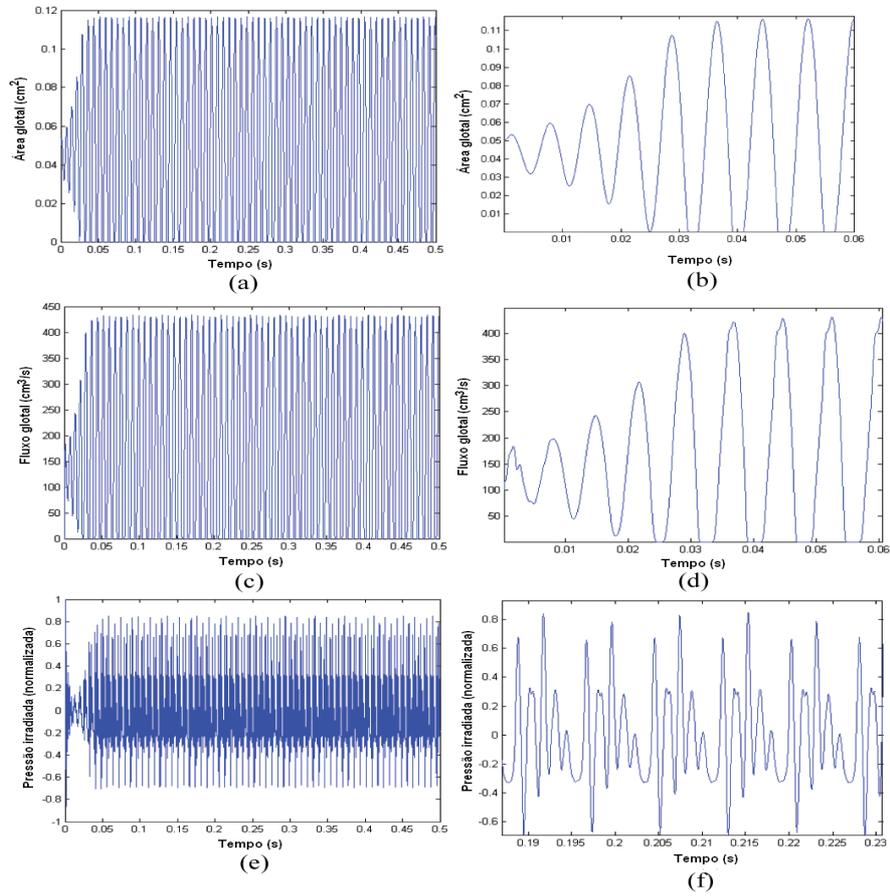


Figura 4.19: Resultados da simulação do modelo FL68 sem variação de pressão subglotal. (a) e (b) área do orifício glotal; (c) e (d) fluxo de ar glotal; (e) e (f) pressão acústica irradiada.

