Notas em Matemática Aplicada e-ISSN 2236-5915

Volume 19, 2012

Editado por

Eliana X.L. de Andrade
Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

Rubens Sampaio
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro -
Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Geraldo N. Silva
Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

2012

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7), as figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
http://www.sbmac.org.br/notas.php

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

2012

Observar e Pensar antes de Modelar

Flavio Shigeo Yamamoto IME-USP
fsy@ime.usp.br

Sergio Alves - IME-USP
salves@ime.usp.br

Edson P. Marques Filho - IAG-USP
epmfilho@yahoo.com.br

Amauri P. de Oliveira - IAG-USP
apdolive@usp.br

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2012

Coordenação Editorial: Véra Lucia da Rocha Lopes

Coordenação Editorial da Série: Geraldo Nunes Silva

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2012 by Flavio S. Yamamoto, Sergio Alves, Edson P. M. Filho e Amauri P. de Oliveira. Direitos reservados, 2012 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

Catalogação elaborada pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

Yamamoto, Flavio S.
Observar e Pensar antes de Modelar.
- São Carlos, SP : SBMAC, 2012, 69 p., 20.5 cm
- (Notas em Matemática Aplicada; v. 19)

e-ISBN 978-85-86883-85-9

1. Matemática. 2. Geometrias Não Euclideanas.
3. Simulação Numérica. 4. Sistemas Multiagentes.
I. Alves, Sergio. II. Marques Filho, Edson P.
III. Oliveira, Amauri P. V. Título. VI. Série.

CDD - 51

Esta é uma republicação em formato de e-book do livro original do mesmo título publicado em 2005 nesta mesma série pela SBMAC.

Prefácio

A Matemática é, essencialmente, uma atividade criativa. Não somente no que diz respeito à resolução de problemas mas a própria formulação deles exige sua dose de criatividade. A preocupação inicial, em geral, não está em resolver o problema, mas enxergar qual é o cerne da questão. Nessas condições, ser criativo não significa desenvolver idéias novas por meio de predições *a priori*. A criatividade, na grande maioria das vezes, se origina da observação cuidadosa de uma coleção de problemas, vê-los e pensá-los de diversos ângulos; enxergar, de fato, qual é a *verdadeira questão*; rever e repensar os conceitos da própria matemática.

Todo esse processo em busca da compreensão matemática, envolve muita *transpiração*, Paul Halmos resume a prática do matemático da seguinte forma:

> "*The mathematician at work ...arranges and rearranges his ideas, and he becomes convinced of their truth long before he can write down a logical proof. The conviction is not likely to come early-it usually comes after many attempts, many failures, many discouragements, many false starts ... experimental work is needed ... thought-experiments.", apud Villier [146].*

As características mencionadas por Halmos são aprendidas pela prática exaustiva, aprende-se muito errando e só erra aquele que pratica. Essa prática constante aliado ao fato da Matemática ser uma atividade quase que inteiramente cerebral, favorecido por sua *linguagem simbólica* que está "fortemente conectada à nossa *estrutura de linguística*, ferramenta fundamental para o raciocínio"[141], faz com que esses profissionais criem um vínculo muito forte com os problemas que atacam. Quando um matemático pensa num problema este fica presente todo o tempo em sua cabeça, mesmo executando outras tarefas o problema e suas respectivas resoluções estão sendo processados. Naturalmente, isso ocorre em diferentes níveis de intensidade. Segundo Ronald Graham[1], "..., *a mathematician is the only scientist who can legitimately claim: - I lie down on the couch, close my eyes, and work.*", *apud* [31].

Justamente pelo fato do conhecimento matemático ter tido início em experiências práticas (de *contagem* e de *medições*) e ter alcançado essa sofisticação em atingir diferentes níveis de abstração, permitiu à ela infiltrar-se nas mais diferentes áreas do conhecimento (física, psicologia, biologia, medicina, saúde, arte,

[1]Ronald Graham atuou como diretor da área de Ciência da Informação na *AT & T Bell Laboratories* durante mais de trinta anos.

música, entretenimento, industria, comércio, computação, lingüística, direito, etc); colocando-a numa posição de clara importância. De fato, esse caráter de *surpreendente aplicabilidade da matemática* ([153]; [65]; [64]) tem sido uma constante do seu desenvolvimento [32]. Tal panorama, exige dos futuros matemáticos não somente a familiaridade com idéias e técnicas matemáticas fundamentais, mas também a compreensão da natureza do *pensamento matemático*, a capacidade de lidar com a *incerteza* e a *interdisciplinaridade*.

Essa última característica mostra que além do conhecimento e habilidades específicas - raciocínio lógico e sintético e a capacidade de estabelecer correlações, é necessário desenvolver a capacidade de interação com outros profissionais (de outras áreas do conhecimento e possivelmente de outras culturas), a competência e habilidade de levar o saber matemático para fora de sua área específica de atuação. Exige-se, portanto, que os estudantes adotem uma postura criativa - no sentido do texto, de idéias novas, de opiniões próprias; que aprendam a observar sem preconceitos ou pré-conceitos de visões equivocadas - aprendidas ou ensinadas; que estejam dispostos a enxergar os diferentes mundos que os cercam.

Flavio S. Yamamoto

Agradecimentos

Os autores agradecem à organização do evento pela oportunidade de apresentação deste trabalho.

Os autores Edson P. Marques Filho e Amauri P. de Oliveira agradecem o suporte financeiro recebido do CNPq e à FAPESP. Ao Laboratório de Computação Científica Avançada Aplicada da Universidade de São Paulo (LCCA-USP) pelo suporte técnico e computacional necessário para a realização deste trabalho.

Conteúdo

1 Observar e Pensar **1**
1.1 Da Observação à Descoberta de Diferentes Matemáticas 2
1.1.1 A Evolução da Matemática dos Padrões de Variação 3
1.1.2 As Matemáticas e os Mundos Possíveis 4
1.1.3 A Matemática da Matemática 5
1.2 Antigos e Novos Desafios 6

2 Um Modelo não Convencional de Geometria **7**

3 Simulação Numérica do Transporte de Poluentes na Camada Limite Atmosférica **14**
3.1 Introdução 15
3.2 Modelos Numéricos 16
3.2.1 O Modelo LES 18
3.2.2 Esquemas Numéricos e Condições de Fronteira 19
3.2.3 Recursos Computacionais e Experimentos Numéricos 20
3.3 Propriedades da CLA altamente convectiva 22
3.4 Dispersão de poluentes 29
3.5 Dispersão euleriana pra fonte área contínua 33
3.6 Dispersão euleriana para fontes pontuais contínuas 36
3.7 Conclusões 42

4 Sistemas Multiagentes Baseados em Conhecimento **44**
4.1 Introdução 44
4.2 A Lógica Proposicional Clássica 45
4.3 A Lógica Modal Proposicional 47
4.3.1 A semântica dos mundos possíveis 47
4.4 Conhecimento e Representação de Conhecimento 49
4.4.1 Os Sistemas Multiagentes K_n, T_n, $\mathsf{S4}_n$, $\mathsf{S5}_n$ e $\mathsf{KD45}_n$ 50
4.5 Conhecimento Comum 51
4.5.1 Aplicação em Sistemas Síncronos sem Falhas: 52
4.5.2 Inferência no *Muddy Children Puzzle* 53
4.6 Conhecimento Distribuído 54

4.7 Considerações Finais 55

Referência Bibliográfica **57**

Capítulo 1

Observar e Pensar

Seis cegos examinaram um elefante
e passaram a discutir sobre essa experiência, sobre o que viram com o tato.
"É maravilhoso," disse o primeiro, "é
como um enorme abano". "Parece-se
com um espanador," disse o segundo.
"Discordo," disse o terceiro, "é como
um a árvore". "Não, não parece nada
disso," falou o quarto, "um elefante
é como uma montanha". "Vocês estão
errados," disse o quinto, "é como uma
cobra". "Não, vocês não sabem o que
dizem," disse o sexto, "um elefante
é como um par de lanças".

Adaptação livre de uma tradicional fábula indiana.

Desde os tempos mais remotos o homem elabora *modelos* para capturar a realidade ou parte dela, através deles procura expressar o conhecimento e a capacidade de manipular esse saber. Um *modelo* (ou *teoria*) *matemático* é essencialmente fruto da observação, o processo de construção e as análises sobre um modelo acabado (ou não) permite, entre outras coisas, enxergar o que não se pode ver (tratar o imaginável não observável).

A construção de modelos deve ser bem-estruturada de modo que o todo não seja meramente uma "colagem inconsistente" das partes. Como na fábula indiana, se as partes não concordarem (não estiverem corretamente relacionadas), o todo pode ser um *objeto impossível*; assim como é a estrutura da Figura 1.1.

Figura 1.1: Queda-d'água - Litografia de M. C. Escher de 1961. Uma construção impossível.

1.1 Da Observação à Descoberta de Diferentes Matemáticas

Os modelos que criamos são construídos a partir de nossa experiência e da observação. A capacidade de saber enxergar os detalhes - dados que descrevem o comportamento do sistema em estudo, é tão importante quanto a de observação do todo; uma complementa a outra. Por exemplo, não fosse a precisão dos dados coletados por Tycho Brahe (1546-1601), obtidas através de observações exatas e sistemáticas das posições dos planetas por um longo período de tempo, Johannes Kepler (1571-1630) - considerado o fundador da Astronomia Moderna, jamais teria formulado as três leis sobre o movimento gravitacional que descrevem os movimentos dos planetas de nosso sistema solar, tomando o Sol como referencial [16].

O salto seguinte dependeria de uma nova Matemática. As tentativas em descrever os movimentos dos planetas esbarravam num problema fundamental: o aparato matemático servia essencialmente para tratar padrões estáticos. O estudo do movimento contínuo dos corpos exigia que se aplicasse o ferramental existente ao estudo de padrões de variação. Tal inovação, hoje conhecido como Cálculo Diferencial, foi feita de forma independente por Isaac Newton e Gottfried Leibniz.

De fato, sem o estudo realizado por Kepler, sobre o movimento dos astros, e as formulações de Galileu Galilei (1564 - 1642), sobre as leis do movimento dos corpos em queda livre e dos projéteis, Isaac Newton (1642-1727) jamais teria unificado a Física de Galileu com a Astronomia de Kepler [46]. O cálculo de Leibniz tinha uma notação superior, incluindo os símbolos para diferenciação e integração. Trabalhou em diversas áreas do conhecimento, antecipou o desenvolvimento de *lógica*

simbólica, buscava uma espécie de lógica ou matemática generalizada, pela qual se pudesse transformar os raciocínios em cálculos. Também fez estudos sobre a noção de verdade sob a óptica dos *mundos póssíveis*, *verdades necessárias* e *verdades contingentes*. No Capítulo 4 tratamos, de modo breve, alguns desses conceitos.

Grosso modo, podemos dizer que a idéia de estudar o movimento contínuo por meio de padrões de variação seria algo como *olhar o movimento contínuo como sendo formado por seqüências de quadros estáticos*. Diferentes ferramentas matemáticas como a Geometria e a Álgebra poderiam ser utilizads para analisar cada quadro de forma isolada, no entanto nenhuma delas permitia tratar o movimento contínuo. Para descrever matematicamente o movimento contínuo, um encadeamento infinito, Newton e Leibniz projetaram os quadros a uma velocidade infinita, de modo que cada quadro teria uma duração infinitamente curta [31].

O uso do Cálculo Diferencial permitiu que os matemáticos John Couch Adams (1819-1892) e Urbain Le Verrier (1811-1877) fizessem, separadamente, a previsão da existência e posição de uma massa planetária até então não observada (no caso Netuno).

Resumindo, as observações de Tycho Brahe permitiram a Kepler generalizar os resultados obtidos pelas medições, possibilitando o conhecimento sobre as regras do comportamento dos objetos observados. A compreensão de certos fatos e fenômenos diretamente observáveis juntamente com uma nova matemática, obtida por Leibniz e Newton a partir dos trabalhos de Galileu e Kepler, permitiu que astrônomos da época pudessem fazer predições, levando-os a reavaliar a estrutura estabelecida.

1.1.1 A Evolução da Matemática dos Padrões de Variação

Problemas relacionados com a atração gravitacional de corpos de diversas formas, dentre outros problemas, fizeram com que físicos e matemáticos lidassem com as primeiras equações diferenciais parciais. Muitos fenômenos físicos podem ser descritos apenas por uma equação em derivadas parciais, mas existem outros como, por exemplo, os relacionados ao movimento de fluídos que necessitam de um sistema de equações diferenciais parciais para que possam ser descritos. Chamamos de Equações de Navier-Stokes (Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836) e George Gabriel Stokes (1819-1903)) as equações diferenciais parciais que descrevem o movimento de fluídos, tais como a água ao redor do casco de um barco, o ar em torno da asa de uma aeronave ou do aerofólio de um carro de corrida, o movimento da atmosfera, etc.

Até o momento, ninguém exibiu pistas de como achar a solução geral das equações de Navier-Stokes ([45]; [31]), nem mesmo sabemos se existe uma tal solução matemática, uma fórmula, que satisfaça as equações. No entanto, isso não parece impedir os avanços tecnológicos nos projetos de embarcações navais, aeronaves e automóveis, ou de fazer previsões atmosféricas. Ao invés de procurarem a solução geral, os matemáticos, físicos e engenheiros resolvem casos particulares das equações de forma aproximada.

Por exemplo, é possível modelar o transporte de poluentes na atmosfera.

Nesse caso, utiliza-se o modelo de simulação direta dos grandes turbilhões, denominado *Large-Eddy Simulation* (LES), para simular as propriedades da Camada Limite Atmosférica (CLA) convectiva com precisão suficiente para gerar um conjunto de dados das variáveis meteorológicas e da dispersão de poluentes na escala de curto alcance. Nos modelos do tipo LES a separação entre a escala resolvida e a escala não-resolvida é obtida através da aplicação de um filtro passa-baixa sobre as variáveis das equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível ([88]; [161]). Tal estudo é fundamental no gerenciamento ambiental e envolve o conhecimento detalhado da evolução temporal e espacial da atmosfera, como um todo, e da Camada Limite Atmosférica (CLA), em particular. Este é o assunto tratado no Capítulo 3 deste texto.

1.1.2 As Matemáticas e os Mundos Possíveis

Em 1823, Janós Bolyai (1802-1860) teria escrito "*Descobri coisas tão maravilhosas que sinto-me aturdido ... do nada eu criei um estranho mundo novo*", em uma carta a seu pai [58]. Podemos considerar que a criação desses "novos mundos" deram à Matemática uma nova dimensão, de certa forma, libertou-a do mundo físico. Essa liberdade possibilitou incríveis avanços na própria estrutura interna da matemática e, posteriormente, novas contribuições às ciências naturais - a aplicabilidade da matemática nas ciências naturais é algo surpreendente ([153] e [65]). De forma completamente independente, Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) publicou em 1829 o seu trabalho sobre sua descoberta: a *geometria hiperbólica*. Na segunda metade do Século XIX, Bernard Riemann (1826-1866) desenvolveu outra geometria, a *geometria esférica*, posteriormente chamada de de *elíptica*.

> *Given a straight line L in the plane and a point P not lying on L, then through P there is exactly one straight line that does not intersect L. Right? Well, if you believe that − the crystallized opinion − then you are a Euclidean, for the statement is a consequence of Euclid's Fifth Postulate.*
>
> *If you believe that there is an infinity of such parallel lines, you are a Bolyaian or a Lobachevskian, depending on your national predilections.*
>
> *If you believe that there is no such parallel, you are a Riemannian. And if you believe that there are precisely six parallels, I'm not sure what to call you.*
>
> *In any case, recognition that one might hold other beliefs (assumptions, really) about the line L and the point P blew to bits the accepted truth that Euclidean geometry had a priori validity as a description of physical space*, [58].

As aplicações das descobertas de Bolyai, Lobachevsky e Riemann só ocorreriam posteriomente. Foi somente em 1868, com os estudos de Eugenio Beltrami (1835-1900) sobre a natureza dos problemas de navegação, importantíssimos na época, que se obteve o primeiro modelo para a geometria hiperbólica: a *geometria*

do navegante - o Capítulo 2 deste texto exibe um outro modelo de geometria: a *geometria do taxista*. A geometria de Riemann daria suporte a algumas descobertas relacionadas ao espaço curvo e a própria Teoria da Relatividade de Einstein [37].

Vale lembrar que a geometria de Euclides era considerada a *verdadeira geometria*, pois o que ela tratava possuia significado direto com os objetos do mundo real, descrevendo fielmente o espaço físico de modo que não havia sentido desconfiar que de seus elementos fosse possível chegar a uma *inconsistência*. Essa linha de pensamento era tão forte que Immanuel Kant (1724-1804), um dos filósofos dominantes no início do Século XIX, defendia que a *geometria euclideana era uma necessidade inevitável do pensamento* [34]. As conseqüências dessas novas Metemáticas, a das geometrias não-euclideanas, contribuiram não somente para a descoberta de novos mundos, mas influenciaram as idéias sobre os conceitos relacionados ao *pensar humano*: *um triunfo da razão sobre a Crítica da Razão*?

1.1.3 A Matemática da Matemática

Os trabalhos de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Bolyai, Lobachevski e Riemann libertaram a matemática do mundo físico, no entanto os resultados pouco intuitivos gerados (a princípio, *produtos mentais sem nenhum vínculo com o mundo físico*) levaram os matemáticos a reconsiderar o papel da *intuição na matemática*. Fato que direcionou os matemáticos em busca de fundamentações sobre noções mais abstratas, grosso modo, levou-os a formalizar uma Matemática da Matemática: a *Metamatemática*. Esse processo envolveu filófosos e matemáticos como Gottlob Frege (1848-1925), Georg Cantor (1845-1918),David Hilbert (1862-1943), Bertrand Russell (1872-1970), Kurt Gödel (1906-1978), entre tantos outros. Como resultado o *pensar matemático* ganhou retoques da escola formalista.

A matematização de um fato ou fenômeno pode ser descrito do seguinte modo: primeiramente, procura-se eliminar o que parece ser secundário, permitindo aos matemáticos se concentrem no núcleo da questão, aliviando-os da necessidade de terem sempre em mente as características secundárias. A seguir, construídas as abstrações (que podem ser simples cadeias de números ou figuras geométricas a complexos conjuntos de equações), utiliza-se a linguagem da matemática para efetivar tais abstrações em *representações simbólicas* que podem ser combinados e recombinados de várias maneiras, segundo regras bem definidas. Evidentemente, de vez em quando, os matemáticos procuram manter vínculos com os fatos e fenômenos que originaram tais *objetos abstratos* e suas respectivas representações simbólicas.

Um exemplo explícito desse processo está no *método axiomático*, que possibilita formalizar a construção de sistemas matemáticos, em particular é a forma usual pelo qual se edifica o estudo de um sistema lógico [22]:

- escolhe-se certo número de noções e de *proposições primitivas*, suficientes para sobre elas edificar a teoria, aceitando-se outras idéias ou outras proposições só mediante, respectivamente, *definições* e *demonstrações*; obtém-se, dessa maneira, uma *axiomática material* da teoria dada;

- deixam-se de lado os significados intuitivos dos *conceitos primitivos*, considerando-os como termos caracterizados implicitamente pelas proposições primitivas;
- procuram-se as *conseqüências* do sistema obtido, sem preocupação com a natureza ou com o significado inicial desses termos ou das relações entre eles existentes.

No método axiomático necessitamos somente dos *postulados* que caracterizam os objetos denotados pelos elementos primitivos considerados. A natureza dos objetos não tem relevância para análise dos resultados desejados. Os Capítulos 2 e 4 apresentam aplicações do método axiomático, especificamente no Capítulo 4, utilizamos esse método para formalizar a construção de um sistema multiagente que captura a noção de conhecimento [162].

Seja a Matemática puramente para explorar os padrões e as possíveis relações entre abstrações - sem ter em conta se tais objetos abstratos têm ou não correspondentes no mundo real, ou aplicada a resolução de problemas - que tenham origem no mundo físico, ambas utilizam técnicas semelhantes e a diferença reside essencialmente na intenção. Apesar da Matemática pura, ao contrário de outras ciências, não ser limitada pelo mundo real, a longo prazo, contribui para uma melhor compreensão desse mundo, fazendo com que os resultados da Matemática Pura e Aplicada influenciem-se reciprocamente.

1.2 Antigos e Novos Desafios

Percebemos que o desenvolvimento de novas teorias vêm da observação e introspecção (ou ambos), resultado de um processo constante pela busca da compreensão e explicação de fatos e fenômenos observados tanto no mundo físico (real) quanto na própria estrutura interna da Matemática. O desenvolvimento da Matemática não se processa de maneira isolada, recebe influências freqüentes das próprias mudanças que ela própria ajudou a realizar, as interligações entre a razão prática e a razão pura são evidentes. As duas atividades (Matemática Pura e Matemática Aplicada) criaram vínculos tão intrincados e delicados que é impossível uma sociedade progredir em uma sem ter a outra [32].

As aplicações atuais em *biologia*, *ciências sociais*, *cognição* - em *sistemas complexos* envolvendo ou não o conceito de *emergência*, têm exigido uma Matemática que considere a *intensionalidade* ([131]; [3]; [163]; e [142]), na sintaxe da descrição estrutural nos modelos desses sistemas.

Ao mesmo tempo que muitos matemáticos trabalham para manter a *eficácia não plausível da Matemática* ([153]; [65]) nas mais diferentes áreas do conhecimento, outros continuam batalhando para torná-la (pelo menos parte dela) um instrumento acessível à grande maioria das pessoas, para que possam utilizá-la como um meio de melhor compreender e dominar a realidade. Ambos são desafios que certamente irão exigir muita *criatividade*, *observação*, *intuição* e *introspecção* tanto para compreender essa nova Matemática, quanto para transmistir essa compreensão.

Capítulo 2

Um Modelo não Convencional de Geometria

Uma geometria plana pode ser pensada como um sistema matemático consistindo de quatro ingredientes básicos: um conjunto $\mathcal{P}$ de **pontos**, uma coleção $\mathcal{L}$ de subconjuntos não vazios de $\mathcal{P}$ chamados de **linhas**, uma **função distância** d e uma **função medida angular** m. Tal sistema $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d, m\}$ satisfaz a um determinado número de postulados entre eles o chamado postulado LAL de congruência de triângulos.

LAL - Dados dois triângulos ΔABC e ΔDEF, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\angle A \cong \angle D$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, isto é, também valem as congruências $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$.

Lembramos que as congruências de segmentos e ângulos são definidas a partir da distância d e da medida angular m, respectivamente. Mais precisamente, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ significa que $d(A, B) = d(D, E)$ enquanto que $\angle A \cong \angle D$ é caracterizado por $m(\angle A) = m(\angle D)$.

A lista completa dos postulados satisfeitos por $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d, m\}$ pode ser encontrada em [81].

No modelo usual de geometria euclidiana plana (também chamado geometria analítica), os pontos são dados por pares ordenados (x, y) de números reais e as linhas são descritas pelas soluções de equações lineares do tipo $ax + by + c = 0$, onde a, b, c são constantes reais com a e b não simultaneamente nulos. Os ângulos são medidos em graus por meio de um transferidor ideal, ou ainda, utilizando-se o produto interno usual de vetores no plano. A distância d_E entre dois pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ é dada por

$$d_E(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \quad .$$

Neste texto vamos considerar um modelo de geometria em que os pontos e as linhas são exatamente os mesmos que na geometria analítica. Também os ângulos

serão medidos da mesma maneira. A diferença está na determinação da distância entre dois pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ que agora passa a ser dada por

$$d_T(A, B) = |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| \quad .$$

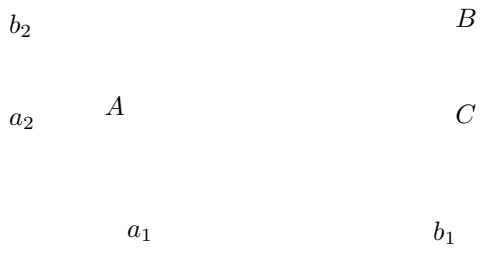

Figura 2.1: Distância Euclidiana e distância do taxista.

Note que enquanto d_E é calculada, em geral, ao longo da hipotenusa do triângulo retângulo ΔABC (veja Figura 2.1), a distância d_T é calculada ao longo dos catetos. O modo como esse cálculo é feito sugere a distância percorrida em uma rota de taxi entre dois pontos de uma cidade ideal cujas ruas são ou paralelas ou perpendiculares entre si. Daí a razão porque alguns autores chamam este exemplo de geometria do taxista.

Quais alterações na geometria podemos ter com esta nova distância d_T?

Uma das relações básicas entre os pontos de uma geometria é definida a partir de uma distância d como se segue: diz-se que $A - C - B$ (lê-se C está entre A e B) se e somente se A, B, C são pontos distintos e colineares satisfazendo $d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$.

Dados dois pontos distintos A e B, o segmento de extremos A e B é então definido como sendo o conjunto

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{C/A - C - B\} \quad .$$

Não é difícil verificar que para a distância euclidiana d_E ou para a distância do taxista d_T, o conjunto $\overline{AB}$ é exatamente o mesmo, ou seja, os segmentos na geometria do taxista são iguais aos segmentos na geometria euclidiana. Como conseqüência, o mesmo ocorre para semi-retas, semi-planos, ângulos e triângulos na geometria do taxista.

