

Volume 17, 2012

Editores

Cassio Machiaveli Oishi

Universidade Estadual Paulista - UNESP
Presidente Prudente, SP, Brasil

Fernando Rodrigo Rafaeli

Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

Rosana Sueli da Motta Jafelice (Editor Chefe)

Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Uberlândia, MG, Brasil

Rubens de Figueiredo Camargo

Universidade Estadual Paulista - UNESP
Bauru, SP, Brasil

Sezimária de Fátima P. Saramago

Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Uberlândia, MG, Brasil

Vanessa Avansini Botta Pirani (Editor Adjunto)

Universidade Estadual Paulista - UNESP
Presidente Prudente, SP, Brasil



A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7)**, as **figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
<http://www.sbmac.org.br/notas.php>

TEORIA DOS CONJUNTOS FUZZY COM APLICAÇÕES

2ª edição

Rosana Sueli da Motta Jafelice
rmotta@ufu.br

Faculdade de Matemática
Universidade Federal de Uberlândia

Laécio Carvalho de Barros
laeciob@ime.unicamp.br

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Rodney Carlos Bassanezi
rodney@ime.unicamp.br

Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2012

Coordenação Editorial: Elbert Einstein Nehrer Macau

Coordenação Editorial da Série: Rosana Sueli da Motta Jafelice

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2012 by Rosana Sueli da Motta Jafelice, Laécio Carvalho de Barros e Rodney Carlos Bassanezi.

Direitos reservados, 2012 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

**Catálogo elaborado pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner**

Jafelice, Rosana S. M.

Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações - São Carlos, SP :
SBMAC, 2012, 119 p., 20.5 cm - (Notas em Matemática
Aplicada; v. 17) - 2ª edição

e-ISBN 978-85-86883-62-0

1. Computação-Matemática 2. Conjuntos Fuzzy
3. Sistemas Difusos

I. Jafelice, Rosana S. M. II. Barros, Laécio C.
III. Bassanezi, Rodney C.. IV. Título. V. Série

CDD - 51

Esta edição em formato e-book é uma edição revisada do livro original do mesmo título publicado em 2005 nesta mesma série pela SBMAC.

Conteúdo

Prefácio	9
1 Conjuntos Fuzzy	11
1.1 Introdução	11
1.2 Conjuntos Fuzzy	13
1.3 Representações de Conjuntos Fuzzy	15
1.4 Operações entre Conjuntos Fuzzy	19
1.5 Normas Triangulares	23
1.6 Níveis de um Conjunto Fuzzy	26
1.7 Números Fuzzy	26
1.8 Operações Aritméticas com Números Fuzzy	27
1.9 Princípio de Extensão	28
1.10 Esperança Fuzzy	30
Exercícios	31
2 Sistema Baseado em Regras Fuzzy	33
2.1 Relações Fuzzy	33
2.2 Composição entre Relações Fuzzy	34
2.3 Equações Relacionais Fuzzy	35
2.4 Regras e Inferência Fuzzy	37
2.5 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy	37
2.6 Aplicações do SBRF	43
2.6.1 Vitalidade das Violetas	43
2.6.2 Grau de Risco da Obesidade	44
2.6.3 Qualidade da água	50

Exercícios	53
3 Aplicações	55
3.1 Introdução	55
3.2 Diagnóstico Médico	55
3.2.1 Base de Conhecimentos	56
3.3 Modelo de Evolução da AIDS	60
3.3.1 Informações Médicas sobre HIV	61
3.3.2 Variáveis Linguísticas e Base de Regras	64
3.3.3 Esperança Fuzzy da População Assintomática	70
3.3.4 População Assintomática com a Taxa de Transferência no Valor Modal	74
3.3.5 Esperança Fuzzy da Taxa de Transferência	75
3.3.6 Comparação entre: Esperança Fuzzy da População Assintomática; População Assintomática com a Taxa de Transferência no Valor Modal; e População Assintomática com a Esperança Fuzzy da Taxa de Transferência	78
3.3.7 Conclusão	78
3.4 Eliminação de Fármacos do Organismo	79
3.4.1 Modelo Farmacocinético Clássico	79
3.4.2 A Meia-Vida ($t_{\frac{1}{2}}$) de um Fármaco	80
3.4.3 Modelo Farmacocinético Fuzzy	81
3.4.4 Base de Regras	83
3.4.5 Insuficiência Renal e a Eliminação de Fármacos	85
3.4.6 Conclusões	87
3.5 Método de Takagi-Sugeno-Kang em Modelos Farmacocinéticos Multicompartimentais	89
3.5.1 Introdução	89
3.5.2 Modelagem Fuzzy	90
3.5.3 Conclusão	95
3.6 Modelo p-fuzzy de Malthus	95
3.7 Modelo p-fuzzy de Transferência da População HIV Assintomática para Sintomática	98
3.8 Modelo Presa-Predador Fuzzy	100

3.8.1	Exemplo Realístico de Presa-Predador: Lebres e Lince na Baía de Hudson	100
3.8.2	Modelo Clássico	102
3.8.3	Modelo Fuzzy	103
3.8.4	Conclusão	110
	Exercícios	111

Bibliografia	113
---------------------	------------

Prefácio

A teoria dos conjuntos fuzzy foi introduzida, em 1965, por Lotfi A. Zadeh, com a principal intenção de dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos, como ‘aproximadamente’, ‘em torno de’, dentre outros. Esse seria um primeiro passo para se representar e armazenar, em um computador, informações incertas, tornando possível o cálculo com informações incertas, a exemplo do que faz o ser humano. Por exemplo, há um consenso que adicionar uma quantia em ‘torno de 3’ a outra ‘em torno de 2’ resulta em uma terceira ‘em torno de 5’. Devido a essa possibilidade, de manipulação com informações incertas, a teoria dos conjuntos fuzzy tem se tornado uma das áreas emergentes em tecnologia contemporânea. Nas engenharias, os chamados controladores fuzzy têm sido largamente utilizados em eletrodomésticos, com o objetivo imitar o homem na execução de algumas tarefas.

No texto apresentaremos conceitos e ferramentas básicas desta teoria, como função de pertinência, variáveis linguísticas, sistema baseado em regras fuzzy e o método de inferência de Mamdani. Em seguida, ilustraremos o poder de tais ferramentas por meio de aplicações em Biomatemática. Algumas destas aplicações são típicas de dinâmica de população, como o caso da evolução da AIDS, e outras que tratam de diagnóstico médico.

Uberlândia, outubro de 2011.
Rosana Sueli da Motta Jafelice
Laécio Carvalho de Barros
Rodney Carlos Bassanezi

Capítulo 1

Conjuntos Fuzzy

Uma semente não constitui uma pilha nem duas nem três ...mas por outro lado todo mundo irá concordar que 100 milhões de sementes constitui uma pilha. Afinal qual é o limite apropriado? Nós podemos dizer que 325647 sementes não constitui uma pilha mas 325648 constitui? (Borel 1950)

1.1 Introdução

A característica essencial da modelagem matemática, utilizando sistemas de equações determinísticas, é a precisão obtida nas previsões de fenômeno. Evidentemente, tais previsões ou inferências estão sempre dependentes de informações precisas que são inseridas nos *valores médios* dos parâmetros utilizados. Por outro lado, nos modelos estocásticos, as soluções médias dos modelos são obtidas a posteriori quando se tem alguma distribuição estatística de dados referentes ao fenômeno analisado.

Os modelos estocásticos são freqüentemente utilizados para analisar variações sujeitas às distribuições de dados estatísticos. Entretanto, se pretendemos modelar alguma situação onde seus elementos ou variáveis são heterogêneos, relativamente a alguma característica, devemos considerar o comportamento desta característica no processo evolutivo. Por exemplo, se temos uma população de *'fumantes'* num

instante t_0 , sujeita a alguma taxa de mortalidade, podemos querer saber como estará composta esta população no futuro. Se considerarmos que cada indivíduo desta população é simplesmente fumante ou não fumante o problema pode ser resolvido com um modelo determinístico, tomando separadamente ambas as populações. Por outro lado, se temos inicialmente uma distribuição de probabilidades dos fumantes desta população, podemos usar um modelo estocástico para estudar a evolução desta distribuição inicial. Agora, se a característica de ser *fumante* depender da quantidade de cigarros que se fuma diariamente, qualidade dos cigarros fumados, intermitência do ato de fumar etc, devemos caracterizar também o *grau* de ser fumante. Neste caso, cada indivíduo pertence à população de *fumantes* com um *grau específico de pertinência*. Se não fumar, seu grau de pertinência é zero, se fumar 3 carteiras diárias podemos dizer que é uma fumante de grau 1. Agora, se o indivíduo fumar 10 cigarros por dia o quanto ele será *fumante*? Esta subjetividade, ser fumante, pode ser caracterizada pela teoria dos conjuntos fuzzy.

Um subconjunto *fuzzy* de um conjunto é caracterizado pois por uma função $u_A:U \rightarrow [0, 1]$, onde $u_A(x)$ atribui o grau com que o elemento x pertence ao subconjunto fuzzy A .

Os modelos clássicos de biomatemática, particularmente, os modelos de dinâmica populacional e epidemiologia são fundamentados em hipóteses, quase sempre, provenientes da fisico-química onde o encontro de duas substâncias (variáveis de estado) é modelado pelo produto de sua concentração - *lei da ação das massas*. Isto é usado nos modelos de Lotka-Volterra de interação de duas espécies ou nos modelos de Kermak-Mackendrick de epidemiologia. A taxa de predação do modelo presa-predador ou a força de infecção dos modelos epidemiológicos são valores médios obtidos empiricamente ou simulados o que nem sempre traduz corretamente o fenômeno correspondente.

Por outro lado, se considerarmos a população de *presas* de uma determinada espécie, tal variável pode ser considerada como um subconjunto fuzzy, se associarmos a cada presa a *facilidade como é predada*, o que está relacionada com a sua idade, seu estado de saúde, habitat etc. Variáveis deste tipo são muito frequentes em fenômenos biológicos e

difíceis de serem avaliadas como médias de dados experimentais.

Os modelos variacionais fuzzy podem comportar vários tipos de subjetividade (fuzziness), dependendo da escolha da variável de estado e dos parâmetros dos modelos. Temos uma *fuzziness demográfica* quando a variável de estado é um subconjunto fuzzy, e *fuzziness ambiental* quando somente os parâmetros são considerados subconjuntos fuzzy. Em geral ambos os tipos de fuzziness estão presentes nos fenômenos biológicos.

Esta nova maneira de modelar problemas ligados à realidade biológica, onde tanto as variáveis de estado como os parâmetros são empregados de subjetividade, vem ganhando terreno na área de biomatemática com resultados significativos e animadores, sendo o que motivou este minicurso [6].

1.2 Conjuntos Fuzzy

Um *subconjunto fuzzy* F do conjunto universo \mathcal{U} é definido em termos de uma função de *pertinência* u que a cada elemento x de \mathcal{U} associa um número $u(x)$, entre *zero* e *um* chamado de grau de pertinência de x a F . Assim, o conjunto fuzzy F é simbolicamente indicado por sua função de pertinência

$$u_F : \mathcal{U} \rightarrow [0, 1].$$

Os valores $u_F(x) = 1$ e $u_F(x) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência plena e a não pertinência do elemento x a F .

É interessante notar que um subconjunto clássico A de \mathcal{U} é um particular conjunto fuzzy para o qual a função de pertinência é a função característica de A , isto é,

$$u_A : \mathcal{U} \rightarrow \{0, 1\}.$$

Do ponto de vista formal, a definição de subconjunto fuzzy foi obtida simplesmente ampliando-se o contra domínio da função característica, que é o conjunto $\{0,1\}$, para o intervalo $[0,1]$. O exemplo a seguir pode ser considerado como um caso típico de subconjunto fuzzy.

Exemplo 1 Considere o subconjunto fuzzy F dos números inteiros próximos de zero:

$$F = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ é próximo de zero}\}.$$

O número 0 (zero) pertence a esse conjunto? E o número 1000? Dentro do espírito da lógica fuzzy, poderíamos dizer que ambos pertencem a F porém com diferentes graus de pertinência, de acordo com a propriedade que caracteriza o conjunto. Ou seja, a função de pertinência de F deve ser ‘construída’ de forma coerente com o termo ‘pequeno’ que caracteriza seus elementos no conjunto universo dos números naturais. Uma possibilidade para a função de pertinência de F é

$$u_F(n) = \frac{1}{n^2 + 1}. \quad (1.2.1)$$

Se esse for o caso, poderíamos dizer que o número 0 pertence a F com grau de pertinência $u_F(0) = 1$, enquanto 1000 pertence a F com grau de pertinência $u_F(1000) \cong 10^{-6}$, Figura 1.1.

Notemos que a escolha da função u_F neste caso foi feita de ma-

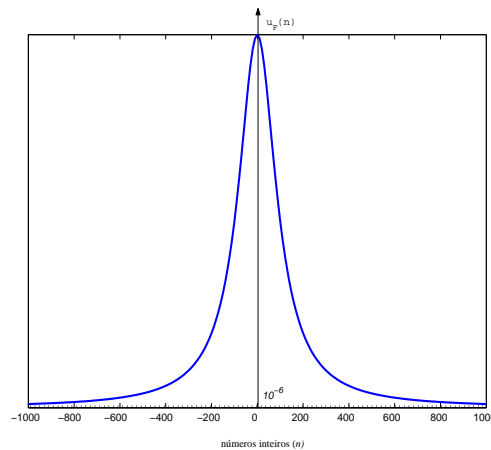


Figura 1.1: Conjunto fuzzy dos números inteiros ‘próximos de zero’.

neira totalmente arbitrária, levando em conta apenas o significado da

palavra ‘pequeno’. Portanto, existem infinitas maneiras de modelar matematicamente o conceito de ‘número natural pequeno’. Uma outra maneira possível é

$$u_F(n) = \frac{n + 1}{n^4 + 1}. \quad (1.2.2)$$

Claro que a escolha dessas funções para representar o conjunto fuzzy em questão depende de como tais funções estão relacionadas com o contexto do problema a ser estudado. Do ponto de vista apenas da teoria de conjuntos fuzzy, qualquer uma das duas funções de pertinência (1.2.1) ou (1.2.2), pode ser representante do nosso conjunto fuzzy F . Porém, o que deve ser notado é que cada uma destas funções produz conjuntos fuzzy distintos. Finalmente, está implícito que dois conjuntos fuzzy A e B são iguais quando $u_A(x) = u_B(x)$, para todo $x \in \mathcal{U}$.

Exemplo 2 O conjunto fuzzy dos fumantes dado por $u(c, t) = \frac{ct}{20+ct}$ em que c é proporcional ao número de cigarros fumados por unidade de tempo e t o tempo em que o indivíduo fumou durante sua vida [5].

A seguir apresentaremos algumas representações de conjuntos fuzzy.

1.3 Representações de Conjuntos Fuzzy

As representações das funções que definem os elementos de um conjunto fuzzy facilitam a visualização deste conjunto, e podem ser feitas na forma tabular (ou de lista), graficamente e na forma analítica.

Para conjuntos finitos, as funções podem ser representadas por tabelas. A tabela representando um conjunto fuzzy lista todos os elementos do conjunto com seus respectivos graus de pertinência. No exemplo a seguir temos uma ilustração deste caso. Os exemplos de 3 a 7 foram apresentados em [36].

Exemplo 3 Seja A o conjunto dos alunos de uma sala de aula de uma faculdade. Os alunos desta sala são o Fernando, o Carlos, a Márcia e o André. Este conjunto A é um subconjunto do conjunto universo X com todos os alunos da faculdade. Nem todos os alunos do conjunto A estudam diligentemente, logo alguns têm um grau de

mais estudioso, outros **menos estudiosos** variando entre os valores 0 e 1. Para os alunos citados tem-se a representação na Tabela 1.1:

<i>Estudante</i>	<i>Grau de estudo</i>
Carlos	0.3
Márcia	0.7
Fernando	0.8
André	0.9

Tabela 1.1: Alunos e graus de estudo.

Alternativamente à Tabela 1, pode-se listar os pares consistindo de cada elemento com seu grau de estudo, da seguinte forma:

$$A=0.8/\text{Fernando} + 0.3/\text{Carlos} + 0.7/\text{Márcia} + 0.9/\text{André}$$

Aqui o símbolo ‘/’ é apenas usado para associar o elemento do conjunto universo X e seu grau de pertinência ao conjunto fuzzy A . Assim, também o sinal de + não significa soma; simplesmente conecta os elementos do grupo. A forma geral para representar o conjunto fuzzy A quando X é finito tem a forma:

$$A = \sum u_A(x)/x.$$

Uma outra forma de se representar um conjunto fuzzy é feita graficamente.

A representação gráfica é a mais usada na literatura fuzzy por ter uma interpretação mais intuitiva. No caso de se fazer representação em duas dimensões, o eixo vertical representa o grau de pertinência no intervalo $[0,1]$, e o eixo horizontal contém a informação a ser modelada.

A seguir temos três exemplos de representação gráfica de conjuntos fuzzy. No exemplo 4, temos uma curva que inicia em 1 (no eixo vertical) e se aproxima do eixo horizontal, ou seja, é uma curva decrescente. No exemplo 5 temos uma curva que cresce e depois decresce, na forma de sino. No exemplo 6, temos uma curva que inicia próxima ao eixo horizontal e vai crescendo até o limite de 1.

Exemplo 4 Um conjunto fuzzy J compatível com o conceito de jovem deve, no mínimo, indicar que, quanto menos idade um indivíduo tiver, mais jovem será. Sua função grau de pertinência $u_J(x)$ pode ser representada como na Figura 1.2.

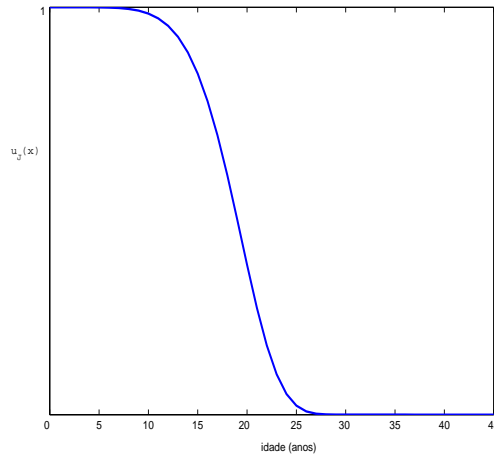


Figura 1.2: Função de pertinência de jovens.

Exemplo 5 O conjunto fuzzy de pessoas de ‘meia idade’ poderia ser representado pela função $u_A(x)$ ilustrada na Figura 1.3.

Neste exemplo, a curva tem a forma de sino, crescendo da esquerda para a direita até uma certa idade, e depois decrescendo com a idade. Que a curva deva ter esta forma acreditamos que é consenso. As controvérsias talvez apareçam a respeito da idade, onde há mudança do crescimento da curva.

Exemplo 6 Suponha que a universidade defina níveis de experiência acadêmica, de acordo com o número de créditos feitos pelos alunos, conforme a Tabela 1.2.

Ao contrário da teoria clássica de conjuntos que definiriam precisamente os níveis de experiência, o termo vago **grau de experiência acadêmica** corresponde a um genuíno conjunto fuzzy. Os créditos (em horas) é que classificam os níveis dos indivíduos, porém há diferenças de créditos dentro de cada nível. Por exemplo, o indivíduo

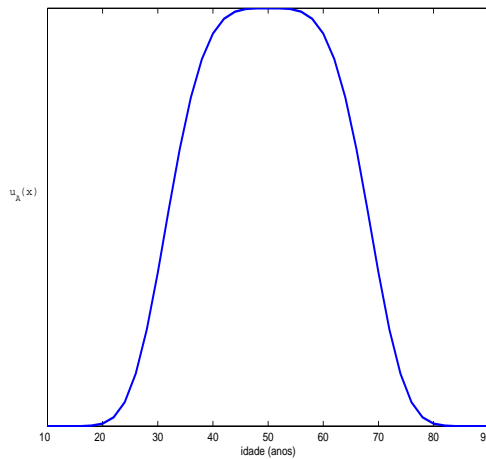


Figura 1.3: Função de pertinência de pessoas de meia idade.

<i>Nível</i>	<i>Créditos (em horas)</i>
Iniciante	0 - 42
Segundanista	43 - 82
Júnior	83 - 114
Sênior	115 - 146

Tabela 1.2: Níveis de experiência acadêmica.

com 126 créditos é **mais sênior** que aquele que tem 95 créditos. Uma representação gráfica para este exemplo pode ser a Figura 1.4.

Nesta fase, em que os conjuntos fuzzy estão sendo definidos, é de fundamental importância as informações fornecidas pelo especialista da área do fenômeno estudado.

A representação analítica é também bastante utilizada em teoria dos conjuntos fuzzy. Veja o exemplo 7:

Exemplo 7 O conjunto fuzzy A dos números reais em torno de 6, (Figura 1.5) pode ser representado analiticamente da seguinte forma:

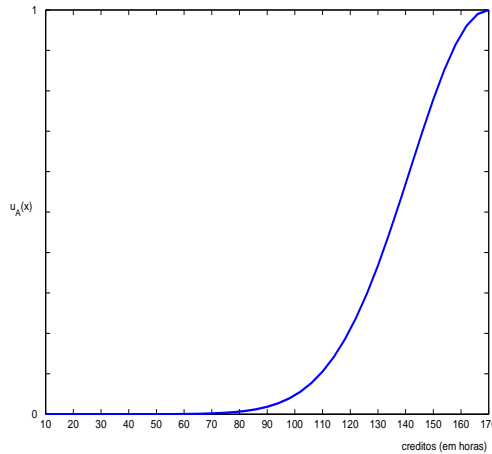


Figura 1.4: Função de pertinência para o Nível Sênior.

$$u_A(x) = \begin{cases} x - 5 & \text{se } 5 \leq x < 6 \\ 7 - x & \text{se } 6 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Para conjuntos fuzzy triangulares usamos a notação $A(x; a, b, c)$ onde a , b e c são as abscissas dos vértices do triângulo. No exemplo acima, temos $A(x; 5, 6, 7)$.

Na próxima seção, definiremos as operações entre os conjuntos fuzzy.

1.4 Operações entre Conjuntos Fuzzy

Sejam A e B subconjuntos clássicos de \mathcal{U} representados pelas funções características u_A e u_B , respectivamente. Os conjuntos

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U}; x \in A \text{ ou } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U}; x \in A \text{ e } x \in B\},$$

$$A' = \{x \in \mathcal{U}; x \notin A\}$$

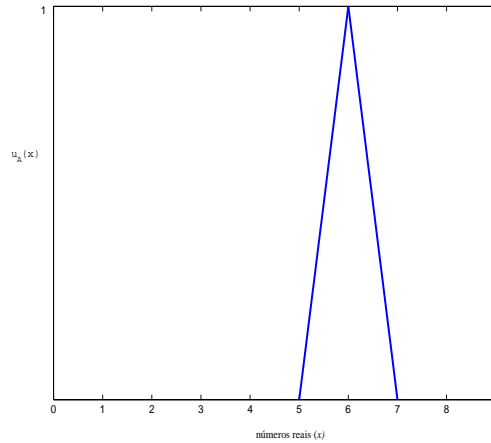


Figura 1.5: Conjunto fuzzy dos números reais ‘em torno de 6’.

têm respectivamente as funções características, $\forall x \in \mathcal{U}$,

$$u_{A \cup B}(x) = \max\{u_A(x), u_B(x)\},$$

$$u_{A \cap B}(x) = \min\{u_A(x), u_B(x)\},$$

$$u_{A'}(x) = 1 - u_A(x).$$

Pensando novamente em conjuntos fuzzy como sendo caracterizados pelas funções de pertinências que são extensões de funções características, podemos definir união, intersecção e complementar de conjuntos fuzzy trocando a função característica pela função grau de pertinência.

Definição 1.1. *Sejam A e B conjuntos fuzzy. As funções de pertinência que representam os conjuntos fuzzy união (Figura 1.6), intersecção (Figura 1.7) e complementar (Figura 1.8) de conjuntos fuzzy são dadas por, $\forall x \in \mathcal{U}$,*

$$u_{A \cup B}(x) = \max\{u_A(x), u_B(x)\},$$

$$u_{A \cap B}(x) = \min\{u_A(x), u_B(x)\},$$

$$u_{A'}(x) = 1 - u_A(x).$$

respectivamente.

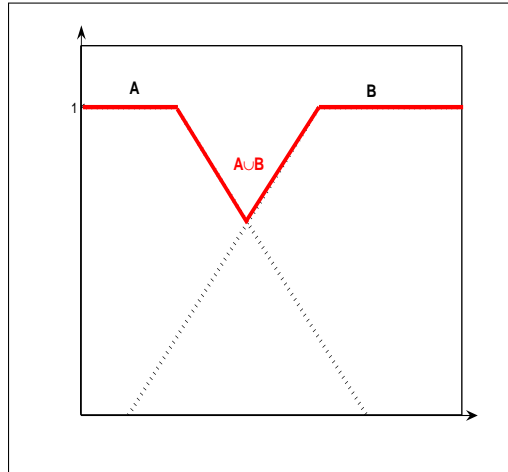


Figura 1.6: União dos conjuntos fuzzy.

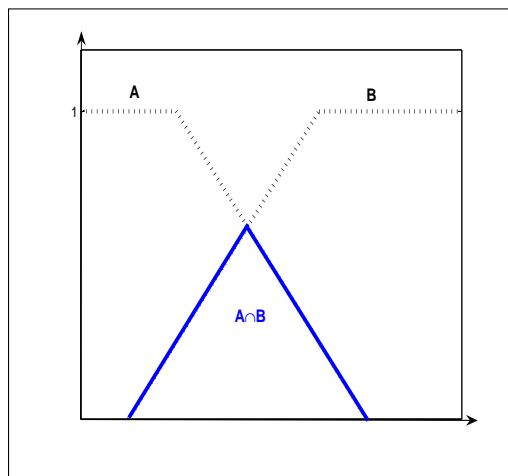


Figura 1.7: Intersecção dos conjuntos fuzzy.