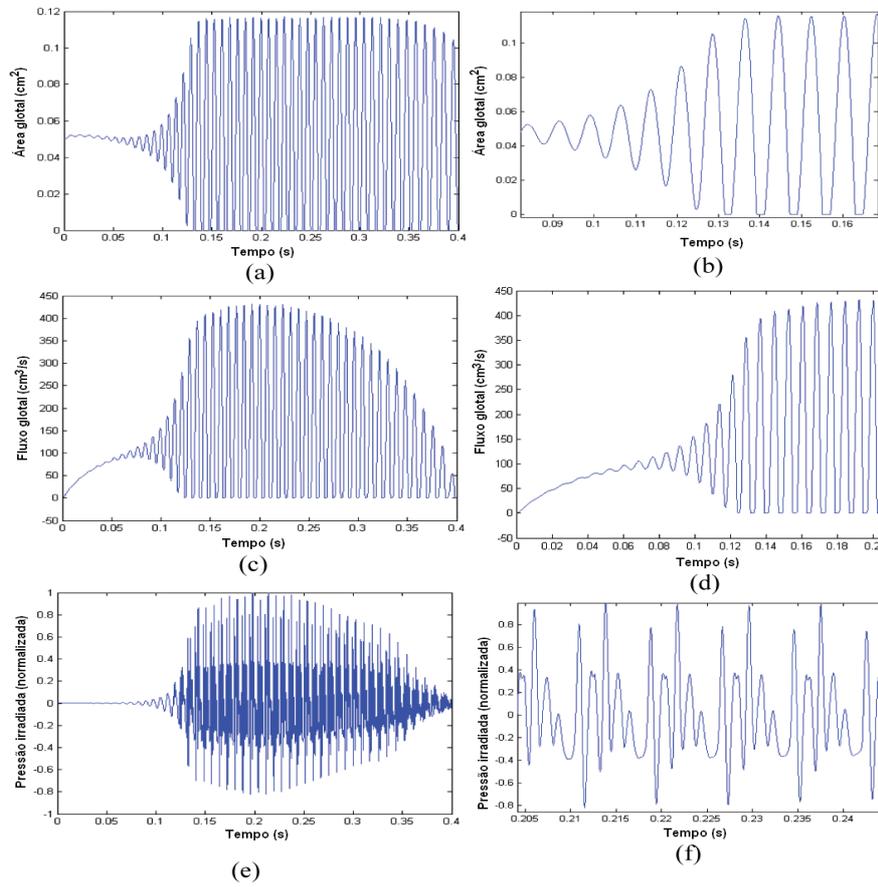


Figura 4.20: Resultados da simulação do modelo FL68 com variação de pressão sub-glotal. (a) e (b) área do orifício glotal; (c) e (d) fluxo de ar glotal; (e) e (f) pressão acústica irradiada.

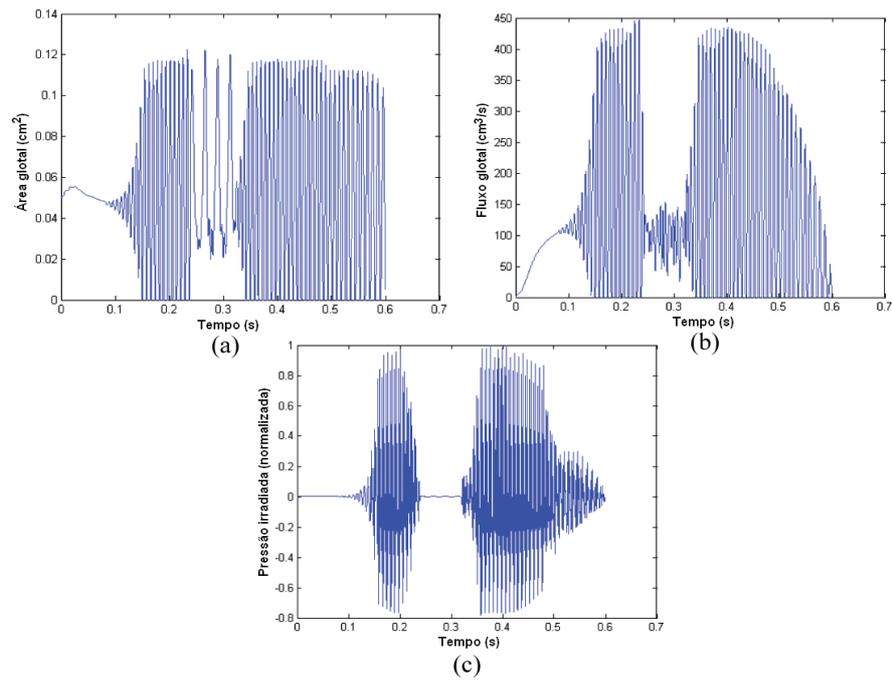


Figura 4.21: área glotal (a), fluxo glotal (b) e pressão irradiada (c) para a simulação da palavra “papai”.