Vejamos o que acontece com uma circunferência de centro A e raio r, definida em $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d, m\}$ por $C_{A,r} = \{P \in \mathcal{P}/d(P, A) = r\}$. A Figura 2.2 ilustra $C_{A,r}$ na geometria euclidiana e a Figura 2.3 na geometria do taxista. Nesta, se $A = (a_1, a_2)$ então $C_{A,r} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/|x - a_1| + |y - a_2| = r\}$. Vemos assim que uma

circunferência na geometria do taxista corresponde a um quadrado devidamente posicionado da geometria euclidiana!

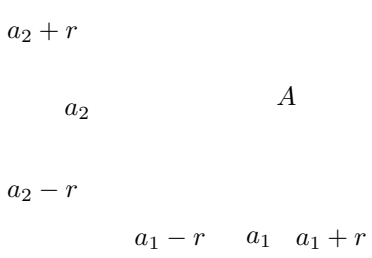

Figura 2.2: Circunferência euclidiana.

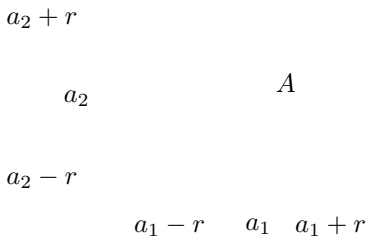

Figura 2.3: Circunferência na Geometria do taxista.

Outro conceito bem conhecido da geometria é a mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ definido como sendo a linha m perpendicular a $\overline{AB}$ no seu ponto médio M.

Como a medida angular é a mesma tanto na geometria euclidiana quanto na geometria do taxista segue que a representação da mediatriz coincide em ambas as geometrias (veja Figura 2.4).

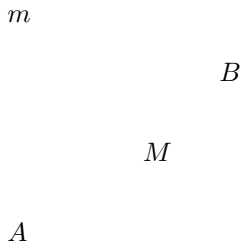

Figura 2.4: Mediatriz de um segmento.

Um fato interessante é que, na geometria euclidiana, a mediatriz m de $\overline{AB}$ pode também ser vista como o conjunto dos pontos eqüidistantes de A e B, isto é, $m = \{P/d_E(P, A) = d_E(P, B)\}$.

Na geometria do taxista, temos que $\Omega = \{P/d_T(P, A) = d_T(P, B)\}$ é uma figura totalmente diferente da mediatriz m de $\overline{AB}$. Considere, por exemplo, $A = (0, 0)$ e $B = (4, 2)$. Trabalhando com conjuntos da forma $\{P/d_T(P, A) = r$ e $d_T(P, B) = r\} = C_{A,r} \cap C_{B,r}$ onde r assume valores ≥ 3 obtemos a representação abaixo (Figura

2.5) para o conjunto Ω.

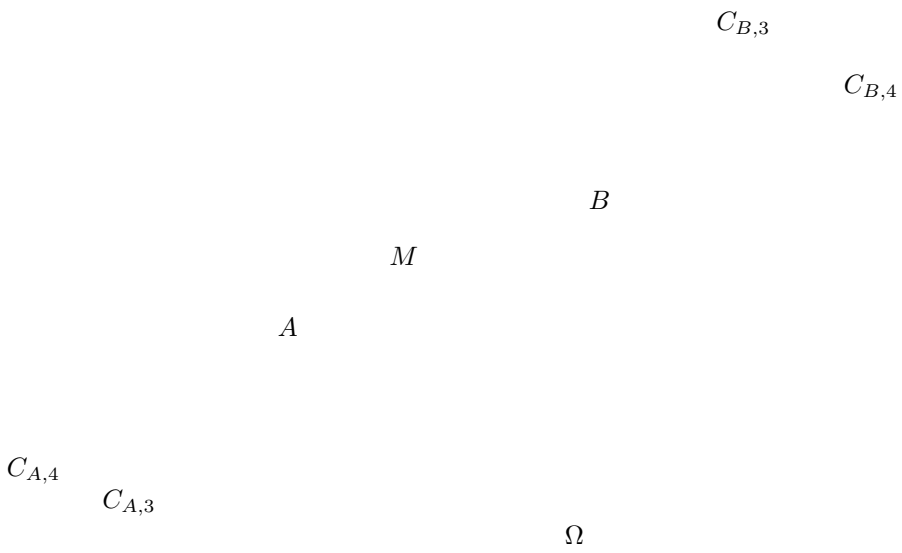

Figura 2.5: O conjunto dos pontos eqüidistantes de A e B.

Dependendo da posição de A e B, o conjunto Ω dos pontos eqüidistantes de A e B pode inclusive assumir uma forma mais estranha do que a "poligonal" acima. Se $A = (0, 0)$ e $B = (4, 4)$ então Ω contém subconjuntos do plano com conteúdo não nulo (veja Figura 2.6).

Figura 2.6: O conjunto dos pontos eqüidistantes de A e B.

Dados dois pontos A e B na geometria do taxista, considerando-se um ponto $C \in \Omega = \{P/d_T(P,A) = d_T(P,B)\}$, porém, com $C \notin m$, m a mediatriz de $\overline{AB}$, obtemos um triângulo isósceles ΔABC cujos ângulos da base não são congruentes. Por exemplo, se $A = (0,0), B = (4,4)$ e $C = (5,0)$ então $d_T(A,C) = 5 = d_T(B,C)$ de modo que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. No entanto, $m(\angle A) = 45$ e $m(\angle B) > 45$ (veja Figura 2.7).

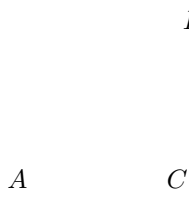

Figura 2.7: Lados congruentes, ângulos não congruentes.

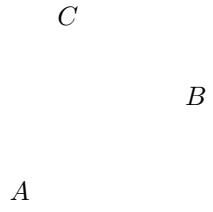

Figura 2.8: ângulos congruentes, lados não congruentes.

Por outro lado, escolhendo-se um ponto $C \in m$, porém, com $C \notin \Omega$, obtemos um triângulo ΔABC com dois ângulos congruentes e que não é isósceles. Assim, se $A = (0,0), B = (4,2)$ e $C = \left(\frac{1}{2}, 4\right)$ então $m(\angle A) = m(\angle B)$ (verifique!) mas $\overline{AC} \ncong \overline{BC}$ pois $d_T(A,C) = \frac{9}{2}$ e $d_T(B,C) = \frac{11}{2}$ (veja Figura 2.8).

Qual a razão para esses resultados não convencionais na geometria do taxista? Aparentemente não temos a validade de conhecidos teoremas da geometria plana, tais como:

1. A mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ coincide com o conjunto dos pontos eqüidistantes de A e B.
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes, isto é, se dois lados de um triângulo são congruentes então os ângulos que se opõem a esses lados também são congruentes.
3. Se dois ângulos de um triângulo são congruentes então os lados que se opõem a esses ângulos também são congruentes.

Se verificarmos as demonstrações desses resultados, por exemplo em [81], observamos em todas elas o papel fundamental desempenhado pelo postulado LAL de congruência de triângulos. Este fato levanta a questão de sabermos se a geometria do taxista satisfaz ou não tal postulado.

Considere os triângulos ΔABC e ΔDEF onde $A = (0,0), B = (-1,1)$,

$C = (1, 1), D = (2, 0), E = (4, 0)$ e $F = (2, -2)$.

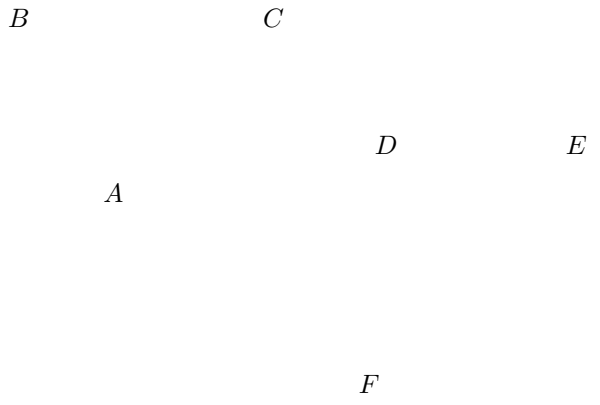

Figura 2.9: O LAL na geometria do taxista.

Como $d_T(A, B) = 2 = d_T(D, E)$ e $d_T(A, C) = 2 = d_T(D, F)$ segue que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. Além disso, $m(\angle A) = 90 = m(\angle D)$, ou seja, $\angle A \cong \angle D$ (veja Figura 2.9). Temos até aqui estabelecido a validade das hipóteses do postulado LAL.

No entanto, não é verdade que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ pois embora $\angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$ (por quê?) temos $d_T(B, C) = 2$ e $d_T(E, F) = 4$, isto é, $\overline{BC} \ncong \overline{EF}$.

O exemplo acima mostra que a geometria do taxista não satisfaz o postulado LAL. Mais ainda, é possível verificar que a geometria do taxista satisfaz os mesmos postulados que a geometria euclidiana com uma única exceção: o postulado LAL de congruência de triângulos (veja [81]). Trata-se, portanto, de um exemplo de geometria não-euclidiana.

É interessante observar que o mesmo par de triângulos ΔABC e ΔDEF dados acima nos fornecem exemplos de triângulos não congruentes e que, no entanto, satisfazem às hipóteses dos critérios ALA e LAA_0 de congruência de triângulos.

Para o critério LLL considere $A = (1, 1), B = (3, 1), C = (1, 3), D = (-3, 1)$, $E = (-1, 1)$ e $F = (-4, 2)$. Temos que $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{AC} \cong \overline{DF}, \overline{BC} \cong \overline{EF}$ e, no entanto, $\angle A \ncong \angle D$ (verifique!). Logo novamente não é verdade que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Em suma, nenhum dos casos clássicos de congruência de triângulos é válido na geometria do taxista.

Retornando ao triângulo ΔABC representado na Figura 2.9, temos um exemplo de um triângulo retângulo equilátero! Consequentemente, o teorema de Pitágoras não é verdadeiro na geometria do taxista.

Estes exemplos evidenciam o "estrago" que a ausência do LAL pode causar numa geometria.

Outras questões podem ser estudadas: como é a distância entre uma reta e um ponto fora dela e, a partir daí, como são as parábolas na geometria do taxista? E as elipses? E as hipérboles? Deixamos essas investigações e outras aqui não explicitadas para o leitor curioso recomendando aos mais impacientes a leitura de [99].

Uma palavra final. O leitor deste texto pode achar que o estudo desta geometria não convencional tem interesse puramente teórico. Não é verdade. Uma passada de olhos em [99] revela uma série de aplicações significativas em problemas de geografia urbana tais como planejamento de cidades, rotas de metrô, etc.

Capítulo 3

Simulação Numérica do Transporte de Poluentes na Camada Limite Atmosférica

A determinação do transporte de poluentes na atmosfera é um fator importante no gerenciamento ambiental e envolve o conhecimento detalhado da evolução temporal e espacial da atmosfera, como um todo, e da Camada Limite Atmosférica (CLA), em particular.

Existem diversas dificuldades envolvidas na realização de experimentos de campo que forneçam informações detalhadas sobre a estrutura da turbulência na CLA e dos padrões associados à dispersão de poluentes. O elevado custo financeiro e as dificuldades experimentais de medir as variáveis meteorológicas relevantes fazem com que a utilização de modelos numéricos seja recomendada.

Nesse estudo, o modelo de simulação direta dos grandes turbilhões, denominado *Large-Eddy Simulation* (LES), é utilizado para simular as propriedades da CLA convectiva com precisão suficiente para gerar um conjunto de dados das variáveis meteorológicas e da dispersão de poluentes na escala de curto alcance. Esse procedimento proporciona uma descrição detalhada das propriedades estatísticas da estrutura vertical da CLA convectiva e pode ser utilizado na validação dos modelos operacionais existentes.

Para exemplificar o potencial do modelo LES, será investigado um poluente considerado inerte e passivo, emitido continuamente por uma fonte área de $5km \times 5km$ localizada próxima a uma superfície horizontalmente homogênea.

Os resultados da simulação numérica da CLA convectiva serão analisados, utilizando como referência o comportamento do monóxido de carbono na Cidade de São Paulo. Verifica-se que os padrões de dispersão do monóxido de carbono gerados pelo modelo LES também podem ser considerados representativos de uma área relativamente plana da Região Metropolitana de São Paulo (RMSP), caracterizada por intenso tráfego de veículos automotores, durante períodos de forte convecção

térmica associada à baixa velocidade do vento.

A reprodução do comportamento da pluma de um poluente inerte e passivo, emitido por uma fonte pontual contínua localizada em diferentes alturas da CLA será utilizada como validação dos resultados de dispersão obtidos para o monóxido de carbono na RMSP.

3.1 Introdução

A camada limite atmosférica (CLA) é a região da atmosfera em contato direto com a superfície terrestre onde está localizada a maior parte das fontes naturais e antropogênicas de gases e material particulado, sendo, portanto, onde os poluentes lançados sofrem as primeiras transformações químicas ao serem transportados pelo vento e pela turbulência.

A CLA tem sua origem ligada aos processos turbulentos associados às trocas de energia, momento e massa entre superfície e a atmosfera. Os fluxos verticais turbulentos de calor sensível e latente determinam em grande parte a estrutura vertical média da temperatura e da umidade na CLA, enquanto o transporte vertical turbulento de momento horizontal condiciona a estrutura dinâmica (Stull, 1988).

Durante o período diurno a turbulência na CLA é mantida pela produção térmica e pela produção mecânica de energia cinética turbulenta (ECT) e pode ser dividida em três camadas: camada limite superficial (CLS), com altura de dezenas de metros e onde ocorre à geração de turbulência mecânica e térmica, e os gradientes verticais das propriedades médias são intensos; camada de mistura (CM), com espessura de até $2000m$ e onde os gradientes verticais das propriedades médias são pequenos e camada de transição (CT), com espessura variável entre 50 e $200m$ e onde a turbulência é intermitente e os gradientes verticais das propriedades médias são intensos [113]. Á noite a turbulência é mantida pela produção mecânica de ECT e dissipada pela destruição térmica de ECT associada à presença de uma estratificação estável induzida pelo resfriamento radiativo da superfície.

A complexidade dos processos envolvidos na evolução da atmosfera, principalmente os associados à descrição da turbulência na CLA, requer o uso de modelos matemáticos para determinar o transporte de poluentes na atmosfera.

Os modelos matemáticos que determinam as propriedades da atmosfera e o seu efeito sobre o(s) poluente(s) são denominados modelos de dispersão. Eles representam uma importante ferramenta de investigação dos transportes de poluentes desde que sejam validados através de observações detalhadas da dispersão atmosférica. Porém, inexistem dados de concentração de poluentes e das variáveis meteorológicas relevantes (vento, altura da CLA, rugosidade aerodinâmica, parâmetro de estabilidade, etc.) que possam ser utilizadas para validar os modelos de dispersão.

No Brasil, em particular, a aplicação indiscriminada desses modelos em estudos de licenciamento ambiental não reflete as condições climáticas esperadas para as regiões tropicais e subtropicais, e deve ser revista.

Uma forma alternativa de determinar o transporte turbulento de curto alcance é o emprego do modelo de simulação direta dos grandes turbilhões, denom-

inado *Large-Eddy Simulation* (LES). Nesse modelo, as propriedades da CLA convectiva são simuladas com precisão suficiente para gerar um conjunto de dados das variáveis meteorológicas e da dispersão de poluentes, que pode ser utilizado na validação dos modelos operacionais existentes.

Diversos estudos já demonstraram a habilidade do modelo LES em simular as principais características dos escoamentos turbulentos da CLA sob condições altamente convectivas ([28]; [129]; [138]). Em regiões tropicais e subtropicais do Brasil, em particular na região metropolitana de São Paulo (RMSP), condições de estabilidade altamente convectivas associadas à baixa velocidade do vento são freqüentemente observadas [118]. Desse modo, o objetivo principal deste trabalho é descrever as propriedades estatísticas da turbulência em uma CLA altamente convectiva, associada à baixa velocidade do vento, sobre uma superfície horizontalmente homogênea simulada numericamente com a versão do modelo LES desenvolvida por Moeng (1984) [103], e modificada por Sullivan *et al.* (1994) - [138].

Posteriormente, com a estrutura da turbulência determinada será realizado um estudo sobre a dispersão de um poluente inerte e passivo. A emissão de poluente na CLA será feita de duas formas distintas: fonte área e fonte pontual contínua.

Uma das motivações para a aplicação do modelo LES em estudos de dispersão de poluentes emitidos por uma fonte área localizada na superfície, é que apesar de hipotético, os resultados obtidos podem ser utilizados para ilustrar o comportamento de poluentes atmosféricos, tal como o monóxido de carbono (CO) em uma região urbana densamente povoada e com elevado tráfego de veículos automotores, como é o caso de várias áreas da região metropolitana de São Paulo (RMSP), ou mesmo de outras metrópoles brasileiras. Podendo até, neste caso, ser utilizado para suprir as lacunas observacionais de poluentes atmosféricos em regiões urbanas.

Também é possível compreender os padrões de dispersão de poluentes inertes e passivos, emitidos por fontes pontuais contínuas localizadas em diferentes alturas da CLA, que geralmente não são reproduzidos por modelos convencionais de CLA (Modelos de fechamento de 1^a ou 2ª ordem).

3.2 Modelos Numéricos

O conjunto de equações que descreve os escoamentos na CLA está baseado nas leis de conservação de momento, massa e energia, e na equação do estado para um gás ideal (Wyngaard, 1984). Essas equações não podem ser resolvidas analiticamente devido à presença de termos não-lineares e da dificuldade em determinar as condições iniciais e de fronteira.

A alternativa é a modelagem numérica das equações governantes, que são discretizadas no espaço e no tempo. Porém, as escalas temporais e espaciais resolvidas numericamente devem ter uma resolução que englobe as menores escalas características dinamicamente ativas dos escoamentos turbulentos, e isto pode se mostrar extremamente restritivo quando a solução exata do problema compreende um amplo intervalo escalas [48].

Em virtude da complexidade dos processos físicos que envolvem a descrição

da CLA, ainda não é possível realizar simulações numéricas diretas (DNS) desses escoamentos, pois os recursos computacionais existentes não permitem simulações com 10^{18} pontos de grade ([89]; [106]). Conseqüentemente, os escoamentos turbulentos na CLA são tratados através de uma abordagem estatística, onde, geralmente, os movimentos são separados em uma componente média (de variação lenta) e uma componente turbulenta (de variação rápida).

Os principais modelos numéricos utilizados para simular a estrutura da turbulência na CLA são os modelos do tipo média de Reynolds e os modelos do tipo média de volume. Uma diferença importante entre eles é que no caso da média de Reynolds a componente turbulenta é inteiramente parametrizada (escala não-resolvida), enquanto que na média de volume a escala resolvida depende da resolução espacial da grade computacional (Figura 3.1). Assim, se o volume da grade é grande o bastante (baixa resolução), a média de volume tende a média de Reynolds.

De qualquer maneira, ambos os procedimentos introduzem condições desconhecidas, denominado de "problema de fechamento"da turbulência e considerado um dos problemas mais difíceis da física.

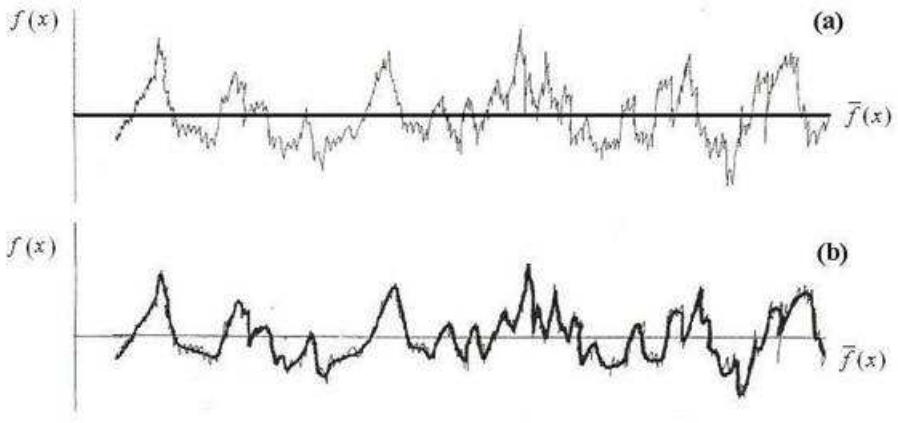

Figura 3.1: Representação da escala espacial resolvida $\overline{f}(x)$ (linha preta em negrito) de um sinal turbulento $f(x)$ pelos modelos: (a) média de Reynolds; (b) média de volume. A escala não-resolvida é definida como $f'(x) = f(x) - \overline{f}(x)$ Fonte: Adaptada de [106].

Nos modelos numéricos de média de Reynolds as soluções existentes estão fundamentadas em medidas experimentais, independente da ordem do problema de fechamento, e apresentam deficiências na representação de muitos processos físicos [50].

Já os modelos de média de volume, também denominados de modelos LES, são baseados na simulação direta dos grandes turbilhões (escala resolvida) e na parametrização dos processos que ocorrem em pequena escala (escala não-resolvida)

([27]; [103]; [94]).

A maior vantagem dos modelos do tipo LES é que eles resolvem explicitamente os turbilhões responsáveis pelo transporte de poluentes na escala de curto alcance, e com isso, descrevem com boa precisão os principais processos físicos desses escoamentos turbulentos. Atualmente os recursos computacionais existentes possibilitam simulações com até 10^8 pontos de grade. Isso permite que os resultados gerados pelo modelo LES sejam os que melhor se aproximam das condições realísticas esperadas, especialmente se considerarmos a dificuldade em se obter medidas das variáveis meteorológicas na CLA.

Apesar disso, os modelos do tipo LES apresentam algumas limitações como, o fechamento da escala não-resolvida e o domínio limitado da dimensão da grade, além do elevado custo computacional ([94]; [89]; [134]).

A seguir, será feita uma breve descrição das formulações utilizadas pelo modelo LES e pelos modelos euleriano e lagrangiano de dispersão de poluentes, além dos esquemas numéricos e das condições de fronteiras utilizadas. Também serão discutidos os recursos computacionais utilizados, bem a metodologia de análise dos resultados.

3.2.1 O Modelo LES

Nos modelos do tipo LES a separação entre a escala resolvida e a escala não-resolvida é obtida através da aplicação de um filtro passa-baixa sobre as variáveis das equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível ([88]; [161]). Dessa forma, as variáveis filtradas equivalem a uma média de volume e descrevem os movimentos turbulentos na escala resolvida [27]. As escalas não-resolvidas explicitamente pelo modelo LES são parametrizadas.

A evolução temporal e espacial das componentes de velocidade do vento na escala resolvida para um fluído incompressível é representada em [103].

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = \overline{\overline{v}\overline{\zeta_z}} - \overline{\overline{w}\overline{\zeta_y}} + f_c\overline{v} - \frac{\partial P^*}{\partial x} - \frac{\partial \langle \overline{p} \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{uu}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{uw}}{\partial z} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} = \overline{\overline{w}\overline{\zeta_x}} - \overline{\overline{u}\overline{\zeta_z}} - f_c\overline{u} - \frac{\partial P^*}{\partial y} - \frac{\partial \langle \overline{p} \rangle}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{vu}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{vv}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{vw}}{\partial z} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} = \overline{\overline{u}\overline{\zeta_y}} - \overline{\overline{v}\overline{\zeta_x}} + \frac{\overline{\Theta}}{\Theta_0} g - \frac{\partial P^*}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{wu}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{wv}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{ww}}{\partial z} - \langle \frac{\partial \overline{w}}{\partial t} \rangle \tag{3.3}$$

onde $^-$ representa a escala resolvida; $\langle\ \rangle$ a média no plano horizontal; u, v e w são as componentes de velocidade; Θ é a temperatura potencial; f_c é a força de Coriolis; ζ_x, ζ_y e ζ_z são as componentes de vorticidade nas direções x, y e z, respectivamente, e representam os termos de *advecção não-linear*; τ_{ij} são os *tensores* Tensão de Reynolds modificados na escala não-resolvida; p é a pressão do ar; Θ_0 é a temperatura potencial de referência do ar; e P é a pressão modificada.

Os gradientes de pressão médios horizontais $-\partial\langle\overline{p}\rangle/\partial x$ e $-\partial\langle\overline{p}\rangle/\partial y$ nas Eqs. 3.1 e 3.2, respectivamente, são tratados como forçantes externas e prescritos como

parâmetros de entrada do modelo através do vento geostrófico. Isto implica que o escoamento horizontal na escala resolvida está sendo continuamente acelerado para um estado de equilíbrio geostrófico.

Na Eq. 3.3 a média horizontal da aceleração vertical é subtraída para assegurar que tanto $\langle \overline{w} \rangle$ quanto $\langle \partial \overline{w}/\partial t \rangle$ permaneçam nulos durante a evolução da CLA (Deardorff, 1972). Isto garante que o escoamento turbulento na escala resolvida satisfaça o equilíbrio hidrostático, $1/\rho_0 \partial p_0/\partial z = -g$, onde p_0 e ρ_0 são a pressão e a densidade atmosférica de referência, respectivamente.