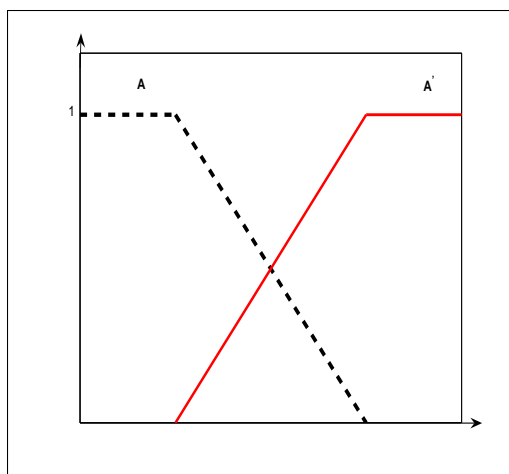


Figura 1.8: Complementar dos conjuntos fuzzy.

Particularmente, se A e B forem conjuntos clássicos, então as funções características das respectivas operações, acima definidas, satisfazem estas igualdades, mostrando a coerência destas definições. Por exemplo, se A é um subconjunto (clássico) de U , então a função característica do seu complementar é tal que $u_{A'}(x) = 0$ se $u_A(x) = 1$ (i.e. $x \in A$) e $u_{A'}(x) = 1$ se $u_A(x) = 0$ (i.e. $x \notin A$). Neste caso, ou $x \in A$ ou $x \notin A$. Na teoria fuzzy não temos necessariamente essa dicotomia, nem sempre é verdade que $A \cap A' = \phi$ assim como não é verdade que $A \cup A' = U$. O exemplo a seguir ilustra tais fatos.

Exemplo 8 Suponha que o conjunto universo U seja composto pelos pacientes de uma clínica, identificados pelos números 1, 2, 3, 4 e 5. Sejam A e B os conjuntos fuzzy que representam os pacientes com febre e dor, respectivamente. A Tabela 1.3 ilustra a união, intersecção e o complemento.

Os valores das colunas, exceto os da primeira, indicam os graus com que cada paciente pertence aos conjuntos fuzzy A , B , $A \cup B$, $A \cap B$, A' , $A \cap A'$, respectivamente, onde A e B são supostamente dados. Na coluna $A \cap A'$, o valor 0.3 indica que o paciente 1 está tanto no grupo

Paciente	Febre(u_A)	Dor(u_B)	$u_{A \cup B}$	$u_{A \cap B}$	$u_{A'}$	$u_{A \cap A'}$
1	0.7	0.6	0.7	0.6	0.3	0.3
2	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0
3	0.4	0.2	0.4	0.2	0.6	0.4
4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
5	1.0	0.2	1.0	0.2	0.0	0.0

Tabela 1.3: União, intersecção e complementar dos conjuntos A e B .

dos febris como dos não febris. Como dissemos antes, este é um fato inadmissível na teoria clássica de conjuntos na qual temos a lei do terceiro excluído ($A \cap A' = \phi$).

1.5 Normas Triangulares

As normas triangulares são generalizações dos operadores união e intersecção. Formalmente elas são definidas abaixo:

Definição 1.2. *Uma co-norma triangular (s -norma) é uma operação binária $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo as seguintes condições:*

- *Comutatividade:* $xsy = ysx$.
- *Associatividade:* $xs(ysz) = (xsy)sz$.
- *Monotonicidade:* Se $x \leq y$ e $w \leq z$ então $xsw \leq ysz$.
- *Condições de fronteira:* $xs0 = x$, $xs1 = 1$.

Claramente, o operador max é uma s -norma.

Exemplos:

1. **União Padrão:** $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $xsy = max(x, y)$, Figura 1.9.
2. **Soma Algébrica:** $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $xsy = x + y - xy$, Figura 1.10.

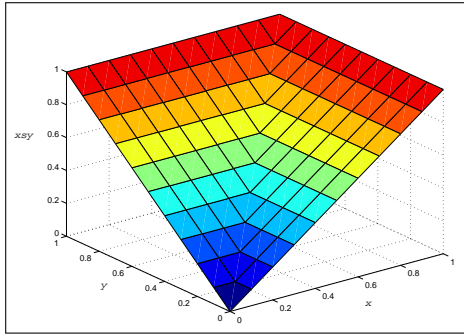


Figura 1.9: s-norma 'União Padrão'.

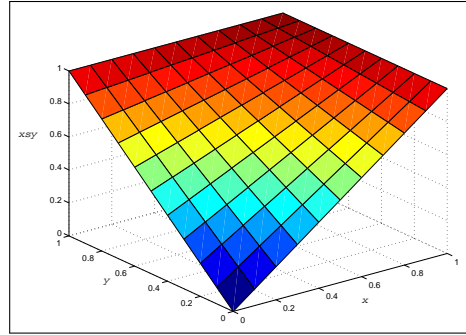


Figura 1.10: s-nor. 'Soma Algébrica'.

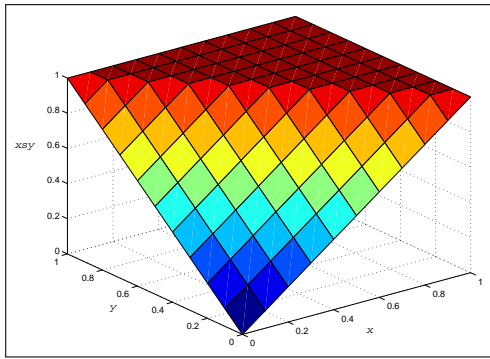


Figura 1.11: s-nor. 'Soma Limitada'.

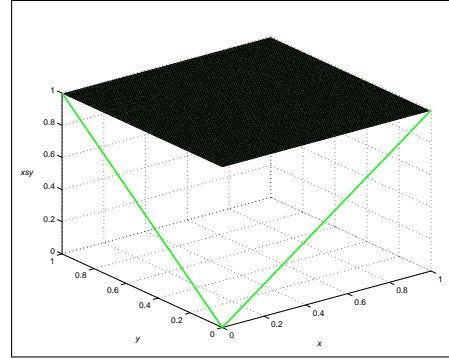


Figura 1.12: s-nor. 'União Drástica'.

3. **Soma Limitada:** $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $xsy = \min(1, x + y)$ Figura 1.11.

4. **União Drástica:** $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com

$$xsy = \begin{cases} x & \text{se } y = 0 \\ y & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{caso contrário,} \end{cases} \text{ Figura 1.12.}$$

Definição 1.3. Uma norma triangular (t -norma) é uma operação binária $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo as seguintes condições:

- *Comutatividade:* $xty = ytx$.

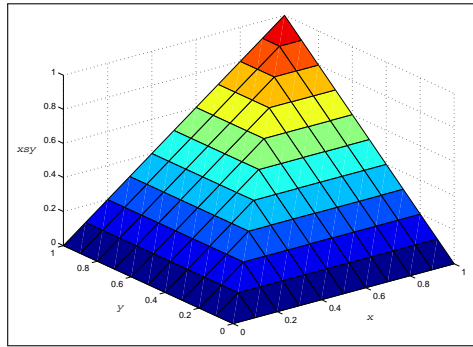


Figura 1.13: t-norma 'Intersecção Padrão'.

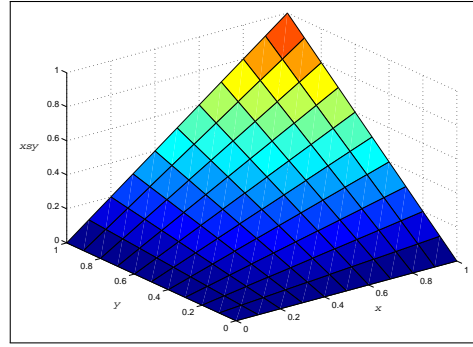


Figura 1.14: t-norma 'Produto Algébrico'.

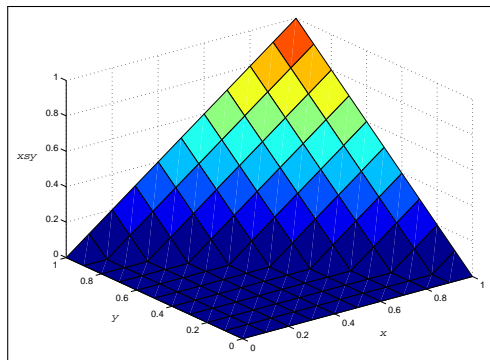


Figura 1.15: t-norma 'Diferença Limitada'.

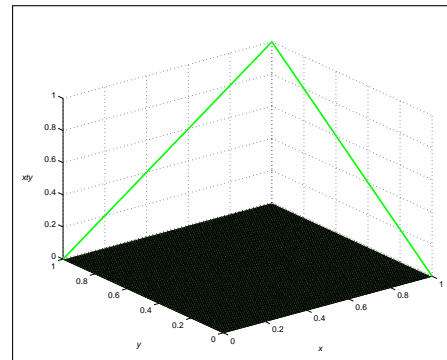


Figura 1.16: t-norma 'Intersecção Drástica'.

- *Associatividade:* $xt(ytz) = (xty)tz$.
- *Monotonicidade:* Se $x \leq y$ e $w \leq z$ então $xw \leq yz$.
- *Condições de fronteira:* $0tx = 0$, $1tx = x$.

O operador *min* é uma *t*-norma.

Exemplos:

1. **Intersecção Padrão:** $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $xty = \min(x, y)$, Figura 1.13.

2. **Produto Algébrico:** $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $xy = xy$, Figura 1.14.
3. **Diferença Limitada:** $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $xy = \max(0, x + y - 1)$, Figura 1.15.
4. **Intersecção Drástica:** $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com

$$xy = \begin{cases} x & \text{se } y = 1 \\ y & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{caso contrário, } \textit{Figura 1.16.} \end{cases}$$

Na próxima seção definiremos o conceito de nível de um conjunto fuzzy que é de fundamental importância na teoria de conjuntos fuzzy.

1.6 Níveis de um Conjunto Fuzzy

Definição 1.4. *Sejam A um conjunto fuzzy e $\alpha \in [0, 1]$. Definimos como α -nível de A o conjunto*

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathcal{U}; u_A(x) \geq \alpha\}.$$

Definição 1.5. *Suporte de um conjunto fuzzy A são todos os elementos de \mathcal{U} que têm grau de pertinência diferente de zero em A e denotamos por $\text{supp}(A)$.*

$$\text{supp}(A) = \{x \in \mathcal{U}; u_A(x) > 0\}.$$

Denotaremos por $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ o conjunto de todos os conjuntos fuzzy de \mathcal{U} .

1.7 Números Fuzzy

Assim como no caso clássico, aqui também temos o objetivo de fazer ‘contas’. A diferença é que aqui pretendemos calcular quantidades imprecisas. Por exemplo, todos nós somos unânimes em dizer que o dobro de uma quantidade ‘em torno de 5’ resulta em outra ‘em torno

de 10'. Para isto, 'criaremos' objetos que generalizam os números reais. Tais objetos serão chamados de *números fuzzy* [20]. Inicialmente, definimos o supremo de um conjunto.

Definição 1.6. *Um conjunto fuzzy N é chamado número fuzzy quando o conjunto universo, onde N está definido, é o conjunto dos números reais \mathbb{R} e a função de pertinência $u_N : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ é tal que:*

1. $u_N(x) = 1$ para pelo menos um valor x do $\text{supp}(N)$.
2. $[N]^\alpha$ é um intervalo fechado, $\forall \alpha \in (0, 1]$.
3. O suporte de N é limitado.

Observamos que, com a Definição 1.6, todo número real r é um caso particular de número fuzzy cuja função de pertinência é sua função característica:

$$u_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = r \\ 0 & \text{se } x \neq r \end{cases} . \quad (1.7.4)$$

1.8 Operações Aritméticas com Números Fuzzy

Definição 1.7. *Sejam A e B dois números fuzzy, e ζ um número real.*

1. *A soma de números fuzzy A e B é o número fuzzy, $A + B$, cuja função de pertinência é*

$$u_{A+B}(x) = \sup_{x=y+z} \min[u_A(y), u_B(z)]. \quad (1.8.5)$$

2. *A multiplicação de ζ por A é o número fuzzy, ζA , cuja função de pertinência é*

$$u_{\zeta A}(x) = \begin{cases} u_A(\zeta^{-1}x) & \text{se } \zeta \neq 0 \\ \widehat{0} & \text{se } \zeta = 0 \end{cases} \quad (1.8.6)$$

onde $\widehat{0} = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$. Uma maneira alternativa, e mais prática de se fazer estas operações é por meio dos α -níveis dos conjuntos fuzzy envolvidos, de acordo com o Teorema 1.1 [20].

Teorema 1.1. *Se M e N são dois números fuzzy e ζ um número real, então para todo $\alpha \in [0, 1]$ tem-se*

$$[M + N]^\alpha = [M]^\alpha + [N]^\alpha = \{a + b; a \in [M]^\alpha \text{ e } b \in [N]^\alpha\}$$

e

$$[\zeta N]^\alpha = \zeta [N]^\alpha = \{\zeta a; a \in [N]^\alpha\}. \quad (1.8.7)$$

Outras operações algébricas com números fuzzy são definidas de modo análogo. Na próxima seção definiremos o Princípio de Extensão.

1.9 Princípio de Extensão

Essencialmente, o princípio da extensão é utilizado para obter a imagem de conjuntos fuzzy através de uma função clássica. Sejam X e Y conjuntos e f uma aplicação de X em Y : $f : X \rightarrow Y$. Seja A um conjunto fuzzy em X . O princípio de extensão afirma que a imagem de A pela função f é um conjunto fuzzy $B = f(A)$ em Y , cuja função de pertinência é dada por

$$u_B(y) = \sup_x u_A(x) \quad (1.9.8)$$

para $x \in X$ e $y = f(x)$, como é ilustrado na Figura 1.17.

O princípio de extensão pode ser descrito da seguinte forma:

- O grau de pertinência de um valor do contradomínio é definido diretamente pelo grau de pertinência de sua pré-imagem.
- Quando um valor do contradomínio é mapeado por vários do domínio, o seu grau de pertinência é obtido pelo *sup* dos graus de pertinência dos valores da entrada.

O princípio de extensão pode ser facilmente generalizado para funções de várias variáveis. Sejam $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ e Y conjuntos universos. Considere os conjuntos fuzzy A_i em X_i , $i = 1, \dots, n$, e uma

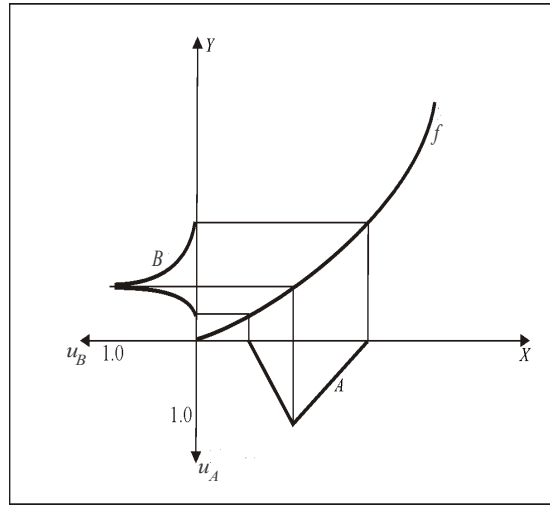


Figura 1.17: Princípio de extensão [31].

função $f : X \rightarrow Y$. Os conjuntos fuzzy A_1, A_2, \dots, A_n são então transformados pela f produzindo o conjunto fuzzy $B = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ em Y , cuja função de pertinência é

$$u_B(y) = \sup_x \min[u_{A_1}(x_1), u_{A_2}(x_2), \dots, u_{A_n}(x_n)], \quad (1.9.9)$$

para $x \in X$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ e $y = f(x)$.

Exemplo: Suponhamos que estamos trabalhando com uma população de HIV positivos e sabemos que, ao atingir a corrente sanguínea, o HIV lança seu ataque principalmente contra os linfócitos T, do tipo CD4+. Se conhecemos o conjunto fuzzy do nível de CD4+ e temos uma função da população assintomática em função do nível de CD4+, através do Princípio de Extensão determinamos o grau de pertinência da população assintomática no instante t [15], Figura 1.18.

$$x_t(c) = \begin{cases} e^{-t} & \text{se } c < 200 \\ e^{-\lambda(c)t} & \text{se } 200 \leq c \leq 500 \\ 1 & \text{se } c > 500 \end{cases} \quad (1.9.10)$$

em que $\lambda(c) = \frac{500-c}{300}$, C_t é o conjunto fuzzy do nível de $CD4+$ em t cuja a função de pertinência é u_{C_t} e W_t é o correspondente conjunto fuzzy em t com a função de pertinência u_{W_t} . Mais especificamente, a partir do Princípio de Extensão temos, para cada instante t :

$$u_{W_t}(x_t(c)) = \sup_c u_{C_t}(c). \quad (1.9.11)$$

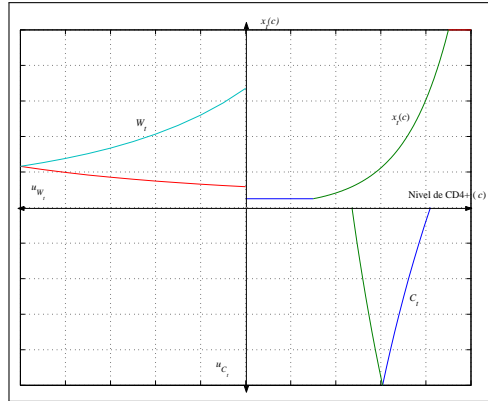


Figura 1.18: W_t em $t = 3$.

1.10 Esperança Fuzzy

A fim de usar um método de defuzzificação para obter um valor real, isto é, um número real representativo de um conjunto fuzzy, necessitaremos dos conceitos de ínfimo de um conjunto e medida fuzzy.

Seja A um subconjunto não vazio do conjunto parcialmente ordenado E . Ao maior dos limites inferiores de A dá-se o nome de ínfimo de A que é indicado por $\inf A$.

Seja Ω um conjunto não vazio e $P(\Omega)$ o conjunto das partes de Ω . A função $\mu : P(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ é uma *medida fuzzy* [7], [29] e [34] se:

a) $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(\Omega) = 1$

b) $\mu(A) \leq \mu(B)$ se $A \subseteq B$.

Seja um conjunto fuzzy de \mathbb{R} com função de pertinência u . O valor esperado do conjunto fuzzy, denotado por $FEV[u]$, é definido pela integral fuzzy

$$FEV[u] = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \inf[\alpha, \mu\{u \geq \alpha\}] \quad (1.10.12)$$

onde μ é uma medida fuzzy e $\{u \geq \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \in [0, 1]$.

Observação: Se $H(\alpha) = \mu\{u \geq \alpha\}$ então o cálculo de $FEV[u]$, consiste em determinar o ponto fixo de H , que pode ser dado pela intersecção de $y = \alpha$ com $g = H(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$ [19].

Em nosso trabalho $FEV[u]$ também será usado como o defuzificador do conjunto fuzzy u .

No próximo capítulo introduziremos as variáveis linguísticas e o sistema baseado em regras fuzzy.

Exercícios

Considere dois conjuntos fuzzy com funções de pertinência triangulares $A(x; 1, 2, 3)$ e $B(x; 2, 2, 4)$.

1. Encontre a intersecção e a união dos conjuntos A e B e expresse-as analiticamente, usando os operadores *min* e *max*.
2. Determine a intersecção com a t -norma *Produto Algébrico* $xy = xy$ e a união com a s -norma *Soma Algébrica* $xy = x + y - xy$.
3. Encontre o complementar de A e B e intersecção destes conjuntos com os conjuntos originais usando as t -normas *Intersecção Padrão* $xy = \min(x, y)$ e *Produto Algébrico* $xy = xy$. Repita o mesmo com a operação união usando as s -normas *União Padrão* $xy = \max(x, y)$ e *Soma Algébrica* $xy = x + y - xy$.

Capítulo 2

Sistema Baseado em Regras Fuzzy

2.1 Relações Fuzzy

Estudos de associações, relações ou interações entre os elementos de diversas classes é de grande interesse na análise e compreensão de muitos fenômenos do mundo real. Matematicamente, o conceito de relação é formalizado a partir da teoria de conjuntos. Desta forma, intuitivamente pode-se dizer que uma relação será fuzzy quando optamos pela teoria dos conjuntos fuzzy e será clássica quando optamos pela teoria clássica de conjuntos para conceituar a relação em estudo. Qual dos modelos adotar, entre estes dois, depende muito do fenômeno estudado. Porém, a opção pela teoria de conjuntos fuzzy sempre tem maior robustez no sentido de que esta inclui a teoria clássica de conjuntos [4]. Definiremos a seguir relações fuzzy.

Definição 2.1. *Uma relação fuzzy R , sobre $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \dots \times \mathcal{U}_n$, é qualquer subconjunto fuzzy do produto cartesiano $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \dots \times \mathcal{U}_n$. Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos, $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, a relação é chamada de fuzzy binária sobre $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$.*

A principal vantagem na opção pela relação fuzzy é que a relação clássica indica apenas se há ou não relação entre dois objetos, enquanto

uma relação fuzzy além de indicar se existe ou não relação, indica também o grau desta relação.

Uma noção que será muito importante para o nosso trabalho é o produto cartesiano entre conjuntos fuzzy.

Definição 2.2. *O produto cartesiano fuzzy $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ dos subconjuntos fuzzy A_1, A_2, \dots, A_n de $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n$, é a relação fuzzy R cuja função de pertinência é*

$$u_R(x_1, x_2, \dots, x_n) = u_{A_1}(x_1) \wedge u_{A_2}(x_2) \wedge \dots \wedge u_{A_n}(x_n) \quad (2.1.1)$$

onde \wedge é a t -norma min.

A noção e utilização de produto cartesiano fuzzy ficará mais clara quando introduzirmos o conceito de sistemas baseados em regras fuzzy, que são sistemas compostos de regras da forma ‘Se...então...’, pois estas regras podem ser interpretadas como produtos cartesianos de conjuntos fuzzy.

2.2 Composição entre Relações Fuzzy

Considere R e S duas relações fuzzy binárias em $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ e $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3$, respectivamente.

Definição 2.3. *A composição RoS é uma relação fuzzy binária em $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_3$, com função de pertinência dada por*

$$u_{RoS}(x_1, x_3) = \max_{x_2 \in \mathcal{U}_2} [\min(u_R(x_1, x_2), u_S(x_2, x_3))]. \quad (2.2.2)$$

Quando os conjuntos $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ e \mathcal{U}_3 são finitos, então a forma matricial da relação RoS , dada pela composição max-min, é obtida como uma multiplicação de matrizes substituindo-se o produto pelo mínimo e a soma pelo máximo.

Definiremos um caso especial da composição max-min, que será utilizada no Capítulo 3 em uma importante aplicação: diagnóstico médico.

Definição 2.4. *Sejam \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_2 dois conjuntos, $\mathcal{F}(\mathcal{U}_\infty)$ e $\mathcal{F}(\mathcal{U}_\epsilon)$ as classes dos conjuntos fuzzy de \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_2 , respectivamente, e R uma relação fuzzy binária sobre $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$. Então a relação R define um funcional de $\mathcal{F}(\mathcal{U}_\infty)$ em $\mathcal{F}(\mathcal{U}_\epsilon)$ que a cada elemento $A_1 \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_\infty)$, faz corresponder o elemento $A_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_\epsilon)$ cuja função de pertinência é dada por:*

$$u_{A_2}(x_2) = u_{R(A_1)}(x_2) = \max_{x_1 \in \mathcal{U}_1} [\min(u_{A_1}(x_1), u_R(x_1, x_2))]. \quad (2.2.3)$$

2.3 Equações Relacionais Fuzzy

As equações relacionais fuzzy foram primeiramente citadas em Diagnóstico Médico [37]. Vamos apresentar um resumo da formulação matemática das mesmas.

Uma equação relacional tem a forma:

$$S * X = D \quad (2.3.4)$$

onde S , X e D são relações fuzzy e $*$ é uma operação entre relações fuzzy, como por exemplo a da fórmula (2.2.3).

A fórmula (2.3.4) é uma equação relacional porque uma, dentre as três relações, será incógnita dependendo do problema em questão. Quando forem conhecidas S e X , a incógnita será a relação D , que é obtida diretamente da operação entre S e X . Esta será a abordagem enfatizada neste texto. Quando forem conhecidas S e D , sendo X a incógnita, então estamos diante de um problema que faz parte da área de pesquisa chamada ‘Problemas Inversos’. Um exemplo desta área é a resolução de sistemas lineares $Ax = b$, cuja solução é $x = A^{-1}b$ quando A tem inversa.

O leitor interessado nas equações relacionais fuzzy ligadas a problemas inversos pode consultar [8], [20] e [31]. Nosso objetivo é propor um sistema fuzzy a partir das equações relacionais fuzzy que imite a atuação de um médico no diagnóstico de seus pacientes.

Apenas para constar, no contexto o problema inverso seria adotado se tivéssemos um banco de dados de pacientes já diagnosticados.

Nesse caso, o objetivo seria encontrar a matriz X que produziu esses diagnósticos. Intuitivamente, X faria o papel do médico que ‘produziu’ os diagnósticos do banco de dados.

As operações entre as relações fuzzy de nosso interesse são $* = \circ$ e $* = \circ_w$ como definidas a seguir:

Considere P e Q duas relações binárias definidas sobre $U \times V$ e $V \times W$, respectivamente, as relações de composição $P \circ Q$ e $P \circ_w Q$, definidas sobre $U \times W$ por

$$(P \circ Q)(x, z) = \sup_{y \in V} [\inf(P(x, y), Q(y, z))]$$

e

$$(P \circ_w Q)(x, z) = \inf_{y \in V} [w(P(x, y), Q(y, z))],$$

sendo w uma operação em $[0, 1] \times [0, 1]$ como, por exemplo, a implicação fuzzy de Gödel

$$g : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

onde

$$(a \Rightarrow b) = g(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \leq b \\ b & \text{se } a > b. \end{cases}$$

O teorema a seguir tem grande utilidade no estudo das equações relacionais fuzzy e aqui enunciaremos o resultado.