# Bibliografia

- [1] Avanzini, F., "Computational Issues in Physically-Based Sound Models", Ph.D. Thesis, Università degli studi di Padova, 2001.
- [2] Berners, D.P., "Acoustics and signal processing techniques for physical modeling of brass instruments", Ph.D. Thesis, Stanford University, 1999.
- [3] Boersma, P., Praat Speech Analysis Software, [www.praat.org](http://www.praat.org), 2003.
- [4] Cataldo, E., Lucero, J., Sampaio, R., Nicolato, L., "Comparison of some models of larynx in the synthesis of voiced sounds", aceito para publicação na Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, RBCM, 2006.
- [5] Cataldo, E.; Sampaio, R.; Lucero, J.; Nicolato, N.; *Comparison of some models of larynx in the synthesis of voiced sounds*. Anais do XI DINAME, International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, 28 de fevereiro a 4 de março de 2005, Ouro Preto, Minas Gerais, <http://www.abcm.org.br/diname2005/>
- [6] Cataldo, E., Sampaio, R., Nicolato, L., "Uma discussão sobre modelos mecânicos de laringe para síntese de vogais", ENGEVISTA, Revista da Escola de Engenharia da Universidade Federal Fluminense, vol 6, n<sup>o</sup>1, 47-57, 2004.
- [7] Flanagan, J., Landgraf, L., "Self-oscillating source for vocal-tract synthesizers", IEEE Trans. On Audio and Electroacoustics, Vol. 16, pp. 57-64, 1968.
- [8] Gardner *et al.*, "Simple motor gestures for birdsongs", Physical review letters, Vol. 87, No. 20, pp 208101-1 - 208101-4, 2001.
- [9] Ishizaka, K. e Flanagan, J., "Synthesis of voiced sounds from two-mass model of the vocal cords", Bell Syst. Tech. Journal, Vol. 51, pp. 1233-1268, 1972.
- [10] Jaynes, E. T., Probability Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [11] Oppenheim, A.V. ; Schafer, R. W. Discrete-time Signal Processing. Prentice-Hall.

- [12] Papoulis, A., Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGraw-Hill Book Company.
- [13] Preumont, A., Random Vibration and Spectral Analysis. Kluwer Academic Publishers.
- [14] Rabiner, L.R. e Schafer, R.W., Digital Processing of Speech Signals, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1978.
- [15] Spiegel, M. R., Análise de Fourier. McGraw-Hill do Brasil.
- [16] Titze, I. R., Principles of Voice Production, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.
- [17] Van den Berg, J., "Myoelastic-aerodynamic theory of voice production", Journal of Speech and Hearing Research, Vol.1, pp. 227-244, 1958.
- [18] Sampaio, R.; Cataldo, E. e Riquelme R. *Introdução à Dinâmica, Estabilidade e Controle através do MATLAB*. Mini-curso dado o 20º Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), Gramado, RS, 1997. <http://www.mec.puc-rio.br/prof/rsampaio/rsampaio.html>
- [19] Sampaio, R.; Cataldo, E. e Riquelme R. *Introdução ao MATLAB*. apostila desenvolvida para iniciantes no trabalho com MATLAB, 1997. <http://www.mec.puc-rio.br/prof/rsampaio/rsampaio.html>
- [20] Sampaio, R.; Trindade, M. *Introdução ao Matlab, versão 6*. <http://www.mec.puc-rio.br/prof/rsampaio/rsampaio.html>
- [21] Sampaio, R.; Leckar, H. *Mathematical Aspects of String Vibrations*. Minicurso apresentado no 57º Seminário Brasileiro de Análise, SBA, pp. 87-135, Viçosa 14-17 de maio de 2003. <http://www.mec.puc-rio.br/prof/rsampaio/rsampaio.html>
- [22] Leckar, H., Sampaio, R.; "Aspectos Matemáticos das Vibrações Mecânicas." Notas correspondentes a um minicurso oferecido no 49º Seminário Brasileiro de Análise, 67 páginas, 1999. <http://www.mec.puc-rio.br/prof/rsampaio/rsampaio.html>

# Índice

- aliasing, 11, 48
- amostra, 91, 119
- análise de sinais, 72
  
- comutação telefônica, 10
  
- domínio da frequência, 19, 22, 24, 38, 47, 48, 52, 72, 73, 102, 103, 105, 118
- domínio do tempo, 10, 19, 22, 24, 66, 101, 102, 110, 118
  