É importante ressaltar que as equações do movimento satisfazem todas as condições das aproximações de Boussinesq para convecção rasa [36]. Essas condições implicam que as flutuações de temperatura potencial e de densidade estão relacionadas por $-\overline{\rho}/\rho_0 = \overline{\Theta}/\Theta_0$, e que a equação da continuidade é $\partial \overline{u_i}/\partial x_i = 0$. Isto também implica que o estado básico obedece à lei do gás ideal, $p_0 = \rho_0 R_d T_0$.

As equações prognósticas que descrevem a evolução temporal e espacial da temperatura potencial e de um poluente inerte e passivo na CLA são descritas, respectivamente, por:

$$\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial t} = \overline{-\overline{u}\frac{-\partial \overline{\Theta}}{\partial x}} - \overline{-\overline{v}\frac{-\partial \overline{\Theta}}{\partial y}} - \overline{-\overline{w}\frac{-\partial \overline{\Theta}}{\partial z}} - \frac{\partial \tau_{\Theta u}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{\Theta v}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{\Theta w}}{\partial z} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \overline{c}}{\partial t} = \overline{-\overline{u}\frac{-\partial \overline{c}}{\partial x}} - \overline{-\overline{v}\frac{-\partial \overline{c}}{\partial y}} - \overline{-\overline{w}\frac{-\partial \overline{c}}{\partial z}} - \frac{\partial \tau_{cu}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{cv}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{cw}}{\partial z} + S_c \quad (3.5)$$

onde $\overline{c}$ é a concentração do poluente; S_c é o termo fonte; $\tau_{\Theta j}$ e τ_{cj} representam os fluxos turbulentos de calor sensível e de poluente na escala não-resolvida.

Os tensores τ_{ij} , $\tau_{\Theta j}$ e τ_{cj} estão relacionados ao campo da escala resolvida através dos coeficientes de difusividade turbulenta, que por sua vez são parametrizados de acordo com o modelo de viscosidade não-linear modificado proposto por Sullivan, [138]. Neste modelo, as escalas características de velocidade e de comprimento são estimadas através de uma equação prognóstica para a ECT na escala não-resolvida [29], e em função da resolução da grade, respectivamente.

Porém, em regiões próximas da superfície e junto a camada de transição com a atmosfera livre, onde os pequenos turbilhões têm um papel importante, as parametrizações desses tensores resultam em incertezas nas soluções geradas pelo modelo LES [106]. Contudo, nas regiões onde os grandes turbilhões são bem resolvidos os escoamentos turbulentos gerados pelo modelo LES têm se mostrado pouco sensível ao modelo de viscosidade não-linear adotado.

3.2.2 Esquemas Numéricos e Condições de Fronteira

O conjunto de equações do modelo LES é resolvido numericamente utilizando um método pseudo-espectral nas direções horizontais e um esquema de diferenças finitas de segunda ordem centrado no espaço, na direção vertical. O avanço dos campos tridimensionais no tempo é realizado através a aplicação do esquema numérico de 2ª ordem Adams-Bashforth, estável para pequenos passos de tempo (Mesinger e Arakawa, 1982).

A estabilidade numérica é verificada a cada passo no tempo (Δt), através do cálculo do número de Courant.

As condições de fronteiras laterais são assumidas periódicas (cíclicas). Esse tipo de fronteira é apropriado para representar escoamentos turbulentos da CLA sobre superfícies homogêneas e são convenientes computacionalmente, uma vez que não necessitam que as condições laterais sejam impostas. Entretanto, o uso de fronteiras periódicas dificulta a realização de simulações de escoamentos turbulentos sobre superfícies heterogêneas com domínio limitado [106].

A fronteira inferior é rígida e a velocidade vertical é nula. As formulações da teoria similaridade de Monin-Obukhov são empregadas para estimar os fluxos turbulentos de momento na superfície. Embora esta teoria tenha sido desenvolvida para quantidades definida como médias Reynolds é prática comum utilizá-la para descrever os campos instantâneos no modelo LES [106].

Para evitar as influências das condições de fronteira superior, o topo da CLA é assumido na metade do domínio vertical da grade. A condição de fronteira é radiativa, com gradientes verticais nulos para as componentes horizontais de velocidade do vento e fluxos turbulentos de subgrade. Por consistência, no modelo LES a velocidade vertical também é nula no topo da grade.

Os valores das componentes do vento geostrófico (u_G, v_G) são prescritos no modelo. Os fluxos turbulentos de calor sensível $(w'\Theta')_0$ e de concentração de poluente (para o caso de fonte do tipo área) na superfície são $(w'c')_0$ mantidos constantes. O mesmo acontece com o comprimento de rugosidade z_0. A temperatura potencial do estado básico é considerada igual à temperatura potencial média na CLS.

O campo de concentração de poluente em pontos de grade é calculado simultaneamente aos demais campos tridimensionais das componentes de velocidade e de temperatura potencial. Esse procedimento pode ocasionar alguns problemas numéricos devido ao esquema de discretização adotado pelo modelo LES (Nieuwstadt e Meeder, 1997).

Os poluentes são emitidos por dois tipos de fontes: fonte área localizada na superfície e fonte pontual contínua, aproximada por fonte linha instantânea, localizada em diferentes alturas da CLA. No caso de fonte área, o poluente inerte e passivo foi inserido no domínio da grade no instante inicial da simulação. Contudo as análises foram feitas após os escoamentos turbulentos simulados atingirem o estado de quase-equilíbrio (Nieuwstadt *et al*, 1992).

Para o caso da fonte pontual contínua o poluente foi liberado de forma instantânea ao longo de uma linha (fonte linha instantânea) orientada na direção longitudinal (x). Neste caso, a emissão foi iniciada somente após os campos turbulentos atingirem os estado de quase-equilíbrio. O procedimento de cálculo para este tipo de fonte segue Nieuwstadt e Valk (1987).

3.2.3 Recursos Computacionais e Experimentos Numéricos

A realização de simulações numéricas da CLA com modelos do tipo LES envolve a disponibilidade de recursos computacionais de alta performance, que possibilitem o

processamento de um grande volume de operações (determinação de no mínimo 6 variáveis por ponto de grade) no menor espaço de tempo possível. Além disso, essas simulações geram uma grande quantidade de dados, sendo necessários sistemas de leitura/gravação suficientemente rápidos para não afetar o tempo de processamento e de grande capacidade de armazenamento em disco.

Essa é uma das principais dificuldades em desenvolver no Brasil projetos de pesquisa desse porte, pois os recursos computacionais existentes não são dedicados e impossibilitam a realização de simulações por longos períodos de tempo e com elevado número de pontos de grade.

As simulações utilizadas nesse trabalho foram realizadas no supercomputador vetorial CRAY-SV1 (com 8 processadores e 16Gb de memória) do Laboratório de Computação Cientifica Avançada da Universidade de São Paulo (LCCA-USP), com uma das versões seriais do código LES desenvolvido por Moeng (1984) e posteriormente modificado por Sullivan *et al.* (1994).

Para se ter uma idéia do custo computacional, as simulações de $10000\Delta t$ e 96^3 pontos de grade demoravam cerca de 5 dias para serem executadas. Devido a esse fato, tornou-se muito difícil idealizar experimentos numéricos com maior resolução da grade computacional e por tempos de simulação mais longos.

Casos	Pontos de Grade (x,y,z)	Domínio (L,L,L) (km)	Tempo (Δt)	(u_G, v_G) (ms^{-1})	$\overline{\theta}_{ini}$ (K)	$(w\theta)_0$ (mKs^{-1})	$(wc)_0$ ($ppm\,ms^{-1}$)	$(\Delta\overline{\theta}_{ini})$ (K)	z_{ini} (m)
HC1	(80,80,80)	(5;5;2)	10000	(5;0)	295	0,20	-	3	1000
HC2	(80,80,80)	(5;5;2)	10000	(2;0)	298	0,23	-	3	1200
HC3	(96,96,96)	(5;5;2)	10000	(2;0)	298	0,23	-	10	1000
DA1	(96,96,96)	(5;5;2)	10000	(5;0)	300	0,24	0,18	8	1000
DA2	(96,96,96)	(5;5;2)	10000	(1;0)	300	0,24	0,18	8	1100

Tabela 3.1: Parâmetros iniciais de um conjunto de simulações numéricas realizadas, onde: Δt é o passo no tempo; (u_G, v_G) são as componentes do vento gestrófico; $\overline{\Theta}_{ini}$ temperatura potencial; $(w'\Theta')_0$ é o fluxo turbulento de calor sensível na superfície; $(w'c')_0$ é o fluxo turbulento de concentração de poluente na superfície; $(\Delta\overline{\Theta}_{ini})$ variação vertical de temperatura potencial no topo da CLA; z_{ini} é a altura da CLA.

Foram realizados cinco experimentos numéricos (Tabela 3.1) que possibilitaram a caracterização dos principais processos físicos dos escoamentos turbulentos da CLA convectiva. Os fluxos turbulentos de calor sensível $(w'\Theta')_0$ e de concentração de poluente $(w'c')_0$ na superfície são mantidos constantes no espaço e no tempo durante cada simulação.

O mesmo acontece com o comprimento de rugosidade z_0, definido igual a $0,15m$. Os perfis verticais iniciais das componentes horizontais de velocidade são assumidos iguais ao valor das componentes do vento geostrófico em todo o domínio do modelo. Os perfis verticais iniciais de temperatura potencial são representativos de uma CLA com intensa mistura vertical e são assumidos constantes e igual a $\overline{\Theta}_{ini}$ por toda camada de mistura até a altura inicial da CLA z_{ini}. Acima disto, a

temperatura potencial tem um aumento de ($\Delta\overline{\Theta}_{ini}$) em 6 níveis verticais da grade e posteriormente, um gradiente vertical na atmosfera livre Γ_Θ igual a 3 K $(km)^{-1}$.

No estudo de dispersão de um poluente emitido por uma fonte área localizada na superfície, a concentração inicial de 10 ppm é distribuída espacialmente por todo domínio horizontal e considerada constante nos primeiros 40 níveis verticais da grade computacional e nula no restante do domínio do modelo.

A altura da CLA (z_i) é definida como o nível vertical onde o fluxo turbulento de calor sensível médio no plano horizontal atinge o valor mínimo.

O domínio horizontal da grade computacional é um quadrado de $5km$ de lado, que de acordo com Mason e Brown (1999) é estatisticamente adequado para representar as estruturas da turbulência na CLA convectiva, uma vez que sua menor extensão horizontal é da ordem de $5z_i$.

As inicializações dos campos turbulentos de velocidade, temperatura potencial e de concentração de poluente, são feitas através da sobreposição de flutuações aleatórias aos valores prescritos dos perfis verticais iniciais. No caso das componentes de velocidade, essa flutuação tem uma amplitude $0,5$ ms^{-1}. Para a temperatura potencial e concentração de poluente essas flutuações foram iguais a $1,0$ K e $1,0$ ppm, respectivamente.

As análises estatísticas espaciais e temporais apresentadas nesse trabalho são obtidas com base nos campos tridimensionais gerados pelo modelo LES após os 3000 Δt iniciais, ou seja, quando os campos turbulentos já apresentam a condição de quase-equilíbrio.

3.3 Propriedades da CLA altamente convectiva

Grande parte dos trabalhos apresentados na literatura sobre CLA convectiva simulada com o modelo LES não retrata a estrutura da turbulência sob condições altamente convectivas associadas à baixa velocidade do vento (Schmidt e Schumann, 1989; Moeng e Sullivan, 1994; Lin, 2000). Esse tipo de regime de estabilidade é encontrado com freqüência em regiões continentais e marítimas tropicais em razão das elevadas temperaturas da superfície e, em particular, nas áreas urbanas das grandes metrópoles tropicais e subtropicais, como a região metropolitana de São Paulo (RMSP).

Esse trabalho investiga a estrutura vertical da turbulência sob condições altamente convectivas ($60 \leq -z_i/L \leq 800$), com o auxílio do modelo LES, que é um dos modelos numéricos mais apropriados ao estudo da CLA convectiva.

Em virtude da escassez de dados experimentais de turbulência na CLA medidos diretamente nas regiões tropicais, as variáveis meteorológicas simuladas são comparadas com os prognósticos fornecidos pela teoria de similaridade da camada de mistura e com alguns resultados experimentais apresentados na literatura. As escalas características utilizadas na adimensionalização dessas variáveis são definidas na Tabela 3.2.

As condições iniciais utilizadas nas simulações numéricas dos diferentes casos permitiram a geração de CLAs convectivas com distintos graus de instabilidade

($60 \leq -z_i/L \leq 800$). Os valores médios das principais escalas características, bem como o de alguns parâmetros turbulentos da CLA convectiva, são apresentados na Tabela 3.3.

Escalas	Símbolos	Formulação
Altura da CLA	z_i	-
Velocidade	w_*	$\left[\frac{g}{\theta_0} z_i \left(\langle \overline{w'\theta'} \rangle + \langle \tau_{w\theta} \rangle\right)_0\right]^{1/3}$
Temperatura	T_*	$\left(\langle \overline{w'\theta'} \rangle + \langle \tau_{w\theta} \rangle\right)_0 / w_*$
Concentração do poluente	c_*	$\left(\langle \overline{w'c'} \rangle + \langle \tau_{wc} \rangle\right)_0 / w_*$
Tempo	t_*	z_i / w_*
Velocidade	u_*	$\left(\left(\langle w'u' \rangle + \langle \tau_{wu} \rangle\right) + \left(\langle w'v' \rangle + \langle \tau_{wv} \rangle\right)\right)_0^{1/2}$
Temperatura	θ_*	$-\left(\langle \overline{w'\theta'} \rangle + \langle \tau_{w\theta} \rangle\right)_0 / u_*$
Comprimento de Monin-Obukhov	L	$u_*^3 / (g/\theta_0)\theta_*$

Tabela 3.2: Escalas características da CLA.

A escala temporal t_* (*turnover time*) representa o tempo no qual um constituinte atmosférico é transportado da superfície em direção ao topo da CLA e serve como indicativo da intensidade da mistura vertical na CLA convectiva. Nos diferentes casos simulados os valores de t_* variaram de $520\ s \leq t_* \leq 648\ s$ ($\approx 10\ min$), o que está de acordo com o valor sugerido [133].

Casos	u_* (ms^{-1})	L (m)	z (m)	$-z_i/L$	w_* (ms^{-1})	t (s)	T (K)	c (ppm)	$\langle \overline{U} \rangle_{CM}$ (ms^{-1})	$(\langle \theta \rangle - \langle \theta \rangle_0)_{CM}$ (K)	$\frac{(\langle w'c' \rangle + \langle \tau_{wc} \rangle)_0}{w_* c_*}$ (mKs^{-1})
HC1	0,36	-17	1360	80	2,1	648	0,10	-	4,5	1,1	0,10
HC2	0,23	-4	1400	345	2,2	636	0,11	-	1,9	1,2	0,09
HC3	0,23	-4	1040	270	2,0	520	0,12	-	1,7	1,9	0,20
DA1	0,38	-17	1060	62	2,0	530	0,12	0,09	4,2	2,0	0,16
DA2	0,20	-2	1065	434	2,0	533	0,12	0,09	0,8	2,0	0,20

Tabela 3.3: Valores médios das escalas características e dos parâmetros turbulentos do conjunto das cinco simulações.

Nas análises dos perfis verticais de temperatura potencial (Fig. 3.2.a) é possível observar a formação de uma extensa camada bem misturada ($\partial\langle\overline{\Theta}\rangle/\partial z \approx 0$),

características de condições convectivas e consistente com os valores obtidos de t_*. As variações de $\langle\overline{\Theta}\rangle$ junto ao topo da CLA, estão diretamente relacionadas à variação vertical da temperatura potencial na camada de transição $\langle\Delta\overline{\Theta}\rangle_i$ e ao gradiente vertical positivo Γ_Θ da atmosfera livre acima. O aumento médio da temperatura potencial na camada de mistura após os campos turbulentos alcançarem a condição de quase-equilíbrio $\{(\langle\overline{\Theta}\rangle - \langle\overline{\Theta}\rangle_{eq})_{CM}\}$ foi da ordem de $(1,6 \pm 0,2)K$ e está consistente com a taxa de aquecimento de $\{\partial\langle\overline{\Theta}\rangle/\partial t = -[\langle w'\Theta'\rangle_i + \langle\tau_{\Theta w}\rangle_i - \langle w'\Theta'\rangle_0 - \langle\tau_{\Theta w}\rangle_0]/z_i\} \approx 2 \times 10^{-4} K s^{-1}$.

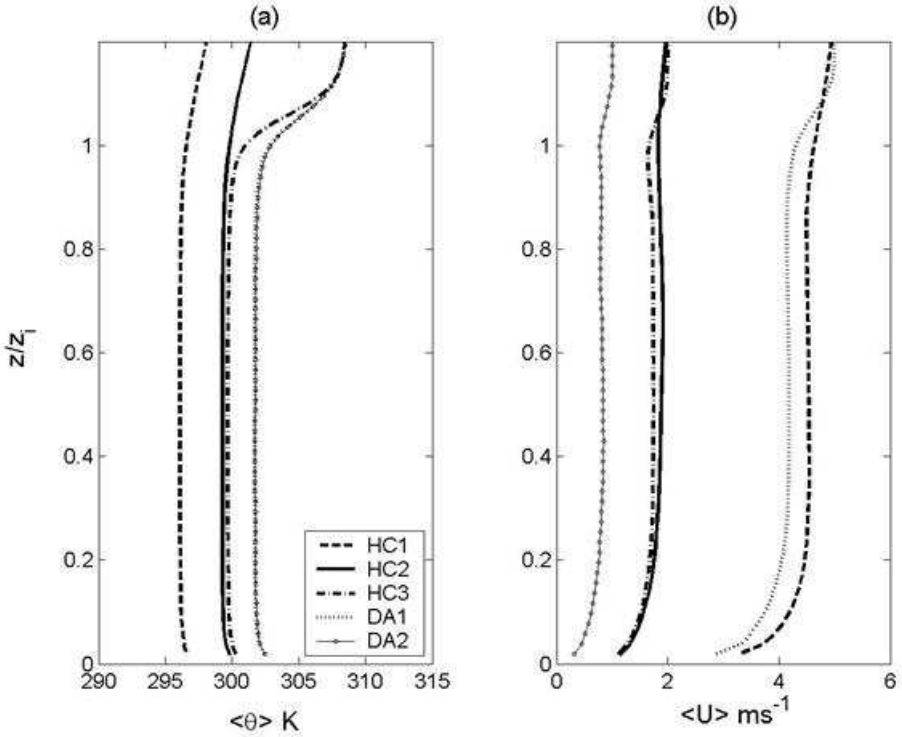

Figura 3.2: Perfis verticais das variáveis médias em função da altura adimensional: (a) temperatura potencial; (b) velocidade horizontal do vento.

Na Fig. (3.2b) observa-se que na região próxima à superfície (CLS) a velocidade horizontal do vento $\langle\overline{U}\rangle$ apresenta um perfil logarítmico [138]. Acima desta camada, o gradiente vertical de $\langle\overline{U}\rangle$ é aproximadamente nulo, indicando que a forte atividade turbulenta tende a homogeneizar as componentes horizontais de momento em uma CLA convectiva e barotrópica. No topo da CLA, $\langle\overline{U}\rangle$ tende ao valor do vento geostrófico.

As variâncias adimensionais das componentes horizontais de velocidade (Fig.

3.3a) são aproximadamente constantes e inferiores a variância da componente vertical $(\langle w^{'2}\rangle + \langle \tau_{ww}\rangle)$ (Fig. 3.3b) em grande parte da camada de mistura. Isto ocorre porque, na maior parte desta camada, a produção térmica de ECT contribui significativamente para $(\langle w^{'2}\rangle + \langle \tau_{ww}\rangle)$. Próximo à superfície $(z \leq 0,1z_i)$ e junto ao topo da CLA $(z > 0,8z_i)$ os efeitos das flutuações de pressão são relevantes e a variância das componentes horizontais é maior que a vertical [129].

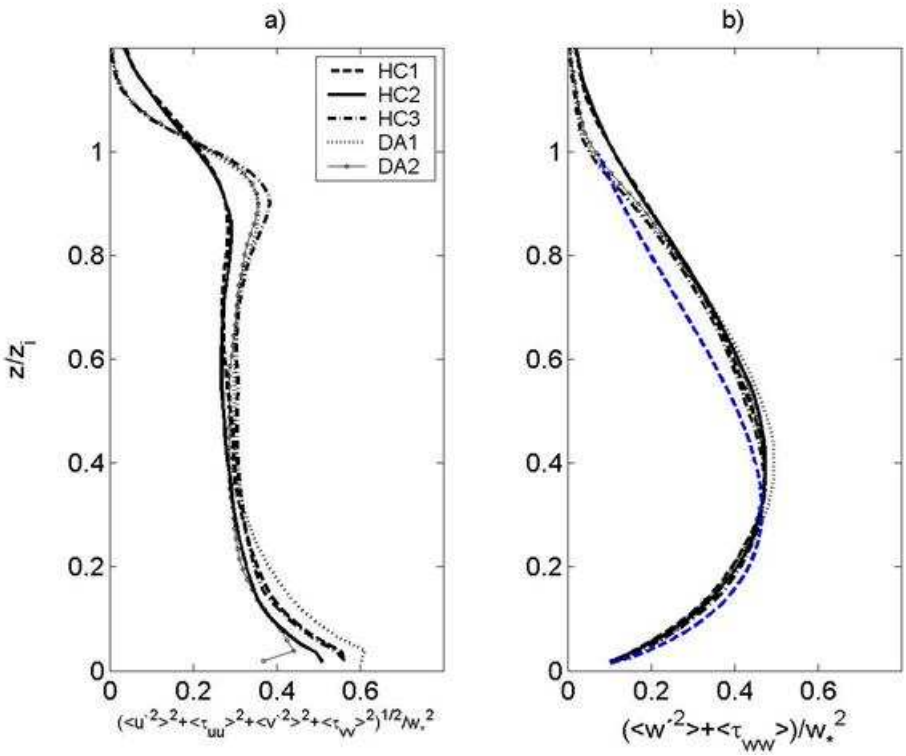

Figura 3.3: Perfis verticais das variâncias adimensionais das componentes de velocidade: (a) componentes horizontais; (b) componente vertical. Em (b) a linha tracejada em azul representa a curva experimental proposta por [86].

O perfil da variância da velocidade vertical indica que $(\langle w^{'2}\rangle + \langle \tau_{ww}\rangle)$ alcança um máximo de $(0,48 \pm 0,01)w^2$ em torno de $z \approx 0,38z_i$, o que está aproximadamente de acordo com $0,44w_*^2$ em $z \approx 0,33z_i$ sugerido por [28] que não estimou a contribuição da escala não-resolvida $\langle \tau_{ww}\rangle$. Na metade superior da CLA, $(\langle w^{'2}\rangle + \langle \tau_{ww}\rangle)$ decresce com a altura, alcançando um mínimo de $(0,08 \pm 0,001)w_*^2$ junto ao topo. Acima deste nível, os valores das variâncias das componentes de velocidade, apesar de pequenos, não decaem para zero, em virtude da produção local pelo cisalhamento do vento e da possível geração de ondas de gravidade [104].

De acordo com [7], parte da variabilidade encontrada nos perfis verticais dos momentos estatísticos de segunda ordem pode ser reduzida se os processos *bottom-up* (*convecção*) e *top-down* (*entranhamento*) forem considerados, uma vez que a escala dos movimentos *bottom-up* é z/z_i, enquanto que para os movimentos *top-down* é $(1 - z/z_i)$.

Comparando-se os perfis verticais de $\{\langle w'^2\rangle + \langle \tau_{ww}\rangle\}/w_*^2$ (Fig. 3.3b) com a curva experimental proposta por [86] ($\overline{[w'^2]}/w_*^2 = 1,8(z/z_i)^{2/3}(1 - 0,8z/z_i)^2$) observa-se que elas apresentam formas similares. Porém, o máximo simulado encontra-se acima do proposto por Lenschow. Apesar dessas pequenas diferenças, os resultados gerados pelo LES são similares aos modelados por [129], que se ajustaram melhor aos dados experimentais tanto de [86], quanto de [30].

Os escoamentos turbulentos na CLA convectiva são caracterizados por movimentos verticais descendentes (*downdrafts*) e por estruturas assimétricas compostas de pequenas regiões com intenso movimento vertical ascendente (*updrafts*). Os *updrafts* são os principais responsáveis pelo transporte de constituintes atmosféricos da região adjacente à superfície para as camadas superiores da CLA. De acordo com [76] e [87], essas estruturas espaciais podem ser identificadas por meio da correlação entre as flutuações da componente vertical de velocidade (w') e da temperatura potencial (Θ').

Nas Figs. (3.4) são apresentados os campos instantâneos verticais no plano xz das flutuações w' e Θ' e dos fluxos locais de calor sensível $w'\Theta'$ e momento $w'u'$. Todas as análises de campos instantâneos são feitas com base nas estimativas obtidas para o caso DA2 $-z_i/L = 434$ no instante final da simulação ($t \approx 18t_*$). Os campos instantâneos de w' e Θ' (Figs. 3.4a e 3.4b) permitem identificar um *updraft* bem definido (área escura com $w' > 0$ entre $2500m < x < 3000m$), que se desenvolve a partir da união de pequenas plumas geradas próximas à superfície e atinge uma extensão vertical da ordem de z_i. Ao alcançar a parte superior da CLA, os *updrafts* perdem seu empuxo inicial, mas têm momento suficiente para penetrarem na capa de inversão trazendo ar potencialmente quente da camada estável acima para dentro da CLA convectiva.