Teorema 2.1. *Dadas as relações fuzzy S e D definidas $U \times V$ e $U \times W$, respectivamente, seja $\mathbb{A} = \{X : X \text{ é relação fuzzy em } V \times W \text{ e } S \circ X = D\}$. Então se $\mathbb{A} \neq \emptyset$, tem-se $S^{-1} \circ_g D$ como elemento maximal de \mathbb{A} .*

Note que o teorema anterior fornece $S^{-1} \circ_g D$ como solução da equação relacional $S \circ X = D$. Deste modo, este teorema indica uma maneira de se construir uma relação fuzzy que, quando composta com uma primeira (no caso S), produz um resultado pré-estabelecido que, neste caso, é uma relação fuzzy D .

Bem, como já dissemos só iremos explorar o caso de equações na forma em que S e X são conhecidas. As equações relacionais fuzzy foram apresentadas aqui, porém sua aplicação aparecerá só no

capítulo 3.

Na próxima seção será apresentado um outro tema que envolve relações onde o sistema fuzzy é dado por uma coleção de regras fuzzy o qual é utilizado na teoria de controladores fuzzy [8], [20] e [31].

2.4 Regras e Inferência Fuzzy

Uma regra fuzzy é uma sentença da forma ‘Se X é A então Y é B ’, onde A e B são conjuntos fuzzy em X e Y , respectivamente. Tal regra pode ser interpretada como uma relação fuzzy R entre A e B cuja função de pertinência $u_R(x, y)$ depende de $u_A(x)$ e $u_B(x)$ para cada $(x, y) \in X \times Y$. Nesse texto, utilizamos a função mínimo para essa dependência, ou seja,

$$u_R(x, y) = u_A(x) \wedge u_B(y).$$

Desta forma, $R = A \times B$. Essa foi a modelagem dada por Mamdani para representar a regra ‘Se X é A então Y é B ’. Na teoria de raciocínio aproximado, essas sentenças são modeladas por implicações fuzzy [8]. Para uma coleção de regras fuzzy, usa-se um operador s -conorma para conectá-los, como por exemplo máximo. Ver o Método de Mamdani na seção 2.5.

Uma variável linguística é uma variável cujo valor é expresso qualitativamente por termos lingüísticos (que fornece um conceito à variável) e quantitativamente por uma função de pertinência, Figura 2.1.

2.5 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Sistemas baseados em regras fuzzy (SBRF) contêm quatro componentes: um processador de entrada que realiza a fuzzificação dos dados de entrada, uma coleção de regras nebulosas chamada base de regras, uma máquina de inferência fuzzy e um processador de saída que fornece um número real como saída [15]. Estes componentes estão conectados conforme indicado na Figura 2.2.

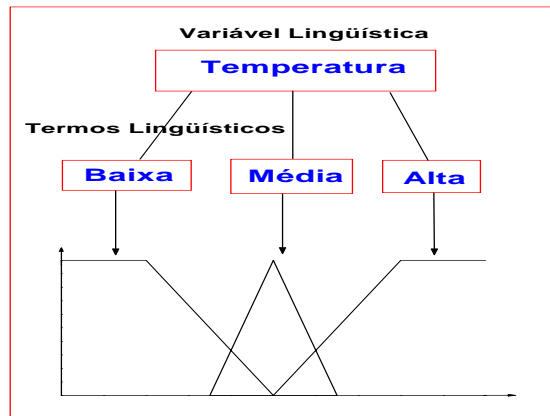


Figura 2.1: Variáveis Linguísticas.

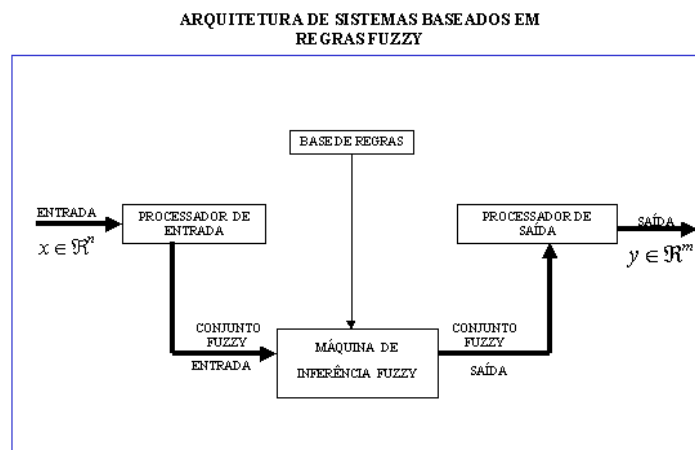


Figura 2.2: Sistemas baseados em regras fuzzy.

Uma vez estabelecida uma base de regras, isto é, como relacionamos os conjuntos fuzzy pela forma Se...então..., um SBRF pode ser visto como um mapeamento entre a entrada e a saída da forma $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$ (trajetória em negrito na Figura 2.2). Esta classe de sistema é amplamente utilizada em problemas de modelagem, controle e classificação. Os componentes do SBRF são descritos a seguir:

- **Processador de Entrada (Fuzzificação)**

Neste componente as entradas do sistema são traduzidas em conjuntos fuzzy em seus respectivos domínios. A atuação de um especialista na área do fenômeno a ser modelado é de fundamental importância para colaborar na construção das funções de pertinências para a descrição das entradas.

- **Base de Regras**

Este componente, juntamente com a máquina de inferência, pode ser considerado o núcleo dos sistemas baseados em regras fuzzy. Ele é composto por uma coleção de proposições fuzzy na forma Se...então.... Cada uma destas proposições pode, por exemplo, ser descrita linguisticamente de acordo com o conhecimento de um especialista. A base de regras descreve relações entre as variáveis linguísticas, para serem utilizadas na máquina de inferência fuzzy que descreveremos no próximo item.

- **Máquina de Inferência Fuzzy**

É neste componente que cada proposição fuzzy é traduzida matematicamente por meio das técnicas de raciocínio aproximado. Os operadores matemáticos serão selecionados para definir a relação fuzzy que modela a base de regras. Desta forma, a máquina de inferência fuzzy é de fundamental importância para o sucesso do sistema fuzzy, já que fornece a saída a partir de cada entrada fuzzy e da relação definida pela base de regras. Apresentaremos dois métodos particulares de Inferência Fuzzy: o Método de

Mamdani e o Método de Takagi-Sugeno. A diferença básica entre esses métodos recai no tipo de conseqüente e no procedimento de defuzzificação. Para simplicidade, somente modelos de regras com duas entradas e uma saída serão ilustradas.

– **Método de Mamdani**

Uma regra Se (antecedente) então (consequente) é definida pelo produto cartesiano fuzzy dos conjuntos fuzzy que compõem o antecedente e o conseqüente da regra. O método de Mamdani agrega as regras através do operador lógico OU, que é modelado pelo operador máximo e, em cada regra, o operador lógico E é modelado pelo operador mínimo. Veja as regras a seguir:

Regra 1: Se (x é A_1 e y é B_1) então (z é C_1).

Regra 2: Se (x é A_2 e y é B_2) então (z é C_2).

A Figura 2.3 ilustra como uma saída real z de um sistema de inferência do tipo Mamdani é gerada a partir das entradas x e y reais e a regra de composição *max-min*. A saída $z \in \mathbb{R}$ é obtida pela defuzzificação do conjunto fuzzy de saída $C = C'_1 \cup C'_2$ da Figura 2.3.

– **Método de Takagi-Sugeno**

Neste caso, o conseqüente de cada regra é uma função das variáveis de entrada. Por exemplo, podemos supor que a função que mapeia a entrada e saída para cada regra é uma combinação linear das entradas, isto é, $z = px_1 + qx_2 + r$. Veja as regras a seguir:

Regra 1 : Se (x é A_1 e y é B_1) então $z = f_1(x, y)$.

Regra 2 : Se (x é A_2 e y é B_2) então $z = f_2(x, y)$.

A Figura 2.4 a seguir, ilustra como uma saída z de um sistema do método de Takagi-Sugeno é gerada a partir das entradas reais x e y . Esta saída do sistema é obtida pela média ponderada (procedimento de defuzzificação) das saídas de cada

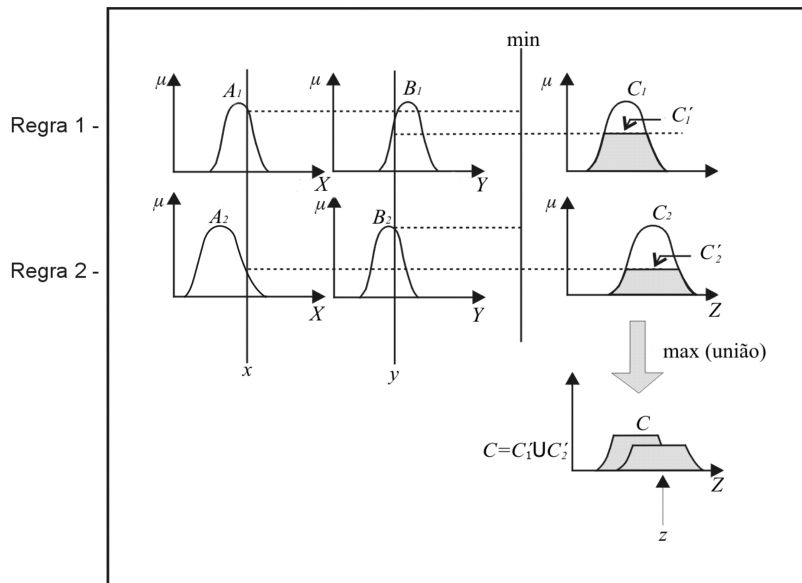


Figura 2.3: Método de Mamdani com composição *max-min*.

regra, usando-se o grau de ativação destas regras como ponderação.

No caso em que $p = q = 0$, então $z = r$ (conjunto unitário fuzzy), os modelos de Mamdani e de Takagi-Sugeno produzem os mesmos valores de saída, porque a defuzzificação no método de Mamdani, pelo centro de gravidade, é igual à média ponderada no método de Takagi-Sugeno. Como z_1 e z_2 são conjuntos fuzzy unitários então w_1 e w_2 são os graus de pertinências de z_1 e z_2 , respectivamente.

- Processador de Saída (Defuzzificação)** Na teoria dos conjuntos fuzzy pode-se dizer que a defuzzificação é um processo de se representar um conjunto fuzzy por um número real. Em sistemas fuzzy, em geral a saída é um conjunto fuzzy. Assim, devemos escolher um método para defuzzificar a saída e obter um número real que a represente. A seguir, relacionaremos o método mais comum de defuzzificação.

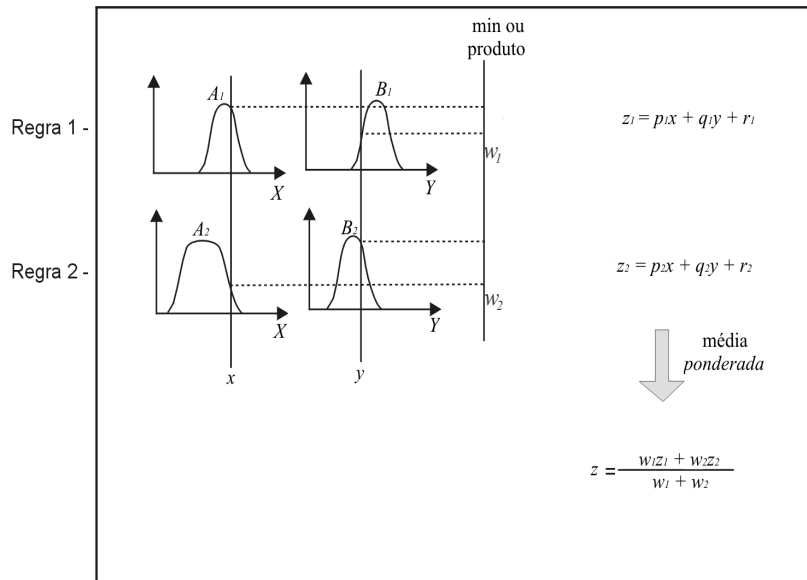


Figura 2.4: Método de Takagi-Sugeno.

- **Centro de gravidade** Este método de defuzzificação é semelhante à média ponderada para distribuição de dados, com a diferença que os pesos são os valores $C(z_i)$ que indicam o grau de compatibilidade do valor z_i com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy C .

Para um domínio discreto tem-se

$$G(C) = \frac{\sum_{i=0}^n u_i C(z_i)}{\sum_{i=0}^n C(z_i)}. \quad (2.5.5)$$

Para um domínio contínuo tem-se

$$G(C) = \frac{\int_R uC(u)du}{\int_R C(u)du} \quad (2.5.6)$$

onde R é a região de integração.

2.6 Aplicações do SBRF

Nesta seção apresentaremos três exemplos de aplicações do SBRF, os três primeiros elaborados pelos alunos Flávia Cristina Queiroz, Eder Lúcio da Fonseca e Edinei Leandro dos Reis, respectivamente, do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia.

2.6.1 Vitalidade das Violetas

Violeta é um tipo de flor muito apreciada pelos apaixonados por plantas. Possui folhas grandes e flores miúdas.

Para que tenha vida longa pequenos cuidados diários são necessários. Por exemplo:

- Ser exposta de meia à uma hora ao Sol da manhã ou ao da tarde (pois o Sol é mais fraco nestas horas).
- Ser aguada com aproximadamente 33 ml.

Assim, dados os valores da quantidade de água (ml) e da quantidade de Sol (minutos), tem-se como resultado a ‘vitalidade da violeta’.

Neste exemplo, as variáveis linguísticas são:

- Quantidade de água (ml), com domínio $[0,66]$, representando as faixas < 26 , $33 - 53$ e > 40 , com os termos lingüísticos: *pequena*, *média* e *grande*. As funções de pertinência são triangulares, como mostra a Figura 2.5.
- Tempo de exposição no Sol (min), $[0,95]$, representando as faixas < 35 , $20 - 70$ e > 55 , com os termos lingüísticos: *pequeno*, *médio* e *grande*, respectivamente; também as funções de pertinência triangulares, Figura 2.6 .
- O domínio da variável de saída ‘vitalidade da violeta’ é $[0,1]$ e os termos lingüísticos: *ruim*, *média* e *boa*, como mostra a Figura 2.7 .

A Tabela 2.1 apresenta as classificações da vitalidade da violeta como função da quantidade da água A (ml) e tempo de exposição no Sol S (min). As regras fuzzy são apresentadas na Tabela 2.2.

Assim, dados os valores da quantidade de água e tempo de exposição, tem-se como resultado a inferência de um valor, no intervalo $[0,1]$ que representa a vitalidade das violetas V . Neste sentido, é possível obter uma saída do sistema de inferência. Por exemplo, com quantidade de água 40 ml e tempo de exposição do Sol 60 min, após a defuzzificação encontramos um valor igual 0.68, orientando que esta quantidade de água e tempo de exposição no Sol geram uma vitalidade de 0.68 numa escala de 0 a 1 para as violetas [2] .

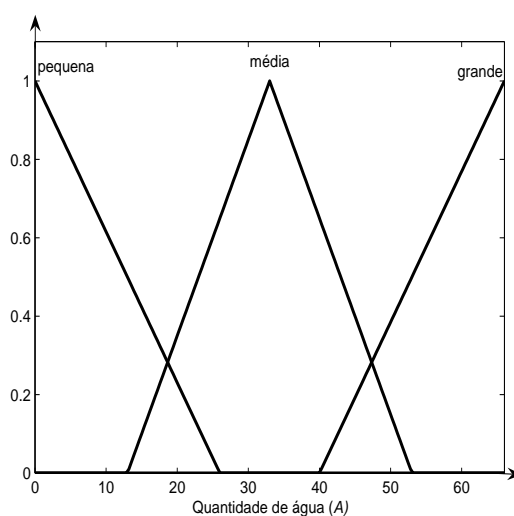


Figura 2.5: Funções de pertinência da quantidade de água (A).

2.6.2 Grau de Risco da Obesidade

Denomina-se obesidade uma enfermidade caracterizada pelo acúmulo excessivo de gordura corporal, associada a problemas de saúde, ou seja, que traz prejuízos à saúde do indivíduo.

O excesso de gordura corporal não provoca sinais e sintomas diretos,

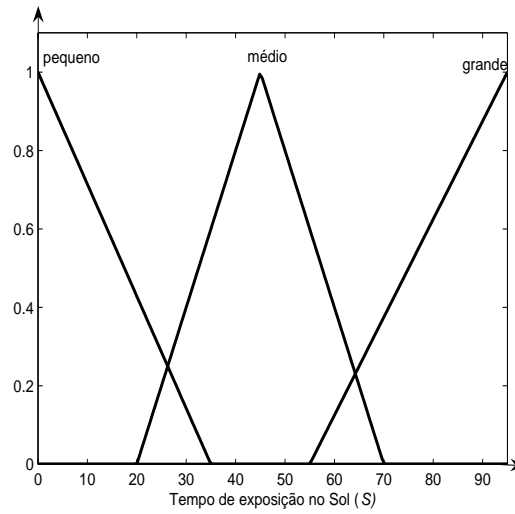


Figura 2.6: Funções de pertinência do tempo de exposição do sol (S).

Água (A) \ Sol(S)	< 26	13 - 53	> 40
< 35	média	boa	ruim
20 - 70	média	boa	ruim
> 55	ruim	média	ruim

Tabela 2.1: Classificações da vitalidade da violeta como função da quantidade de água A (ml) e tempo de exposição no Sol S .

Água (A) \ Sol(S)	pequena	média	grande
pequena	média	boa	ruim
média	média	boa	ruim
grande	ruim	média	ruim

Tabela 2.2: Regras fuzzy.

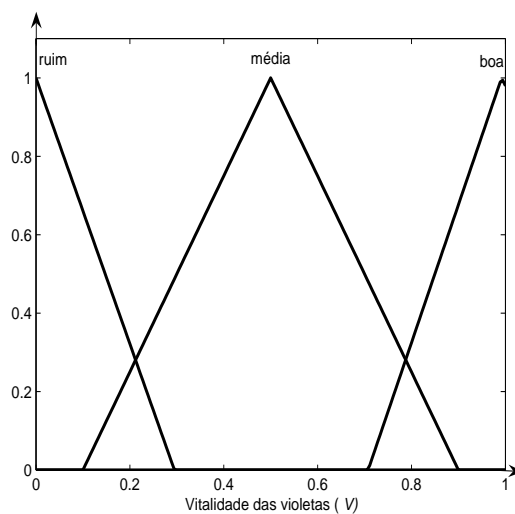


Figura 2.7: Funções de pertinência da vitalidade das violetas (V).

salvo quando atinge valores extremos. Independente da severidade, o paciente apresenta importantes limitações estéticas, acentuadas pelo padrão atual de beleza, que exige uma massa corporal até menor do que o aceitável como normal. Pacientes obesos apresentam limitações de movimento, tendem a ser contaminados com fungos e outras infecções de pele em suas dobras de gordura, com diversas complicações, podendo ser algumas vezes graves. Além disso, sobrecarregam sua coluna e membros inferiores, apresentando a longo prazo degenerações (artroses) de articulações da coluna, quadril, joelhos e tornozelos, além de doença varicosa superficial e profunda (varizes) com úlceras de repetição e erisipela.

Como o médico faz o diagnóstico? A forma mais amplamente recomendada para avaliação da massa corporal em adultos é o IMC (índice de massa corporal), recomendado inclusive pela Organização Mundial da Saúde. Esse índice é calculado dividindo-se a massa do paciente em quilogramas (kg) pela sua altura em metros elevada ao quadrado (quadrado de sua altura) [1]. O valor assim obtido estabelece o diagnóstico da obesidade e caracteriza também os riscos associados

conforme apresentado na Tabela 2.3:

IMC (kg/m^2)	Grau de Risco	Tipo de obesidade
18 a 24,9	Saudável	Ausente
25 a 29,9	Moderado	Sobrepeso (Pré-Obesidade)
30 a 34,9	Alto	Obesidade Grau I
35 a 39,9	Muito Alto	Obesidade Grau II
40 ou mais	Extremo	Obesidade Grau III ('Mórbida')

Tabela 2.3: Diagnóstico da Obesidade.

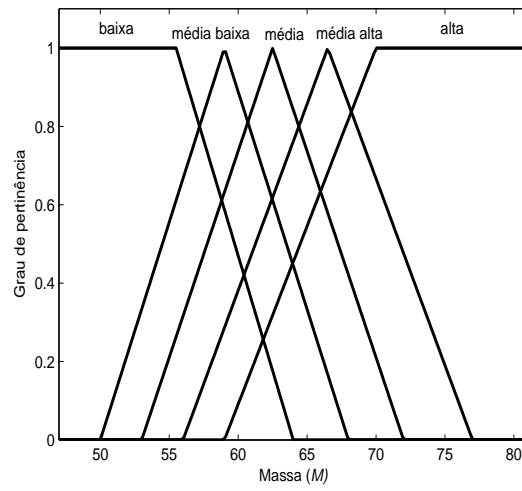
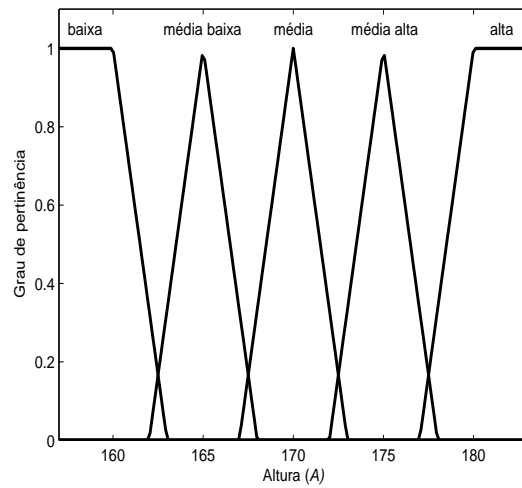
Conforme pode ser observado, o peso normal, no indivíduo adulto, com mais de 20 anos de idade, varia conforme sua altura, o que faz com que possamos também estabelecer os limites inferiores e superiores da massa corporal para as diversas alturas conforme a Tabela 2.4 :

Altura (cm)	Massa Inferior (kg)	Massa Superior (kg)
145	38	52
150	41	56
155	44	60
160	47	64
165	50	68
170	53	72
175	56	77
180	59	81
185	62	85
190	65	91

Tabela 2.4: Altura X Massa.

Neste exemplo, as variáveis lingüísticas são:

- Massa (kg), com domínio $[47,81]$, considerando as faixas 47 – 64, 50 – 68, 53 – 72, 56 – 77 e 59 – 81, com os termos lingüísticos: *baixa*, *média baixa*, *média*, *média alta* e *alta*. As funções de pertinência são triangulares, como mostra a Figura 2.8.
- Altura (cm), $[157,183]$, considerando as faixas 57 – 163, 162 – 168, 167 – 173, 172 – 178 e 177 – 183, com os termos lingüísticos: *baixa*,

Figura 2.8: Funções de pertinência da massa (M).Figura 2.9: Funções de pertinência da altura (A).

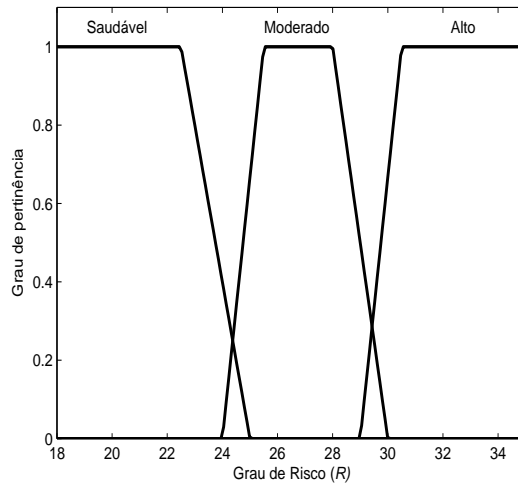


Figura 2.10: Funções de pertinência do grau de risco (R).

média baixa, *média*, *média alta* e *alta*, respectivamente; também as funções de pertinência triangulares, Figura 2.9.

- O domínio da variável de saída ‘Grau de Risco’ é o intervalo $[18,35]$ e considerando os termos lingüísticos: *saudável*, *moderado* e *alto*, com funções de pertinências trapezoidais como mostra a Figura 2.10.

As regras fuzzy são apresentadas na Tabela 2.5.

Assim, dados os valores da altura e a massa de uma pessoa, tem-se como resultado a inferência de um valor, no intervalo $[15,40]$ que representa o grau de risco R . Neste sentido, é possível obter uma saída do sistema de inferência, por exemplo, com altura 164 cm e peso 59 kg, após a defuzzificação encontramos um valor igual 23.9, orientando que a pessoa esta saudável.

Altura (A) \ Massa (M)	baixa	média baixa	média	média alta	alta
baixa	saudável	moderado	moderado	moderado	alto
média baixa	saudável	saudável	moderado	moderado	moderado
média	saudável	saudável	saudável	moderado	moderado
média alta	saudável	saudável	saudável	saudável	moderado
alta	saudável	saudável	saudável	saudável	saudável

Tabela 2.5: Regras fuzzy.

2.6.3 Qualidade da água

O objetivo deste exemplo é analisar a qualidade da água abordando três aspectos de potabilidade da água. Para a fuzzificação foram utilizadas informações da SABESP (Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo) que regulamenta e fiscaliza a qualidade da água para o consumo humano no estado de São Paulo.

As variáveis de entrada escolhidas para garantir a potabilidade da água são: cor aparente (medida em UH - unidade Hazen), pH (potencial hidrogeniônico, ou seja, concentração de íons de Hidrogênio - onde os valores variam de 0 a 14), e a turbidez (causada pela presença de substâncias suspensas e coloidais - é determinada pela quantidade de luz dispersada quando ela passa através de uma amostra e é medida em UT, ou seja, unidades de cor).