- energia
  - acústica, 10
  - elétrica, 10
- espectro de frequências, 99
  
- filtro passa-baixa, 48, 50, 51, 54, 56, 59, 60
- filtros analógicos, 11
- frequência fundamental, 10, 24
  
- leakage, 11, 73
  
- multiplexação, 10, 97
  - analógica, 98
  - digital, 98
  
- processamento de sinais, 9, 10, 45, 54, 61, 83, 105
  
- resposta em frequência, 38–41, 55, 56, 60, 94, 105
  
- Série de Fourier, 21
- série de Fourier, 11, 20, 22, 23, 25, 26, 40, 64
- série discreta de Fourier, 61, 64
  - coeficientes, 65
  - síntese de voz, 107, 108
  - sistema de equações de diferenças, 119
- transformada de Fourier, 11, 25, 41, 44, 47–49
- transformada discreta de Fourier, 11, 61, 64, 65, 72



## NOTAS EM MATEMÁTICA APLICADA

1. Restauração de Imagens com Aplicações em Biologia e Engenharia  
Geraldo Cidade, Antônio Silva Neto e Nilson Costa Roberty
2. Fundamentos, Potencialidades e Aplicações de Algoritmos Evolutivos  
Leandro dos Santos Coelho
3. Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Águas Subterrâneas  
Edson Wendlander
4. Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais  
Maria Cristina de Castro Cunha e Maria Amélia Novais Schleicher
5. Modelagem em Biomatemática  
Joyce da Silva Bevilacqua, Marat Rafikov e Cláudia de Lello Courtoque Guedes
6. Métodos de Otimização Randômica: algoritmos genéticos e “simulated annealing”  
Sezimária F. Pereira Saramago
7. “Matemática Aplicada à Fisiologia e Epidemiologia”  
H.M. Yang, R. Sampaio e A. Sri Ranga
8. Uma Introdução à Computação Quântica  
Renato Portugal, Carlile Campos Lavor, Luiz Mariano Carvalho e Nelson Maculan
9. Aplicações de Análise Fatorial de Correspondências para Análise de Dados  
Dr. Homero Chaib Filho, Embrapa
10. Modelos Matemáticos baseados em autômatos celulares para Geoprocessamento  
Marilton Sanchotene de Aguiar, Fábria Amorim da Costa, Graçaliz Pereira Dimuro e Antônio Carlos da Rocha Costa

11. Computabilidade: os limites da Computação  
Regivan H. N. Santiago e Benjamín R. C. Bedregal
12. Modelagem Multiescala em Materiais e Estruturas  
Fernando Rochinha e Alexandre Madureira
13. Modelagem em Biomatemática (Coraci Malta ed.)
  - 1 - “Modelagem matemática do comportamento elétrico de neurônios e algumas aplicações”  
Reynaldo D. Pinto
  - 2 - “Redes complexas e aplicações nas Ciências”  
José Carlos M. Mombach
  - 3 - “Possíveis níveis de complexidade na modelagem de sistemas biológicos”  
Henrique L. Lenzi, Waldemiro de Souza Romanha e Marcelo Pelajo-Machado
14. A lógica na construção dos argumentos  
Angela Cruz e José Eduardo de Almeida Moura
15. Modelagem Matemática e Simulação Numérica em Dinâmica dos Fluidos  
Valdemir G. Ferreira, Hélio A. Navarro, Magda K. Kaibara
16. Introdução ao Tratamento da Informação nos Ensinos Fundamental e Médio  
Marcilia Andrade Campos, Paulo Figueiredo Lima
17. Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações  
Rosana Sueli da Motta Jafelice, Laércio Carvalho de Barros, Rodney Carlos Bassanezi
18. Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira  
Socorro Rangel
19. Observar e Pensar, antes de Modelar  
Flavio Shigeo Yamamoto, Sérgio Alves, Edson P. Marques Filho, Amauri P. de Oliveira
20. Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações  
Eliana Xavier Linhares de Andrade, Cleonice Fátima Bracciali