Esse processo de entranhamento gera flutuações positivas de temperatura potencial próximo ao topo da CLA, na camada definida por $750m < z < 1250m$ (Fig. 3.4b), onde é possível observar uma zona de penetração de ar potencialmente quente e limpo na CLA ($w' < 0$). Após atingir a camada de transição, os *updrafts* espalham-se lateralmente e retornam em direção à superfície através de movimentos verticais descendentes, existentes em boa parte da CLA.

Os *updrafts* contribuem significativamente para os fluxos verticais de calor e de momento, se comparados aos *downdrafts* [78]. Isso fica evidente nos contornos dos campos instantâneos dos fluxos locais $w'\Theta'$ e $w'u'$ apresentados nas Figs. (3.4c e 3.4d).

As análises da evolução vertical dos campos horizontais instantâneos do fluxo local de calor sensível $w'\Theta'$ (Figs. 3.5) fornecem informações sobre as distribuições espaciais dos *updrafts* e *downdrafts* na CLA.

Próximo à superfície (Fig. 3.5a), a convecção é organizada em linhas de fluxo positivo ($w'\Theta' > 0$) que se assemelham à forma poligonal (plumas), característicos

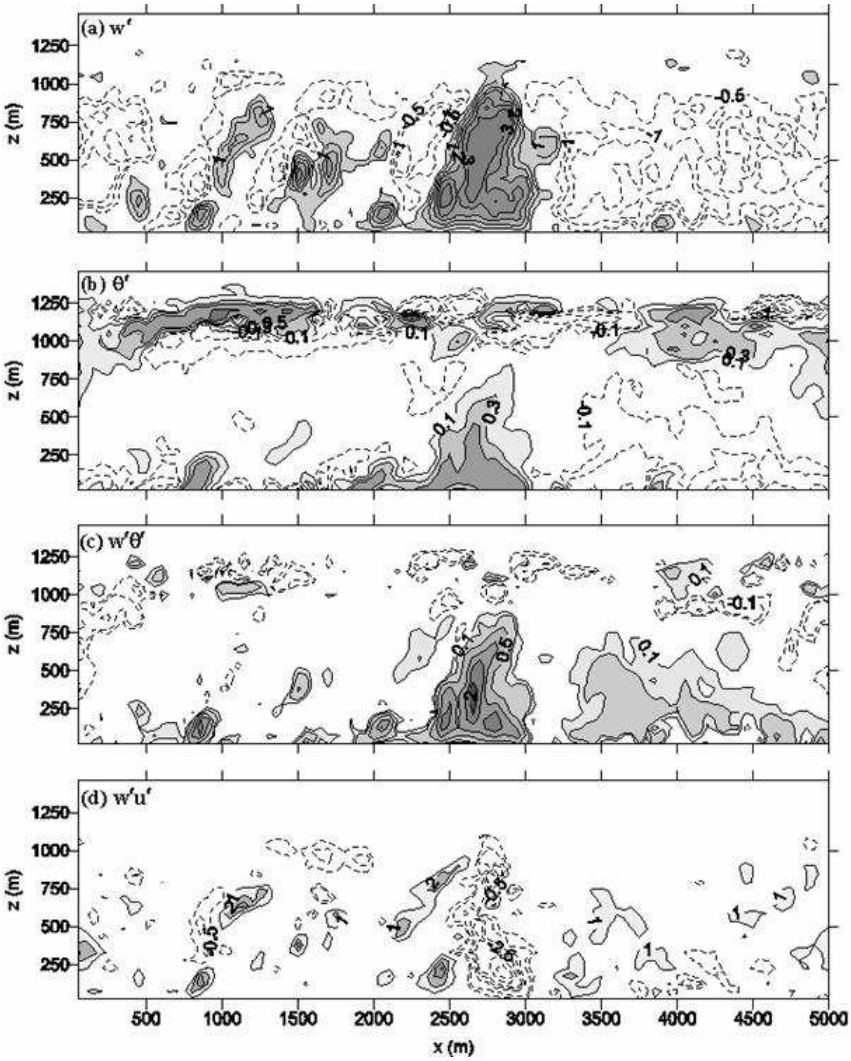

Figura 3.4: Campos verticais instantâneos das flutuações de: (a) velocidade vertical; (b) temperatura potencial; (c) fluxo local de calor sensível; ((d) fluxo local de momento. As áreas escuras e as linhas sólidas indicam valores positivos, enquanto as áreas em branco e as linhas tracejadas representam valores negativos. Estimativas obtidas para o caso $DA2(z_i/L = -434)$ no instante $t \approx 18t_*$.

de escoamentos puramente convectivos [129]. Essas plumas estão inseridas em uma região de ambiente predominantemente de *downdrafts* ($w'\Theta' < 0$) e são marcadas por um forte gradiente horizontal de $w'\Theta'$. Com o aumento da altura, algumas

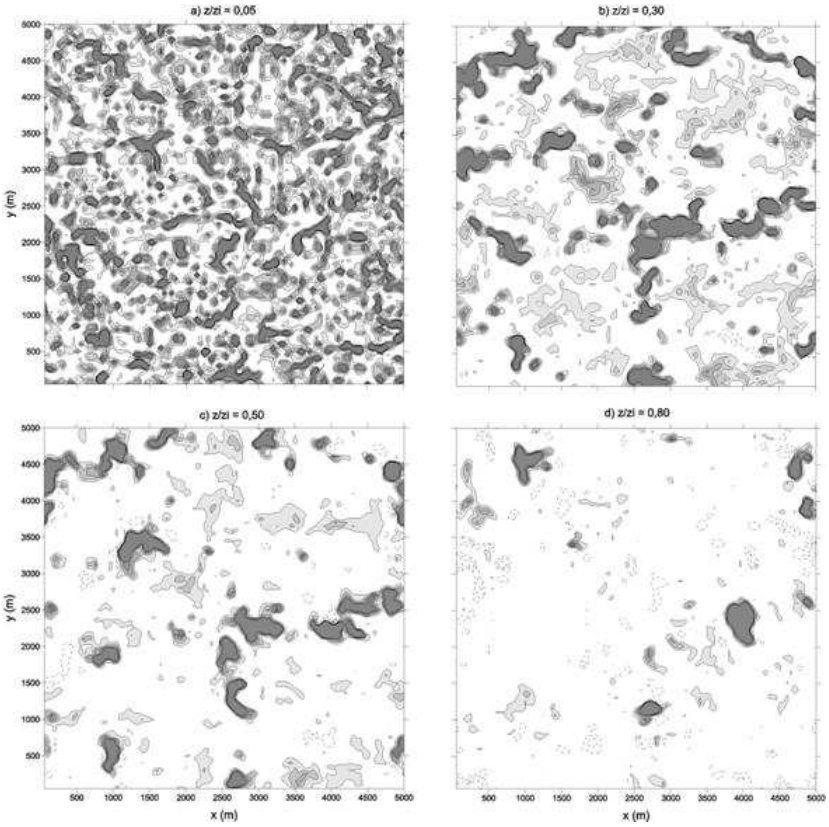

Figura 3.5: Campos horizontais instantâneos de fluxo local de calor sensível $w'\Theta'$ em diferentes níveis verticais. Linhas de contorno variaram de $-0,3 : 0,1 : 0,5$, onde as áreas escuras e linhas sólidas indicam $w'\Theta' > 0$, enquanto as áreas em branco e as linhas tracejadas representam $w'\Theta' < 0$. Estimativas obtidas para o caso $DA2(z_i/L = -434)$ no instante $\frac{t}{t_*} \approx 18$.

dessas plumas são suprimidas pelo movimento descendente, sendo que, as demais se organizam em pequenas áreas de forte movimento ascendente formando os *updrafts* (regiões escuras nas Figs 3.5b e 3.5c). Ao alcançar a região próxima ao topo da CLA, os *updrafts* perdem força e os movimentos descendentes intensificam-se. Essas estimativas estão de acordo com os resultados apresentados por [129], [105] e [78].

Na Fig. (3.6) é mostrado o campo tridimensional instantâneo de velocidade vertical em conjunto com cortes verticais e horizontais, onde as flutuações positivas mais intensas de $\overline{w}(2,5ms^{-1} \leq \overline{w} \leq 6,0^{-1})$ são representadas pelas superfícies em vermelho. Nessa figura é possível ter uma clara idéia do padrão assimétrico das estruturas verticais da CLA convectiva. Algumas dessas estruturas apresen-

tam escalas de comprimento da ordem de z_i e são as principais responsáveis pelos transportes de constituintes atmosféricos na CLA.

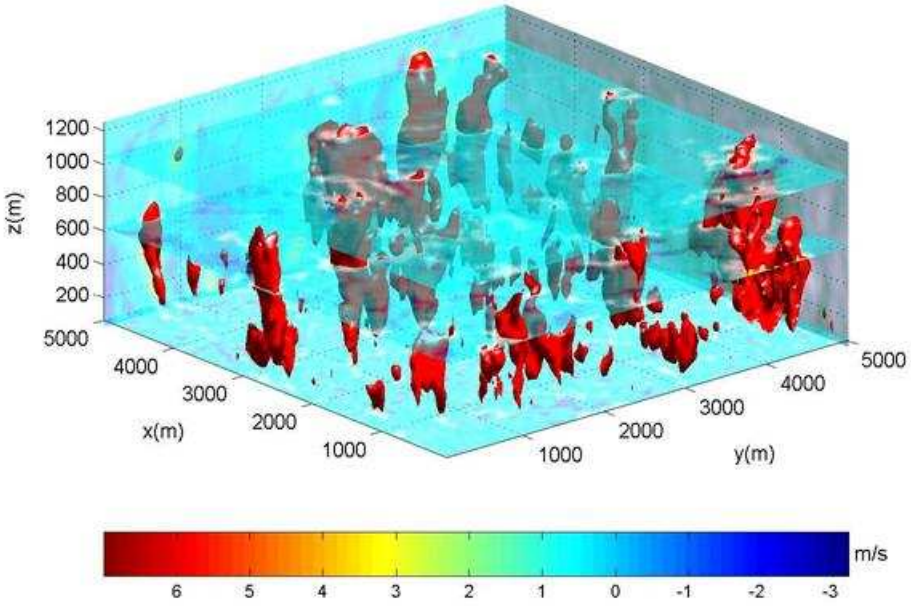

Figura 3.6: Campo tridimensional instantâneo da componente vertical de velocidade para o caso $DA2(z_i/L = -434)$ no instante $\frac{t}{t_*} \approx 18$. A barra de cores refere-se aos cortes verticais e horizontais instantâneos de $\overline{w}$. As superfícies em vermelho representam $2,5ms^{-1} \leq \overline{w} \leq 6,0ms^{-1}$.

A grande dificuldade na validação dos resultados gerados com o modelo LES reside na escassez de dados experimentais que caracterizarem de forma detalhada a estrutura da turbulência na CLA altamente convectiva, associada à baixa velocidade do vento. Uma forma alternativa de validação adotada nesse trabalho e que se mostrou satisfatória, foi confrontar os resultados simulados numericamente com os prognósticos teóricos da similaridade da camada de mistura.

Uma vez estabelecida as principais características da estrutura da turbulência na CLA convectiva, o modelo LES será agora aplicado a estudos de dispersão de poluentes inertes e passivos emitidos por diferentes tipos de fontes (área e pontual), localizadas em diferentes alturas da CLA convectiva.

3.4 Dispersão de poluentes

Nos últimos tempos, o aumento vertiginoso da frota veicular tem contribuído para a deterioração da qualidade do ar na região metropolitana de São Paulo (RMSP),

especialmente no período de inverno quando as condições para a dispersão de poluentes são insatisfatórias.

Segundo dados publicados no relatório da Operação Inverno 2003 [17], o monóxido de carbono (CO), que tem como principal fonte à queima incompleta de combustíveis fósseis, está entre os poluentes que contribuem para a piora dos padrões de qualidade do ar nesse período. Embora não seja possível determinar com precisão o tempo de vida médio global para o CO devido a sua variabilidade local, estima-se que nos trópicos seja da ordem de 1 mês [130]. Portanto, na escala de algumas horas o CO pode ser tratado como um poluente inerte.

Em 2001 a RMSP tinha uma frota de aproximadamente 7 milhões de veículos automotores [1] e estima-se que esses veículos (caminhões, ônibus, carros e motos) sejam responsáveis por 98% das emissões superficiais de CO [17]. Dessa maneira, a evolução diária da concentração de CO em regiões urbanas está diretamente relacionada à evolução temporal do tráfego de veículos e as condições meteorológicas locais como, altura da inversão térmica e intensidade da turbulência atmosférica ([116]; [10])

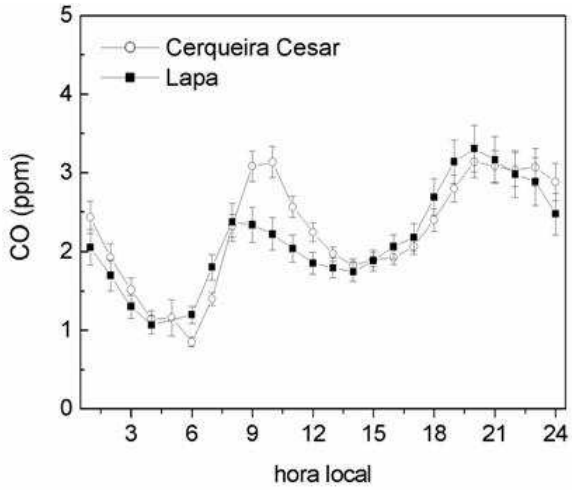

Figura 3.7: Concentração horária média mensal de Monóxido de Carbono (CO) para o mês de julho entre os anos de 1996 a 2000. Fonte: [21].

A evolução temporal da concentração média horária de CO durante o mês de julho entre os anos de 1996 e 2000 é apresentada na Fig. (3.7). Os dados foram coletados em duas estações de medições automáticas da CETESB (Lapa e Cerqueira César) que apresentam intenso tráfego de veículos automotores. Observa-se que ao longo do dia a concentração de CO tem dois picos distintos. Nas primeiras horas da manhã, o tráfego de veículos automotores é intenso e o aquecimento da superfície pela radiação solar ainda não é suficiente para romper a camada de inversão térmica da noite anterior, fazendo com que os poluentes permaneçam concentrados em

regiões próximas à superfície. Após ás 10 horas da manhã, a intensidade do tráfego diminui e o crescimento da CLA faz com que os poluentes sejam transportados para as camadas superiores em função da forte atividade convectiva, o que favorece a dispersão por toda camada. Com isso, os níveis de concentração na superfície decaem e voltam a se elevar no período da tarde, quando a atividade convectiva diminui e o tráfego de veículos automotores se intensifica.

ESTAÇÃO	Nº DE ULTRAPASSAGENS DO PQAR HORÁRIO 35 ppm	MÉDIA ARITMÉTICA DAS MÁX. DE 1 hora ppm	1ª MÁXIMA ppm	2ª MÁXIMA ppm
P. D. PEDRO II	0	3,1	11,2	10,2
IBIRAPUERA	0	2,4	10,3	9,3
SÃO CAETANO DO SUL	0	4,6	16,8	16,6
CONGONHAS	0	4,7	16,2	12,7
LAPA	0	-	-	-
CERQUEIRA CÉSAR	0	3,0	8,1	7,5
CENTRO	0	3,6	13,3	9,2
S. ANDRÉ - CENTRO	0	3,0	14,7	13,9
SANTO AMARO	0	2,2	7,1	6,8
OSASCO	0	4,4	9,9	8,8
PINHEIROS	0	-	-	-

Tabela 3.4: Concentração média horária do Monóxido de Carbono (CO) no período de 01/05/2003 a 30/09/2003. Fonte: Relatório da Operação Inverno 2003 - [17].

Apesar da concentração média horária de CO durante o mês de julho ficar abaixo de 4 ppm, é comum a ocorrência de picos de concentração superiores a 10 ppm durante o período de inverno, como pode ser observado na Tabela 3.4.

Os aspectos climáticos da cidade de São Paulo são típicos de regiões subtropicais do Brasil, caracterizados por invernos secos entre os meses de junho e agosto e verões úmidos durante dezembro e março. No período de inverno, a velocidade média do vento dificilmente excede os $2ms^{-1}$ [118], enquanto a radiação solar global atinge valor máximo médio mensal da ordem de $500Wm^{-2}$ [117], como pode ser observado na Fig. (3.8).

Considerando que a radiação líquida durante o dia é determinada pela radiação global e que o albedo sobre regiões urbanas varia entre $0,15$ e $0,30$ [128], resultanto em uma radiação líquida disponível entre $350Wm^{-2}$ e $425Wm^{-2}$. Sobre regiões urbanas o fluxo de calor sensível é bem superior ao fluxo de calor latente e representa aproximadamente 70% da radiação líquida disponível no período entre $10h$ e $13h$ [115], resultando em um fluxo de calor sensível entre $245Wm^{-2}$ e $297,5Wm^{-2}$. Isso possibilita, mesmo durante o período de inverno, a ocorrência de dias com condições de estabilidade atmosférica altamente convectivas em São Paulo.

Vale ressaltar, que na RMSP a brisa marítima desempenha um papel fun-

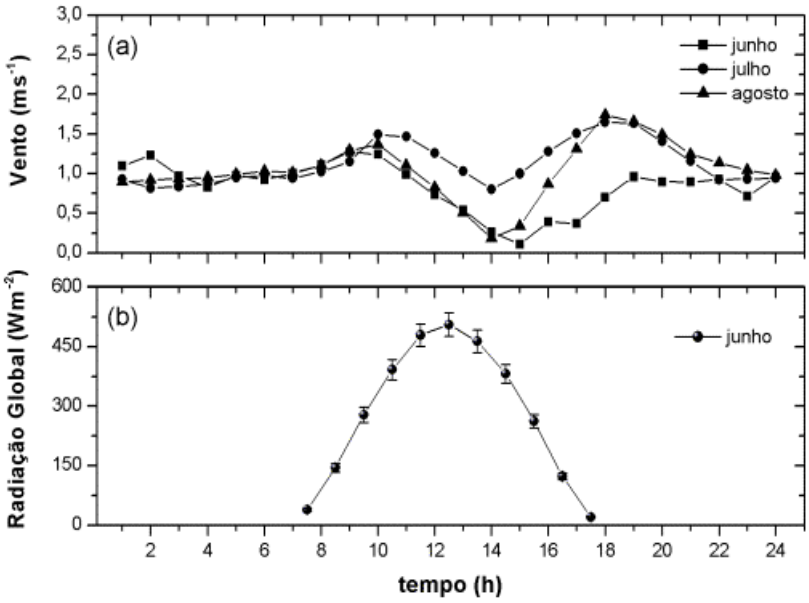

Figura 3.8: Média horária mensal: (a) velocidade do vento; (b) radiação solar global. Fonte: Adaptado de [118] (a) e de [117] (b).

damental no transporte de poluentes e auxilia no processo de limpeza da CLA [77]. Porém, as simulações realizadas são representativas de um período que se estende entre as $10h$ e $13h$ (considerado altamente convectivo), sobre uma superfície horizontalmente homogênea, em condições de céu claro e sobre uma região suficientemente afastada do litoral para que os efeitos da brisa não sejam considerados.

Para a solução dos problemas de dispersão de poluentes em regiões urbanas é prática comum utilizar modelos de dispersão tipo pluma gaussiana fornecidos pela agência reguladora norte-americana *Enviroment Protection Agency* (EPA). Esses modelos adotam uma solução muito simplista para representar a dispersão e apresentam várias deficiências, principalmente em condições de baixa velocidade do vento, sobre terrenos complexos e em condições não-estacionárias ([150]; [57] e [120]).

Existem diversas dificuldades envolvidas na realização de experimentos de campo que forneçam informações detalhadas sobre a estrutura da turbulência na CLA urbana e dos padrões associados à dispersão de poluentes. O elevado custo financeiro envolvido e as dificuldades experimentais de medir as variáveis meteorológicas relevantes fazem com que a utilização de modelos numéricos seja recomendada.

Os modelos operacionais de mesoescala têm resolução horizontal máxima da ordem de 1 km, e são indicados para representar os transportes turbulentos de

médio alcance na CLA [166], uma vez que parametrizam importantes fenômenos associados aos processos turbulentos nas escalas inferiores a 1 km. Como visto nas seções anteriores, o modelo LES é capaz de reproduzir as principais características da turbulência na CLA convectiva e conseqüentemente, do transporte turbulento de curto alcance.

3.5 Dispersão euleriana pra fonte área contínua

O comportamento da dispersão de um poluente inerte e passivo emitido por uma fonte área contínua de 5 $km \times 5$ km, localizada próxima à superfície é simulado com a utilização do modelo LES. Os resultados obtidos podem servir de base para formulações de novas parametrizações que representem de forma mais precisa os transportes turbulentos de constituinte atmosféricos em uma CLA altamente convectiva.

Apesar da atmosfera modelada ser seca e das condições de fronteira inferior não serem representativas de uma CLA urbana, já que se considerou uma superfície horizontalmente homogênea, os padrões de dispersão simulados podem ser considerados representativos de uma área relativamente plana da RMSP, caracterizada por intenso tráfego de veículos automotores, durante períodos de forte convecção térmica associada à baixa velocidade do vento. Alguns resultados apresentados na literatura corroboram com essa consideração, uma vez que as escalas espaciais das simulações numéricas são da ordem de 5 $km \times 5$ km nas direções horizontais.

Segundo Cai [13], em condições altamente convectivas, a rugosidade aerodinâmica não é um parâmetro relevante, pois a geração da turbulência é predominantemente térmica. Hechtel *et al.* ([66]) utilizaram o modelo LES para estudar os efeitos da adoção de fluxos turbulentos diferenciais na superfície sobre as propriedades estatísticas da CLA convectiva e não encontraram nenhuma diferença significativa quando comparado às simulações sobre superfícies homogêneas. Resultados similares foram encontrados por Gopalakrishnan e Avissar ([56]), onde a inclusão de fluxo diferencial de calor e de topografia não causaram impacto significativo sobre as estatísticas da dispersão para escalas de comprimento da ordem de 5 km.

Para obter estimativas da dispersão de poluentes emitidos por uma fonte do tipo área localizada na superfície foram realizadas duas simulações numéricas (casos DA1 e DA2), cujas condições iniciais correspondem a perfis verticais de concentração igual a 10 ppm nos primeiros 40 níveis da grade (inferior a metade do domínio vertical) e fluxo de poluente na superfície constante e igual a ([116]).

A evolução temporal do perfil vertical de concentração de poluente (Fig. 3.9a) indica uma diminuição nos valores de concentração na camada mistura durante a simulação. Essa diminuição é da ordem de $\partial\langle c\rangle/\partial t \approx 0,15 ppm h^{-1}$, ligeiramente inferior ao valor médio de $0,20 ppm h^{-1}$ observado entre às $10h$ e $13h$ (Fig. 3.7). Essa diminuição está associada ao entranhamento de ar limpo da camada estável acima para dentro da CLA ([160]; [104]; [135]), como será observado nos campos instantâneos das flutuações de velocidade vertical e de concentração de poluente,

nas discussões seguintes. A intensa convecção térmica contribui para manter a estrutura vertical da camada bem misturada até a região próxima ao topo, onde ocorre uma grande variação vertical de concentração $\{\langle\Delta\overline{c}\rangle_i\} \approx 8,0ppm$.

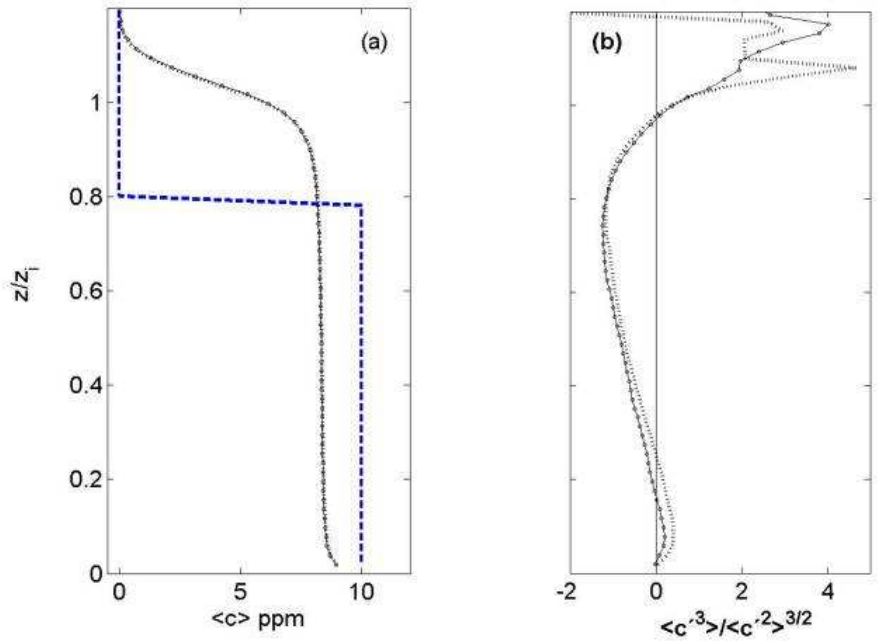

Figura 3.9: Perfis verticais: (a) concentração de poluente; (b) *skewness* de concentração de poluente. A linha tracejada em azul representa as condições iniciais.