Além dessas três variáveis da água que vamos analisar, poderíamos utilizar outras, tais como: odor e sabor, nível de flúor, nível de cloro residual, quantidade de coliformes fecais e totais.

A variável de saída é a qualidade da água com os termos linguísticos: *boa*, *adequada* e *inadequada* para o consumo, Figura 2.14.

As variáveis de entrada são classificadas a seguir, suas funções de pertinências são trapezodais, Figuras 2.11, 2.12 e 2.13.

- Cor aparente:
 - Menor ou igual a 5UH - *boa*
 - Maior que 5UH e menor ou igual a 15UH - *adequada*
 - Maior que 15UH - *inadequada*

- pH
 - De 6,5 a 8,5 - *bom*
 - De 6 a 10 - *adequado*
 - Menor que 6 ou Maior que 10 - *inadequado*
- Turbidez
 - Menor ou igual a 1UT - *boa*
 - Maior que 1UT e menor que 5UT - *adequada*
 - Maior que 5UT - *inadequada*

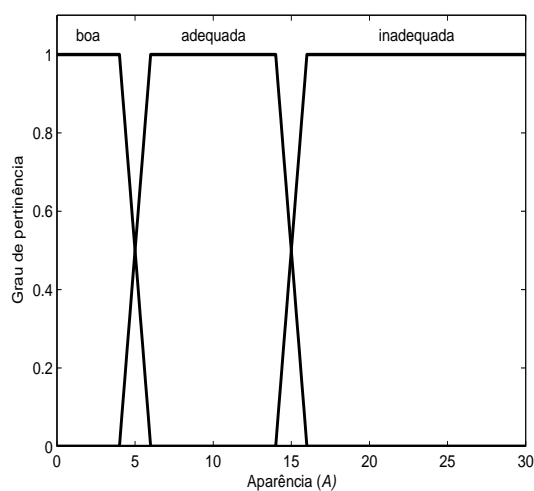


Figura 2.11: Funções de pertinência da aparência de água (A).

Através das informações da SABESP, podemos constatar que a qualidade da água é boa para o consumo quando a cor aparente e a turbidez se aproximam de ‘zero’ e o pH se manter em torno de 7. Desta forma, o controle da qualidade da água para o consumo humano, deve ser cuidadoso, com o intuito de evitarmos doenças posteriores.

As Tabelas 3.7, 3.8 e 3.9 fornecem a base de regras quando a aparência da água é boa, adequada e inadequada, respectivamente,

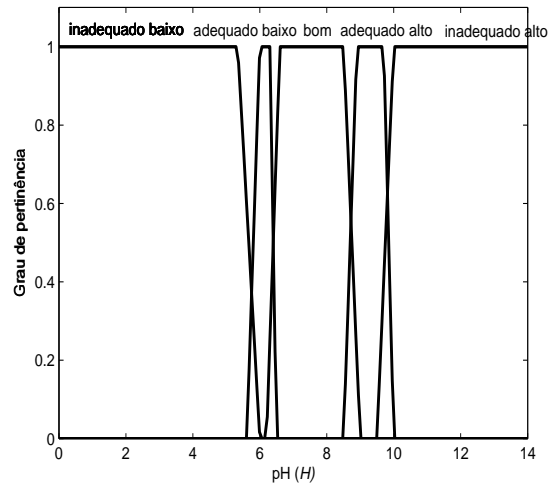


Figura 2.12: Funções de pertinência do pH (H).

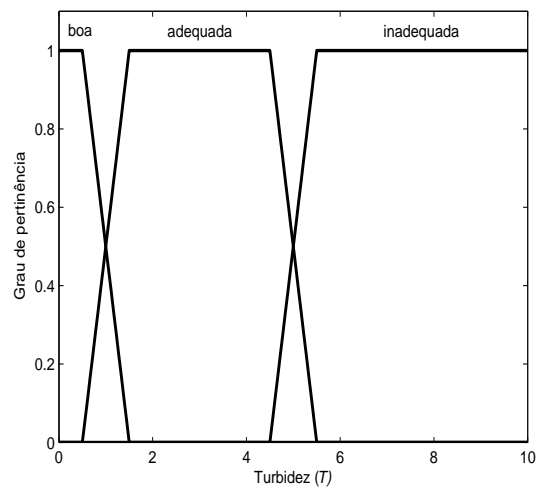


Figura 2.13: Funções de pertinência da turbidez (T).

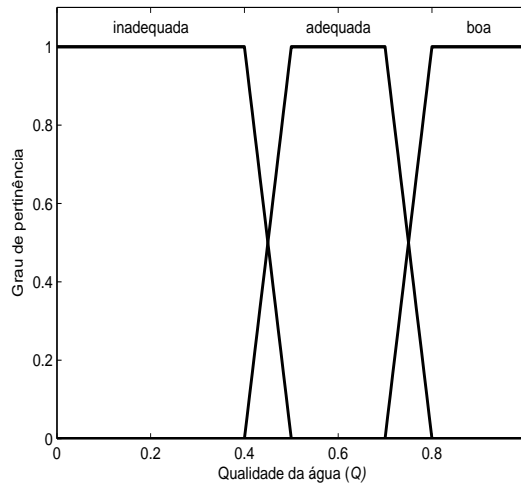


Figura 2.14: Funções de pertinência da qualidade da água (Q).

	Turbidez (T)	boa	adequada	inadequada
pH(H)				
inadequado baixo		inadequada	inadequada	inadequada
adequado		adequada	adequada	inadequada
bom		boa	boa	inadequada
inadequado alto		inadequada	inadequada	inadequada

Tabela 2.6: Regras fuzzy quando a aparência da água é boa.

estas regras foram feitas utilizando as informações da SABESP e o bom senso.

Assim, é possível obter uma saída do sistema de inferência. Por exemplo, quando a aparência da água é 15 UH, o pH é 7 e a turbidez é 0 UT, após a defuzzificação encontramos um valor igual 0.5, orientando que a qualidade da água é adequada.

O próximo capítulo é dedicado a aplicações da teoria dos conjuntos fuzzy aliada a outras ferramentas matemáticas, como as equações diferenciais.

pH(H) \ Turbidez (T)	boa	adequada	inadequada
inadequado baixo	inadequada	inadequada	inadequada
adequado	adequada	adequada	inadequada
bom	boa	adequada	inadequada
inadequado alto	inadequada	inadequada	inadequada

Tabela 2.7: Regras fuzzy quando a aparência da água é adequada.

pH(H) \ Turbidez (T)	boa	adequada	inadequada
inadequado baixo	inadequada	inadequada	inadequada
adequado	inadequada	inadequada	inadequada
bom	adequada	adequada	inadequada
inadequado alto	inadequada	inadequada	inadequada

Tabela 2.8: Regras fuzzy quando a aparência da água é inadequada.

Exercícios

1. Assuma que você está dirigindo em uma rodovia com velocidade máxima de 100km/h . Como você caracteriza descrições tal como baixa, média, alta em termos de variáveis linguísticas? E sobre não baixa e não alta?
2. Considere as regras

$$R_1: \text{'Se } x \text{ é baixo entao } y_1 = x + 2\text{'}$$

$$R_2: \text{'Se } x \text{ é alto entao } y_2 = 2x\text{'}$$
 onde $x \in [0, 4]$. Determine a saída do Método de Inferência de Takagi-Sugeno [8].
3. Refaça o exercício 2, inclusive as representações gráficas, trocando os consequentes por $y_1 = x + 2$ e $y_2 = 4 - x$ [8].

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Introdução

A literatura matemática que trata de fenômenos imprecisos tem crescido consideravelmente, principalmente no tocante à teoria dos conjuntos fuzzy, utilizada com sucesso nas áreas de Engenharia. As primeiras aplicações desta teoria em Biomatemática foi em diagnóstico médico [37] e [38]. Mais recentemente outros autores têm utilizado esta abordagem em problemas de epidemiologia [7], [10], [14], [16], [17], [24] e [30]. Na seção 3.2 apresentaremos uma aplicação de diagnóstico médico, nas seções 3.3 e 3.4, sistemas de equações diferenciais ordinárias com parâmetro fuzzy; na seção 3.5 uma aplicação do método de Takagi-Sugeno e nas seções 3.6, 3.7 e 3.8 apresentaremos o modelo de Malthus, modelo de evolução da AIDS e o modelo presa-predador através de regras fuzzy.

3.2 Diagnóstico Médico

A aplicação que veremos trata de estabelecer diagnóstico para doenças infantis. Tal estudo foi desenvolvido pelas alunas Mariana Fernandes dos Santos Villela e Patrícia Borges dos Santos do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia [40], apresentado na 7ª Semana da Matemática da Universidade Federal de

Uberlândia [41].

3.2.1 Base de Conhecimentos

O objetivo é utilizar equações relacionais fuzzy da forma (2.3.4) em que as relações fuzzy sintomas dos pacientes e das doenças, com esses sinais, ‘captam’ os possíveis diagnósticos dos pacientes.

Para isto, foi preciso consultar um especialista na área. Neste caso consultamos dois pediatras. A idéia básica é relacionar os sintomas ou sinais de pacientes com as possíveis doenças. Tais doenças são catapora, caxumba, coqueluche e meningite. Considere os seguintes conjuntos universais:

- U_1 = conjuntos dos pacientes do especialista 1;
- U_2 = conjuntos dos pacientes do especialista 2;
- V = conjunto dos sintomas;
- W = conjunto das doenças.

Foram analisadas as informações de dois diferentes médicos, dos quais obtivemos conhecimento de sete pacientes $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ e P_7 : sintomas $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}$ e s_{18} que apresentaram os diagnósticos d_1, d_2, d_3 e d_4 , onde:

- s_{10} = infecção glândulas salivares
- s_1 = pintas vermelhas no corpo
- s_2 = coceira
- s_3 = febre
- s_4 = cansaço
- s_5 = cefaléia
- s_6 = perda de apetite
- s_7 = rigidez na nuca
- s_8 = calafrios
- s_9 = confusão mental
- s_{11} = tosse seca
- s_{12} = coriza
- s_{13} = dor muscular
- s_{14} = fraqueza
- s_{15} = dor ao mastigar ou engolir
- s_{16} = mal estar
- s_{17} = vômito
- s_{18} = dor de garganta

- d_1 = catapora
- d_2 = caxumba
- d_3 = coqueluche
- d_4 = meningite

Esses dados irão compor a base de conhecimentos que serão expressos por meio de relações fuzzy. A Tabela 3.1 representa a relação fuzzy R onde seus valores indicam o grau com que cada sintoma está relacionado com cada doença. Esses valores são as médias aritméticas obtidas através de informações de dois especialistas. As colunas são os sintomas considerados e as linhas são as doenças.

d \ s	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}
d_1	1	1	0.45	0.4	0.5	0.4	0	0.1	0	0
d_2	0	0	0.3	0.15	0.7	0.5	0	0.25	0	0.8
d_3	0	0	0.9	0.45	0.25	0.25	0	0.15	0	0
d_4	0.2	0	0.95	0.5	0.8	0.8	1	0.75	0.4	0

d \ s	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}	s_{17}	s_{18}
d_1	0.2	0.3	0.05	0.2	0	0.1	0	0
d_2	0.1	0	0.4	0.4	0.9	0.3	0.05	0.75
d_3	1	0.55	0.1	0.1	0	0.6	0.05	0
d_4	0	0	0.3	0.1	0	0.85	0.8	0

Tabela 3.1: Relação fuzzy sintomas \times doenças (R).

As Tabelas 3.2 e 3.4 indicam os graus com que cada sintoma se manifestou nos pacientes, dados por especialistas. A partir da relação fuzzy R é possível obter o diagnóstico médico de cada paciente, ou seja, o grau da doença para cada paciente, por meio de uma fórmula:

$$u_{R(P_j)}(d_k) = \max_{1 \leq i \leq 18} [\min[u_R(d_k, s_i), u_{P_j}(s_i)]] \quad (3.2.1)$$

onde $j = 1, \dots, 7$ e $k = 1, \dots, 4$.

Por exemplo, o diagnóstico médico do paciente P_1 , via relação fuzzy R , é facilmente obtido através da equação (3.2.1). O paciente P_1 pode ter a doenças d_k , $k = 1, \dots, 4$ com os respectivos graus de possibilidades dados pelo especialista 1 (da Tabela 3.2):

P \ s	s									
	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	s ₅	s ₆	s ₇	s ₈	s ₉	s ₁₀
P ₁	0	0	0.7	0.5	0.1	0.2	0	0.5	0	0
P ₂	0	0	0.5	0.7	0.9	0.5	0.9	0.3	0.9	0
P ₃	0	0	0.5	0.3	0.8	0.7	0	0.2	0	1
P ₄	1	0.8	0.9	0.3	0	0.7	0	0.3	0	0
P ₅	1	0.5	0.9	0.2	0	0.1	0	0.5	0	0
P ₆	0	0	0.2	0.2	0.1	0.1	0	0.1	0	0
P ₇	0	0	0.1	0.1	0.1	0.1	0	0.1	0	0

P \ s	s							
	s ₁₁	s ₁₂	s ₁₃	s ₁₄	s ₁₅	s ₁₆	s ₁₇	s ₁₈
P ₁	1	0.5	0.1	0.5	0	0	0	0
P ₂	0.5	0.1	0.6	0.5	0	0.8	0.7	0
P ₃	0.5	0.2	0.3	0.5	0.9	0.7	0.3	0.8
P ₄	0	0	0.2	0.3	0	0.1	0	0
P ₅	0	0.5	0.1	0.2	0	0	0	0
P ₆	1	0.3	0.1	0.1	0	0.1	0	0
P ₇	1	0.5	0.1	0.1	0	0.1	0.3	0

Tabela 3.2: Relação fuzzy pacientes \times sintomas elaborados pelo especialista 1 (S) [40].

$$u_{R(P_1)}(d_1) = \max_{1 \leq i \leq 18} [\min[u_R(d_1, s_i), u_{P_1}(s_i)]] = 0.45$$

$$u_{R(P_1)}(d_2) = \max_{1 \leq i \leq 18} [\min[u_R(d_2, s_i), u_{P_1}(s_i)]] = 0.4$$

$$u_{R(P_1)}(d_3) = \max_{1 \leq i \leq 18} [\min[u_R(d_3, s_i), u_{P_1}(s_i)]] = 1$$

$$u_{R(P_1)}(d_4) = \max_{1 \leq i \leq 18} [\min[u_R(d_4, s_i), u_{P_1}(s_i)]] = 0.7.$$

A fórmula (2.3.4) pode ser aplicada na forma matricial e obter os diagnósticos de todos os pacientes de uma só vez. Para isto, basta fazer o produto fuzzy (troca-se produto por min e soma por sup da multiplicação tradicional de matrizes) da matriz S por $X = R^t$ na equação (2.3.4). Assim, $S * R^t = D$ (que indica o diagnóstico de cada paciente), onde D é dada pela Tabela 3.3.

P \ d	d_1	d_2	d_3	d_4
P_1	0.45	0.4	1.0	0.7
P_2	0.5	0.7	0.6	0.9
P_3	0.6	0.9	0.6	0.8
P_4	1.0	0.5	0.9	0.9
P_5	1.0	0.3	0.9	0.9
P_6	0.3	0.3	1.0	0.3
P_7	0.3	0.3	1.0	0.5

Tabela 3.3: Relação fuzzy pacientes \times doença (D).

A Tabela 3.3 representa a relação fuzzy D onde seus valores indicam o grau com que cada paciente está relacionado com cada doença. As linhas são os pacientes considerados e as colunas são as doenças. Portanto, notamos que o paciente P_1 , pela teoria aplicada, tem maior possibilidade de estar com coqueluche (d_3). O paciente P_2 pode estar com meningite (d_4), P_3 pode estar com caxumba (d_1), P_4 e P_5 podem estar com catapora (d_1) e, P_6 e P_7 podem estar com coqueluche (d_3). Segundo o especialista, os pacientes realmente possuíam as respectivas doenças. O mesmo ocorreu com os pacientes do especialista 2, a doença que teve maior possibilidade de ocorrer para cada paciente na relação fuzzy D , que será feita pelo leitor como exercício, também foi a doença que os pacientes possuíam.

Note que a resposta da composição é também um conjunto fuzzy, ou seja, a composição nem sempre responde qual doença o paciente possui, porém fornece a distribuição de possibilidades do paciente no conjunto de doenças dado que ele apresenta uma certa distribuição de possibilidades no conjunto de sintomas [23]. Outra propriedade importante da relação fuzzy é que à medida que tem-se diagnósticos de novos pacientes, estes podem ser incluídos na base de conhecimentos e assim aumentar a capacidade de se obter mais diagnósticos por meio de relações fuzzy, tal como faz o médico.

Na próxima seção estudaremos um modelo de evolução da AIDS com parâmetro fuzzy.

P \ s	s									
	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	s ₅	s ₆	s ₇	s ₈	s ₉	s ₁₀
P ₁	1.0	0.5	0.9	0	0	0	0	0	0	0
P ₂	0	0	1.0	0	1.0	0	1.0	0	0	0
P ₃	1.0	0.7	1.0	0.9	0	0	0	0	0	0
P ₄	0	0	1.0	0	0	1.0	0	0	0	0
P ₅	0	0.7	0	0	1.0	1.0	1.0	0	1.0	0
P ₆	1.0	0.5	1.0	0	0	0	0	0	0	0
P ₇	1.0	0.9	0.9	0	0.5	0	0.5	0.5	0.3	0

P \ s	s								
	s ₁₁	s ₁₂	s ₁₃	s ₁₄	s ₁₅	s ₁₆	s ₁₇	s ₁₈	
P ₁	0	0	0	0	0	0	0	0	
P ₂	0	0	0	0	0	0	1.0	0	
P ₃	0	0	0	0.9	0	0	0	0	
P ₄	1.0	0	0	0	0	0	1.0	0	
P ₅	0.9	0	0	0	0	0	1.0	0	
P ₆	0	0	0	0.5	0	0	1.0	1.0	
P ₇	0.4	0.5	0	0.4	0	0.5	0.7	0	

Tabela 3.4: Relação fuzzy pacientes \times sintomas elaborados pelo especialista 2 [40].

3.3 Modelo de Evolução da AIDS

A Saúde Pública considera importante para o controle da população HIV-positivos a contagem de células $CD4+$ e da carga viral. Neste capítulo, iniciaremos tratando a taxa de transferência de assintomático para sintomático dependendo da carga viral v e do nível de $CD4+$. Não é raro ocorrer discrepância entre a contagem de células de $CD4+$ e de carga viral, ou seja, diminuição da carga viral e do $CD4+$, ou elevação da carga viral e do $CD4+$. Nestes casos, a contagem $CD4+$ é o melhor determinador para indicação terapêutica. Assim, posteriormente trataremos a taxa de transferência de assintomático para sintomático dependendo do nível de $CD4+$. Neste modelo não estamos levando em conta tratamento com terapia antiretroviral para a população [15].

3.3.1 Informações Médicas sobre HIV

Inicialmente se acreditava que a AIDS tinha um longo período de latência clínica entre a infecção e o desenvolvimento da doença manifesta. Contrária a essa visão, recente pesquisa sobre as contagens de células $CD4+$ e a replicação viral revela que o estágio intermediário da doença é, na verdade, altamente dinâmico. Essa pesquisa demonstrou, através da análise da meia-vida das células, da taxa de replicação viral e da vida média do HIV, que diariamente sobrevive uma quantidade de vírus maior do que as de células $CD4+$ (o HIV possui uma replicação de 10^{10} vírus/dia e a produção de $CD4+$ é, no máximo, 2×10^9 unidades/dia). Ao longo do tempo essa diferença confere um desequilíbrio em favor do HIV, levando a apresentação clínica dos sintomas relacionados à AIDS. Assim, a AIDS é uma consequência dos altos níveis de replicação contínua do HIV em detrimento da menor velocidade de produção de células de defesa, que leva à inutilização e destruição dos linfócitos $CD4+$, mediadas pelo próprio vírus ou por mecanismos imunológicos.

A contagem de células $CD4+$ em sangue periférico tem implicações prognósticas na evolução da infecção pelo HIV, pois é a marca registrada de déficit imunológico e pode ser associada a certos parâmetros clínicos. É a medida de imunocompetência celular mais útil clinicamente no acompanhamento de pacientes infectados pelo HIV e a mais amplamente aceita, embora não seja a única. De maneira didática, pode-se dividir a contagem de células $CD4+$ por mililitro do sangue periférico em quatro faixas [27]:

- **$CD4+ > 0.5$ células/ml:** Estágio da infecção pelo HIV com baixo risco de doença. Neste estágio, há boa resposta às imunizações de rotina e boa confiabilidade nos testes cutâneos de hipersensibilidade tardia como o PPD¹. Casos de infecção aguda podem ter estes níveis de $CD4+$, embora, de modo geral, esses pacientes tenham níveis mais baixos.
- **$CD4+$ entre 0.2 e 0.5 células/ml:** Estágio caracterizado por

¹PPD (Derivado Protéico Purificado) teste recomendado de rotina anual para avaliação da necessidade de quimioprofilaxia para tuberculose.

surgimento de sinais e sintomas menores ou alterações constitucionais. Risco moderado de desenvolvimento de doenças oportunistas. Nesta fase podem aparecer candidíase oral, herpes simples recorrente, herpes zóster, tuberculose, leucoplasia pilosa oral, pneumonia bacteriana.

- **CD4+ entre 0.05 e 0.2 células/ml:** Estágio com alta probabilidade de surgimento de doenças oportunistas como pneumocistose, toxoplasmose de SNC, neurocriptococose, histoplasmose, citomegalovirose localizada. Está associado à síndrome consumptiva, leucoencefalopatia multifocal progressiva, candidíase esofágica, etc.
- **CD4+ < 0.05 células/ml :** Estágio com grave comprometimento de resposta imunitária. Alto risco de surgimento de doenças oportunistas como citomegalovirose disseminada, sarcoma de Kaposi, linfoma não-Hodgkin e infecção por micróbactérias do complexo Avium-Intracellulare. Alto risco de morte com baixa sobrevida.

A quantificação da carga viral e a contagem de CD4+ são utilizadas para iniciar ou alterar a terapêutica antiretroviral. Quando não há disponibilidade de quantificação da carga viral pode-se basear na contagem de células CD4+.

Em caso de início ou mudança de terapia antiretroviral, alguns autores recomendam uma medida de acompanhamento da carga viral após 1 a 2 meses para avaliar o tratamento. Os resultados devem ser interpretados da seguinte maneira:

- **Carga viral abaixo de 10.000 cópias de RNA por ml:** baixo risco de progressão ou piora da doença.
- **Carga viral entre 10.000 e 100.000 cópias de RNA por ml:** risco moderado de progressão ou piora da doença.
- **Carga viral acima de 100.000 cópias de RNA por ml:** alto risco de progressão ou piora da doença.

Em 2000 o Ministério da Saúde organizou um documento com o título: Recomendações para terapia antiretroviral em adultos e adolescentes infectados pelo HIV, que contém a Tabelas 3.5.

Situação Clínica	Contagem de $CD4+$ (células/ml)	Carga Viral (cópias/ml)	Recomendações
Assintomático	Contagem de $CD4+$ não disponível	Carga viral não disponível	Não tratar
Assintomático	≥ 0.5	Independente da carga viral	Não tratar
Assintomático	$\geq 0.35 < 0.5$	< 30000	Considerar tratamento
		≥ 30000	Considerar tratamento
Assintomático	$\geq 0.2 < 0.35$	Independente de carga viral	Tratamento anti-retroviral
Assintomático	< 0.2	Independente de carga viral	Tratar e iniciar profilaxia para infecções oportunistas
Sintomático	Independente da Contagem de $CD4+$	Independente da carga viral	Tratar e iniciar profilaxia para infecções oportunistas

Tabela 3.5: Recomendações para início da terapia antiretroviral.

A conversão do portador assintomático para portador sintomático depende das características individuais, conforme a contagem da carga viral v e do nível de $CD4+$.

Consideramos o modelo fuzzy como um sistema de equações diferenciais, com as variáveis de interesse, nível de $CD4+$ (c) e carga viral (v) incertas.

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= -\lambda(v, c)x & x(0) &= 1 \\
 \frac{dy}{dt} &= \lambda(v, c)x = \lambda(v, c)(1 - y) & y(0) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.3.2}$$

Do ponto de vista matemático, podemos pensar em (3.7.36) como

uma família de sistemas de equações diferenciais ordinárias dependendo dos parâmetros. No caso, dependendo de λ , que por sua vez, depende de v e c . Assim, nos parece razoável que o controle de λ , e conseqüentemente da população y (sintomáticos), possa ser feito a partir de v e c .

Resolvendo a primeira equação de (3.7.36) para cada par (v, c) , temos:

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda(v,c)t}. \quad (3.3.3)$$

Com a condição inicial $x_0 = x(0) = 1$, temos:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\lambda(v,c)t} \\ y(t) &= 1 - e^{-\lambda(v,c)t}, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

3.3.2 Variáveis Linguísticas e Base de Regras

Como fizemos anteriormente, vamos estimar a taxa de transferência $\lambda = \lambda(v, c)$ baseada nas informações médicas. Adotamos a base de regras fuzzy assumindo como antecedentes a carga viral V e o nível de $CD4+$, e Λ como conseqüente. Os termos linguísticos para V são *baixa*, *média* e *alta* e para o nível de $CD4+$ *muito baixo*, *baixo*, *médio*, *médio alto* e *alto*. Para a taxa de transferência Λ os termos linguísticos são *fraca*, *média fraca*, *média* e *forte*.

A Tabela 3.5 relata uma fase importante da transferência de assintomático para sintomático, quando o nível de $CD4+$ está entre 0.2 e 0.5 cels/ml, assim, dividimos a contagem de $CD4+$ em duas faixas: de 0.35 a 0.5 cels/ml não considerar tratamento; e de 0.2 a 0.35 cels/ml considerar tratamento.