Na Fig. (3.9b) observa-se que o perfil vertical do *skewness* de concentração de poluente $\langle c'^3\rangle/\langle c'^2\rangle$ é negativo por quase toda a extensão da camada de mistura, com exceção das regiões próximas a superfície ($z < 0,2z_i$) e junto ao topo da CLA ($z.0,9z_i$). Essas flutuações negativas estão relacionadas à penetração de parcelas de ar limpo no topo da CLA, que descem em direção à superfície em zonas horizontalmente estreitas e verticalmente extensas, provocando uma diminuição da concentração de poluente. Resultados similares foram encontrados por [28] e por [7] para umidade. O espalhamento dos perfis próximo a z_i pode estar relacionado as diferentes condições iniciais dos casos simulados.

O processo de limpeza da CLA convectiva pelo entranhamento de parcelas de ar limpo da camada estável acima pode ser visualizado nas Figs. (3.10a e 3.10b), onde são apresentados, respectivamente, os cortes verticais dos campos instantâneos de velocidade vertical e concentração de poluente para o caso DA2 em um dado intervalo de tempo ($t \approx 12t_*$).

Na Fig. (3.10a), é possível identificar uma região de forte movimento ascendente entre $2000, \leq y \leq 2500m$ (*updrafts*), que penetra a camada de inversão e induz movimentos descendentes (*downdrafts*), que por sua vez trazem ar limpo

da camada estável acima para dentro da CLA. Esse processo de limpeza aparece nitidamente junto ao topo da CLA (Fig. 3.10b) e nas regiões onde os níveis de concentração são menores (regiões mais claras), principalmente em $y \leq 500m$ e entre $3500m \leq y \leq 4800m$. As regiões com níveis de concentração elevada estão bem correlacionadas com as regiões de *updrafts*, o que enfatiza o papel dessas estruturas no transporte de poluentes desde a superfície até as camadas superiores da CLA.

Apesar do modelo LES apresentar deficiências na representação dos processos que ocorrem próximo a superfície, os resultados simulados para a fonte do tipo área contínua localizada na superfície são satisfatórios. Possivelmente, isto acontece porque o poluente foi emitido de forma homogênea em todo domínio horizontal inferior da grade desde o instante inicial da simulação (antes mesmo do campo turbulento atingir o estado de quase-equilíbrio). Esses dois aspectos favorecem a interação entre o poluente e o campo velocidade na escala resolvida (da ordem de z_i) minimizando os efeitos da escala não-resolvida.

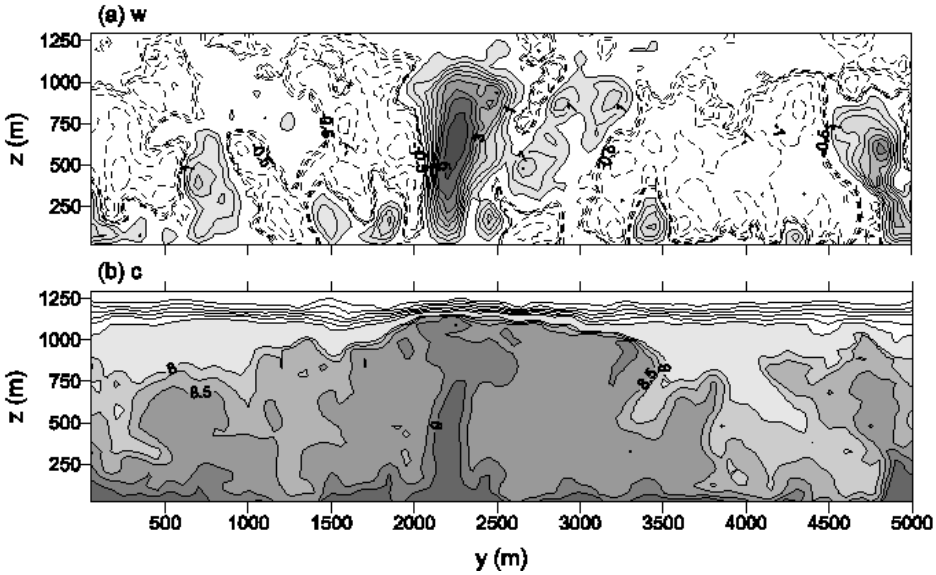

Figura 3.10: Campos verticais instantâneos de: (a) velocidade vertical; (b) concentração de poluente (CO); ambas para o caso $DA2$ em $t \approx 12t_*$.

Dessa forma, o grau de limpeza da CLA altamente convectiva está diretamente relacionado à intensidade do processo de entranhamento que influencia, mesmo em regiões próximas à superfície, a distribuição do poluente. A inexistência de dados experimentais de dispersão de poluentes emitidos por uma fonte área contínua dificulta uma abordagem mais detalhada desse tipo de problema.

Um dos procedimentos considerado padrão para validação das simulações de dispersão e que será utilizado neste trabalho, consiste na reprodução do compor-

tamento da pluma de um poluente inerte e passivo, emitido por uma fonte pontual contínua localizada em diferentes alturas da CLA ([154]; [155]; [157]).

3.6 Dispersão euleriana para fontes pontuais contínuas

Na CLA convectiva as características da dispersão de poluentes dependem da localização da fonte e não podem ser descritas em termos da teoria de difusão padrão [84]; [150]; [114]). Dessa forma, o modelo LES tornou-se uma importante ferramenta no auxílio ao desenvolvimento de novas teorias, por exemplo, *bottom-up/top-down* [104].

Apesar da versão do modelo LES utilizada neste trabalho possuir equações prognósticas para determinação da distribuição temporal e espacial de escalares inertes e passivo, a condição de fronteira lateral (cíclica) permite a reentrada do poluente emitido por uma fonte pontual contínua após o mesmo ultrapassar o domínio horizontal da grade, ou seja, para tempos superiores ao *travel time*. Para contornar essa dificuldade foi adotada a metodologia euleriana proposta por Nieuwstadt e Valk [111], onde a emissão de poluente por uma fonte pontual contínua é representada pela emissão por uma fonte linha instantânea.

As duas simulações numéricas realizadas têm dimensões e resoluções espaciais da grade iguais as utilizadas nos casos HC1 e HC2 (Tabela 3.3), mas com passo de tempo variável ($2s < \Delta t < 3s$). O tempo total da simulação é de aproximadamente $1h$. As condições iniciais foram pré-estabelecidas de forma a gerar CLAs com diferentes graus de instabilidade ($-z_i/L = 580$ e $-z_i/L = 800$).

No instante de tempo em que os campos turbulentos alcançam o estado de quase-equilíbrio, chamado de instante inicial ($t_0 \approx 1000\Delta t$), uma fonte linha instantânea de um poluente inerte e passivo é introduzida no domínio numérico do modelo e posicionada paralelamente ao eixo longitudinal (x) em uma dada altura z, conforme ilustrado na Fig. (3.11).

De acordo com Nieuwstadt e Valk [111], a fonte linha instantânea deve ser realocada em diferentes posições longitudinais (x) e laterais (y) de modo a obter um conjunto de simulações independentes da dispersão de poluentes. Nos casos apresentados nesse trabalho optou-se pela utilização de um conjunto de 14 realizações (campos tridimensionais) obtidas a partir de cada uma das simulações realizadas de forma independente.

A distribuição inicial da concentração de poluente na grade é assumida gaussiana, como forma de reduzir valores espúrios e negativos das flutuações de concentração causadas pelo esquema numérico [14].

A evolução da linha fonte é calculada simultaneamente aos campos de velocidade gerados pelo modelo LES resolvendo-se a equação de conservação do poluente (Eq. 3.5).

Os resultados obtidos para fonte linha instantânea podem ser interpretados em termos da dispersão de um poluente emitido por uma fonte pontual contínua se a difusão da pluma ao longo da direção longitudinal (*downstream*) for desprezível

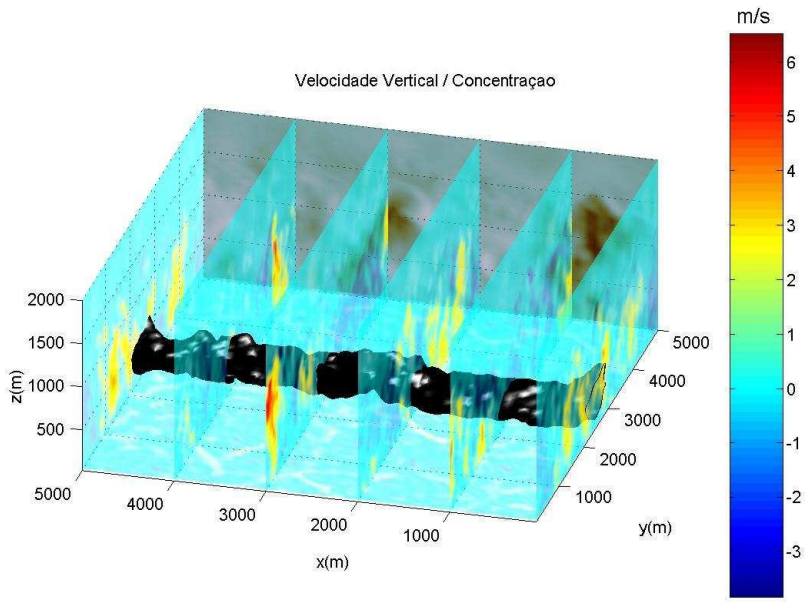

Figura 3.11: Configuração tridimensional inicial da linha fonte instantânea de um poluente inerte e passivo na grade (superfície em preto) no instante $t \approx t_0$. Os cortes instantâneos distribuídos pelo volume representam a velocidade vertical na escala resolvida indicada na barra de cores.

com respeito ao transporte horizontal, ou seja, $1,2w_0 \leq \overline{U} \leq 6,0w_*$. Tal interpretação é baseada na aplicação da hipótese de Taylor ($t_\tau = x/\overline{U}$). Com isso, o tempo de liberação do poluente pode ser associado à distância adimensional longitudinal da fonte ([156]; [111]). Porém, a velocidade do vento horizontal adotada nas simulações é inferior a $1ms^{-1}$ (isto é $\overline{U} \leq 0,5w_*$), valor este que está fora o limite de validade sugerido por Willis e Deardorff para aplicação da hipótese de Taylor $1,2w_0 \leq \overline{U} \leq 6,0w_*$. Portanto, fez-se necessário a utilização do tempo de liberação (t) em substituição a escala de tempo de Willis e Deardorff ($t_\tau = x/\overline{U}$). Dessa forma, considerou-se a distância adimensional longitudinal da fonte dada por: $X_* \approx \frac{W_*}{z_i}t$ ao invés de $X_* \approx \frac{W_*}{z_i}\frac{x}{\overline{U}}$.

A concentração integrada lateralmente é definida por:

$$\overline{c_y}(z,t) = \int_{Ly}\int_{Lx} \overline{c}(x,y,z,t)dx\ dy \tag{3.6}$$

onde $\overline{c}$ é a concentração instantânea e Lx e Ly são as extensões do domínio hor-

izontal na direção longitudinal e lateral, respectivamente. A concentração $\overline{c_y}(z,t)$ é adimensionalizada dividindo-a por M/z_i, onde M é a massa total de poluente inserida na fonte linha.

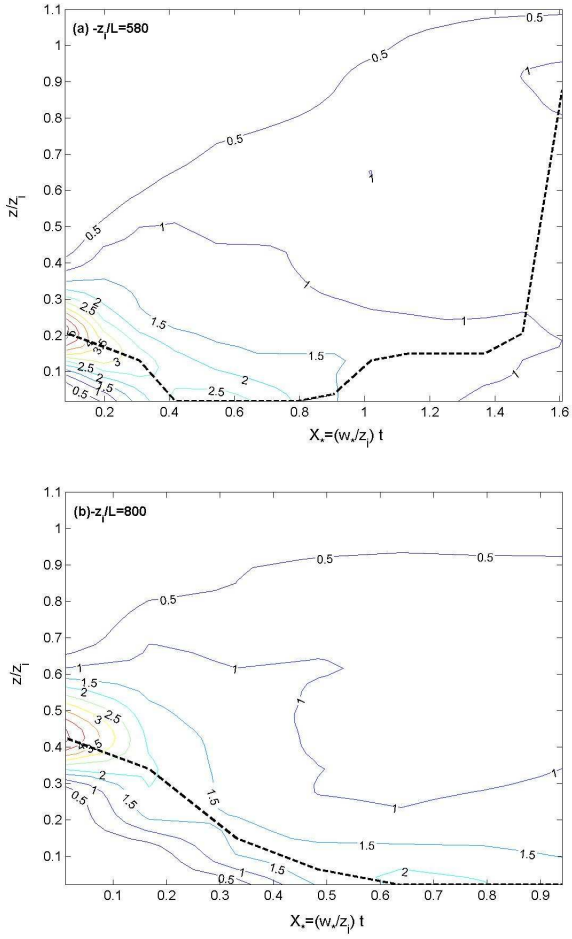

Figura 3.12: Concentração média adimensional integrada lateralmente em função da distância longitudinal adimensional da fonte. Fontes pontuais contínuas localizadas em: (a) $z_s \approx 0,20z_i$ e (b) $z_s \approx 0,45z_i$. A linha tracejada representa a concentração máxima.

Para que a condição de conservação de massa seja satisfeita o valor da concentração $\overline{c_y}(z,t)/M$ integrada por toda a CLA deve ser igual a $1,0$. Durante o período de simulação $\overline{c_y}(z,t)/M$ variou entre $1,0$ e $0,98$, resultando numa margem de erro menor ou igual a 2%. Na Fig. (3.12) são apresentadas as concentrações

adimensionais integradas lateralmente $\overline{c_y}(z,t)z_i/M$ para um poluente emitido nas respectivas alturas adimensionais, $z_s \approx 0,20z_i$ e $z_s = 0,45z_i$, onde z_s é a altura da fonte.

Apesar da curta distância adimensional da fonte simulada ($X_* \leq 1.6$) os campos de $\overline{c_y}(z,t)z_i/M$ concordam qualitativamente com os resultados apresentados na literatura ([157]; [67]; [126]). e reproduzem o comportamento esperado da pluma de um poluente inerte e passivo emitido na CLA convectiva.

No caso do poluente liberado em $z_s \approx 0,20z_i$ (Fig. 3.12a) a concentração máxima $\overline{c}_{max}$ se propaga para baixo e atinge a superfície em $X_* \approx 0,4$. Entre $0,4 \leq X_* \leq 0,8$ a concentração é máxima na superfície e a partir de $X_* > 0,8$ a pluma afasta-se da mesma, alcançando as camadas superiores. A concentração se mantêm máxima na superfície por uma distância $\Delta X \approx 0,4$ ($0,4 \leq X_* \leq 0,8$), equivalente a obtida por Willis e Deardorff ([157]).

Para a fonte de emissão localizada em $z_s \approx 0,45z_i$ (Fig. 3.12b) a concentração é máxima na superfície em $X_* \approx 0,6$, que está de acordo com os resultados apresentados por Henn e Sykes [67]. Porém, não é possível estimar a distância na qual $\overline{c}_{max}$ permanece próximo a superfície devido ao tempo curto da simulação.

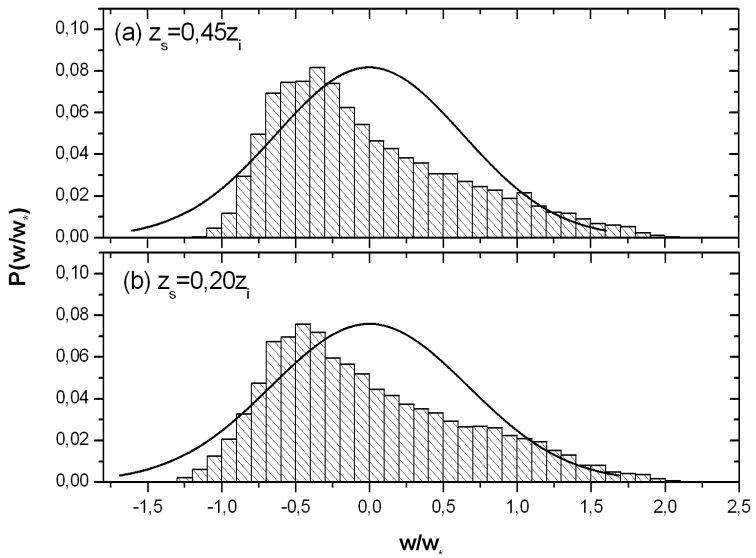

Figura 3.13: Distribuição de freqüências da velocidade vertical adimensional no plano horizontal para os níveis de emissão: (a) $z_s \approx 0,45z_i$ e (b) $z_s \approx 0,20z_i$. A linha contínua em preto representa a distribuição gaussiana.

Essas características de dispersão podem ser compreendidas em termos da

liberação do poluente dentro dos *updrafts* e *downdrafts*. De acordo com Lamb [84], o fenômeno que causa o movimento descendente da pluma próximo à origem para fontes de emissão localizadas em alturas elevadas ($z_s > 0,1z_i$) é a assimetria da função densidade de probabilidade da velocidade vertical da escala resolvida $\overline{w}$ no plano horizontal. No caso de fontes de emissão localizadas próximas à superfície $z_s \leq 0,1z_i$ (não mostrado) o comportamento da pluma para condições de estabilidade similares, apresenta um máximo de concentração ascendendo após percorrer uma curta distância longitudinal. Esse comportamento é causado pela convergência das partículas localizadas próximo à superfície para dentro dos *updrafts*, que as transportam verticalmente causando um máximo de concentração na parte superior da CLA.

Nas Figs. (3.13a e 3.13b) são apresentadas as distribuições de freqüências da velocidade vertical adimensional nos respectivos níveis de emissão. Os resultados estão de acordo com o padrão não-gaussiano da dispersão vertical de poluente inertes e passivos na CLA convectiva. Quanto mais próximo à superfície é a localização da fonte, mais a moda desta distribuição se distancia de $x/w_* = 0$ ([84]; [150]). Apesar de grande parte do plano horizontal ser dominado pelos movimentos descendentes ($\approx 60\%$ de *downdrafts*), o *skewness* da velocidade vertical é positivo, uma vez que os *updrafts* são bem mais intensos.

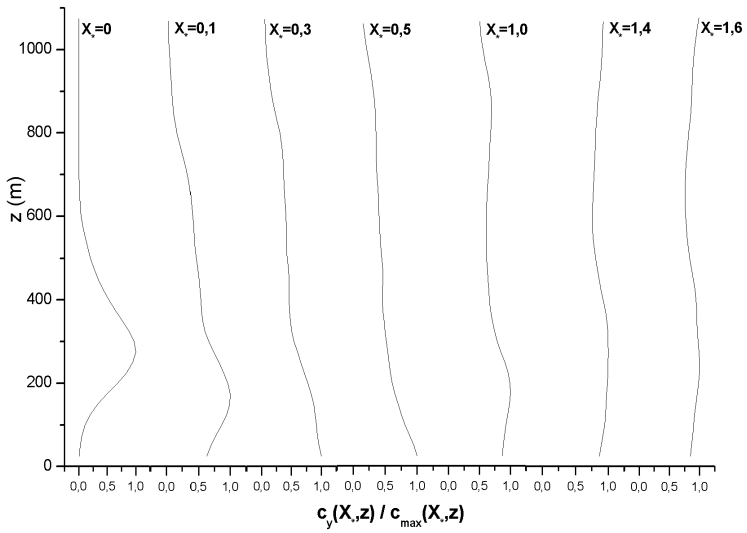

Figura 3.14: Perfis verticais adimensionais de concentração média integrada em diferentes instantes de tempos, onde c_{max} é o valor máximo da concentração em cada instante de tempo.

O padrão assimétrico da distribuição vertical do poluente na CLA também

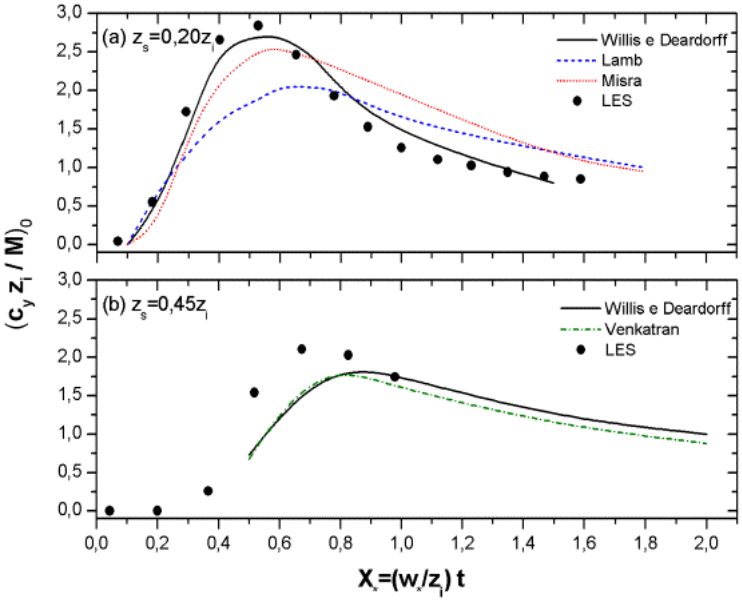

Figura 3.15: Concentração média adimensional ao nível da superfície para fontes pontuais contínuas localizadas em: (a) $z_s = 0,20z_i$; (b) $z_s = 0,45z_i$. Os círculos em preto representam as simulações eulerianas realizadas e as curvas os dados experimentais ([157]; [30]) e modelos numéricos baseados em fdps ([102]; [145]; [84]),

pode ser observado nos perfis verticais de concentração integrada lateralmente (Eq. 3.6) adimensionalizada pela concentração máxima em diferentes distâncias adimensionais $\overline{c}_y(X_*, z)/\overline{c}_{max}(X_*, z)$ (Fig. 3.14). Observa-se que a distribuição vertical do poluente deixa de ser gaussiana em uma curta distância após a emissão $X_* = 0,1$. A concentração é máxima na superfície entre $0,3 \leq X_* \leq 0,5$. Para distâncias adimensionais ($X_* \geq 1,0$), a variação vertical do poluente é relativamente pequena e tende a se tornar uniformemente distribuída por toda camada ([67]; [14]).

Nas Figs. (3.15) são apresentadas as concentrações adimensionais ao nível da superfície $(\overline{c_y} z_i/M)_0$ para as duas alturas de emissão. Para fonte de emissão localizada em $z_s \approx 0,20z_i$ (Fig. 3.15a) a distribuição de $\overline{c}_y(X_*, z)/\overline{c}_{max}(X_*, z)$ ajusta-se perfeitamente aos dados experimentais de Willis e Deardorff, inclusive com relação a posição do máximo.

No caso da fonte localizada em $z_s \approx 0,45z_i$ (Fig. 3.15b) $(\overline{c_y} z_i/M)_0$ é máximo em $X_* \approx 0,7$, inferior a distância adimensional $X_* \approx 0,8$ obtida por Willis e Deardorff (1981) e Venkatran (1983). Essa diferença pode estar relacionada à baixa velocidade horizontal do vento considerada nas simulações, o que faz com que o transporte vertical de poluente seja mais efetivo [132]; [57]). De acordo com Weil ([151] e [152]) as condições de estabilidade também influênciam o padrão de

dispersão, ou seja, quanto menor $-z_i/L$ mais lenta é a dispersão de poluentes.

Quantitativamente, os resultados obtidos pela metodologia euleriana para estudos de dispersão de poluentes na CLA altamente convectiva reproduziram o comportamento esperado da pluma para fontes de emissão localizadas em alturas elevadas ($z_s > 0,1z_i$). Portanto, espera-se que os padrões de dispersão de um poluente emitido por fonte área contínua localizada na superfície sejam representativos do comportamento da dispersão de CO na RMSP (Seção 3.5).

3.7 Conclusões

Nesse trabalho, o modelo LES foi utilizado para descrever as propriedades estatísticas da turbulência em uma CLA altamente convectiva, associada à baixa velocidade do vento, sobre uma superfície horizontalmente homogênea. Com a estrutura da turbulência determinada, foi realizado um estudo sobre a dispersão euleriana de um poluente inerte e passivo, emitido de duas formas distintas: fonte área e fonte pontual contínua.

Realizou-se um conjunto de simulações numéricas com 80^3 e 96^3 de pontos de grade e dimensões de 5 $km \times 5$ $km \times 2$ km. As condições iniciais foram estabelecidas de forma a gerar CLAs convectivas com diferentes graus de instabilidade ($62 \leq -z_i/L \leq 800$). Cinco dessas simulações (Tabela 3.2) serviram de base para a caracterização da estrutura da turbulência e as demais foram utilizadas nos estudos de dispersão de um poluente inerte e passivo. Devido à inexistência de dados experimentais obtidos em campo, os resultados simulados foram confrontados com os prognósticos teóricos da similaridade da camada de mistura.