O método de inferência utilizado foi Takagi-Sugeno. As funções de pertinência da carga viral e do nível de $CD4+$ são trapezoidais, Figuras 3.1 e 3.2; e as da taxa de transferência são conjuntos unitários, Figura 3.3. Observamos que dividimos os valores da carga viral por 200000 cópias de RNA/ml e com informações médicas construímos a

$CD4+$ \ V	<i>baixa</i>	<i>média</i>	<i>alta</i>
<i>muito baixo</i>	$z_4 = 1$	$z_4 = 1$	$z_4 = 1$
<i>baixo</i>	$z_3 = 0.65$	$z_4 = 1$	$z_4 = 1$
<i>médio</i>	$z_3 = 0.65$	$z_3 = 0.65$	$z_3 = 0.65$
<i>médio alto</i>	$z_2 = 0.15$	$z_2 = 0.15$	$z_3 = 0.65$
<i>alto</i>	$z_1 = 0$	$z_1 = 0$	$z_3 = 0.65$

Tabela 3.6: Base de regras fuzzy.

Figura 3.6. Por exemplo: Se V é *baixa* e $CD4+$ é *muito baixo* então Λ é *forte*.

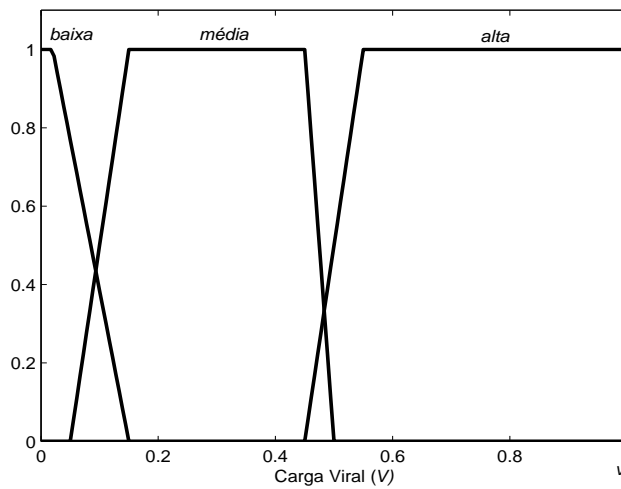


Figura 3.1: Funções de pertinência da carga viral (V).

Simulamos 60 valores para a carga viral e o nível de $CD4+$ em um indivíduo HIV-positivo, e determinamos os valores de λ , utilizando o SBRF. Construímos a superfície mostrada na Figura 3.4.

Fazendo um corte na superfície paralela ao eixo do nível de $CD4+$, obtemos a curva da Figura 3.5.

Propomos uma expressão analítica para a taxa de transferência λ como função do nível de $CD4+$ com propriedades qualitativas seme-

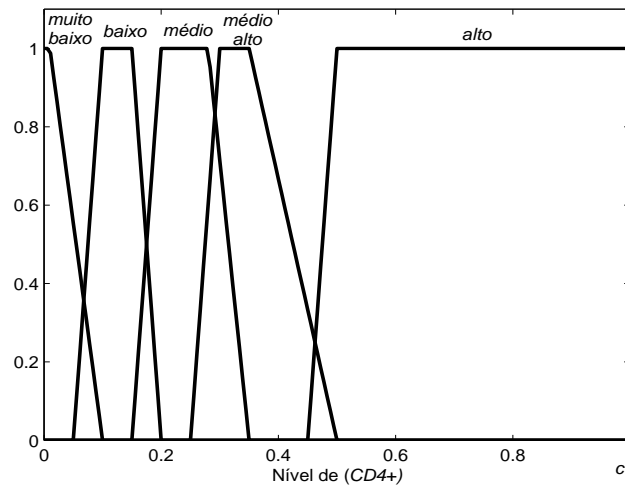


Figura 3.2: Funções de pertinência do nível de $CD4+$.

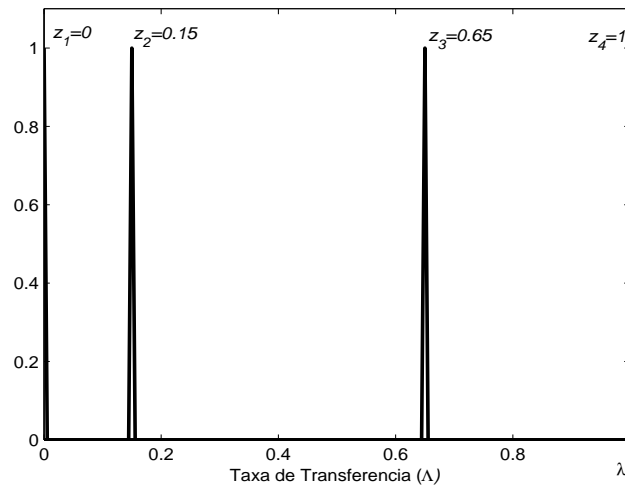


Figura 3.3: Funções de pertinência da taxa de transferência (λ).

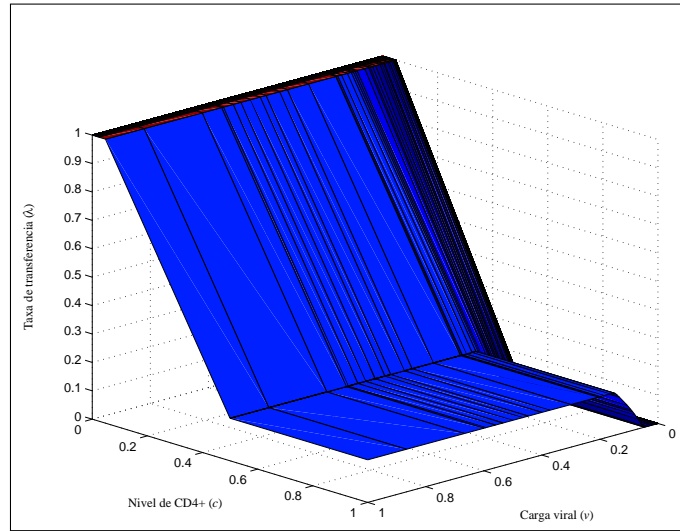


Figura 3.4: Valores da taxa de transferência defuzzificados.

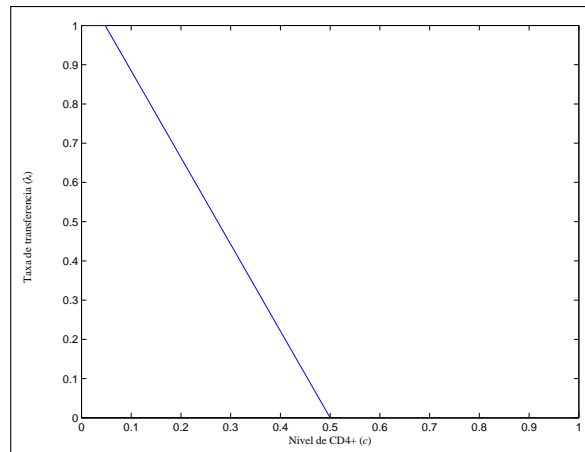


Figura 3.5: λ como função do $CD4+$ ($v = 0.1$).

lhantes à Figura 3.5. Assim, escolhemos um conjunto fuzzy λ com a seguinte função de pertinência

$$\lambda(c) = \begin{cases} 1 & \text{se } c < c_{min} \\ \frac{c_M - c}{c_M - c_{min}} & c_{min} \leq c \leq c_M \\ 0 & \text{se } c_M < c < c_{max} \end{cases} \quad (3.3.5)$$

em que c_{min} representa o menor nível de $CD4+$ na qual a chance do indivíduo se tornar sintomático é máxima e c_M representa o nível de $CD4+$ na qual a chance de se tornar sintomático é mínima, e c_{max} é o maior nível de $CD4+$ possível, Figura 3.6.

A partir da Figura 3.5, podemos obter os valores aproximados para c_{min} e c_M , isto é, c_{min} é aproximadamente 0.05 cels/ml e c_M é aproximadamente 0.5 cels/ml. Estes valores são compatíveis com as informações do Ministério da Saúde, se o nível de $CD4+$ é menor que 0.05 cels/ml a tendência é o indivíduo ser sintomático e quando o nível de $CD4+$ é maior que 0.5 cels/ml a tendência é que o indivíduo seja assintomático.

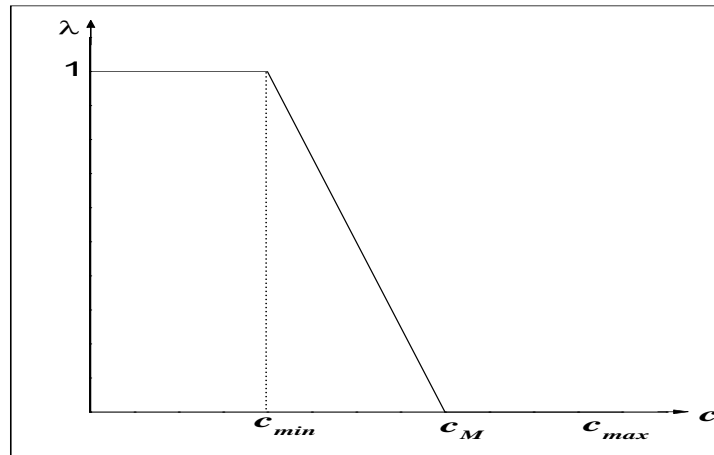


Figura 3.6: Taxa de transferência λ em função de c .

Para calcular a esperança fuzzy da população assintomática, vamos

considerar o $CD4+$ do grupo HIV-positivo estudado (C), Figura 3.7, como uma variável linguística com valores *baixo*, *médio* e *alto*, sendo cada um desses valores caracterizados por conjuntos fuzzy triangulares, de acordo com a função de pertinência:

$$\rho(c) = \begin{cases} 0 & \text{se } c \leq \underline{c} - \delta \\ \frac{1}{\delta}(c - \underline{c} + \delta) & \underline{c} - \delta < c \leq \underline{c} \\ \frac{-1}{\delta}(c - \underline{c} - \delta) & \underline{c} < c \leq \underline{c} + \delta \\ 0 & \text{se } c > \underline{c} + \delta \end{cases} . \quad (3.3.6)$$

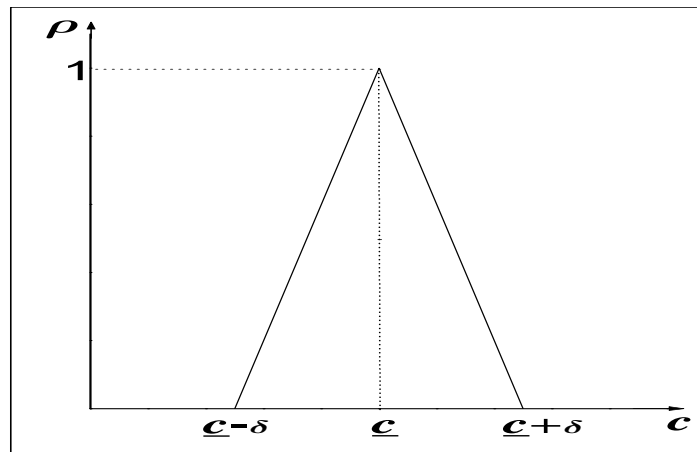


Figura 3.7: Função de pertinência adotada para c .

O parâmetro \underline{c} é um valor modal e δ é a dispersão dos conjuntos fuzzy assumidos pela variável linguística. Estes conjuntos fuzzy serão definidos a partir dos valores c_{min} , c_M e c_{max} que aparecem na definição de λ .

A seguir, vamos calcular a esperança fuzzy da população assintomática em um determinado grupo da população.

3.3.3 Esperança Fuzzy da População Assintomática

Como vimos no Capítulo 1, a esperança fuzzy é um defuzzificador. O valor da esperança fuzzy para população assintomática $x = x(c)$ é

$$FEV[x] = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \inf[\alpha, \mu\{x \geq \alpha\}] \quad (3.3.7)$$

em que $\{x \geq \alpha\} = \{c : x(c) \geq \alpha\}$ e μ é uma medida fuzzy. Como vimos no Capítulo 1, o ponto fixo da função $H_2(\alpha) = \mu\{c \mid x(c) \geq \alpha\}$, para cada $t > 0$ fornece a $FEV[x]$. Para $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, temos:

$$\begin{aligned} H_2(0) &= \mu\{c \mid x(c) \geq 0\} = \mu[0, 1] = 1 \text{ e} \\ H_2(1) &= \mu\{c \mid x(c) \geq 1\} = \mu[c_M, c_{max}]. \end{aligned}$$

Para $0 < \alpha < 1$, temos

$$H_2(\alpha) = \mu\{c \mid x(c) \geq \alpha\} = \mu\{c \mid e^{-\lambda(c)t} \geq \alpha\} = \mu\{c \mid \lambda(c) \leq -\frac{\ln \alpha}{t}\} =$$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} \mu[c_M, c_{max}] & \text{se } -\frac{\ln \alpha}{t} \leq 0 \\ \mu[a_2, c_{max}] & \text{se } 0 < -\frac{\ln \alpha}{t} \leq 1 \\ 1 & \text{se } -\frac{\ln \alpha}{t} > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mu[c_M, c_{max}] & \text{se } \alpha = 1 \\ \mu[a_2, c_{max}] & \text{se } e^{-t} \leq \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha < e^{-t} \end{cases} \end{aligned}$$

em que

$$a_2 = c_M - (c_M - c_{min})\left(-\frac{\ln \alpha}{t}\right), \quad (3.3.8)$$

desta forma $c_{min} < a_2 \leq c_M$.

Vamos definir a medida fuzzy por

$$\mu(A) = \begin{cases} \sup_{c \in A} \rho(c) & \text{se } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } A = \emptyset \end{cases}$$

para $A \subset \mathbb{R}$. A μ é uma medida otimista, pois o nível de $CD4+$ em um grupo está sendo avaliado no indivíduo com o melhor nível de

CD4+. Para estudar a $FEV[x]$ nós vamos considerar três diferentes casos, de acordo com as variáveis linguísticas c , e seus valores *baixo*, *médio* e *alto*, com cada um destes valores sendo um número fuzzy que depende dos valores c_{min} , c_M e c_{max} que aparecem na definição de λ .

1. **Caso: Nível de *CD4+* *baixo* (C_-).**

Neste caso, tomamos $c_{min} > \underline{c} + \delta$, Figura 3.8.

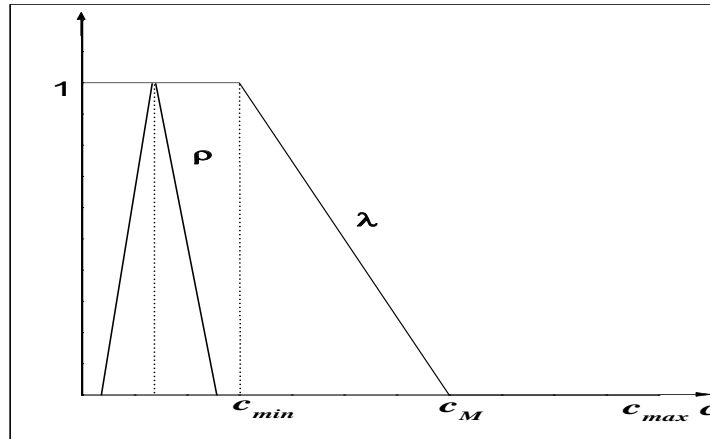


Figura 3.8: Nível de *CD4+* *baixo*.

Como $a_2 > c_{min}$, temos que $\mu[c_M, c_{max}] = 0$ e $\mu[a_2, c_{max}] = 0$. Logo,

$$H_2(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{se } e^{-t} \leq \alpha \leq 1 \\ 1 & \text{se } \alpha < e^{-t} \end{cases} .$$

Portanto, $FEV[x] = e^{-t}$.

2. **Caso: Nível de *CD4+* *alto* (C_+).**

Neste caso, tomamos $c_M \leq \underline{c} - \delta$ e $\underline{c} + \delta \leq c_{max}$.

A Figura 3.9 mostra que $a_2 \leq c_M$ e obtemos $\mu[c_M, c_{max}] = 1$ e $\mu[a_2, c_{max}] = 1$, logo $H_2(\alpha) = 1$ se $0 \leq \alpha \leq 1$. Portanto, $FEV[x] = 1$.

3. **Caso: Nível de CD4+ médio (C_-^+).**

Neste caso, tomamos $\underline{c} - \delta > c_{min}$ e $\underline{c} + \delta < c_M$ e $\mu[c_M, c_{max}] = 0$, Figura 3.10.

Fazendo alguns cálculos, obtemos:

$$H_2(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < \alpha \leq e^{-\left(\frac{-\underline{c}+c_M}{c_M-c_{min}}\right)t} \\ \psi(a_2) & \text{se } e^{-\left(\frac{-\underline{c}+c_M}{c_M-c_{min}}\right)t} < \alpha < e^{-\left(\frac{-\underline{c}-\delta+c_M}{c_M-c_{min}}\right)t} \\ 0 & \text{se } e^{-\left(\frac{-\underline{c}-\delta+c_M}{c_M-c_{min}}\right)t} < \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (3.3.9)$$

em que $\psi(a_2) = \frac{1}{\delta}[-c_M - (c_M - c_{min})\left(\frac{\ln \alpha}{t}\right) + \underline{c} + \delta]$. A partir de (3.3.9), concluímos que $H_2(\alpha)$ é contínua e uma função decrescente com $H_2(0) = 1$ e $H_2(1) = 0$. Entretanto, H_2 tem um único ponto fixo que coincide com $FEV[x]$, Figura 3.11. Portanto,

$$e^{-\lambda(\underline{c})t} \leq FEV[x] \leq e^{-\lambda(\underline{c}+\delta)t}. \quad (3.3.10)$$

Observamos que derivando em relação a t a expressão $\alpha = \psi(a_2)$ de (3.3.9), determinamos $\frac{d\alpha}{dt}$, dada por:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{(c_M - c_{min})\alpha \ln(\alpha)}{t[\alpha\delta t + (c_M - c_{min})]}. \quad (3.3.11)$$

O sinal de (3.3.11) é negativo, pois $0 < \alpha < 1$. Assim, $\alpha = FEV[x]$ é decrescente com t .

A partir de 3.3.10, temos a seguinte proposição.

Proposição 5.1. *Para cada $t > 0$, existe um único $c(t) \in (\underline{c}, \underline{c} + \delta)$ para o qual $FEV[x] = e^{\left(\frac{c(t)-c_M}{c_M-c_{min}}\right)t}$.*

Prova: A função $H_2(\alpha)$ é contínua, decrescente e tem $FEV[x]$ como seu ponto fixo. A desigualdade (3.3.10) fornece o intervalo que contém $FEV[x]$. Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um único $c(t)$ no intervalo $(\underline{c}, \underline{c} + \delta)$. Tal que

$$FEV[x] = e^{\left(\frac{c(t)-c_M}{c_M-c_{min}}\right)t} \quad \blacksquare \quad (3.3.12)$$

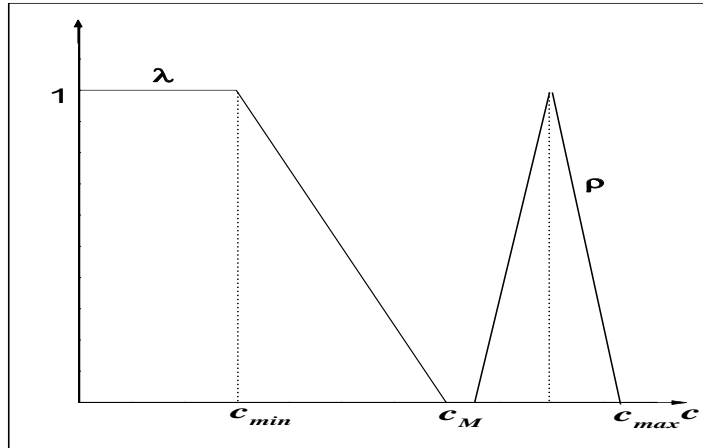


Figura 3.9: Nível de $CD4+$ alto.

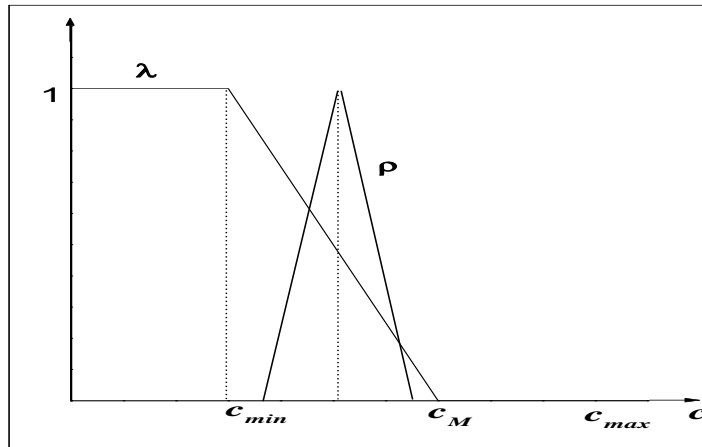


Figura 3.10: Nível de $CD4+$ médio.

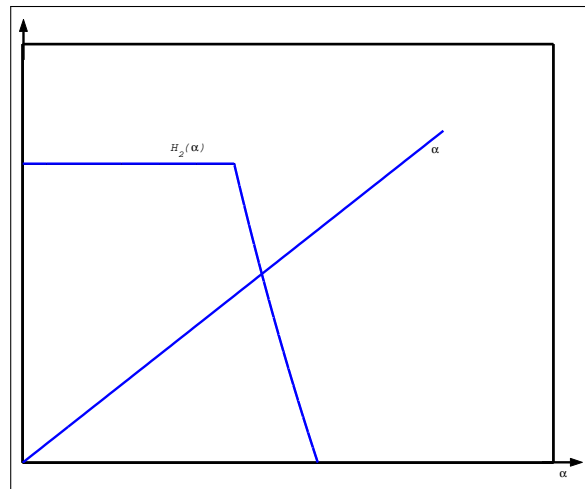


Figura 3.11: A função $H_2(\alpha)$.

Consequentemente, a esperança fuzzy não é solução de (3.7.36). A Proposição 5.1 mostra que, para cada instante t , existe uma solução de (3.7.36) em t que coincide com a $FEV[x]$. A $FEV[x]$ é diferenciável e satisfaz a seguinte equação diferencial com o parâmetro $c(t)$ dependendo do tempo:

$$\frac{dx}{dt} = - \left[\lambda(c(t)) + t \frac{d\lambda}{dt}(c(t)) \frac{dc}{dt}(t) \right] x. \quad (3.3.13)$$

Na próxima seção, vamos calcular a proporção da população assintomática considerando a taxa de transferência do valor modal \underline{c} , para compararmos com a desigualdade (3.3.10).

3.3.4 População Assintomática com a Taxa de Transferência no Valor Modal

Nesta seção vamos calcular a proporção da população assintomática considerando a taxa de transferência correspondente ao valor modal

\underline{c} . Para comparar com o valor da $FEV[x]$, em três casos diferentes, de acordo com a variável lingüística $CD4+$, que são *baixo*, *médio* e *alto* com cada uma destas sendo um número fuzzy baseado nos valores c_{min} , c_M e c_{max} que aparecem na definição de λ .

1. **Caso: Nível de $CD4+$ baixo (C_-).**

Neste caso, tomamos $c_{min} > \underline{c} + \delta$. Temos que $\lambda(\underline{c}) = 1$, logo, $x(t) = e^{-t}$. Portanto, igual a $FEV[x]$.

2. **Caso: Nível de $CD4+$ alto (C_+).**

Neste caso, tomamos $c_M \leq \underline{c} - \delta$ e $\underline{c} + \delta \leq c_{max}$. Temos que $\lambda(\underline{c}) = 0$, logo, $x(t) = 1$. Portanto, igual a $FEV[x]$.

3. **Caso: Nível de $CD4+$ médio (C^+).**

Neste caso, tomamos $\underline{c} - \delta > c_{min}$ e $\underline{c} + \delta < c_M$. Temos que

$$\lambda(\underline{c}) = \frac{-\underline{c} + c_M}{c_M - c_{min}}, \text{ logo, } x(t) = e^{-\left(\frac{-\underline{c} + c_M}{c_M - c_{min}}\right)t}.$$

Assim,

$$e^{-\left(\frac{-\underline{c} + c_M}{c_M - c_{min}}\right)t} < FEV[x].$$

Destes três casos, concluímos que:

$$e^{-\left(\frac{-\underline{c} + c_M}{c_M - c_{min}}\right)t} \leq FEV[x]. \quad (3.3.14)$$

3.3.5 Esperança Fuzzy da Taxa de Transferência

A esperança fuzzy de λ , interpretada como a taxa média de transferência associada ao conjunto fuzzy λ , é dada por:

$$FEV[\lambda] = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \inf[\alpha, \mu\{\lambda \geq \alpha\}]$$

em que $\{\lambda \geq \alpha\} = \{c \in \mathbb{R} : \lambda(c) \geq \alpha\}$ e μ é uma medida fuzzy.

Seja $H_3(\alpha) = \mu\{c \mid \lambda(v) \geq \alpha\}$. É fácil ver que, se $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, então $H_3(0) = 1$ e $H_3(1) = \mu[0, c_{min}]$. Para $0 < \alpha < 1$, temos

$$H_3(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ \mu[0, a_3] & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \mu[0, c_{min}] & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} .$$

onde $a_3 = c_M - (c_M - c_{min})\alpha$.

Para comparar com os resultados das secções anteriores, vamos considerar os três diferentes casos, de acordo com os valores lingüísticos de c , *baixo*, *médio* e *alto* onde cada um deles é um número fuzzy baseado nos valores c_{min} , c_M e c_{max} que aparecem na definição de λ .

1. **Caso:** *CD4+ baixo* (C_-).

Neste caso, tomamos $c_{min} > \underline{c} + \delta$, Figura 3.8, como $a_3 > c_{min}$, temos que $\mu[0, c_{min}] = 1$ e $\mu[0, a_3] = 1$.

$$H_3(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases} .$$

Desta forma, $FEV[\lambda] = 1$, logo, $e^{-FEV[\lambda]t} = e^{-t}$. Coincide com os primeiros itens das secções anteriores.