As estruturas dinâmicas e termodinâmicas das CLAs simuladas pelo modelo LES foram similares às esperadas para uma camada em condições altamente convectivas. O aumento médio de $\langle\overline{\Theta}\rangle$ na camada de mistura mostrou-se consistente com a taxa de aquecimento obtida pelo modelo de camada de mistura. Os perfis verticais de velocidade horizontal do vento apresentaram uma forma logarítmica na região próxima à superfície e um gradiente praticamente nulo no restante da CLA.

A variância das componentes horizontais de velocidade é aproximadamente constante com a altura em quase toda a camada de mistura. Por outro lado, a variância da componente vertical de velocidade $\{\langle w^{'2}\rangle + \langle\tau_{ww}\rangle\}$ apresentou um máximo de $(0,48 \pm 0,01)w_*^2$ em torno de $z \approx 0,38z_i$, o que está aproximadamente de acordo com os valores sugeridos por Deardorff [28].

Comparando-se os perfis verticais de $\{\langle w^{'2}\rangle + \langle\tau_{ww}\rangle\}/w_*^2$ com a curva experimental proposta por Lenschow, [86], ($\overline{[w'^2]}/w_*^2 = 1,8(z/z_i)^{2/3}(1 - 0,8z/z_i)^2$) observa-se que eles apresentam formas similares, porém, o máximo simulado encontra-se acima do proposto por Lenschow.

Os campos instantâneos das flutuações de velocidade vertical, temperatura potencial e dos fluxos turbulentos locais permitiram identificar o padrão assimétrico das estruturas coerentes na CLA altamente convectiva. As análises dos campos instantâneos do fluxo local de calor sensível mostram que as distribuições espaciais dos *updrafts* e *downdrafts* estão de acordo com os resultados apresentados na literatura

([129]; [105]; [78]). Isto ficou evidenciado no campo tridimensional instantâneo da componente vertical de velocidade $\overline{w}$.

Uma vez estabelecidas as principais características da estrutura da turbulência na CLA convectiva, o modelo LES foi aplicado a estudos de dispersão de poluentes inertes e passivos emitidos continuamente por diferentes tipos de fontes (área e pontual), localizadas em diferentes alturas da CLA convectiva. De uma maneira geral, as propriedades da dispersão de um poluente inerte e passivo emitido em diferentes alturas da CLA convectiva foram reproduzidas adequadamente pelo modelo LES.

Na dispersão euleriana de um poluente emitido por uma fonte área contínua localizada na superfície, o grau de limpeza da CLA está diretamente relacionado à intensidade dos processos de entranhamento no topo. Isso fica evidente nas análises dos perfis verticais de *skewness* de concentração de poluente e na visualização dos campos instantâneos de velocidade vertical e concentração. A taxa de variação temporal da concentração simulada pelo modelo LES é $\partial\langle c\rangle/\partial t \approx 0,15ppph\ h^{-1}$, enquanto que a observada em São Paulo no mês de junho, entre as $10h$ e $13h$ é $\approx 0,20ppm\ h^{-1}$. Esses resultados podem ser considerados como representativos da dispersão de CO na RMSP, sobre uma superfície horizontalmente homogênea e com intenso tráfego de veículos automotores.

Para dispersão de poluentes emitidos por fontes pontuais contínuas localizadas em alturas elevadas da CLA, as plumas simuladas reproduziram o comportamento esperado. A concentração máxima ocorre na superfície, antes de se propagar pelas camadas superiores. Esse padrão reflete a assimetria na distribuição de freqüência do campo de velocidade vertical, que indica a maior probabilidade de ocorrência de *downdrafts* ($\approx 60\%$).

Quanto maior a convecção térmica, mais intensa é a mistura vertical do poluente na CLA. Isso faz com que a distribuição vertical do poluente torne-se homogênea em distâncias adimensionais pequenas. Além disso, a condição de estabilidade influencia diretamente a distância adimensional na qual a concentração é máxima na superfície. Comparativamente as duas metodologias de dispersão adotadas geraram resultados similares.

Essa concordância confirma a hipótese levantada neste trabalho, de que o modelo LES pode ser utilizado como uma ferramenta de validação de modelos operacionais de dispersão.

Apesar dos resultados extensivamente explorados nesse trabalho serem válidos para uma CLA altamente convectiva sobre uma superfície horizontalmente homogênea, espera-se que esta metodologia de validação de modelos de dispersão possa também ser apropriada para outras condições de estabilidade, ocupação do solo e topografia.

O nível de detalhe e de realismo fornecido pelo modelo LES irá auxiliar o desenvolvimento de novas parametrizações que representem de forma adequada os transporte turbulentos na CLA pelos modelos operacionais.

Capítulo 4

Sistemas Multiagentes Baseados em Conhecimento

4.1 Introdução

A construção de de sistemas computacionais autônomos que tomem *boas decisões sobre suas ações* em diferentes cenários não é tarefa simples, se o sistema consiste de vários *agentes autônomos* (ou *agentes racionais*) que executam suas ações baseados em seu próprio conhecimento, então a tarefa se torna ainda mais complexa.

A matemática oferece diversas estruturas que dão arcabouço para o processo de *tomadas de decisão*. Por exemplo, no caso de supormos o *utilitarismo* como princípio da racionalidade [35], temos a *Teoria da Decisão* que fornece subisídios para maximizar a performance de um agente. Se considerarmos o caso de sistemas multiagentes - onde ocorre a interação entre agentes (troca de conhecimento), a *Teoria dos Jogos* que se mostra favorável como uma ferramenta de predição e análise.

No caso dos *modelos baseados na utilidade*, um agente é dito racional se ele sempre busca a *maximização de sua utilidade esperada* [35]. A teoria da decisão permite representar operações quantitativas sobre as preferências de um agente entre diversos *mundos possíveis*, isso torna possível o cálculo de tais preferências; evidentemente estamos supondo que há uma consistência entre as preferências do agente e as escolhas (decisões) que faz.

O uso da teoria da decisão pode se dar do seguinte modo: tome o conjunto A de todas as possíveis ações de um certo agente i, para uma determinada tarefa. A execução de uma determinada ação pode gerar um conjunto $S = \{ s, s_1, s_2, ... \}$ de *resultados* tal que cada elemento de S está associado a um valor real por meio da *função utilidade* $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Denotamos por $P(r|a)$, a probabilidade do resultado $r \in S$ dado que o agente executou a ação $a \in A$. Se $f(r) > f(r')$, então dizemos que o agente prefere gerar o resultado r a r'. A *utilidade esperada* de uma ação $a \in A$ é denotada por $Ef(a)$. Desse modo, $Ef(a)$ representa a utilidade que um agente poderia esperar ao executar a ação a, $Ef(a) = \sum_{s \in S} f(s)P(s|a)$ [127]. Portanto, um

agente racional seria aquele que *executa ações que maximizam* $Ef(a)$, ou seja, que tem o comportamento (ações) determinado por: $max_{a \in A} \sum_{s \in S} f(s)P(s|a)$ [127].

No caso do uso da Teoria dos Jogos devemos considerar não somente que os agentes são completamente racionais e escolhem a estratégia que maxima $Ef(a)$, mas também a interação entre agentes [8], considerar a expectativa de cada agente sobre aquilo que os outros agentes farão.

Tanto a Teoria da Decisão quanto a Teoria dos Jogos são poderosas ferramentas analíticas, ambas de natureza *quantitativa*. A dificuldade no uso dessas abordagens está em efetivarmos as *melhores ações* do agente, na prática devemos fazer uma busca em todo o *espaço de ações e seus respectivos resultados*, o que pode ser computacionalmente muito caro. Ainda, na prática, é difícil estabelecer a distribuição P ou a função f [127, Pág. 475-480].

Para contornar essas limitações, adotamos a abordagem via *sistemas axiomáticos*, que também apresenta restrições quanto à *complexidade computacional*. No entanto, a *transparência* em expressar as *propriedades internas dos agentes*, as interações, as inferências dedutivas e o *sistema como um todo* favorecem a adoção de tal aparato. Em particular, adotamos a *linguagem da lógica modal* para capturar a noção de *conhecimento* subjacente aos agentes racionais.

As linguagens das *lógicas não clássicas* são freqüentemente representadas por modificações ou extensões da linguagem clássica, pela remoção de alguma propriedade ou adição de novos operadores. A lógica modal enquadra-se nesse último caso, é uma extensão da lógica proposicional clássica pela a inclusão de operadores modais. Esses operadores expressam a *modalidade gramatical* de uma sentença [101, pág. *iv*], isto é, qualificam como *verdadeira* ou *falsa* uma proposição de acordo com o que distinguem: *necessidade*, *possibilidade*, *conhecimento*, *crença*, *obrigação*, *propriedades temporais* e outras modalidades.

A expressividade da linguagem modal, dada a diversidade de leituras de seus operadores, permite sua utilização sob diferentes enfoques, por exemplo, no tratamento de questões de caráter filosófico - levando a análise de tais problemas a um novo nível de discussão, o formal: os *argumentos* podem ser vistos como *modalidades* [54, cap. 1]; no estudo da *Lógica da Prova* [11]; na análise de questões envolvendo *a gramática de Montague* ([107] e [144]); em aplicações em economia [98]; em programação ([122], [123] e [124]); em programação concorrente ([68], [69], [100] e [119]); no tratamento formal de protocolos em sistemas distribuídos ([47], [40] e [63]); nos métodos de especificação e verificação formal [93]; em bancos de dados [38]; em lingüística computacional ([110], [15] e [144]); no estudo da computação quântica ([20]) e em construções de sistemas baseados em conhecimento ([43] e [162]).

4.2 A Lógica Proposicional Clássica

Descrevemos de modo breve o *sistema formal* LP para a lógica proposicional clássica. Um dos objetivos da construção de um sistema como LP é obter uma descrição sintática de $\models$ (*conseqüência semântica*) em que se tenha bem definida a relação $\vdash$ (*conseqüência sintática*) e tal que as propriedades operacionais de $\vdash$

espelham as de $\models$.

A construção de LP é como segue: seja $\Phi = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ o conjunto das *proposições atômicas* e $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ os conectivos lógicos, chamamos de *fórmulas* de LP qualquer elemento de Φ ou uma expressão da forma: $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ e $\varphi \leftrightarrow \psi$, com φ e ψ elementos de Φ. $\mathsf{LP}(\Phi)$ é o menor conjunto contendo todas as fórmulas obtidas de Φ. Definimos o *tamanho de uma fórmula* φ pelo número de letras proposicionais e conectivos que nela ocorrem e denotamos por $|\varphi|$. As fórmulas de $\mathsf{LP}(\Phi)$ são manuseadas por meio de *esquemas de axiomas* e de uma única *regra de inferência*. Para quaisquer fórmulas φ, ψ e χ são *esquemas de axiomas* de LP:

1_{LP}) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

2_{LP}) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

3_{LP}) $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.

Cada instância de um dos esquemas de axioma é um *axioma*, por abuso chamamos os esquemas de axiomas de axiomas. A regra de inferência *modus ponens* (MP) é dada por: se φ e $\varphi \rightarrow \psi$, então ψ, para φ e ψ em $\mathsf{LP}(\Phi)$. Esquematicamente: $\dfrac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$.

Há um processo, que chamamos *prova*, pelo qual podemos obter fórmulas de um determinado tipo em LP. Uma prova em LP é uma seqüência finita $\varphi_1 \ldots, \varphi_m$ de fórmulas tal que para cada j, $1 \leq j \leq m$, ou φ_j é teorema de LP ou φ_j é obtido por modus ponens a partir de fórmulas anteriores. Qualquer fórmula φ obtida através de uma prova em LP é chamada de *teorema* de LP, denotamos tal fato por $\vdash \varphi$. Dizemos que φ é *consistente* se, e somente se, φ não é teorema em LP, isto é, $\nvdash \varphi$. Um conjunto finito de fórmulas $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ é dito *consistente* se, e somente se, $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m$ é consistente. Um conjunto infinito de fórmulas é dito *consistente* se, e só se, todo subconjunto finito o for.

Após definirmos o conceito de $\vdash$, a noção de *conseqüência sintática*, necessitamos construir uma semântica para os elementos sintáticos de LP. Uma semântica se estabelece, em geral, a partir da noção de *interpretação* que correlaciona elementos de $\mathsf{LP}(\Phi)$ a $\{\top, \bot\}$, com $\top$ denotando *verdadeiro* e $\bot$ *falso*. Em LP, esta correlação é feita por uma *função de valoração*[1] π de Φ para $\{\top, \bot\}$. Dizemos que φ *é verdadeiro sob uma valoração* π se $\pi(\varphi) = \top$. Uma fórmula φ é dita *satisfatível* se, e somente se, existe π tal que $\pi(\varphi) = \top$. Diz-se que φ é *válida* (*tautologia*) se $\pi(\varphi) = \top$ para qualquer valoração π, denotamos a validade de φ por $\models \varphi$. Um resultado imediato é que φ é válida se, e somente se, $\neg\varphi$ não é satisfatível. Ainda, vale o seguinte teorema:

Teorema 2.1

Para qualquer fórmula φ de LP $\vdash \varphi$ se, e somente se, $\models \varphi$.

O teorema acima diz que as propriedades operacionais de $\vdash$ espelham as de $\models$, ou seja, em LP, os conceitos de *verdade* e *validade* podem ser tratados operacionalmente.

[1] Pelo critério da *composicionalidade* podemos estender o domínio de π para $\mathsf{LP}(\Phi)$, pois a semântica de uma fórmula depende unicamente da semântica atribuídas às suas partes, por exemplo, a semântica para a fórmula $(\varphi \wedge \psi)$ depende única e exclusivamente da semântica atribuída a φ e ψ.

4.3 A Lógica Modal Proposicional

A lógica modal costuma ser caracterizada como a *lógica da necessidade e possibilidade* por serem estas as modalidades mais investigadas, os símbolos usuais para representar tais modalidades são $\Box$ e $\Diamond$, respectivamente. Tais operadores não são como os conectivos de LP, pois, em geral, não se pode determinar a semântica de uma expressão da forma $\Box\varphi$ ou $\Diamond\varphi$, unicamente a partir da semântica atribuída a φ, são exceções: *se φ é verdadeira, então $\Diamond\varphi$ também é verdadeira*, e *se φ é falsa, então $\Box\varphi$ também é.* Logo, os operadores modais não podem ser caracterizados a partir dos conectivos clássicos e sua semântica difere da do cálculo proposicional clássico.

Definimos os elementos sintáticos da lógica modal proposicional (LM) como extensão de $\mathsf{LP}(\Phi)$. Considerando a linguagem de LP e o operador $\Box$ definimos $\mathsf{LM}(\Phi)$ como sendo o menor conjunto contendo $\mathsf{LP}(\Phi)$ e tal que se $\varphi \in \mathsf{LM}(\Phi)$, então $(\Box\varphi) \in \mathsf{LM}(\Phi)$. Os esquemas de axiomas de LM são: todas as tautologias de LP e $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$, para $\varphi, \psi \in \mathsf{LM}(\Phi)$. Além da regra *MP* (adequada a LM) temos a *regra de generalização modal* (*GM*): $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$. Esta regra pode ser entendida como *tudo que é derivável de verdades necessárias é necessariamente verdadeiro*, isto é, *teoremas são verdades necessárias.* Os conceitos de *teorema*, *prova* e *consistência*, em LM, são introduzidos *mutatis mutandis* como feito em LP.

4.3.1 A semântica dos mundos possíveis

Em geral, adota-se a *semântica dos mundos possíveis*[2] (*semântica de Kripke*) para as diversas aplicações da lógica modal proposicional, por ser mais intuitiva e oferecer recursos tais que qualquer mudança na axiomática pode ser capturada pelas diferentes leituras do termo *mundo possível.*

Basicamente, a semântica atribuída aos elementos sintáticos de LM deve preservar as características de LP e ser adequada ao operador $\Box$. Entende-se que um fato φ é *necessariamente verdadeiro* se, e somente se, este fato se verifica sob qualquer interpretação.
Em termos de *mundo possível* dizemos que $\Box\varphi$ é verdadeiro num mundo w se, se e só se, φ é verdadeiro em todos os mundos w' acessíveis a partir de w. Graficamente:

A formalização dessa semântica, portanto das noções de *satisfatibilidade* e *validade*, se dá por meio das estruturas de Kripke.

Uma *estrutura de Kripke* M é uma 3-upla $\langle W, \pi_W, \mathcal{R}\rangle$, com π_W *conjunto de todas as interpretações modais referentes aos mundos em* W e $\mathcal{R}$ relações sobre W. A *relação de satisfatibilidade* ($\models$), em LM, associa uma fórmula a uma estrutura e um mundo do seguinte modo:

1) $(\mathrm{M}, w) \models \varphi$ com $\varphi \in \Phi$ se, e só se, $\pi_w(\varphi) = \top$,

2) $(\mathrm{M}, w) \models \neg\varphi$ se, e só se, $(\mathrm{M}, w) \not\models \varphi$,

[2] idéia da semântica dos mundos possíveis é devido a Leibniz.

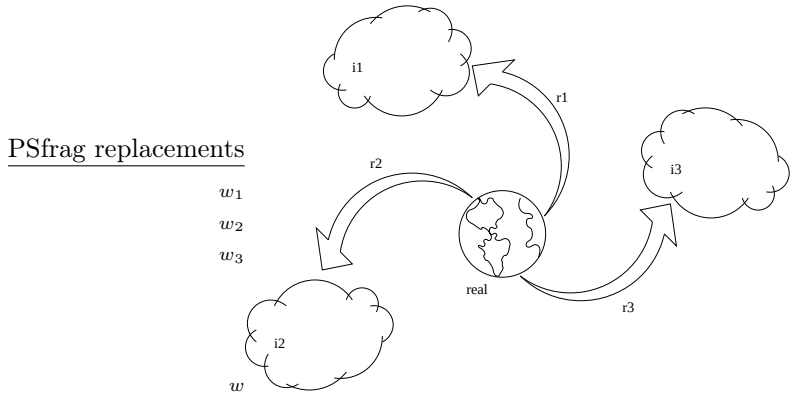

Figura 4.1: O fato φ é verdadeiro em w se, e só se, φ é verdadeiro em todas as interpretações possíveis, a partir de w. Ou seja, $\Box\varphi$ é verdadeiro em w se, se e só se, φ é verdadeiro sob qualquer interpretação, a partir de w.

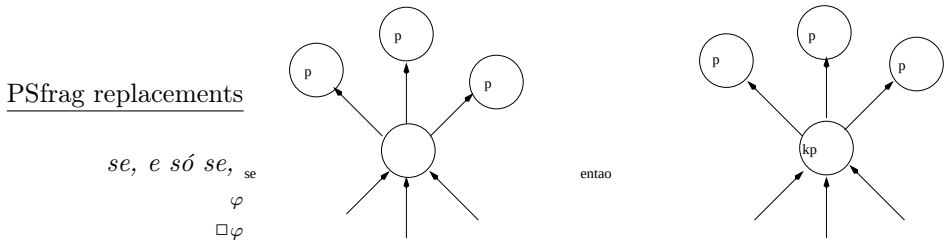

Figura 4.2: Um mundo onde $\Box\varphi$ é verdadeiro.

3) $(\mathrm{M}, w) \models \varphi \rightarrow \psi$ se, e só se, $(\mathrm{M}, w) \not\models \varphi$ ou $(\mathrm{M}, w) \models \psi$,

4) $(\mathrm{M}, w) \models \Box\varphi$ se, e só se, $(\mathrm{M}, t) \models \varphi$ para todo t tal que $(w, t) \in \mathcal{R}$.

As três primeiras cláusulas da definição são análogas às de LP, a última cláusula formaliza a idéia descrita anteriormente (vide figuras 1 e 2).

Para caracterizar as propriedades do operador modal defimos o conceito de fórmulas *válidas em relação a uma estrutura* M e fórmulas *válidas em relação a uma classe* $\mathcal{M}$ de estruturas. Fixado Φ denotamos por $\mathcal{M}$ a *classe de todas as estruturas de Kripke* sobre Φ sem nenhuma restrição sobre as relações $\mathcal{R}$. Assim, dizemos que uma fórmula φ é *satisfeita em* (M, w) se, e só se, $(\mathrm{M}, w) \models \varphi$. Uma fórmula φ é dita ser *satisfatível em relação a* M se $(\mathrm{M}, w) \models \varphi$, para algum mundo w em W de M. Uma fórmula φ é *satisfatível em relação a uma classe* $\mathcal{M}$ se φ é satisfatível em alguma estrutura M de $\mathcal{M}$ ($(\mathcal{M}, \mathrm{M}) \models \varphi$). Dizemos que φ é *válida em relação a uma estrutura* M ($\mathrm{M} \models \varphi$), se $(\mathrm{M}, w) \models \varphi$, para todo w ($w \in W$). A validade de uma fórmula φ em relação a uma classe $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \models \varphi$), ocorre se φ for válida em todas as estruturas M de $\mathcal{M}$.

Veja que a semântica para LM, caracterizada pela noção de *mundo possível*, é uma *estrutura relacional* e engloba a semântica de LP. Some a essa semântica a variedade de leituras atribuídas ao operador modal $\Box$, o resultado é a diversidade de aplicações da lógica modal. Por exemplo, em PDL (*Program Dinamic Logic* - [124]) um mundo possível pode ser interpretado como sendo o *estado de um programa*, já na *lógica modal temporal* um mundo possível pode ser considerado um *ponto no tempo* (([39, pág. 2] e [125, pág. 2]). Para capturar a noção de *conhecimento de uma sentença* devemos entender o significado do termo ″conhecer″ por *afirmar as condições sob as quais a sentença é verdadeira*, ou seja, é saber *como seria o mundo se a sentença fosse verdadeira*. Essa correlação, em termos de mundos possíveis, fornece a seguinte idéia: *o conhecimento corresponde a uma relação da qual se pode determinar em qual mundo nos encontramos* ([60, pág. 323]). A seção seguinte trata da lógica modal e a noção de conhecimento, num próximo artigo publicaremos sobre o uso da lógica modal aplicada à programação e a banco de dados temporais.

4.4 Conhecimento e Representação de Conhecimento

A utilização da semântica dos mundos possíveis para representar conhecimento foi primeiro[3] formalizada por Hintikka ([71, pág. 93]) e pode ser resumida do seguinte modo (veja a figura 1): *considere um agente i, localizado em um mundo w (este é o mundo real de i). Seja W o conjunto de todas as interpretações (mundos[4]) possíveis de w. Se W' ($W' \subseteq W$) é o conjunto das interpretações possíveis de w segundo a percepção de i, então i conhece φ, em w, se, e somente se, φ se verifica em todas as interpretações w' de W'.*

A noção de conhecimento, como descrito anteriormente, pode ser formalmente caracterizada pela noção de *interpretação modal* (π_w), que estende o conceito de *interpretação* (π) em LP, pois uma função de *bivaloração* pode ser entendida (intuitivamente) como sendo uma certa descrição da realidade (um mundo possível). Assim, uma *interpretação modal* é uma função de Φ em $\{\bot, \top\}$ referente a um mundo $\mathfrak{w}$. Note que ao nos referirmos a um mundo possível w estamos nos referindo a uma possível interpretação modal que identificamos por π_w, isto é, dizer que *existe um mundo possível w* significa dizer que *existe uma possível interpretação π_w das proposições primitivas que compõe w que pode ser qualquer uma entre as $2^{|\Phi|}$ existentes*. Evidentemente, se W é um subconjunto do conjunto de todos os mundos possíveis referentes ao domínio de Φ, então W possui $|W|$ referências e cada uma delas com $2^{|\Phi|}$ possibilidades de escolha. Finalmente, a noção intuitiva de conhecimento se efetiva através do conceito de validade, para isso são cruciais as relações $\mathcal{K}_i$ ($\mathcal{K}_i \subseteq W \times W$, $i \in \Delta$) entre o ″mundo real″ w_0 e suas possíveis descrições alternativas, de acordo com a visão de i sobre w_0.

A formalização dos sistemas de conhecimento é obtido através da releitura de LM e pela inclusão de outros axiomas obtemos diferentes sistemas de conhecimento.

[3]Kanger em 1957 explicitou uma semântica (standard) para a lógica modal ([71, pág. 93]).

[4]Um mundo possível não deve ser entendido como uma alternativa para o mundo real, mas como uma alternativa de alguma descrição do mundo real.

4.4.1 Os Sistemas Multiagentes K_n, T_n, $\mathsf{S4}_n$, $\mathsf{S5}_n$ e $\mathsf{KD45}_n$

Sintaticamente, K_n é uma extensão de LM, basta considerar o operador $\Box$ como sendo o operador conhecimento K_i relativo ao agente i, temos então: dado um conjunto finito de agentes $\Delta = \{1, 2, \ldots, n\}$ o conjunto $\mathsf{K}_n(\Phi)$ é a menor coleção contendo $\mathsf{LP}(\Phi)$, tal que se $\varphi \in \mathsf{K}_n(\Phi)$, então $(K_i\varphi) \in \mathsf{K}_n(\Phi)$, para $i \in \Delta$. Os esquemas de axiomas de K_n são todas as tautologias de LP e $K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi)$, para $\varphi, \psi \in \mathsf{K}_n(\Phi)$ e $i \in \Delta$.

O esquema de axioma $K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi)$ é chamado de K e pode ser lido como[5]: *i conhece* $\varphi \to \psi$, *então se i conhecer* φ, *i conhece* ψ. A *regra de generalização modal* (*GM*) fica: $\dfrac{\varphi}{K_i\varphi}$ e pode ser entendida como: *tudo que é derivável de verdades conhecidas é conhecimento verdadeiro* (*teoremas são verdades conhecidas*).

Para a semântica, estendemos a noção de *estruturas de Kripke* em LM como segue: considere $\Delta = \{1, 2, \ldots, n\}$ conjunto de n agentes, então uma *estrutura de Kripke* M é uma $(n+2)$-upla $\langle W, \pi_W, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n\rangle$, com π_W conjunto de todas as interpretações modais referentes aos mundos em W e $\mathcal{K}_i$ relações sobre W. Fixado Φ e $|\Delta| = n$, denotamos por $\mathcal{M}_n$ a *classe de todas as estruturas de Kripke* dos n agentes sobre Φ sem nenhuma restrição sobre as relações $\mathcal{K}_i$ $(i \in \Delta)$. Todos os conceitos envolvendo a noção de satisfatibilidade e validade decorrem *mutatis mutandis*.

Vejamos uma situação em que temos a noção de não validade: seja $\Phi = \{p\}$, $\Delta = \{1\}$, $W = \{s, t\}$, $\pi_s(p) = \top$ e $\pi_t(p) = \bot$, e $\mathcal{K}_1 = \{(s, t)\}$. A representação pictórica da situação descrita é dada a seguir:

PSfrag replacements

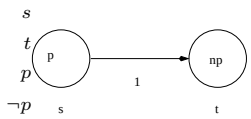

Figura 4.3: Exemplo onde $\varphi \to K_1\varphi$ não é válida.

No exemplo acima $\varphi \to K_1\varphi$ não é verdadeira em s. Se $\mathrm{M} = \langle W, \pi_W, \mathcal{K}_1\rangle$, então $(\mathrm{M}, s) \not\models \varphi \to K_1\varphi$. Portanto $\varphi \to K_1\varphi$ não é válida na classe $\mathcal{M}_1$, ou seja, $\varphi \to K_i\varphi$ não é uma fórmula válida. É razoável, pois o fato de φ ser verdadeiro não leva ao conhecimento de φ.

Outras axiomáticas modais podem ser construídas a partir de K_n. Dependendo das *propriedades epistêmicas* que desejamos atribuir aos agentes podemos escolher diferentes sistemas de conhecimento: o sistema T_n é obtido acrescentando-se à K_n o esquema de axioma $K_i\varphi \to \varphi$. Esse sistema é usado para expressar o conhecimento que é suposto perfeito, o axioma diz que: *se* φ *é conhecido, então* φ *é verdadeiro*, isto é, somente fatos verdadeiros são conhecidos. Por outro lado, se desejarmos analisar o conhecimento não tão perfeito podemos optar pelo esquema $K_i\varphi \to \neg K_i(\neg\varphi)$, que é

[5] Em termos dos mundos possíveis de i significa que *se* $\varphi \to \psi$ *é verdadeira em todos os mundos possíveis de i, então se* φ *é verdadeira em todos os mundos possíveis,* ψ *também o é*, ou seja *o conhecimento de um agente é fechado pela implicação.*

uma versão fraca do axioma anterior (*é falso que se conheçam fatos contraditórios*). O $\mathsf{S4}_n$ é formado pelo sistema T_n mais o axioma $K_i\varphi \to K_i(K_i\varphi)$ que pode ser parafraseado como: *sei o que sei*. Finalmente, o axioma $\neg K_i\varphi \to K_i\neg K_i\varphi$, que é como uma introspecção negativa, e diz que *sei o que não conheço* determina os sistemas $\mathsf{S5}_n$, obtido adicionando este axioma *5* a T_n, e o $\mathsf{KD45}_n$.

A semântica de cada um dos sistemas $\mathsf{T_n}$, $\mathsf{S4_n}$, $\mathsf{S5_n}$ e $\mathsf{KD45_n}$ é obtida restringindo as relações $\mathcal{K}_i$, conforme cada caso. Há uma correspondência direta entre fórmulas modais e fórmulas da lógica de primeira ordem, cada um dos axiomas exibe uma propriedade que reflete diretamente nas características das relações de acessibilidade e vice-versa $\mathcal{K}_i$ (*cf.* [143, pág. 11]).

Como em LP os sistemas modais de conhecimentos são corretos e completos[6], isto é, as propriedades operacionais de $\vdash$ descrevem as propriedades de $\models$ e vice-versa, ou seja, são equivalentes, portanto podemos falar de consistência e *provabilidade* em termos de satisfatibilidade e validade.

4.5 Conhecimento Comum

Dizemos que um fato (uma proposição φ) é de *conhecimento mútuo* entre as pessoas (agentes) de um determinado grupo se todos conhecem o fato. Se ocorrer uma divulgação aberta (por exemplo, um pronunciamento com todas as pessoas do grupo presentes como a feita pelo pai das crianças, no exemplo *muddy children puzzle*), o conhecimento mútuo torna-se *conhecimento comum*, ou seja, φ é de conhecimento comum entre os agentes de um grupo se cada agente conhece φ, cada um deles sabe que todos conhecem φ, cada um deles sabe que todos sabem que conhecem φ, ..., *ad infinitum*.

Para capturar a noção de conhecimento mútuo e conhecimento comum, entre os agentes de um grupo G, estendemos a linguagem $\mathsf{K}_n(\Phi)$ incluindo os operadores E_G e C_G,. Considere $G \subseteq \Delta$ não vazio e uma fórmula φ, então os novos operadores podem ser caracterizados do seguinte modo: $E_G\varphi$ diz que *todos os agentes de G conhecem* φ, isto é, $E_G\varphi$ abrevia $\bigwedge_{i\in G} K_i\varphi$ e $C_G\varphi$ que diz que: *φ é de conhecimento dos agentes de G, que todos em G sabem que todos conhecem φ, que todos em G sabem que todos sabem que cada um deles conhece φ etc*, e é capturada como: $\bigwedge_{j\in\mathbb{N}^*} E_G^j\varphi$, com $E_G^1\varphi = E_G\varphi$ e $E_G^{j+1}\varphi = E_G(E_G^j\varphi)$, $j \geq 1$. A semântica desses operadores é formalizada como segue:

1_C) $(\mathrm{M}, w) \models E_G\varphi$ se e só se $(\mathrm{M}, w) \models K_i\varphi$, para todo $i \in G$,

2_C) $(\mathrm{M}, w) \models C_G\varphi$ se e só se $(\mathrm{M}, w) \models E_G^j\varphi$, $j \in \mathbb{N}^*$.

A relação entre conhecimento mútuo e conhecimento comum, assim como uma forma para tratar a dedução envolvendo o conhecimento comum, é como segue: para

[6]Dizemos que um sistema é correto em relação a classe $\mathcal{M}_n$, se todo teorema desse sistema for válido em relação a $\mathcal{M}_n$, e dizemos que tal sistema é completo em relação a $\mathcal{M}_n$ se toda fórmula válida em relação a $\mathcal{M}_n$ é teorema nesse sistema (para maiores detalhes *vide* [162]).

quaisquer fórmulas $\varphi, \psi \in \mathsf{K}_n^C(\Phi)$, estrutura M de $\mathcal{M}_n$ e $G \subseteq \Delta$ não vazio temos que:

i) $\mathrm{M} \models C_G\varphi \leftrightarrow E_G(\varphi \wedge C_G\varphi)$,

ii) se $\mathrm{M} \models \varphi \rightarrow E_G(\psi \wedge \varphi)$, então $\mathrm{M} \models \varphi \rightarrow C_G\varphi$.

Essas propriedades caracterizam C_G tornando-o operacional, apesar de ser um ″operador infinitário″, além disso estas propriedades permitem adotarmos os seguintes axiomas (*cf.* [98] e [60]) para definir: K_n^C (resp., T_n^C, $\mathsf{S4}_n^C$, $\mathsf{S5}_n^C$ e $\mathsf{KD45}_n^C$), como extensão de K_n (resp., T_n, $\mathsf{S4}_n$, $\mathsf{S5}_n$ e $\mathsf{KD45}_n$), com a inclusão dos seguintes axiomas:

$1_{\mathsf{K}_n^C}$) $E_G\varphi \leftrightarrow \bigwedge_{i \in G} K_i\varphi$ (axioma do conhecimento mútuo),

$2_{\mathsf{K}_n^C}$) $C_G\varphi \rightarrow E_G(\varphi \wedge C_G\varphi)$ (axioma do ponto-fixo),

e da seguinte regra (RI): $\dfrac{\varphi \rightarrow E_G(\psi \wedge \varphi)}{\varphi \rightarrow C_G\psi}$ (regra de indução).

Vale que o sistema K_n^C (resp., T_n^C, $\mathsf{S4}_n^C$, $\mathsf{S5}_n^C$ e $\mathsf{KD45}_n^C$) é correto e completo em relação a $\mathcal{M}_n$ (resp., $\mathcal{M}_n^r$, $\mathcal{M}_n^{rt}$, $\mathcal{M}_n^{rst}$, $\mathcal{M}_n^{elt}$).

4.5.1 Aplicação em Sistemas Síncronos sem Falhas:

Uma situação que retrata sistemas síncronos sem falhas é dada pelo *muddy children puzzle* [43], nela está subjacente a idéia de mundos possíveis para representar conhecimento: considere n crianças brincando todas juntas, ao final de um dia de diversão algumas (digamos k) crianças acabam se sujando e justamente suas testas, onde não podem ver sua própria sujeira. Antes de irem para o banho, o pai das crianças informa-as (em alto e bom tom): ″pelo menos um de vocês está com a testa suja″. E pergunta repetidas vezes (até obter a resposta): ″quem sabe que está com a própria testa suja?″

Para uma representação adequada devemos levar em consideração que desejamos retratar uma situação em que a informação a ser obtida é se a uma criança está ou não com a testa suja. Então, a descrição de uma situação possível é dada por um conjunto Φ de proposições primitivas p_i que afirmam: *i está com a testa suja*, com i indicando uma das n crianças, isto é, cada mundo possível é composto por proposições afirmando se i está ou não com a testa suja.

Podemos fixar $x_i = 1$ se a criança i está com a testa suja e $x_i = 0$ caso contrário, logo a n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $0's$ e $1's$ representa um mundo possível w. Assim, uma interpretação modal referente a um mundo w (para uma n-upla) é uma função tal que $\pi_w(p_i) = \top$ se $x_i = 1$ e $\pi_w(p_i) = \top$ se $x_i = 0$. A afirmação feita pelo pai pode ser representada por $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$, com $\pi_w(p_1 \vee \cdots \vee p_n) = \top$. As possibilidades quanto a uma criança i saber se sua própria testa está suja ou não se estabelece pelas relações entre os mundos, isto é, dois mundos se relacionam se eles mantém uma coerência[7] segundo i. Então, a

[7] A coerência entre dois mundos é mantida se i enxerga as mesmas crianças sujas nos dois mundos, a exceção de sua própria sujeira.

partir do mundo $w = (\mathtt{t}_1, \mathtt{t}_2, \ldots, \mathtt{t}_{i-1}, 1, \mathtt{t}_{i+1}, \ldots, \mathtt{t}_n)$ a criança i tem acesso aos mundos $w' = (\mathtt{t}_1, \mathtt{t}_2, \ldots, \mathtt{t}_{i-1}, 0, \mathtt{t}_{i+1}, \ldots, \mathtt{t}_n)$ e ao próprio w. Graficamente:

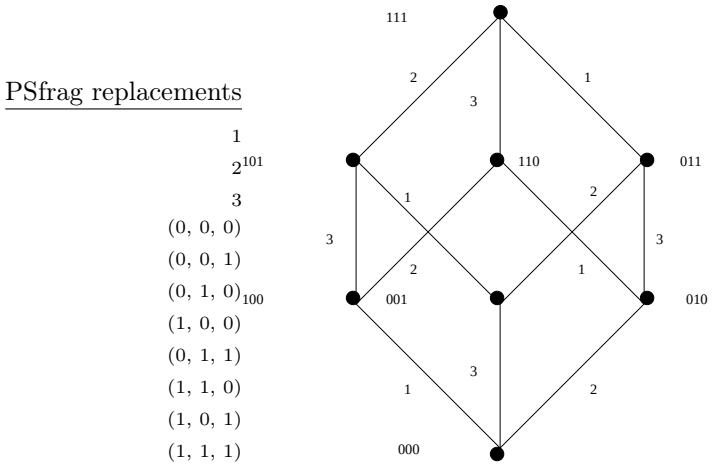

Figura 4.4: Estrutura relacional do "muddy children puzzle", para $n = 3$.

A figura acima representa a situação antes do pai se pronunciar, cada *vértice* é um mundo possível e as *arestas* as relações $\mathcal{K}_i$[8] entre mundos são de acordo com a visão de i. Para representar a situação após a informação do pai basta eliminar o vértice $(0, 0, 0)$ e as aresta a ele incidentes.

4.5.2 Inferência no *Muddy Children Puzzle*

Fazemos uma análise breve do $''$muddy children puzzle$''$, para duas crianças ($\Delta = \{1, 2\}$). Como observamos no início desta seção a informação dada pelo pai das crianças é tal que permite $E_\Delta(p_1 \vee p_2)$. Para a resolução do $''$muddy children puzzle$''$, para duas crianças, utilizamos somente que o conhecimento mútuo E^2_Δ; não necessitamos do conhecimento comum. De fato, para n crianças utilizamos somente o conhecimento mútuo até o nível n, isto é, E^n_Δ.

Para $n = 2$ temos:

- Estado inicial: $K_i p_j$ ou $K_i \neg p_j$, para $i \neq j$
- A divulgação do pai: após a divulgação de que $p_1 \vee \cdots \vee p_n$ tem-se que $K_i p$, para $i \in \Delta$ com p abreviação de $(p_1 \vee \cdots \vee p_n)$. Então, temos $\bigwedge_{i \in \Delta} K_i p$, que denotamos por $E_\Delta p$ (p é de *conhecimento mútuo* entre todas as crianças).
- Apredizado: após a pergunta do pai e o fato de não haver nenhuma resposta temos que $K_i \neg K_j p_j$, para $i \neq j$.

[8] Que nesse caso, são relações de equivalência. As arestas são bidirecionais e omitimos os *laços*.

A prova de $K_i p_i$, $i \in \{1, 2\}$, em $\mathsf{S5}_2$:

1. $K_2 p_1 \vee K_2 \neg p_1$

   $\neg K_2 \neg p_1 \to K_2 p_1$

   $K_1(\neg K_2 \neg p_1 \to K_2 p_1)$

   $K_1(\neg K_2 \neg p_1 \to K_2 p_1) \to (K_1 \neg K_2 \neg p_1 \to K_1 K_2 p_1)$

   $K_1 \neg K_2 \neg p_1 \to K_1 K_2 p_1$

2. $p_1 \vee p_2$

3. $K_2(\neg p_1 \to p_2)$

   $K_2(\neg p_1 \to p_2) \to (K_2 \neg p_1 \to K_2 p_2)$

   $K_2 \neg p_1 \to K_2 p_2$

   $K_1(\neg K_2 p_2 \to \neg K_2 \neg p_1)$

   $K_1(\neg K_2 p_2 \to \neg K_2 \neg p_1) \to (K_1 \neg K_2 p_2 \to K_1 \neg K_2 \neg p_1)$

4. $K_1 \neg K_2 p_2$

   $K_1 \neg K_2 \neg p_1$

   $K_1 K_2 p_1$

   $K_2 p_1 \to p_1$

   $K_1(K_2 p_1 \to p_1)$

   $K_1(K_2 p_1 \to p_1) \to (K_1 K_2 p_1 \to K_1 p_1)$

   $K_1 K_2 p_1 \to K_1 p_1$

   $K_1 p_1$

A próxima seção trata de um aspecto do conhecimento entre agentes que não pode ser capturado a partir da noção de conhecimento mútuo ou conhecimento comum, a idéia de formalizar o conceito de "inferência a partir da combinação de conhecimentos"entre os agentes de um grupo, sem necessariamente a noção de conhecimento mútuo.

4.6 Conhecimento Distribuído

Na seção anterior tratamos da noção de conhecimento comum baseada na idéia de conhecimento mútuo, porém podemos pensar em situações onde o conhecimento mútuo não ocorre e na possibilidade de manipular o conhecimento que é distribuído pelo grupo.

Caracterizamos o *conhecimento distribuído* do seguinte modo: considere a implicação $\varphi \to \psi$ com φ composto de várias partes, isto é, como sendo a conjunção $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m$; se cada agente de um grupo G conhece uma parte de φ, então os agentes em G, juntos, têm o conhecimento distribuído de ψ quando se combinarem seus conhecimentos sobre φ. Formalizamos essa idéia com a inclusão dos axiomas $(1_{\mathsf{K}_n^D})$ e $(2_{\mathsf{K}_n^D})$ aos sistemas K_n, T_n, $\mathsf{S4}_n$ e $\mathsf{S5}_n$. como segue:

Definição 4.1.
Definimos K_n^D *(resp.,* T_n^D*,* $\mathsf{S4}_n^D$*, e* $\mathsf{S5}_n^D$*), como extensão de* K_n *(resp.,* T_n*,* $\mathsf{S4}_n$ *e* $\mathsf{S5}_n$*), com a inclusão dos axiomas:*
$1_{\mathsf{K}_n^D}$) $D_{\{i\}}\varphi \leftrightarrow K_i\varphi$, $i \in \Delta$,

$2_{\mathsf{K}_n^D}$) $D_G\varphi \rightarrow D_{G'}\varphi$, *se* $G \subseteq G'$.

A semântica atribuída ao operador D_G deve ser tal que capture o fato de que a combinação de conhecimentos entre os agentes deve envolver unicamente o que é comum aos agentes envolvidos.

Definição 4.2.
1_D) $(\mathrm{M}, s) \models D_G\varphi$ *se, e só se,* $(\mathrm{M}, t) \models \varphi$ *para todo* t *tal que* $(s,t) \in \bigcap_{i \in G} \mathcal{K}_i$.

Da definição acima decorre que:

Proposição 4.1.
Para qualquer fórmula φ *e* M *em* $\mathcal{M}_n$ *vale:*
i) $\mathrm{M} \models D_{\{i\}}\varphi \leftrightarrow K_i\varphi$, $i \in \Delta$,

ii) $\mathrm{M} \models D_G\varphi \rightarrow D_{G'}\varphi$, *se* $G \subseteq G'$.

Podemos ter situações em que um grupo de agentes pode conhecer fatos contaditórios ($D_G(\varphi \wedge \neg\varphi)$, para $|G| \geq 2$). Este comportamento não se adequa ao esquema de axioma $K_i\varphi \rightarrow \neg K_i \neg\varphi$, que implica em $\neg K_i(\varphi \wedge \neg\varphi)$, motivo pelo qual não incluímos $\mathsf{KD45}_n$ em nossos estudos. Por outro lado o operador D_G mantém as características de K_i em relação a outros esquemas de axiomas. Como nos sistemas anteriores, vale a completude e corretude dos sistemas de conhecimento distribuído.

Os resultados relativos a correção e completude mostram a equivalência entre $\vdash$ e $\models$ em todos os sistemas de conhecimento apresentados, isso permite tratar *consistência* e *provabilidade* em termos de *satisfatibilidade* e *validade*. Com isso podemos caracterizar os sistemas apresentados de acordo com a classe de complexidade computacional a que pertencem.

4.7 Considerações Finais

Uma análise da *complexidade computacional* do *problema da validade* - o de determinar se uma dada fórmula pertence ao conjunto de fórmulas válidas em relação a uma classe de estruturas, nos diversos sistemas de conhecimento apresentados mostra uma das desvantagens da abordagem lógica: o problema da validade para a maioria dos sistemas é *PSPACE*-completo. O que é um tanto quanto surpreendente, tendo em conta que os sistemas considerados, a despeito de sua sintaxe proposicional, são em essência uma linguagem da *lógica de primeira ordem* (LPO). Leve-se em conta que os problemas mencionados para a LPO são problemas computacionalmente difíceis (a indecidibilidade da LPO é robusta).

Uma situação em que é interessante o reconhecimento de fórmulas válidas é o de um agente cuja base de informações é caracterizada por uma coleção Γ de fórmulas. Suponha que φ_Γ é a conjunção de todas as fórmulas em Γ; caso o agente queira saber se uma determinada informação ψ decorre das informações que possui ele deve verificar a validade de $\varphi_\Gamma \rightarrow \psi$. Em situações práticas, podemos nos restringir a análise da validade de fórmulas da forma $K_i\varphi_\Gamma \rightarrow K_i\psi$; para maiores detalhes consulte Halpern [43, sec., 3.2; 4.4.1 e 7.3] e Levesque [90].

Vale ressaltar que, no estudo sobre conhecimento as análises, em geral, tendem a considerar o *conhecer* de único agente, porém num diálogo, numa transação comercial ou no tratamento de protocolos (em sistemas distribuídos) o interessante é a interação do conhecimento entre os agentes. Os conceitos de *conhecimento comum* e *conhecimento distribuído* mostram-se úteis para analisar tais interações, por exemplo, a noção de conhecimento comum aparece como um pré-requisito para alcançar um *entendimento* entre agentes, fator crucial para o estudo dessas interações.

Bibliografia

[1] Abrantes, R.; Assunção, J. V. e Pesquero, C. R., Emission of polycyclic aromatic hydrocarbons from ligtht-duty diesel vehicles exhaust, *Atmospheric Environment*, 38, 2004, 1631-1640.

[2] Aguirre, L. A., *Introdução à Identificação de Sistemas*, Editora UFMG, Belo Horizonte, 2004.

[3] Anderson, A., General Intensional Logic, *In: Handbook of Philosophical Logic. II: Extensions of Classic Logic*, Editor Gabbay, D. and Guenthner, F., D. Reidel Publishing Co., 1984, 355-385.

[4] Aumann, R., Agreeing to Disagree, *Annals of Statistics*, 4, No. 6, 1976, 1236-1239.

[5] Bassanezi, R. C., *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*, Editora Contexto, São Paulo, 2002.

[6] Barwise, J., Scenes and Other Situations, *Journal of Philosophy*, 78, No. 7, 1981, 369-397.

[7] Bernard-Trottolo, S.; Campistron, B.; Druilhet, A.; Lohou, F. e Saïd, F., Trac98: detection of coherent structures in a convective boundary layer using airborne measurements, *Boundary-Layer Meteorology*, 111, 2004, 181-224.

[8] Binmore, K., *Fun and games: A Text on Game Theory*, D. C. Heath and Co., Lexington, 1992.

[9] Blackburn, P. and de Rijke, M. and Venema, Y., *Modal Logic*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 53, Cambridge University Press, 1999 - Draft Version.

[10] Bogo, H.; Gómez, D. R.; Reich, S. L.; Negri, R. M. e San Román, E., Traffic pollution in a downtown site of Buenos Aires City, *Atmospheric Environment*, 35, 2001, 1717-1727.

[11] Boolos, G., *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, 1993.

[12] Bunge, M., *Teoria e Realidade*, Editora Perspectiva, São Paulo, 1974.

[13] Cai, X.-M., Large-eddy simulation of the convective boundary layer over an idealized patchy urban surface, *Quart. Journal R. Meteorological Society*, 125, 1999, 1427-1444.

[14] Cai, X.-M., Dispersion of a passive plume in an idealized urban convective boundary layer: a large-eddy simulation, *Atmospheric Environment*, 34, 2000, 61-72.

[15] Carpenter, B., *Type-Logical Semantics*, MIT Press, 1997.

[16] Caspar, M., *Kepler* Dover Publications, 1993, 441pp.

[17] CETESB, *Operação Inverno 2003 – Qualidade do Ar*, Relatório Técnico, (http://www.cetesb.sp.gov.br/Ar/relatorios/relatorios.asp), 2004, 101 p.

[18] Chang, C. C. and Keisler, H. J., *Model Theory*, North-Holland, 1990.

[19] , Chellas, B. F., *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge University Press, 1980.

[20] Chiara, M. L. D., Quantum Logic, *In: Handbook of Philosophical Logic. Vol. III: Alternatives to Classical Logic*, Editors Gabbay, D. and Guenthner, F., D. Reidel Publishing Co., 1986, 427-469.

[21] Codato, G., *Estudo observacional da radiação solar na cidade de São Paulo.* Relatório Parcial CNPq-PIBIC, 2004.

[22] Costa, N. C. A. da, *O Conhecimento Científico*, Discurso Editorial, 1997.

[23] Costa, N. C. A. da; Doria, F. A., Computing rh Future, *Institute for Advanced Studies, University of São Paulo*, agosto de 2004.

[24] , Cresswell, M. and Hugues G., *An Introduction to Modal Logic*, Muthuen, 1968.

[25] Cunningham, J., Multi-modal Mind Design, *In: Proc. CIKM'94 Workshop on Intelligent Information Agents*, Editors Labrou, Y. and Finin, T., University of Maryland Baltimore County, 1994.

[26] Davis, P. J., and Hersh, R., *A Experiência Matemática*, Francisco Alves, Rio de Janeiro, 1986.