2. **Caso:** *Nível de CD4+ alto* (C_+).

Neste caso, tomamos $c_M \leq \underline{c} - \delta$ e $\underline{c} + \delta \leq c_{max}$, a Figura 3.9, mostra que $a_3 \leq v_M$ e obtemos $\mu[0, c_{min}] = 0$ e $\mu[0, a_3] = 0$. Portanto,

$$H_3(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Desta forma, $FEV[\lambda] = 1$, logo, $e^{-FEV[\lambda]t} = e^{-t}$. Coincide com os segundos itens das secções anteriores.

3. **Caso:** *Nível de CD4+ médio* (C_+^+).

Neste caso, tomamos $\underline{c} - \delta > c_{min}$ e $\underline{c} + \delta < c_M$, Figura 3.10, fazendo alguns cálculos, obtemos:

$$H_3(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \alpha \leq \frac{-\underline{c}+c_M}{c_M-c_{min}} \\ \psi_1(a_3) & \text{se } \frac{-\underline{c}+c_M}{c_M-c_{min}} < \alpha \leq \frac{-\underline{c}+\delta+c_M}{c_M-c_{min}} \\ 0 & \text{se } \frac{-\underline{c}+\delta+c_M}{c_M-c_{min}} < \alpha < 1 \end{cases} \quad (3.3.15)$$

onde $\psi_1(a_3) = \frac{1}{\delta}[c_M - (c_M - c_{min})\alpha - \underline{c} + \delta]$. A partir da expressão acima, concluímos que $H_3(\alpha)$ é contínua e uma função decrescente com $H_3(0) = 1$ e $H_3(1) = 0$. Entretanto, H_3 tem um único ponto fixo que coincide com $FEV[\lambda]$, Figura 3.11.

Assim, $\frac{-\underline{c}+c_M}{c_M-c_{min}} < FEV[\lambda] < \frac{-\underline{c}+\delta+c_M}{c_M-c_{min}}$. Logo, $e^{-\left(\frac{-\underline{c}+\delta+c_M}{c_M-c_{min}}\right)t} < e^{-FEV[\lambda]t} < e^{-\left(\frac{-\underline{c}+c_M}{c_M-c_{min}}\right)t}$. Podemos concluir que:

$$e^{-FEV[\lambda]t} < e^{-\lambda(\underline{c})t}. \quad (3.3.16)$$

Determinamos o valor de $FEV[\lambda]$, que é o ponto fixo de $\psi_1(a_3)$, resolvendo a seguinte equação:

$$\frac{1}{\delta}[c_M - (c_M - c_{min})\alpha - \underline{c} + \delta] = \alpha \quad (3.3.17)$$

$$\alpha = \frac{-\underline{c} + \delta + c_M}{c_M - c_{min} + \delta}. \quad (3.3.18)$$

Portanto, $FEV[\lambda] = \frac{-\underline{c} + \delta + c_M}{c_M - c_{min} + \delta}$. Observamos que $e^{-FEV[\lambda]t}$ é solução do sistema de equações diferenciais (3.3.19) apenas para c^* dado em (3.3.20).

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda(c)x & x(0) &= 1 \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda(c)x = \lambda(c)(1-y) & y(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

$$c^* = \frac{(\underline{c} - \delta - c_M)(c_M - c_{min})}{c_M - c_{min} + \delta} + c_M. \quad (3.3.20)$$

Fazendo alguns cálculos, verificamos que $\lambda(c^*) = FEV[\lambda]$ e, de 3.3.16, concluimos que:

$$e^{-\lambda(c^*)t} < e^{-\lambda(\underline{c})t}. \quad (3.3.21)$$

Logo, $\lambda(c^*) > \lambda(\underline{c})$ e, como λ é decrescente, temos que $c^* < \underline{c}$. Por outro lado, sabemos que

$$\frac{c_M - c_{min}}{c_M - c_{min} - \delta} < 1. \quad (3.3.22)$$

Após alguns cálculos obtemos $c^* > \underline{c} - \delta > c_{min}$. Logo, concluimos que $c_{min} < c^* < \underline{c}$.

3.3.6 Comparação entre: Esperança Fuzzy da População Assintomática; População Assintomática com a Taxa de Transferência no Valor Modal; e População Assintomática com a Esperança Fuzzy da Taxa de Transferência

Comparando o nível da $CD4+$ *médio*, a esperança fuzzy da população assintomática (3.3.10), a proporção da população assintomática com a taxa de transferência no valor modal \underline{c} (3.3.14) e a proporção da população assintomática com a esperança fuzzy da taxa de transferência (3.3.16), e também os níveis de $CD4+$ *baixo* e *alto*, concluímos que

$$e^{-FEV[\lambda]t} \leq e^{-\lambda(\underline{c})t} \leq FEV[x]. \quad (3.3.23)$$

Das desigualdades (3.3.10) e (3.3.23), temos que:

$$e^{-FEV[\lambda]t} \leq e^{-\lambda(\underline{c})t} \leq FEV[x] \leq e^{-\lambda(\underline{c}+\delta)t}. \quad (3.3.24)$$

3.3.7 Conclusão

Para o modelo que trata da taxa de transferência dependendo de c , a solução do modelo determinístico considerando o valor de \underline{c} , é $x(t) = e^{-\lambda(\underline{c})t}$. A $FEV[x]$ é menor que $e^{-\lambda(\underline{c}+\delta)t}$ como mostra (3.3.10) e assim depende da dispersão populacional δ do nível de $CD4+$ do grupo estudado. Quando $\delta \rightarrow 0$, $FEV[x] \rightarrow e^{-\lambda(\underline{c})t}$, isto é, depende somente do $CD4+$. Isto indica que, para uma população homogênea, isto é, para uma população com o nível de $CD4+$ ao redor do valor modal do conjunto fuzzy triangular, o número médio da população assintomática aproxima-se de $e^{-\lambda(\underline{c})t}$.

Na próxima seção apresentaremos uma parte da monografia da aluna Wanda Aparecida Lopes que foi desenvolvida no VII Curso de Especialização em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia [21] e foi apresentado no BIOMAT2005 [22].

3.4 Eliminação de Fármacos do Organismo

O objetivo desta seção é o estudo da eliminação de fármacos na corrente sanguínea. Primeiro estudaremos o modelo clássico e, em seguida, faremos o modelo fuzzy.

3.4.1 Modelo Farmacocinético Clássico

Um problema fundamental em Farmacologia é saber como cai a concentração de um fármaco no sangue de um indivíduo. O conhecimento deste fato permite estabelecer qual a dosagem a ser inserida e o intervalo de tempo que cada aplicação deve ser feita.

O modelo mais simples para descrever a eliminação do fármaco de um certo compartimento é obtido quando supomos que a concentração (y) de um fármaco decai a uma velocidade que é proporcional, em cada instante, a sua própria concentração [9]. Em termos matemáticos isto pode ser dado pela equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = -ky \quad (3.4.25)$$

onde k é a constante de velocidade de eliminação do fármaco.

Suponha que seja dada ao indivíduo uma dose inicial y_0 , absorvida pelo sangue instantaneamente, no instante $t = 0$. A solução geral da equação (3.4.25) é dada por:

$$y = y_0 e^{-kt}. \quad (3.4.26)$$

Quando um conjunto de doses é dado em intervalos de tempos espaçados igualmente, obtemos (3.4.27) a qual representa o nível de saturação da droga para o indivíduo considerado.

$$y_s = \frac{y_0}{1 - e^{-kt}} \quad (3.4.27)$$

onde:

- k é a constante de velocidade de eliminação do fármaco;

- y_0 é uma dose inicial do fármaco;
- t é o intervalo entre as doses administradas;
- y_s é a concentração máxima de fármaco tolerada pelo organismo, na qual se atinge níveis tóxicos para o organismo.

A equação (3.4.27) pode ser representada na Figura 3.12. Nesta figura, pode ser verificado que após a administração de quatro doses a concentração máxima do fármaco tolerada é atingida pelo organismo, e que a partir da quinta dose, temos uma estabilidade da concentração máxima atingida.

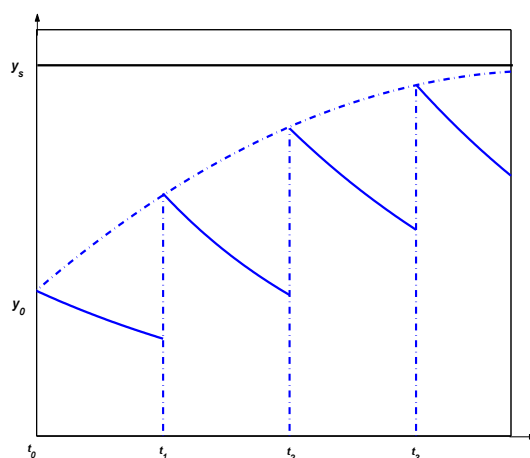


Figura 3.12: Curva de concentração de um fármaco no tempo.

3.4.2 A Meia-Vida ($t_{\frac{1}{2}}$) de um Fármaco

A meia-vida é o tempo necessário para que a concentração plasmática de determinado fármaco seja reduzida pela metade. A meia-vida plasmática dos fármacos é um dos índices básicos da farmacocinética, colaborando para a interpretação dos efeitos terapêuticos ou tóxicos dos fármacos, como a duração do efeito farmacológico e do regime posológico adequado. O conhecimento da meia vida é útil para se conseguir a concentração máxima plasmática média constante. Esse

platô da concentração constante é mantido pela repetição das doses com finalidade de substituir a parte do fármaco que é eliminada.

Partindo da equação (3.4.26) determinemos a relação entre a meia-vida e a constante de velocidade de eliminação (k) de uma fármaco:

$$y = y_0 e^{-kt}$$

$$\ln y = \ln y_0 - kt. \quad (3.4.28)$$

Quando $t = t_{\frac{1}{2}}$ (tempo de meia-vida dos fármacos) então $y = \frac{y_0}{2}$, assim substituindo em (3.4.28) temos;

$$k = \frac{0,693}{t_{\frac{1}{2}}}. \quad (3.4.29)$$

3.4.3 Modelo Farmacocinético Fuzzy

Nosso interesse principal é modelar a velocidade de eliminação de fármacos no organismo do indivíduo, segundo informações fornecidas pelo especialista. Consideramos que a velocidade de eliminação depende fortemente da função renal. Para isso, consideramos como um parâmetro fuzzy que depende das variáveis volume urinário (v), da clearance de creatinina ($clcr$) e do pH sérico (p). Esta constante pode variar de um indivíduo para outro, pois os fármacos que são excretados pelo rim, sem serem transformados metabolicamente, como por exemplo, a digoxina² e muitos antibióticos, depende do estado funcional desse órgão [13]. Então, a mesma dose de medicamento pode produzir as mais diferentes constantes de eliminação.

Depois de absorvidos e distribuídos no organismo, segundo as informações médicas, os fármacos são eliminados por diferentes vias, consideramos apenas o sistema renal que é responsável pela principal via de excreção de fármacos. Com as informações do especialista na área em [21], as variáveis que mais influenciam a velocidade de eliminação k de um fármaco são:

²digoxina é um medicamento cardiotônico (substâncias que reforçam a energia do coração), e antiarrítmico (que controla os batimentos do coração).

1. **Volume Urinário:** Consideramos como sendo a produção de urina em um indivíduo a cada 24 hs, é classificado da seguinte maneira dependendo da quantidade;
 - **anúria:** para um volume entre 0 e 100 ml.
 - **oligúria:** para um volume entre 100 e 300 ml.
 - **diurese normal:** para um volume entre 300 e 1500 ml.
 - **poliúria:** para um volume > 1500 ml.

2. **Clearance de Creatinina:** o teste de clearance de creatinina³ determina a eficiência com que os rins eliminam a creatinina do sangue. A taxa de clearance é expressa em termos de volume de sangue (medido em mililitros) que pode ficar livre de creatinina em 1 minuto. Os níveis de creatinina tornam-se anormais quando mais de 50% dos néfrons⁴ tenham sido danificados. O clearance de creatinina foi classificado da seguinte maneira dependendo da quantidade;
 - **muito baixo:** entre 0 e 10 ml/min.
 - **baixo:** entre 10 e 50 ml/min.
 - **médio baixo:** entre 50 e 90 ml/min.
 - **normal:** entre 90 e 120 ml/min.
 - **alto:** > 120 ml/min.

3. **pH Sérico:** É o pH do sangue, classificado da seguinte maneira;
 - **básico:** < 7.35 .
 - **normal:** entre 7.35 e 7.45.
 - **ácido:** > 7.45 .

³a creatinina é um produto final do metabolismo da creatina (creatina é um composto produzido naturalmente pelo nosso organismo para fornecer a energia necessária aos nossos músculos. Creatina é produzida pelo fígado e em seguida é levada pelo sangue para as células dos músculos) que aparece no soro em quantidades proporcionais à massa muscular corpórea.

⁴os néfrons são unidades filtrantes dos rins; cada rim contém 1 milhão de néfrons o que torna esse órgão capaz de filtrar as excretas que circulam no sangue.

Consideramos a velocidade de eliminação do fármaco (k) como um parâmetro fuzzy que depende das variáveis volume urinário (v), clearance de creatinina ($clcr$) e pH sérico (p) [22], o modelo (3.4.25) vem a ser:

$$\frac{dy}{dt} = -k(v, clcr, p)y, \quad (3.4.30)$$

cuja solução da equação é dada por:

$$y = y_0 e^{-k(v, clcr, p)t}, \quad t > 0. \quad (3.4.31)$$

A principal diferença entre o modelo (3.4.30) e o modelo (3.4.25) é o fato que o parâmetro (k) é função do volume urinário (v), do clearance de creatinina ($clcr$) e do pH sérico (p), que permite incorporar as informações médicas, citadas anteriormente.

Na subseção seguinte faremos um estudo dessa dependência por meio de um sistema baseado em regras fuzzy.

3.4.4 Base de Regras

A base de regras fuzzy tem como antecedentes o volume urinário (v), clearance de creatinina ($clcr$) e pH sérico (p), e a velocidade de eliminação (k) como conseqüente. Os termos lingüísticos para v são: *anúria*, *oligúria*, *diurese normal* e *poliúria*, para o $clcr$ são: *muito baixo*, *baixo*, *médio baixo*, *normal* e *alto*; e para p são: *básico*, *normal* e *ácido*. Para a velocidade de eliminação k consideramos o domínio entre 0 e 0.693, pois a partir da equação (3.4.29) e consultando bulas de fármacos observamos que podemos considerar o menor tempo de meia-vida do fármaco igual a uma hora. Assim, a maior velocidade de eliminação é 0.693. Os termos lingüísticos para k são: *muito baixa*, *baixa* e *normal*.

No modelo via SBRF utilizamos o método de inferência de Mamdani para obter o comportamento de k , ou seja simulamos alguns valores para v , $clcr$, p , e determinamos os valores de k , onde os valores assumidos são traduzidos pelas funções de pertinência ilustradas nas Figuras 3.13, 3.14, 3.15, 3.16.

As Tabelas 3.7, 3.8, 3.10 e 3.9 fornecem a base de regras quando

o volume urinário está classificado em *anúria*, *oligúria*, *diurese normal* e *poliúria*, respectivamente. Estas regras foram feitas a partir de informações do especialista na área [21].

(p) \ (clcr)	ácido	normal	básico
<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>
<i>baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>baixa</i>	<i>baixa</i>
<i>média baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>baixa</i>	<i>baixa</i>
<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>
<i>alta</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>

Tabela 3.7: Regras fuzzy quando o volume urinário é *anúria*.

(p) \ (clcr)	ácido	normal	básico
<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>
<i>baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>baixa</i>	<i>baixa</i>
<i>média baixa</i>	<i>baixa</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>
<i>normal</i>	<i>baixa</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>
<i>alta</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>

Tabela 3.8: Regras fuzzy quando o volume urinário é *oligúria*.

(p) \ (clcr)	ácido	normal	básico
<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>
<i>baixa</i>	<i>normal</i>	<i>baixa</i>	<i>baixa</i>
<i>média baixa</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>
<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>
<i>alta</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>

Tabela 3.9: Regras fuzzy quando o volume urinário é *diurese normal*.

Assim, a partir do SBRF com o método de inferência de Mamdani e a defuzzificação pelo centro de gravidade, podemos determinar $k = k(v, clcr, p)$.

$(p) \backslash (clr)$	ácido	normal	básico
<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>
<i>baixa</i>	<i>normal</i>	<i>baixa</i>	<i>baixa</i>
<i>média baixa</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>
<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>
<i>alta</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>

Tabela 3.10: Regras fuzzy quando o volume urinário é *poliúria*.

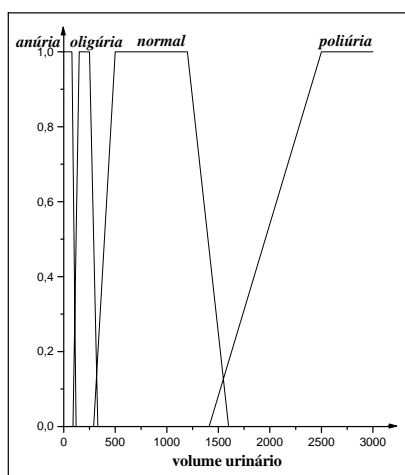


Figura 3.13: Funções de pertinência de volume urinário.

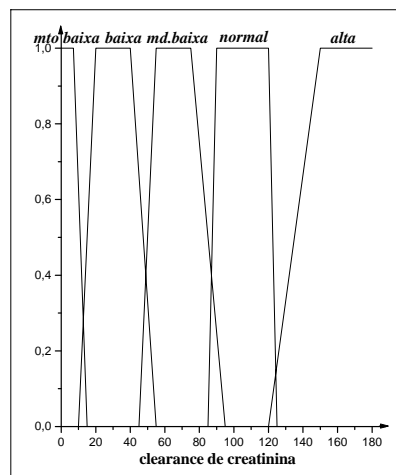


Figura 3.14: Fun. de pert. de clearance de creatinina.

3.4.5 Insuficiência Renal e a Eliminação de Fármacos

Nesta seção apresentamos a concentração de fármaco de três indivíduos a partir do volume urinário (v), da clearance de creatinina (clr) e do pH sérico (p), utilizamos o Sistema Baseado em Regras Fuzzy para determinar a velocidade de eliminação (k) do fármaco, Tabela 3.11.

Assim, com uma prescrição de $500mg$ de um certo fármaco de oito em oito horas para três indivíduos, obtemos a velocidade de eliminação do fármaco para cada indivíduo, veja Tabela 3.11.

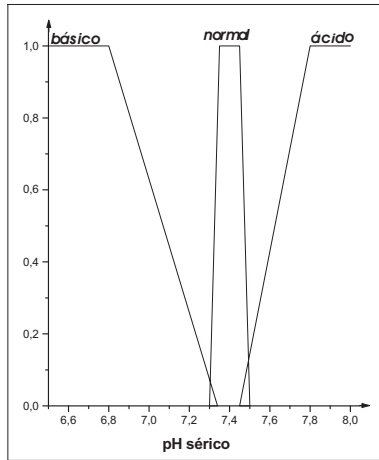


Figura 3.15: Funções de pertinência de pH sérico.

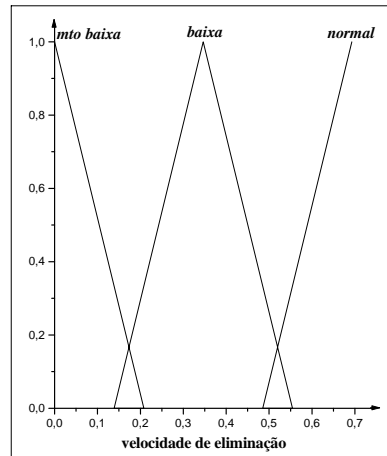


Figura 3.16: Fun. de pert. de velocidade de eliminação.

	v	$clcr$	p	$k(v, clcr, p)$
Indivíduo 1 (I_1)	1500ml diário	100 ml/min	7.4	0.6032
Indivíduo 2 (I_2)	100 ml diário	10 ml/min	7.35	0.0860
Indivíduo 3 (I_3)	300 ml diário	35 ml/min	7.25	0.2308

Tabela 3.11: Velocidade de eliminação do fármaco para cada indivíduo.

Para os valores de $k(v, clcr, p)$ obtidos na Tabela 3.11 e através das equações (3.4.31) e (3.4.27), obtemos os gráficos da Figura 3.17, que ilustram como estão a concentração máxima de fármaco tolerada pelo organismo e a eliminação do fármaco dos indivíduos 1 e 2, analogamente, obtemos os gráficos da Figura 3.18 para os indivíduos 1 e 3. O nível de saturação (y_{s1}) do indivíduo 1, que está com função renal normal, é em torno de 500 mg. O nível de saturação (y_{s2}) do indivíduo 2, que está com função renal comprometida, é em torno de 1000 mg, Figura 3.17. O indivíduo 3 também tem função renal comprometida. Porém, o nível de saturação do fármaco (y_{s3}) é mais baixo e encontra-se em torno de 600 mg, Figura 3.18. O nível de concentração

do indivíduo 2 é muito maior do que o indivíduo 3 porque o volume urinário, o o clearance de creatinina e o pH sérico do indivíduo 2 são muito baixos em relação ao indivíduo 3, Tabela 3.11. Mas, os dois indivíduos estão com o nível de saturação acima do normal, porque estão com a função renal comprometida e eliminam pouco fármaco. Logo, é necessário mudar a prescrição do indivíduo 2 e do indivíduo 3, pois, caso contrário, provavelmente terão uma intoxicação medicamentosa.

A Figura 3.19 mostra a concentração do indivíduo 1 e 2, ambos, com a mesma dose de 500 *mg* de fármaco. Para o indivíduo 2 mudamos o intervalo entre as doses. As doses estão sendo administradas a cada 24 horas. Isto resultou em um nível de saturação em torno de 600 *mg*, mais próximo do nível de saturação do indivíduo 1 cuja função renal é normal. A Figura 3.20, ilustra a concentração dos indivíduos 1 e 2, porém mantemos o intervalo de 8 horas entre as doses e mudamos a dose administrada do fármaco do indivíduo 2 para 250 *mg*, o resultado mostrou a mesma saturação de 500 *mg* para os dois indivíduos.

O procedimento indicado pelo modelo fuzzy de diminuir a dose do medicamento para que não ocorra uma intoxicação do paciente está de acordo com o especialista. Pois, segundo o profissional da área quando os pacientes estão com função renal comprometida, o procedimento é diminuir a dose do medicamento, isto é, mudar a prescrição do fármaco.

3.4.6 Conclusões

Nesta seção foram apresentados modelos envolvendo a eliminação de fármacos do organismo. Exploramos a teoria dos conjuntos fuzzy para modelar a constante de velocidade de eliminação (k), considera-a como um parâmetro fuzzy que depende da função renal de um indivíduo. Desta forma podemos obter este parâmetro variando de indivíduo para indivíduo como a bibliografia da área afirma [43]. Assim, por meio de uma base de regras fuzzy, estudamos a influência do volume urinário (v), da clearance de creatinina ($clcr$) e do pH sérico (p) que são as principais variáveis médicas que indicam a eficiência renal de um in-

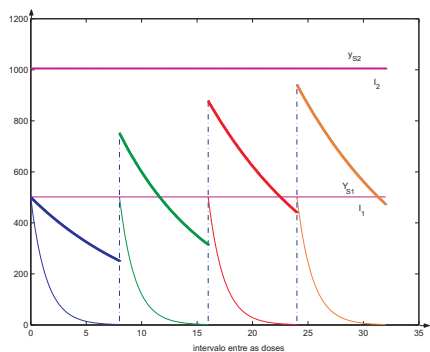


Figura 3.17: Concentração de fármaco dos indivíduos 1 e 2 com a mesma prescrição.

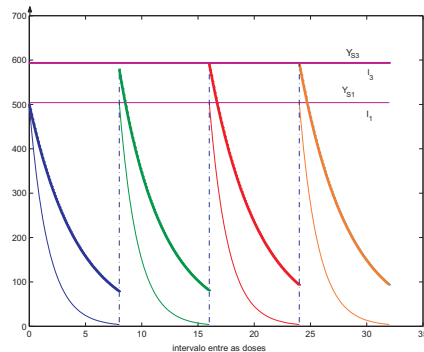


Figura 3.18: Concentração de fármaco dos indivíduos 1 e 3 com a mesma prescrição.

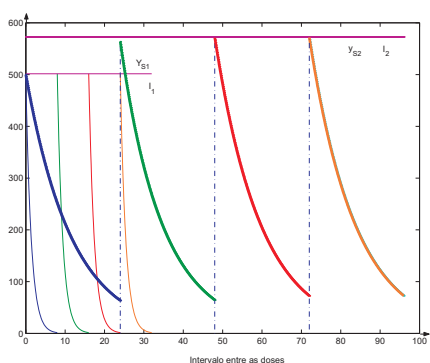


Figura 3.19: Concentração de fármaco dos indivíduos 1 e 2 alterando o intervalo entre as doses.

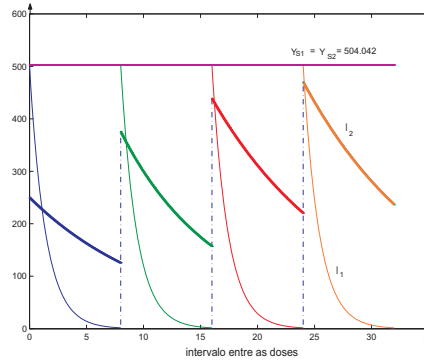


Figura 3.20: Concentração de fármaco dos indivíduos 1 e 2 alterando a dose prescrita.

divíduo.

A grande vantagem do modelo fuzzy (3.4.30) sobre o clássico (3.4.25) é incluir as variáveis médicas no modelo, já que é a partir delas que o médico indica a manutenção ou diminuição das doses dos fármacos. No modelo consideramos a prescrição de certo fármaco para alguns indivíduos e determinamos as curvas de concentração de fármaco destes indivíduos. Concluímos que para os indivíduos com comprometimento

renal, deve-se diminuir a dose prescrita para evitar qualquer risco de intoxicação medicamentosa.

Na próxima seção apresentaremos uma parte da dissertação da aluna Juliana Menegotto que foi desenvolvida no Mestrado em Matemática Aplicada da Universidade Estadual de Campinas [25] e foi publicada na Revista da Biomatemática [26]. O modelo apresentado nesta seção estima o parâmetro de decaimento do fármaco através do Método de Inferência de Mamdani e o modelo a seguir trata de um modelo de Takagi-Sugeno-Kang que modela a dinâmica da própria variável de estado (concentração do fármaco em função do tempo).

3.5 Método de Takagi-Sugeno-Kang em Modelos Farmacocinéticos Multicompartimentais

Para estudar a concentração do fármaco no organismo utiliza-se modelos farmacocinéticos multicompartimentais que, via de regra, são dados por um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO). Neste trabalho propomos um modelo para descrever a dinâmica da concentração a partir de um sistema baseado em regras fuzzy. Para obter a curva da concentração, utilizamos o método de Takagi-Sugeno-Kang (TSK) e as curvas via TSK e EDO são comparadas. Quando o fármaco é administrado em doses múltiplas, o índice de acúmulo do fármaco no organismo é avaliado através da razão entre as áreas sob a curva referente à dose dada, após atingir o estado estacionário, e a curva da primeira dose. Simulações são feitas em ambiente Matlab e os índices de acúmulo obtidos em ambas curvas são comparados.

3.5.1 Introdução

A farmacocinética é uma área da farmacologia que estuda a concentração do fármaco no sangue no decurso do tempo após administração de uma ou sucessivas doses.

O estudo da cinética do fármaco é realizado por meio de modelos farmacocinéticos multicompartimentais. Os estudos cinéticos podem ser descritos por modelos matemáticos, em que a movimentação dos

fármacos de um compartimento para outro modifica sua concentração nesses compartimentos, supondo que o corpo pode ser interpretado como uma série de compartimentos interconectados [12]. Através de modelos e cálculos matemáticos, pode-se quantificar os principais processos farmacocinéticos: a absorção, a distribuição e a eliminação de fármacos.

Quando o fármaco é administrado intravenosamente dois processos são estudados por estes modelos. Neste caso, a absorção do fármaco é completa e está disponível na corrente sanguínea para ser distribuído pelo corpo inteiro, em todos os tecidos vascularizados, bem como para ser eliminado. Desta forma, os modelos matemáticos procuram descrever os processos de distribuição e de eliminação por meio de compartimentos [39].

Neste trabalho desenvolvemos um modelo matemático, para descrever a cinética no fármaco no organismo após uma administração intravenosa, a partir de um sistema fuzzy.

3.5.2 Modelagem Fuzzy

O tratamento matemático para modelos farmacocinéticos multicompartmentais é, via de regra, dado por um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO). O número de equações é determinado pela quantidade de compartimentos (fases) do modelo. Do ponto de vista prático, o número de fases é observado a partir do conjunto de dados: através de estudos locais, determina-se o número de retas que ajustam esses dados, em uma escala semilogarítmica [18].

Na prática clínica, a aplicação da teoria de equações diferenciais ordinárias em modelos farmacocinéticos compartimentais nem sempre é fácil. A complexidade desses sistemas começa a surgir na medida que aumenta o número dos compartimentos, onde o número de parâmetros e taxas de transferências entre os compartimentos aumentam consideravelmente. Além disso, os farmacocinéticos utilizam curvas obtidas a partir das soluções de EDO para ajustar os seus dados experimentais. O estudo farmacocinético via EDO é uma “caixa preta” para estes profissionais, fazendo com que “aceitem” essas soluções como “verdadeiras” restando-lhes apenas aprender a explorar os parâmetros

nas equações.

Nosso interesse é obter um modelo de decaimento para a concentração a partir de um sistema de base de regras fuzzy [8]. O número de regras é dado pela quantidade de fases (que coincide com o número de retas) do modelo multicompartimental. Nesse sentido, o sistema fuzzy é composto por 2 regras fuzzy, pois o conjunto de dados ajusta-se em um modelo bicompartimental e foram extraídos de [18]. Assim, duas fases são analisadas: a fase da distribuição (fase α) e a fase da eliminação (fase β) [39].

Para a base de regras fuzzy consideramos a variável de entrada *tempo* em horas (t) composta pelos termos linguísticos fuzzy “baixo” e “não-baixo”. Tais termos foram modelados por números fuzzy. A saída de cada regra fuzzy é a *concentração plasmática* do fármaco que, numa escala semilogarítmica, é dada pelas retas das fases α e β (Tabela 3.12).

Para determinar as retas em escala semilog, utilizamos o método de quadrados mínimos. As retas (consequentes de cada regra fuzzy) de cada fase são:

$$\begin{aligned} \text{Fase } \alpha : y_{\alpha}(t) &= 0.11394 - 0.0751t \\ \text{Fase } \beta : y_{\beta}(t) &= -0.08618 - 0.003995t. \end{aligned}$$

Ressaltamos que na metodologia tradicional, via EDO, a reta da fase α utilizada para obter a equação (3.5.33) difere da reta aqui utilizada para o modelo fuzzy. Desta forma, se usarmos a reta da fase α aqui obtida, obteremos uma expressão ligeiramente diferente da que aparece em (3.5.33).

As meias-vidas de cada fase são determinadas pela razão entre $\log 2$ e o coeficiente angular de cada reta, elas são: $t_{\frac{1}{2}\alpha} \simeq 12h$ e $t_{\frac{1}{2}\beta} \simeq 75h$.

Na Figura 3.21 encontram-se os dados experimentais e as retas correspondentes à cada fase, y_{α} e y_{β} e a Figura 3.22 ilustra as funções de pertinência adotadas nesta modelagem em que os números fuzzy são do tipo trapezoidais.

Como as retas da Figura 3.21 estão em escala semilogarítmica, temos respectivamente para as fases α e β :

$$y_{\alpha} = \log C_{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad C_{\alpha} = 10^{y_{\alpha}}$$

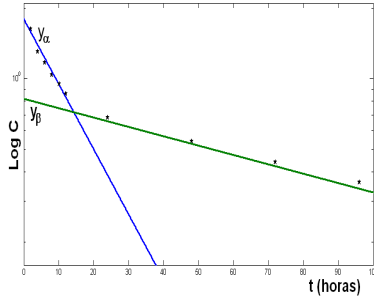


Figura 3.21: Retas em escala semilog.

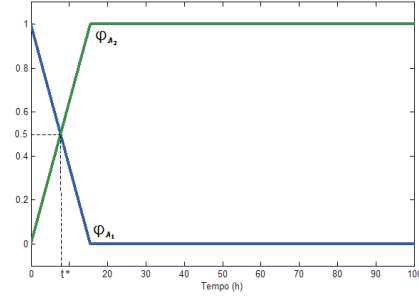


Figura 3.22: Funções de pertinência.

$$y_\beta = \log C_\beta \Leftrightarrow C_\beta = 10^{y_\beta}.$$

Assim, as saídas de cada regra são dadas por funções exponenciais (veja Tabela 3.12).

Na modelagem assumimos a base de regras, conforme Tabela 3.12.

R_1 : se (t) é baixo (A_1), então $y_\alpha = a_1 - \alpha.t \Leftrightarrow C_\alpha = 10^{y_\alpha}$ (fase α).
R_2 : se (t) é não-baixo (A_2), então $y_\beta = a_2 - \beta.t \Leftrightarrow C_\beta = 10^{y_\beta}$ (fase β).

Tabela 3.12: Base de regras do modelo farmacocinético fuzzy.

Para obter a curva da concentração sanguínea em um indivíduo como função do tempo, usamos o método de inferência de Takagi-Sugeno-Kang (TSK) [8]. A saída geral do sistema pelo método TSK é a curva de concentração sanguínea:

$$C(t) = \frac{\varphi_{A_1}(t) \cdot 10^{y_\alpha} + \varphi_{A_2}(t) \cdot 10^{y_\beta}}{\varphi_{A_1}(t) + \varphi_{A_2}(t)} \tag{3.5.32}$$

onde $C(t)$ é a concentração do fármaco no sangue do indivíduo e os pesos (definido pelo operador t-norma mínimo) são obtidos pelos próprios números fuzzy A_1 e A_2 , pois temos apenas uma variável de entrada [8]. Assim, estes pesos são as funções de pertinência (Figura 3.22) que retratam a contribuição de cada fase na dinâmica da variável modelada.

A Figura 3.23 é a curva obtida pelo método TSK. Como podemos perceber, a curva ajusta bem os dados e o método de TSK foi eficiente para determinar uma curva em um modelo bicompartimental.

Para a modelagem clássica, a solução analítica é:

$$C(t) = 1.3e^{-0.173t} + 0.82e^{-0.0092t}. \quad (3.5.33)$$

A título de comparação, a Figura 3.24 mostra que os gráficos das soluções via EDO (equação (3.5.33)) e via TSK (equação (3.5.32)) ajustaram-se num modelo bicompartimental.

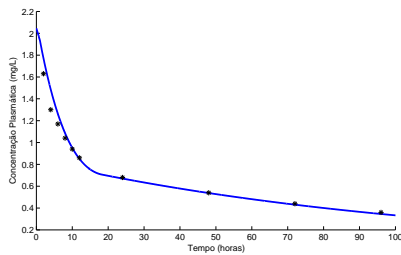


Figura 3.23: Curva TSK e os dados extraídos de [18].

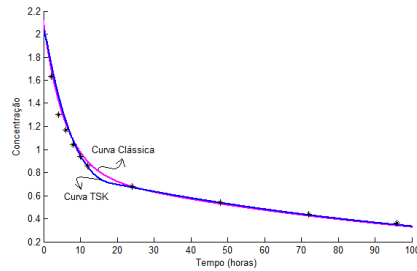


Figura 3.24: Curvas via EDO e via TSK.

Ao compararmos as curvas via EDO e via TSK constatamos que ambas ajustam satisfatoriamente os dados experimentais bem como apresentam o mesmo comportamento qualitativo.

A partir da curva da concentração plasmática podemos estudar o índice de acúmulo do fármaco (R) e a concentração máxima (C_{max}) tolerada pelo organismo, quando o medicamento é administrado em doses múltiplas. O índice R é um parâmetro que indica a extensão de acúmulo do fármaco no corpo após administrar sucessivas doses. Tal índice é obtido através da razão entre as áreas sob a curva referente à dose dada, após atingir o estado estacionário, e a curva da primeira dose.

Considerando \mathbf{T} o intervalo entre as doses; \mathbf{n} o número de doses repetidas e $[T_n, T_{n+1}]$ o intervalo da n -ésima dose repetida, a área sob

a curva para doses múltiplas é dada por:

$$A = \int_{T_n}^{T_{n+1}} \left[\sum_{i=0}^n C(t - iT) \right] dt \quad (3.5.34)$$

onde $nT \leq t < (n+1)T$ e $C(t - iT)$ refere-se à curva que descreve a concentração no sangue na n -ésima dose repetida.

Quando $R = 1$ não há acúmulo de fármaco no organismo, pois o medicamento é todo eliminado antes da administração subsequente. Para $R > 1$ há acúmulo de fármaco no organismo e R aumenta conforme reduzimos o intervalo de dosagem.

A partir da equação (3.5.34), das curvas EDO e TSK obtemos para cada modelagem os valores R e C_{max} . Simulações são feitas em ambiente Matlab. Nas simulações, consideramos o intervalo entre as doses igual a meia-vida de eliminação, a saber, $T = 75h$.

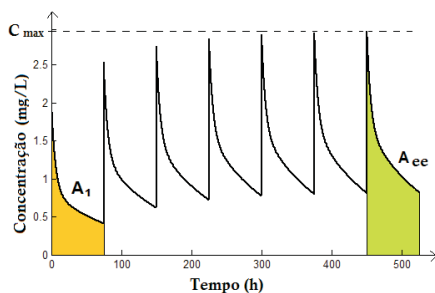


Figura 3.25: Curva via EDO.

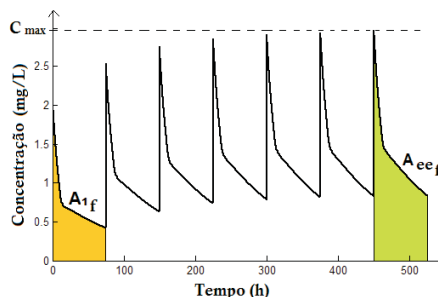


Figura 3.26: Curva via TSK.

Informações obtidas a partir das simulações representadas nas Figuras 3.25 e 3.26: via EDO $C_{max} = 2.93$ e $R = \frac{A_{ee}}{A_1} = \frac{96.19}{51.93} = 1.85$ e via TSK $C_{max_f} = 2.94$ e $R_f = \frac{A_{ee_f}}{A_{1_f}} = \frac{96.93}{52.02} = 1.86$.

Através de representações gráficas (Figuras 3.25 e 3.26), de R e C_{max} , podemos constatar que as duas modelagens são semelhantes e ambas fornecem a mesma interpretação clínica.

3.5.3 Conclusão

Na modelagem fuzzy, o estudo da cinética consiste praticamente através das retas na escala semilog e do conhecimento de um especialista da área para modelar cada fase com as funções de pertinência. Ao compararmos com a modelagem clássica, as representações gráficas (Figuras 3.24, 3.25 e 3.26) mostram a semelhança entre ambas modelagens. Comprovando desta forma, que ambas modelagens são eficientes para modelar a cinética do fármaco no corpo. As vantagens do modelo TSK sobre clássico residem na redução do número de constantes e parâmetros; não exige conhecimento algum de teoria de equações diferenciais ordinárias; descreve os processos de distribuição e eliminação por meio de conjuntos fuzzy (funções de pertinência) de forma intuitiva. Por se tratar de um modelo linguístico, a nosso ver, esse procedimento facilita a modelagem do fenômeno uma vez que o especialista participa diretamente da construção do modelo matemático.

A próxima seção é dedicada ao estudo de sistemas dinâmicos em que a formulação é dada por um sistema baseado em regras fuzzy. Intuitivamente, tal abordagem é sugerida para substituir o campo de direções de uma equação diferencial. A notação *p*-fuzzy se refere à parcialmente fuzzy, já que nos utilizamos da lógica fuzzy. Porém, a solução é tipicamente, uma trajetória clássica.

3.6 Modelo *p*-fuzzy de Malthus

A proposta de utilização da matemática para estabelecer um modelo para o crescimento de uma população humana começou com o economista inglês T.R. Malthus (1798). Malthus afirma que ‘a capacidade de reprodução do homem é superior à capacidade da terra produzir meios para sua subsistência e, a inibição do crescimento populacional é devida à disponibilidade de alimentos. A população quando não obstaculizada, aumenta a uma razão geométrica. Os meios de subsistência aumentam apenas a uma razão aritmética. Pela lei de nossa natureza, que torna o alimento necessário à vida do homem, os efeitos dessas duas diferentes capacidades devem ser mantidos constantes’.

Atualmente, em dinâmica populacional, o que se convencionou chamar de modelo de Malthus assume que o crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante, e desta forma, a população humana deveria crescer sem inibição. A formulação deste modelo em termos de uma equação diferencial não foi feita por Malthus, apesar de ser muito simples, mesmo para época em que foi postulado [11].

O modelo contínuo de Malthus é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha P(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (3.6.35)$$

cuja solução é dada por $P(t) = P_0 e^{\alpha t}$, onde α é uma taxa de crescimento constante.

O modelo p-fuzzy é construído a partir de um sistema baseado em regras fuzzy, onde a entrada é a população (P) e a saída a variação da população $\left(\frac{dP}{dt}\right)$. As funções de pertinência são do tipo trapezoidais (veja Figuras 3.27 e 3.28), o método de inferência utilizado é o Método de Mamdani e o de defuzzificação é o Centro de Gravidade. A base de regras fuzzy utilizada é:

- Se população é muito baixa então $\frac{dP}{dt}$ muito baixa.
- Se população is baixa então $\frac{dP}{dt}$ é baixa.
- Se população é média então $\frac{dP}{dt}$ é média.
- Se população is alta então $\frac{dP}{dt}$ é alta.

E utilizando o sistema baseado em regras fuzzy apresentado anteriormente, determinamos o valor de $\frac{dP}{dt}$ no próximo instante. Assim, calculamos o próximo valor de P , com integração numérica, especificamente o método é o da regra do trapézio. Repetimos o mesmo ra-

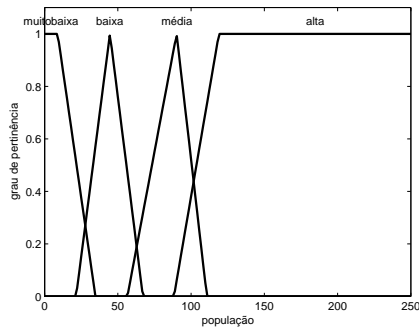


Figura 3.27: Funções de pertinência da população.

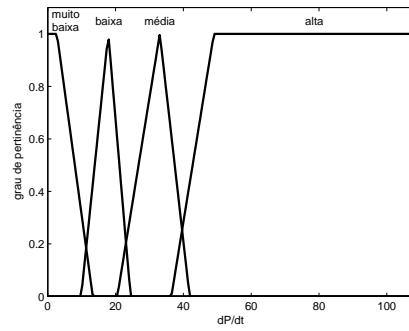


Figura 3.28: Funções de pertinência da variação da população.

ciocínio em 100 iterações obtendo a trajetória da população no tempo como mostra a Figura 3.29.

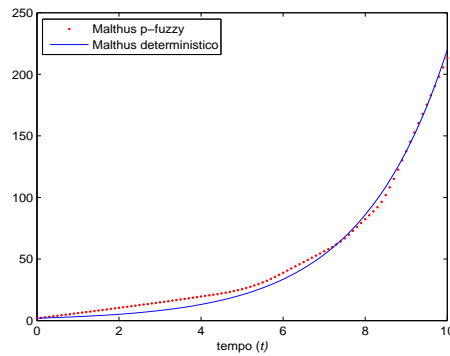


Figura 3.29: Trajetórias do modelo p-fuzzy contínuo com $x_0 = 2$.

A seguir apresentaremos um trabalho desenvolvido pelas alunas Mariana Fernandes dos Santos Villela e Karla Barbosa de Freitas do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, que foi apresentado no XIV Congresso Latino-Americano de Biomatemática [42].

3.7 Modelo p-fuzzy de Transferência da População HIV Assintomática para Sintomática

O objetivo deste trabalho é utilizar um sistema baseado em regras fuzzy para elaborar um modelo da conversão de uma população HIV assintomática para uma sintomática, sem tratamento com antiretrovirais. Este tipo de modelo é denominado p-fuzzy, isto é, parcialmente fuzzy [8]. O modelo estudado é baseado no modelo clássico proposto por Anderson (1986) [3], o qual estabelece que a taxa de conversão (γ) da infecção para a AIDS está em função do tempo. Na história natural do HIV, seria a transferência entre a fase assintomática e sintomática com $x + y = 1$; este modelo é descrito a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\gamma(t)x & x(0) &= 1 \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma(t)x = \gamma(t)(1 - y) & y(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.7.36)$$

em que x representa a fração de indivíduos infectados, mas que ainda não desenvolveram a doença, enquanto y representa a fração de indivíduos infectados que já desenvolveram a doença. O modelo p-fuzzy é construído a partir de um sistema baseado em regras fuzzy, onde a entrada é a fração da população sintomática (y) e a saída a variação da população sintomática $\left(\frac{dy}{dt}\right)$. As funções de pertinência são do tipo trapezoidais (veja Figuras 3.30 e 3.31), o método de inferência utilizado é o Método de Mamdani e o de defuzzificação é o Centro de Gravidade. A base de regras fuzzy utilizada é:

- Se a população é baixa então a variação $\frac{dy}{dt}$ é média positiva.
- Se a população é média baixa então a variação $\frac{dy}{dt}$ é média positiva.
- Se a população é média então a variação $\frac{dy}{dt}$ é alta positiva.

- Se a população é alta então a variação $\frac{dy}{dt}$ é baixa.
- Se a População é altíssima então a variação $\frac{dy}{dt}$ é baixa negativa.
- Se a População é média alta então a variação $\frac{dy}{dt}$ é baixa positiva.

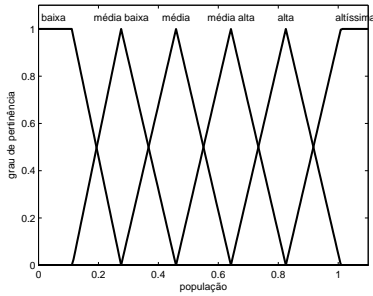


Figura 3.30: Funções de pertinência da população.

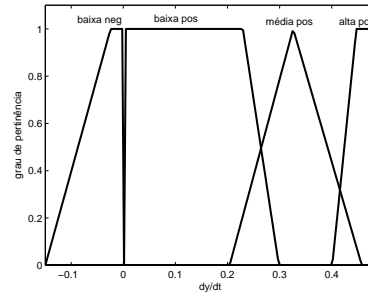


Figura 3.31: Funções de pertinência da variação da população.

As simulações numéricas apresentadas nas Figuras 3.32 e 3.33 são realizadas a partir de uma fração inicial da população sintomática $y(t_0)$, por integração numérica utilizando a regra do trapézio, e repetindo o processo para 800 iterações obtemos o comportamento de uma população HIV sintomática. A população assintomática ($x(t)$) é calculada através da equação $x(t) = 1 - y(t)$.

As Figuras 3.32 e 3.33 mostram que as curvas obtidas pelo modelo p-fuzzy estão próximas dos dados de Peterman (1985) [33], que foram apresentados no modelo clássico proposto por Anderson (1986) [3] para população sintomática.

Assim, através de um sistema baseado em regras fuzzy modelamos o comportamento da população HIV assintomática e sintomática, sem o uso de equações diferenciais.

Os dois exemplos de sistemas p-fuzzy ilustram o grande potencial da modelagem de sistemas dinâmicos por meio da teoria de controlador fuzzy. Mais especificamente, o potencial em modelar equações

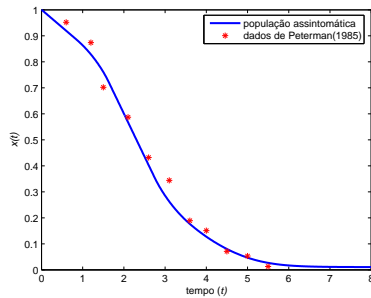


Figura 3.32: Evolução no tempo da população HIV assintomática.

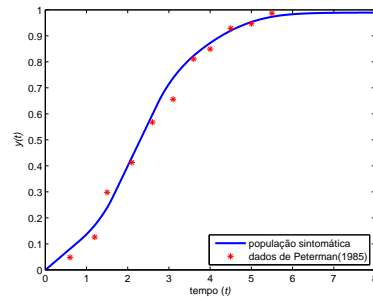


Figura 3.33: Evolução no tempo da população HIV sintomática.

diferenciais autônomas em que a taxa de variação das variáveis de estado são modeladas por meio de uma base de regras fuzzy.

3.8 Modelo Presa-Predador Fuzzy

O modelo presa-predador clássico de Lotka-Volterra pressupõe que tanto presas como os predadores estão distribuídos uniformemente num habitat comum onde todos os predadores têm a mesma chance de encontrar e comer cada presa. Isto significa que não existe distinção entre os predadores, isto é, todos os predadores são identificados com o mesmo atributo de predação e, da mesma forma podemos dizer que as presas são idênticas, isto é, não existe distinção entre as presas.

Inicialmente, mostraremos um comportamento real de presa-predador.

3.8.1 Exemplo Realístico de Presa-Predador: Lebres e Linczes na Baía de Hudson

Por alguma razão funcionários da Hudson's Bay Company registraram o número de lebres e linczes que ficavam presos em suas armadilhas. Por poder aceitar-se que o número de animais capturados é proporcional as suas populações, pesquisadores conseguiram uma estatística

populacional para ambas espécies de animais por um período de mais de 50 anos [35].

O interessante é que as lebres são a base alimentar dos linces, pois são sua comida favorita. A relação entre estas duas espécies foi primeiramente constatada por caçadores de pele. A Hudson's Bay Company no Canadá manteve registros detalhados do número de peles trazidos a cada ano de 1850 até a década de 30. Em 1924, o ecologista Charles Elton analisou estes dados, que podem ser observado na Figura 3.34.

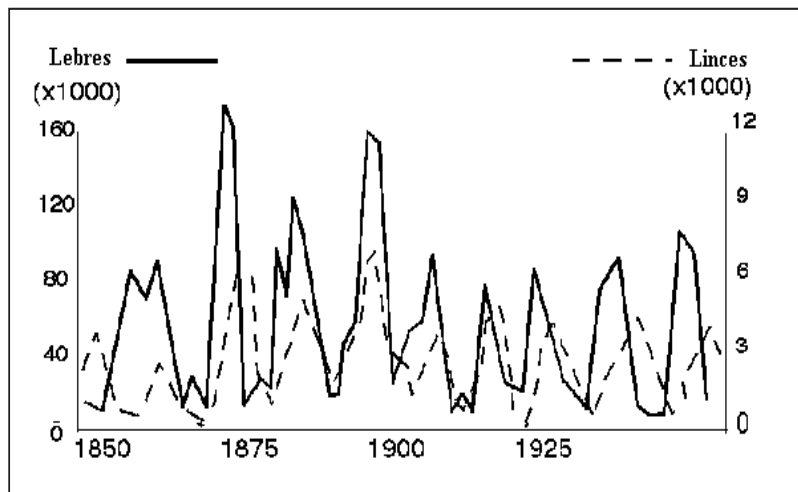


Figura 3.34: Populações de lebres e linces em função do tempo [35].