[27] Deardorff, J. W., Numerical investigation of neutral and unstable planetary boundary layers, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 29, 1972, 91-115.

[28] Deardorff, J. W., Three-dimensional numerical study of turbulence in an entraining mixed layer, *Boundary-Layer Meteorology*, 7, 1974, 199-226.

[29] Deardorff, J. W., Stratocumulus-capped mixed layers derived from a three-dimensional model, *Boundary-Layer Meteorology*, 18, 1980, 495-527.

[30] Deardorff, J. W. e Willis, G. E., Further results from a laboratory model of the convective planetary boundary layer, *Boundary-Layer Meteorology*, 32, 1985, 205-236.

[31] Devlin, K. J., *The Millennium Problems: The Seven Greatest Unsolved Mathematical Puzzles of Our Time*, Basic Books, 2002.

[32] Do Carmo, M. P., Ciência Pura e Ciência Aplicada, *Matemática Universitária*, 3, 1986, 24-28.

[33] Do Carmo, M. P., Entrevista com o Professor Manfredo Perdigão do Carmo, *Matemática Universitária*, 16, 1994, 01-18.

[34] Dória,C. M., Geometrias Não-Euclideanas: Exemplos *II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática*, Universidade Federal da Bahia, outubro de 2004.

[35] Doyle, J., Rationality and its role in reasoning, *Computational Intelligence*, 8, 1992, 376-409.

[36] Dutton, J. A. e Fitchl, G. H., Approximate Equations of Motion for Gases and Liquids, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 26, 1996, 241-254.

[37] Einstein, A., *Sidelights on Relativity*, Dover Publications, 1983.

[38] Emerson, E. A., Temporal and Modal Logics, *Handbook of Theoretical Computer Science. B: Formal Models and Semantics*, Editor J. van Leewen, Elsevier, 1990, 995-1072.

[39] Fagin, R. and Vardi, M. Y., *An Internal Semantics for Modal Logic: Preliminary Report*, Center for the Study of Language and Information, CSLI-85-25, 1985.

[40] Fagin, R. and Vardi, M. Y., Knowledge and Implicit Knowledge in a distributed Environment: Preliminary Report, *In: Theoretical Aspects of Reasoning About Knowledge. Proceedings of the 1986 Conference*, Edited by Joseph Y. Halpern, 1986.

[41] Fagin, R. and Halpern, J. Y. and Vardi, M. Y., What can Machine Know? On Properties of Knowledge in Distributed Systems, *Journal of the ACM*, 39, 1992, 328-376.

[42] Fagin, R. and Halpern, J. Y. and Vardi, M. Y., What is a Inference Rule?, *Journal of Symbolic Logic*, 57, No. 3, 1992, 1018-1045.

[43] Fagin, R. and Halpern, J. Y. and Moses Y. and Vardi, M. Y., *Reasoning About Knowledge*, The MIT Press, 1995.

[44] Osher, S. J., and Fedkiw, R. P., *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Springer, 2002.

[45] Fefferman, C. L., Existence and Smoothness of Navier-Stokes Equation, Princeton University, Department of Mathematics, 2000.

[46] Filho, J. B. B., A Unificação de Newton da Física de Galileu com a Astronomia de Kepler à Luz da Crítica Popperiana à Indução. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 17, No. 3, 1995.

[47] Fischer, M. J. and Immerman, N., Foundations of Knowledge for Distributed Systems, *In: Theoretical Aspects of Reasoning About Knowledge. Proceedings of the 1986 Conference*, Edited by Joseph Y. Halpern, 1986.

[48] Frisch, U., *Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge Academic Press, 1995, 296 p.

[49] Gamow, G. and Stern, M., *Puzzle Math*, Viking Press, 1958.

[50] Garrat, J. R.; Hess, G. D.; Physick, W. L. e Bougeault, P., The atmospheric boundary layer - advances in knowledge and application, *Boundary-Layer Meteorology*, 78, 1996, 9-37.

[51] Gell-Mann, M., *The Quark and The Jaguar - Adventures in the Simple and the Complex*, W. H. Freeman, 1995.

[52] Gershenfeld, N., *The Nature of mathematical Modeling*, Cambridge University Press, 1999.

[53] Gettier, E., Is Justified True Belief Knowledge?, *Analysis*, 23, 1963, 121-123.

[54] Girle, R., *Modal Logic and Philosophy*, Acumen Publishing, 2000.

[55] Goldblatt, R., *Mathematics of Modality*, Center for the Study of Language and Information (CSLI-LN), 1994.

[56] Gopalakrishnan, S.G. e Avissar, R., An LES study of the impacts of land surface heterogeneity on dispersion in the convective boundary layer, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 57, 2000, 352-371.

[57] , P. e Rama Krishna, T. V. B. P. S., Dispersion of pollutants in convective low Wind: a case study of Delhi, *Atmospheric Environment*, 36, 2002, 2071-2079.

[58] Gray, J. J., *János Bolyai, Non-Euclidean Geometry, and the Nature of Space* MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2004, 256.

[59] Haddadi, A., Communication and Cooperation in Agent Systems: A Pragmatic Theory, *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 1056, 1996, 1-50.

[60] Halpern, J. Y. and Moses, Y., A Guide to Completeness and Complexity for Modal Logics of Knowledge and Belief, *In: Proc. 9th. International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-85)*, 1985.

[61] Halpern, Y. J., Reasoning About Knowledge: An Overview, *In: Theoretical Aspects of Reasoning About Knowledge. Proceedings of the 1986 Conference*, Edited by Joseph Y. Halpern, 1986.

[62] Halpern, J. Y. and Vardi, M. Y., The complexity of Reasoning about Knowledge and Time I: Lower Bounds, *J. of Computer and System Sciences*, 38, No. 1, 1989, 195-237.

[63] Halpern, J. Y. and Moses Y., Knowledge and Commom Knowledge in a Distributed Environment, *Journal of ACM*, 37, No. 3, 1990, 549-587.

[64] Halpern, J. Y., Harper, R., Immerman, N., Kolaitis, P. G., Vardi, M. and Vianu, V., On the Unusual Effectiveness of Logic in Computer Science, *Bulletin of Symbolic Logic*, 7, No. 2, 2001, 213-236.

[65] Hamming, R. W., The Unreasonable Effectiveness of Mathematics, *American Mathematical Monthly*, 87, 1980, 81-90.

[66] Hechtel, L. M.; Moeng, C-H. e Stull, R. B., The effects of nonhomogeneous surface fluxes on the convective boundary layer: a case study using large-eddy simulation, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 47, 1990, 1721-1741.

[67] Henn, D. S. e Sykes, R. I., Large-eddy simulation of dispersion in the convective boundary layer, *Atmospheric Enviroment*, 26A, 1992, 3145-3159.

[68] Henessy, M., Axiomatizing Finite Delay Operators, *Acta Informatica.*, 21, 1984, 61-168.

[69] Henessy, M. and Milner, R., Algebraic Laws for Non-Determinism and Concurrency, *Journal of Association for Computing Machinery*, 32, 1985, 137-161.

[70] Hintikka, J., *Model for Modalities*, D. Reidel Publishing Company, 1969.

[71] Hintikka, J., Is Alethic Modal Logic Possible?, *Acta Philosophica Fennica*, 35, 1982.

[72] Hintikka, J., Reasoning About Knowledge in Philosophy: The Paradigm of Epistemic Logic, *Theoretical Aspects of Reasoning About Knowledge. Proceedings of he 1986 Conference* Edited by Joseph Y. Halpern, 1986.

[73] Hintikka, J., *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, 1996.

[74] Hofstadter, D. R., *Godel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, Basic Books, Paperback, 1999.

[75] Johnson, S. *Emergence The Connected Lives of Ants, Brains, Cities and software*, Scribner, New York, 2001.

[76] Kaimal, J. C.; Wyngaard, J. C.; Haugen, D. A.; Coté, O. R.; Izumi, Y.; Caughey, S. J. e Readings, C. J., Turbulence structure in the convective boundary layer, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 33, 1976, 2152-2169.

[77] Karam, H. A., *Estudo do Jato de Baixos Níveis de Iperó e das Implicações no Transporte de Poluentes no Estado de São Paulo*, Tese de Doutorado, IAG-USP, São Paulo, 2002, 196 p.

[78] Khanna, S. e Brasseur, J. G., Three-dimensional buoyancy- and shear-induced local structure of the atmospheric boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 55, 1998, 710-743.

[79] Kanger, S., The Morning Star Paradox, *Theoria*, 23, 1957, 1-11.

[80] Kleene, S. C., *Introduction to metamathematics*, Van Nostrand, 1952.

[81] Krause, E. F., *Taxicab Geometry: An Adventure in Non - Euclidean Geometry*, Dover Publications, Inc., New York, 1986.

[82] Kripke, S., A Completeness Theorem in Modal Logic, *The Journal of Symbolic Logic*, 24, No. 1, 1959, 1-14.

[83] Kripke, S., Semantical Considerations on Modal Logic, *Acta Philosophica Fennica*, 16, 1963, 83-94.

[84] Lamb, R. G., Diffusion in the convective boundary layer. In: *Atmospheric Turbulence and Air Pollution Modelling*, Edited Nieuwstadt, F. T. M. e van Dop, H. Reidel: Dordrecht, 1984, 159-229.

[85] Lehrer, K., Knowledge, Truht and Evidence, *Analysis*, 25, 1965, 168-175.

[86] Lenschow, D. H.; Wyngaard, J. C. e Pennel, W. T., Mean-field and second-moment budgets in a baroclinic, convective boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 37, 1980, 1313-1326.

[87] Lenschow, D. H. e Stephens, P. L., The role of thermals in the convective boundary layer, *Boundary-Layer Meteorology*, 19, 1980, 509-532.

[88] Leonard, A., Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows, *Advances in Geophysics*, 18, 1974, 237-248.

[89] Lesieur, M. e Métais, O., New trends in large-eddy simulation of turbulence, *Annual Rev. Fluids Mech.*, 28, 1996, 45-82.

[90] Levesque, H., All I Know: A Study in Autoepistemic Logic, *Artificial Intelligence*, 42, No. 3, 1990, 263-309.

[91] Lin, C-L., Local pressure-transport structure in a convective atmospheric boundary layer, *Physics of Fluids*, 12, 2000, 1112-1128.

[92] Goldberg, M. C. and Luna, H. P. *Otimização Combinatoria e Programação Linear: Modelos e Algoritmos*, Editora Campus, Rio de Janeiro, 2000.

[93] Massacci, F., Tableaux Methods for Formal Verification of Multi-Agent Distributed Systems, *Journal of Logic Computat*, 8, No. 3, 1998, 373-400.

[94] Mason, P. J., Large-eddy simulation: a critical review of the technique, *Quart. Journal R. Meteorological Society*, 120, 1994, 1-26.

[95] Mason, P. J. e Brown, A. R., On subgrid models and filter operations in large-eddy simulations. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 56, 1999, 2101-2114.

[96] Mesinger, F. e Arakawa, A., *Numerical methods used in atmospheric models*, Garp Publications Series, 1982, 63 p.

[97] Micali, S., Knowledge and Efficient Computation, *In: Theoretical Aspects of Reasoning About Knowledge. Proceedings of the 1986 Conference*, Edited by Joseph Y. Halpern, 1986.

[98] Milgrom, P., An Axiomatic Characterization of Commom Knowledge, *Econometrica*, 49, No. 1, 1981.

[99] Millman, R. and G. Parker., *Geometry: a Metric Approach with Models*, Springer - Verlay, New York, 1991.

[100] Milner, R., A Modal Characteriztion of Observable Machine-Behaviour, *Lecture Notes in Computer Science*, 112, 1981, 25-34.

[101] Mints, G., *Short Introduction to Modal Logic*, CSLI Publications, 1992.

[102] Misra, P. K., Dispersión of non-buoyant particles incide a convective boundary layer, *Atmospheric Environment*, 16, 1982, 239-243.

[103] Moeng, C-H., A large-eddy simulation model for the study of planetary boundary-layer turbulence, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 41, 1984, 2052-2062.

[104] Moeng, C-H. e Wyngaard, J. C., Statistics of conservative scalars in the convective boundary layer, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 41, 1984, 3161-3169.

[105] Moeng, C-H. e Sullivan, P. P., A comparison of shear- and buoyancy-driven planetary boundary layer flows, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 51, 1994, 999-1022.

[106] Moeng, C-H. e Sullivan, P. P., Large Eddy Simulation. *In: Encyclopedia of Atmospheric Sciences.* Edited by Holton, J. R.; Pyle, J. e Curry, J. A.; Academic Press, 2002, 1140-1150.

[107] Montague, R., Syntactical Treatments of Modality with Corollaries on Reflection Principle and Finite Axiomatizability, *Acta Fennica*, 16, No. 2, 1963, 153-167.

[108] Mooney, D. D. and Swift, R. J., *A Course in Mathematical Modeling*, The Mathematical Association of America, 1999.

[109] Moore, R. C., *Logic and Representation*, CSLI Publications, 1995.

[110] Morril, G., Grammar and Logic, *Theoria*, 62, 1996, 260-293.

[111] Nieuwstadt, F. T. M. e Valk, J. P. J. M. M., A large eddy simulation of buoyant and non-buoyant plume dispersion in the atmospheric boundary layer. *Atmospheric Enviroment*, 21, 1987, 2573-2587.

[112] Nieuwstadt, F. T. M.; Mason, P. J.; Moeng, C-H. e Schumann, U., Large-eddy simulation of the convective boundary layer: A comparison of four computer codes, *In: Turbulent Shear Flows 8*. Edited by Durst, F. *et al.*; Berlin: Springer, 1992, 343-367.

[113] Nieuwstadt, F. T. M. e Duynkerke, P. G., Turbulence in atmospheric boundary layer, *Atmospheric Research*, 40, 1996, 111-142.

[114] Nieuwstadt, F. T. M. e Meeder, J. P., Large-eddy simulation of air pollution dispersion dispersion: a review, *In: New tools in turbulence modelling*. Edited by Métais, O. e Ferziger, J.; Berlin: Springer, 1997, 265-280.

[115] Oke, T. R., *Boundary Layer Climates*, Methuen: London, 1987, 435 p.

[116] Oliveira, A. P., *Evolução da Camada Limite Planetária e Implicações na Qualidade do Ar*, Dissertação de Mestrado, IAG-USP, São Paulo, 1986, 126 p.

[117] Oliveira, A. P.; Escobedo, J. F.; Machado, A. J. e Soares, J., Diurnal evolution of solar radiation at the surface in the city of São Paulo: seasonal variation and modeling, *Theoretical and Applied Climatology*, 71, 2002, 231-249.

[118] Oliveira, A. P.; Bornstein, R. e Soares, J., Annual and diurnal wind patterns in the city of São Paulo, *Water, Air and Soil Pollution - FOCUS*, 3, 2003, 3-15.

[119] Park, D., Concurrency and Automata on Infinite Sequences, *Lecture Notes in Computer Science*, 104, 1981.

[120] Pereira, M. M. R., *Estudo do Transporte Local de Poluentes em Iperó por Meio de um Modelo Lagrangiano de Partículas*, Tese de Doutorado, IAG-USP, São Paulo, 2004, 103 p.

[121] Pinto, M. J., *Análise Semântica das Línguas Naturais*, Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1977.

[122] Pratt, V. R., Semantical Considerations on Floyd-Hoare Logic., *In: Proc. 17th IEEE Symp. Foundations of Computer Science*, 1976, 109-121.

[123] Pratt, V. R., Model of Program Logics, *IN: Proc. 20th IEEE Symp. Foundations of Computer Science.*, 1979, 115-122.

[124] Pratt, V. R., Application of Modal Logic to Programming, *Studia Logica*, 34, 1980, 357-374.

[125] Rijke, M. de, *A System of Dynamic Modal Logic*, Center for the Study of Language and Information, CSLI-92-170, 1992.

[126] Rizza, U.; Gioia, G.; Mangia, C. e Marra, G. P., Development of a grid-dispersion model in large-eddy simulation generated planetary boundary layer, *Il Nuovo Cimento*, 26C, 2003, 297-309.

[127] Russell, S. and Novig, P., *Artificial Intelligence: a Modern Approach*, Prentice-Hall Inc., 1995.

[128] Sailor, D. J. e Fan, H. 2002: Modeling the diurnal variability of effective albedo for cities, *Atmospheric Environment*, 36, 713-725.

[129] Schmidt, H. e Schumann, U. Coherent structure of the convective boundary layer derived from large-eddy simulations, *Journal Fluid Mechanics*, 200, 1989, 511-562.

[130] Seinfeld, J. H. e Pandis, S. N., *Atmospheric Chemistry and Physics: from Air Pollution to Climate Change*, New York: Wiley-Interscience publication, 1998, 1326 p.

[131] Shapiro, S. *Intensional Mathematics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 113, North Holland Publishing Company, 1985.

[132] Sharan, M.; Singh, M. P. e Yadav, A. K., Mathematical model for atmospheric dispersion in low winds with eddy diffusivities as linear function of downwind distance, *Atmospheric Environment*, 30, 1996, 1137-1145.

[133] Sorbjan, Z., On similarity in the atmospheric boundary layer, *Boundary-Layer Meteorology*, 35, 1986, 377-397.

[134] Sorbjan, Z., Numerical study of penetrative and "solid lid"nonpenetrative convective boundary layers, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 53, 1996, 101-112.

[135] Sorbjan, Z., Similarity of scalar fields in the convective boundary layer, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 56, 1999, 2212-2221.

[136] Stirling, C., Modal Logics for Comunicating Systems, *Theoretical Computer Science*, 49, 1987, 311-347.

[137] Stull, R. B., *An introduction to boundary layer meteorology*, Dordrecht: Kluwer, 1988, 666 p.

[138] Sullivan, P.; McWilliams, J. C. e Moeng, C-H., A subgrid-scale model for large-eddy simulation of planetary boundary-layer flows, *Boundary-Layer Meteorology*, 71, 1994, 247-276.

[139] Tarski, A., The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics, *Philosophy and Phenomenological Research*, 4, 1944.

[140] Tarski, A., *Logic, Semantics, Metamathematics*, Hackett Publishing Company; 2nd edition, 1981.

[141] Thurston, W., On the Proof and Progress in Mathematics, *Bulletin of the Americam Mathematical Society*, 30, No. 2, 1944, pp 161-177.

[142] van Benthem, J., Correspondence Theory, *In: Handbook of Philosophical Logic, II: Extensions of Classic Logic*, Editor Gabbay, D. and Guenthner, F., D. Reidel Publishing Co., 1984, 167-247.

[143] van Benthem, J., *Modal Logic and Classical Logic*, Monographs in Philosofical Logic and Formal Linguistics, Bibliopolis, 1983.

[144] van Benthem, J., *A Manual of Intensional Logic*, Lecture Notes, Center of the Study of Language and Information, 1988.

[145] Venkatran, A., On dispersion in the convective boundary layer, *Atmospheric Environment*, 17, 1983, 529-533.

[146] de Villiers, M., The Role and Function of Quasi-empirical Methods in Mathematics, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, University of KwaZulu-Natal, 2004, pp. 7.

[147] Visser, A., Semantics and Liar Paradox, *In Handbook of Philosophical Logic, IV: Topics in the Philosophy of Language*, Editor Gabbay, D. and Guenthner, F., D. Reidel Publishing Co., 1989, 617-706.

[148] von Wright, G. H., *An Essay in Modal Logic*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1951.

[149] Weaver, W., Science and Complexity, *American Scientist*, 36, No. 536, 1948.

[150] Weil, J. C., Dispersion in the convective boundary layer, *In: Lectures on Air Pollution Modeling*, Edited by Venkatram, A. e Wyngaard, J. C.; Boston: American Meteorological Society, 1988, 167-227.

[151] Weil, J. C.; Sullivan, P. P. e Moeng, C-H., Lagrangian modeling of dispersion in the convective boundary layer using les velocity fields, *12th Symp. on Boundary Layers and Turbulence*, Vancouver, Canada, Amer. Meteor. Soc., 1997, 108-109.

[152] Weil, J. C.; Sullivan, P. P. e Moeng, C-H., Lagrangian modeling of dispersion in the convective boundary layer over a range of stability, *11th Joint Conference on the Applications of Air Pollution Meteorology with the Air and Waste Management Association*, Boston, 2000, MA, 30-34.

[153] Wigner, E., The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 13, No. 1, 1960.

[154] Willis, G. E. e Deardorff, J. W., A laboratory model of the unstable planetary boundary layer, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 31, 1974, 1297-1307.

[155] Willis, G. E. e Deardorff, J. W., A laboratory model of diffusion into the convective planetary boundary layer, *Quart. Journal R. Meteorological Society*, 102, 1976, 427-445.

[156] Willis, G. E. e Deardorff, J. W., On the use of Taylor's translation hypothesis for diffusion in the mixed layer, *Quart. Journal R. Meteorological Society*, 102, 1976, 817-822.

[157] , G. E. e Deardorff, J. W., A laboratory study of dispersion from an elevated source in a convective mixed layer, *Atmospheric Environment*, 12, 1978, 1305-1313.

[158] Wooldridge, M. and Jennings, N. R., Intelligent Agents: Theory and Pratice, *Knowledge Engineering Review*, 10, No. 2, 1995, 115-152.

[159] Wooldridge, M., *Reasoning about Rational Agents*, The MIT Press, 2000.

[160] Wyngaard, J. C. e Brost, R. A., Top-down and bottom-up diffusion of a scalar in the convective boundary layer, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 41, 1984, 102-112.

[161] Wyngaard, J. C., Boundary layer modeling. *In: Atmospheric Turbulence and Air Pollution Modelling*, Edited Nieuwstadt, F. T. M. e van Dop, H. Reidel: Dordrecht, 1984, 69-106.

[162] Yamamoto, F. S., *Sistemas Modais de Conhecimento*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2003.

[163] Zalta, E. N., *Intensional Logic and the Metaphysics of Intensionality*, MIT Press, 1988.

[164] Zalta, E. N., A Philosophical Conception of Propositional Modal Logic, *Philosophical Topics*, 21, No. 2, 1993, 263-281.

[165] Zalta, E. N., *Basic Concepts in Modal Logic*, CSLI - Stanford University, 1995.

[166] Zanetti, P., *Air Pollution Modeling. Teories, Computational Methods and Available Software*, Ed. Van Nostrand Reinhold, 1990, 444p.

Notas em Matemática Aplicada

1. Restauração de Imagens com Aplicações em Biologia e Engenharia
   Geraldo Cidade, Antônio Silva Neto e Nilson Costa Roberty
2. Fundamentos, Potencialidades e Aplicações de Algoritmos Evolutivos
   Leandro dos Santos Coelho
3. Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Águas Subterrâneas
   Edson Wendlander
4. Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais
   Maria Cristina de Castro Cunha e Maria Amélia Novais Schleicher
5. Modelagem em Biomatematica
   Joyce da Silva Bevilacqua, Marat Rafikov e Cláudia de Lello Courtouke Guedes
6. Métodos de Otimização Randômica: algoritmos genéticos e "simulated annealing"
   Sezimária F. Pereira Saramago
7. "Matemática Aplicada à Fisiologia e Epidemiologia"
   H.M. Yang, R. Sampaio e A. Sri Ranga
8. Uma Introdução à Computação Quântica
   Renato Portugal, Carlile Campos Lavor, Luiz Mariano Carvalho e Nelson Maculan
9. Aplicações de Análise Fatorial de Correspondências para Análise de Dados
   Dr. Homero Chaib Filho, Embrapa
10. Modelos Matemáticos baseados em autômatos celulares para Geoprocessamento
    Marilton Sanchotene de Aguiar, Fábia Amorim da Costa, Graçaliz Pereira Dimuro e Antônio Carlos da Rocha Costa

11. Computabilidade: os limites da Computação
    Regivan H. N. Santiago e Benjamín R. C. Bedregal
12. Modelagem Multiescala em Materiais e Estruturas
    Fernando Rochinha e Alexandre Madureira
13. Modelagem em Biomatemática (Coraci Malta ed.)
    1 - "Modelagem matemática do comportamento elétrico de neurônios e algumas aplicações"
    Reynaldo D. Pinto
    2 - "Redes complexas e aplicações nas Ciências"
    José Carlos M. Mombach
    3 - "Possíveis níveis de complexidade na modelagem de sistemas biológicos"
    Henrique L. Lenzi, Waldemiro de Souza Romanha e Marcelo Pelajo-Machado
14. A lógica na construção dos argumentos
    Angela Cruz e José Eduardo de Almeida Moura
15. Modelagem Matemática e Simulação Numérica em Dinâmica dos Fluidos
    Valdemir G. Ferreira, Hélio A. Navarro, Magda K. Kaibara
16. Introdução ao Tratamento da Informação nos Ensinos Fundamental e Médio
    Marcilia Andrade Campos, Paulo Figueiredo Lima
17. Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações
    Rosana Sueli da Motta Jafelice, Laércio Carvalho de Barros, Rodney Carlos Bassanezi
18. Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira
    Socorro Rangel
19. Observar e Pensar, antes de Modelar
    Flavio Shigeo Yamamoto, Sérgio Alves, Edson P. Marques Filho, Amauri P. de Oliveira
20. Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações
    Eliana Xavier Linhares de Andrade, Cleonice Fátima Bracciali