Como podemos observar, existe uma oscilação bem regular nos números de ambas espécies:

- O período da oscilação é de aproximadamente 10 anos.
- A amplitude da oscilação é enorme: o número de ambas espécies muda dobrando de 50 para mais de 100, durante o ciclo. No modelo fuzzy podemos constatar este comportamento irregular das espécies, enquanto o modelo clássico apresenta curvas regulares e o plano de fase é um 'ciclo' perfeito, estes modelos serão apresentados nas próximas seções.

- Existem outros ciclos presa-predador na floresta boreal, como por exemplo: populações de pequenas presas mamíferas estão no ciclo de 4 anos, juntamente com seus maiores predadores:
 - Presas: arganazes (ratos silvestres) e pequenos roedores.
 - Predadores: raposas árticas, falcões e corujas da neve.

O gráfico do plano de fase de um período de 30 anos, iniciado em 1875, obtidos a partir das populações, será apresentado na Figura 3.35 :

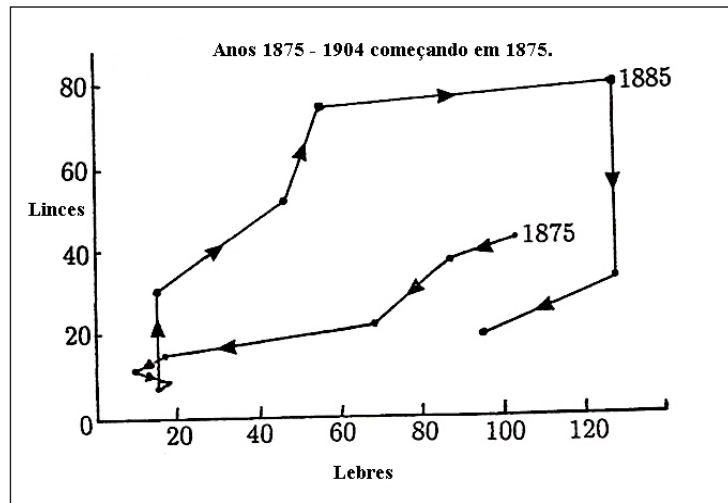


Figura 3.35: Plano de fases de lebres e linces real [28].

3.8.2 Modelo Clássico

Para formular a interação entre presas e predadores foi usado o modelo determinístico, que se tornou clássico, dado pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -by + \beta xy. \end{aligned} \quad (3.8.37)$$

Neste modelo, as variáveis de estado x e y são, respectivamente, a quantidade de presas e de predadores em cada instante t . Os parâmetros são:

- a : taxa de crescimento relativo das presas;
- α : taxa de predação (probabilidade de um predador matar a presa em cada encontro entre eles);
- b taxa de mortalidade de predadores na ausência de presas;
- β taxa de 'conversão' de presas em predadores.

Resolvendo a equação diferencial com os parâmetros $a = 0.1$, $\alpha = 0.01$, $b = 0.05$ e $\beta = 0.001$, obtemos o gráfico da Figura 3.36 e o plano de fase, Figura 3.37.

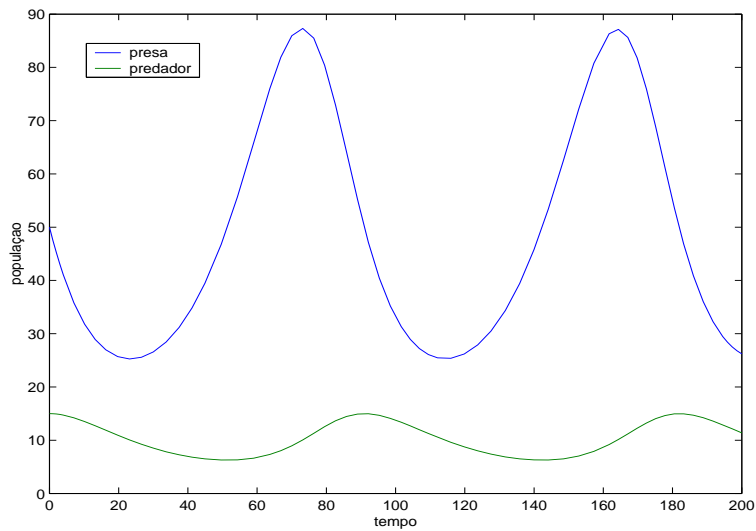


Figura 3.36: Solução do sistema de equações diferenciais.

3.8.3 Modelo Fuzzy

Nosso objetivo é estudar o comportamento das presas e dos predadores de forma mais complexa, isto é, com populações diferenciadas, usando

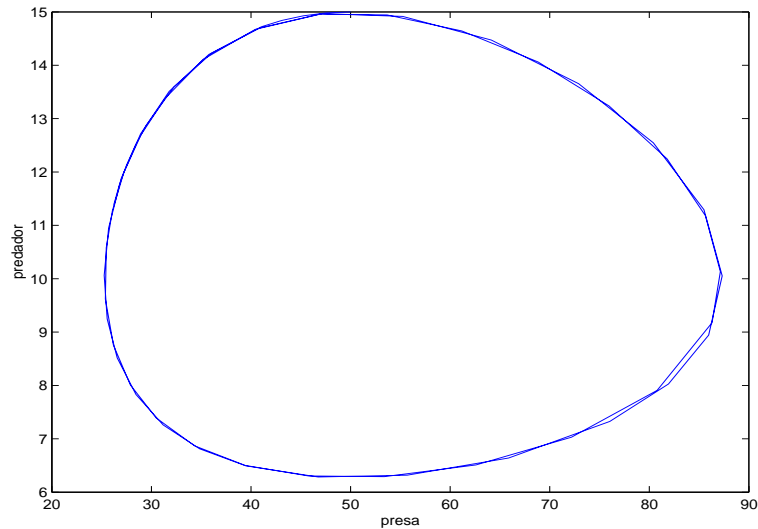


Figura 3.37: Plano de fase.

apenas um sistema de base de regras fuzzy para o qual as variáveis de estado são as potencialidades das presas, para serem predadas, e a dos predadores predarem, que estão diretamente ligadas com suas respectivas idades.

A presa pode ser caracterizada pela sua idade, isto é, um filhote pode ser mais facilmente predado que seus pais. Ainda, um animal velho ou doente pode ser preferido na escolha de um predador. Desta forma, podemos caracterizar o conjunto das presas pelo grau de serem predadas, sendo tal grau determinado pela sua idade. Podemos caracterizar uma presa, pelas funções de pertinência (3.8.38), Figura 3.38:

$$u_x(a) = \begin{cases} r_1 & \text{se } 0 \leq a \leq a_1 \\ r_2 & \text{se } a_1 < a \leq a_2 \\ r_3 & \text{se } a_2 < a \end{cases} . \quad (3.8.38)$$

Os predadores também podem ser caracterizados pela idade. Um filhote é pouco predador no sentido que a caça é realizada por seus pais, que estão na idade adulta e são os maiores predadores. Os in-

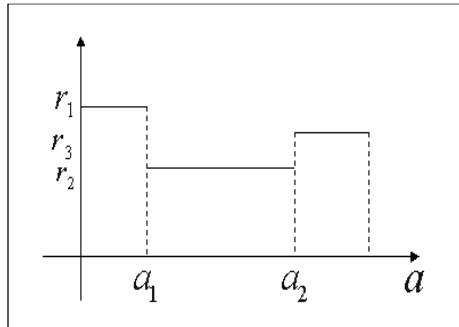


Figura 3.38: Funções de pertinência das presas.

divíduos velhos predam menos que os adultos, definimos as funções de pertinência em (3.8.39), Figura 3.39:

$$u_y(b) = \begin{cases} s_1 & \text{se } 0 \leq b \leq b_1 \\ s_2 & \text{se } b_1 < b \leq b_2 \\ s_3 & \text{se } b_2 < b \end{cases} . \quad (3.8.39)$$

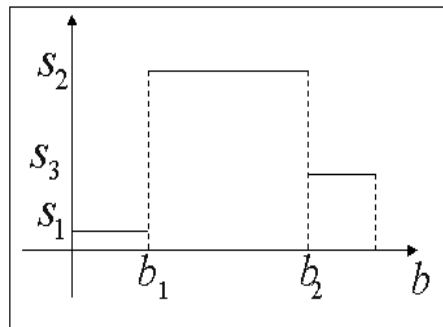


Figura 3.39: Funções de pertinência dos predadores.

Uma população x de presas tem como característica principal sua *potencialidade* como *presa*, definida por (3.8.40), no caso discreto e (3.8.41) no caso contínuo.

$$P_x = \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i} \quad (3.8.40)$$

$$P_x = \int_0^{x_{max}} x u_x dx \quad (3.8.41)$$

A potencialidade de uma população de predadores é definida de maneira análoga.

Por exemplo, suponhamos uma família de 18 predadores onde 5 são filhotes, 10 são adultos e 3 são velhos. Vamos estabelecer que o grau de predação de um filhote seja 0.2; do adulto seja 0.9 e do velho 0.3. Neste caso, temos:

$$P_y = \sum_{i=1}^n y_i u_{y_i} = 5 * 0.2 + 10 * 0.9 + 3 * 0.3 = 10.9. \quad (3.8.42)$$

É fácil verificar que populações de mesmo tamanho podem ter diferentes potencialidades. Em casos mais gerais, onde se tem interações de diversas espécies, uma dada população pode ter potencialidades de predação e de presa ao mesmo tempo. O modelo que vamos propor para a interação presa-predador é baseado simplesmente em regras dadas por variáveis linguísticas.

Adotamos a base de regras fuzzy assumindo como antecedentes potencialidades das presas P_x , Figura 3.40 e potencialidades dos predadores P_y , Figura 3.41 e como conseqüentes ΔP_x e ΔP_y , Figuras 3.42 e 3.43, respectivamente. Os termos lingüísticos para P_x e P_y são *baixa*, *média* e *alta*. Para a ΔP_x e ΔP_y os termos lingüísticos são *diminui* e *aumenta*. A seguir apresentamos a base de regras fuzzy utilizada.

1. Se P_x é baixa e P_y é baixa então ΔP_x aumenta e ΔP_y aumenta.
2. Se P_x é média e P_y é baixa então ΔP_x aumenta e ΔP_y aumenta.
3. Se P_x é alta e P_y é baixa então ΔP_x diminui e ΔP_y aumenta.
4. Se P_x é baixa e P_y é média então ΔP_x aumenta e ΔP_y diminui.
5. Se P_x é alta e P_y é média então ΔP_x diminui e ΔP_y aumenta.

6. Se P_x é baixa e P_y é alta então ΔP_x aumenta e ΔP_y diminui.
7. Se P_x é média e P_y é alta então ΔP_x diminui e ΔP_y diminui.
8. Se P_x é alta e P_y é alta então ΔP_x diminui e ΔP_y diminui.

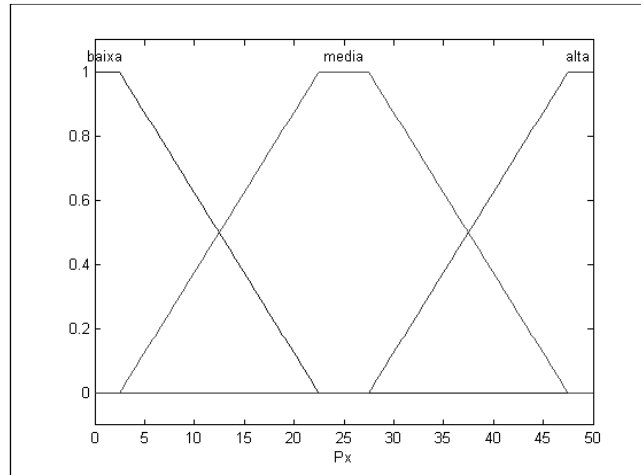


Figura 3.40: Funções de pertinência da potencialidade das presas (P_x).

A partir das potencialidades das presas e dos predadores calculadas conforme as equações (3.8.40) e (3.8.42), respectivamente, e supondo que os valores iniciais de ΔP_x e ΔP_y sejam iguais a zero. E utilizando o sistema baseado em regras fuzzy apresentado anteriormente, com o método de inferência de Mamdani determinamos os valores de ΔP_x e ΔP_y no próximo instante. Assim, calculamos os próximos valores de P_x e P_y , com integração numérica, especificamente o método é o da regra do trapézio. Repetimos o mesmo raciocínio em 50 iterações obtendo o comportamento das potencialidades das presas e dos predadores no tempo e o plano de fase destas potencialidades, como mostram as Figuras 3.44 e 3.45, respectivamente.

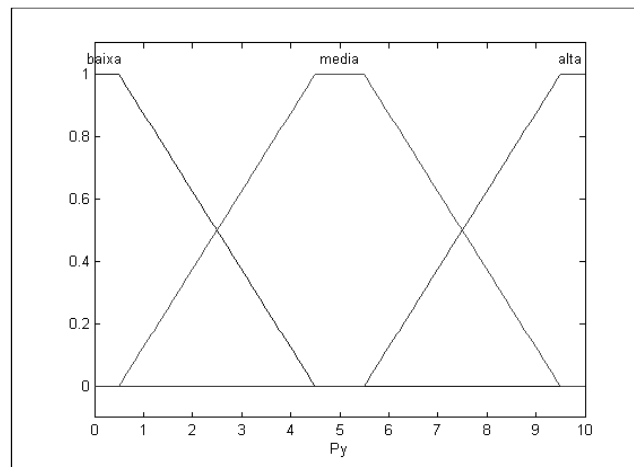


Figura 3.41: Funções de pertinência da potencialidade dos predadores P_y .

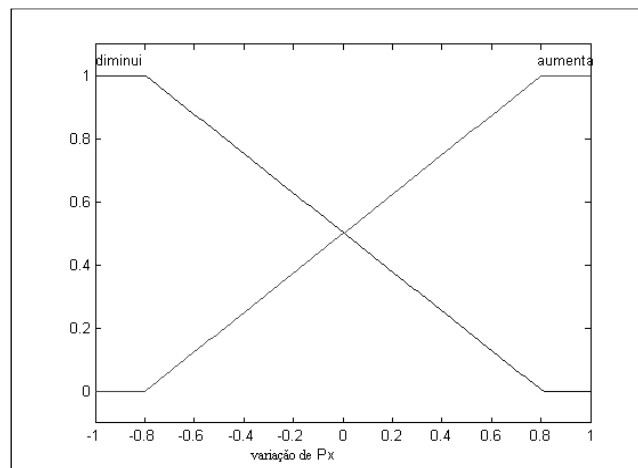


Figura 3.42: Funções de pertinência da variação de P_x (ΔP_x).

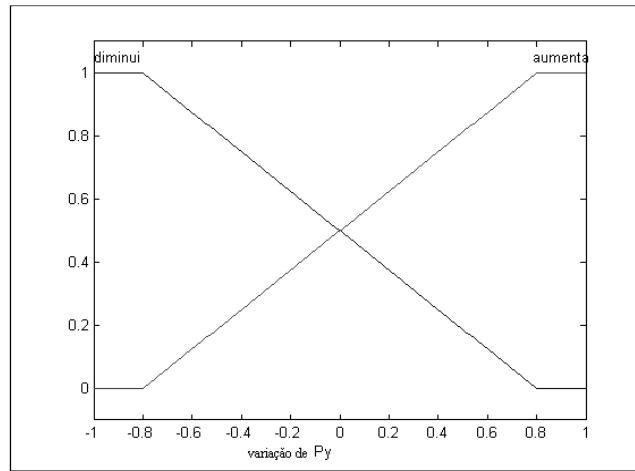


Figura 3.43: Funções de pertinência da variação de P_y (ΔP_y).

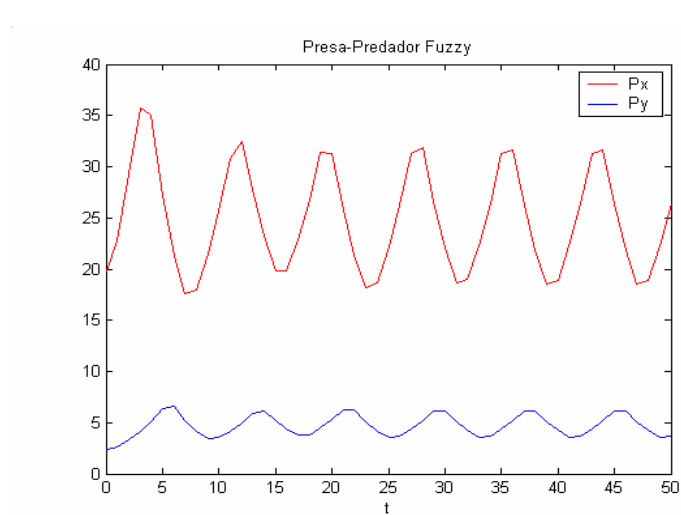


Figura 3.44: Comportamento das potencialidades das populações de presas e predadores.

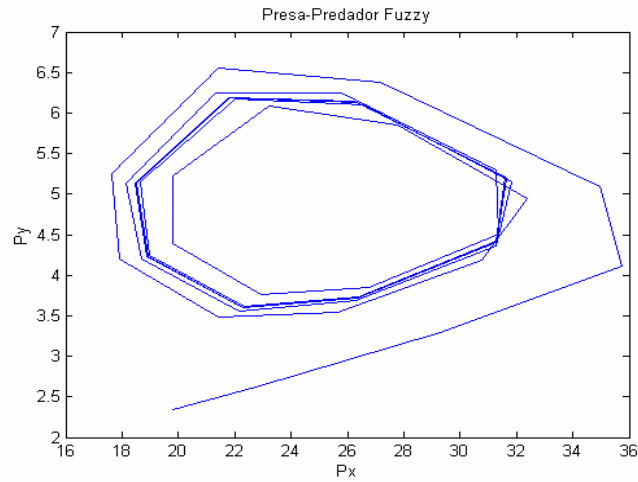


Figura 3.45: Plano de fase.

3.8.4 Conclusão

Os gráficos das Figuras 3.44 e 3.45 apresentam similaridade com os do modelo de Lotka-Volterra, Figuras 3.36 e 3.37. Porém, as Figuras 3.44 e 3.45 do modelo fuzzy têm certa irregularidade visível, pelo fato de termos considerado o grau de predação das espécies heterogêneo. Estes chegam mais próximos da realidade, que os gráficos de Lotka-Volterra comparados com os gráficos das Figuras 3.34 e 3.35. O leitor com interesse nesse tipo de modelo pode consultar [32].

Exercícios

1. Determine a relação fuzzy (D) dos graus de pertinência dos pacientes com as doenças utilizando as Tabelas 3.1 e 3.4.
2. **Problema Inverso:** Determine a relação fuzzy (X) dos graus de pertinência dos sintomas com as doenças utilizando as Tabelas 3.2 e 3.3.
3. Projeto: Competição entre Espécies

Quando duas ou mais espécies vivem em proximidade e dividem as mesmas exigências básicas, elas usualmente competem por recursos, habitat, ou território. Algumas vezes somente a mais forte prevalece, conduzindo o competidor mais fraco para extinção. Uma espécie vence porque seus membros são mais eficientes para encontrar e explorar recursos, o que leva para um crescimento da população. Indiretamente isto significa que a população de competidores encontra menos dos mesmos recursos e não pode crescer até sua capacidade máxima [12].

O modelo de Lotka-Volterra para competição de espécies é dado pelas equações:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \frac{k_1 - N_1 - \beta_{12} N_2}{k_1} \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \frac{k_2 - N_2 - \beta_{21} N_1}{k_2}\end{aligned}\quad (3.8.1)$$

onde N_1 e N_2 são as densidades das populações das espécies 1 e 2.

Construir o modelo fuzzy para competição entre espécies, utilizando o sistema baseado em regras fuzzy, como vimos na seção anterior.

Bibliografia

- [1] ABCsaude, 2004. <http://www.abcsaude.com.br>.
- [2] M. Amendola, A.L. Souza e L.C. Barros, Manual do uso da teoria dos conjuntos fuzzy no Matlab 6.5, 2005. <http://www.ime.unicamp.br/~laeciocb>.
- [3] R.M. Anderson, G.F. Medley, R.M. May e A.M. Johnson, “A Preliminary Study of the Transmission Dynamics of the Human Immunodeficiency Virus (HIV), the Causative Agent of AIDS”, *Journal of Mathematics Applied in Medicine & Biology*, **3**(1986), 229-263.
- [4] F.M. Bando, “Sistemas fuzzy e aproximação universal”, Tese de Mestrado, IMECC, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2002.
- [5] L.C. Barros, “Modelos Determinísticos com Parâmetros Subjetivos”, Tese de Doutorado, IMECC, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1992.
- [6] L.C. Barros e R.C. Bassanezi, “Introdução à teoria fuzzy aplicações em biomatemática”. In *Minicurso*, Campinas, Brasil, (2001), 1-46, Congresso Latino Americano de Biomatemática.
- [7] L.C. Barros, R.C. Bassanezi e M.L. Leite, The epidemiological models SI with fuzzy parameter of transmission, *Computers and Mathematics with Applications*, **45**(2003), 1619-1628.

- [8] L.C. Barros e R.C. Bassanezi, “Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática”, Coleção IMECC - Textos Didáticos, **5**, 2ª Edição, 2010.
- [9] R.C. Bassanezi e W.C. Ferreira, “Equações Diferenciais com Aplicações”, Editora Harbra Ltda, 1988.
- [10] R.C. Bassanezi e H.E. Roman, Relaciones Fuzzy: Optimizacion de Diagnostico Medico, IMECC-UNICAMP, 1989.
- [11] R.C. Bassanezi, “Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática”, Editora Contexto, 2002.
- [12] L. Edelstein-Keshet, “Mathematical Models in Biology”, Birkhäuser Mathematics Series, McGraw-Hill, 1988.
- [13] J.G. Hardman e A.G. Gilman, “As Bases Farmacológicas da Terapêutica”, McGraw-Hill, 9ª Edição, 1994.
- [14] R.M. Jafelice, L.C. Barros, R.C. Bassanezi e F.Gomide, “Fuzzy rules in asymptomatic HIV virus infected individuals model”. In *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*, **85** (2002), 208-215, IOS Press Ohmsha, Amsterdam, Holanda.
- [15] R.M. Jafelice, “Modelagem Fuzzy para Dinâmica de Transferência de Soropositivos para HIV em Doença Plenamente Manifesta”, Tese de Doutorado, FEEC, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2003.
- [16] R.M. Jafelice, L.C. Barros, R.C. Bassanezi e F.Gomide, Fuzzy modeling in asymptomatic HIV virus infected population, *Bulletin of Mathematical Biology*, **66** (2004), 1597-1620.
- [17] R.M. Jafelice, L.C. Barros, R.C. Bassanezi e F.Gomide, Methodology to determine the evolution of asymptomatic HIV population using fuzzy set theory, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **13** (2005), 39-58.
- [18] F. Jamili, Clinical pharmacokinetics of selected classes of drugs: Pharmacokinetic Compartments, 2010. <http://www.pharmacy.ualberta.ca/pharm415pharmaco.htm>.

- [19] A. Kandel, “Fuzzy Mathematical Techniques with Applications”, Addison-Wesley Publishing Company, 1986.
- [20] G.J. Klir e B. Yuan, “Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Applications”, Prentice-Hall PTR, New Jersey, EUA, 1995.
- [21] W.A. Lopes e R.M. Jafelice, “Modelagem Fuzzy na Saúde”, *FAMAT em Revista*, **5** (2005) 85-125.
- [22] W.A. Lopes e R.M. Jafelice, “Fuzzy Modeling in the Elimination of Drugs”, In *Proceedings of the 2005 International Symposium on Mathematical and Computational Biology - BIOMAT 2005*, (2005), 339-355.
- [23] E. Massad, R. Menezes, P. Silveira e N.R.S. Ortega, “Métodos Quantitativos em Medicina”, Manole, Barueri, SP, 2004.
- [24] E. Massad, N.R.S. Ortega, L.C. Barros e C.J. Struchiner, “Fuzzy Logic in Action: Applications in Epidemiology and Beyond”, Springer-Verlag Berlin, 2008.
- [25] J. Menegotto, “Aplicação da Teoria dos Conjuntos Fuzzy em Modelos Farmacocinéticos Multicompartimentais”, Dissertação de Mestrado, IMECC, Unicamp, Campinas, SP, 2011.
- [26] J. Menegotto e L.C. Barros, “Aplicação de sistemas fuzzy em modelos farmacocinéticos multicompartimentais”, *Biomatemática*, **21** (2011), 23-46.
- [27] Ministério da Saúde, 2003. <http://www.aids.gov.br>.
- [28] J.D. Murray, “Mathematical Biology: An Introduction”, Springer-Verlag, New York, 3^a edition, 2001.
- [29] H. Nguyen e E. Walker, “A First Course in Fuzzy Logic”, Chapman e Hall/CRC, 2000.
- [30] N.R.S. Ortega, “Aplicação da Teoria de Lógica Fuzzy a Problemas da Biomedicina”, Tese de Doutorado, Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2001.

- [31] W. Pedrycz e F. Gomide, “An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design”, MIT Press, Cambridge, EUA, 1998.
- [32] M.S. Peixoto, “Sistemas Dinâmicos e Controladores Fuzzy: um estudo da dispersão da morte súbita dos citros em São Paulo”, Tese de Doutorado, IMECC, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP , 2005.
- [33] T. Peterman, D. Drotman e J. Curran, “Epidemiology of the acquired immunodeficiency syndrome AIDS”, *Epidemiology Reviews*, **7** (1985) 7-21.
- [34] D. Ralescu, Y. Ogura, e S. Li, Set defuzzification e Choquet integral, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness e Knowledge-Based Systems*, **9** (2001), 1-12.
- [35] C. Renning, Collective Behaviour: Emergent Dynamics in Populations of Interacting Agents, In *Seminar Artificial Life* (1999/2000).
- [36] F. Ribacionka, “Sistemas computacionais baseados em lógica fuzzy”, Tese de Mestrado, Universidade Mackenzie, São Paulo, SP, 1999.
- [37] E. Sanchez, “Solutions in composite fuzzy relation equations: application to medical diagnosis in brouwerian logic”. In *Fuzzy Automata and Decision Processes*, (1977), 221-234, M.M. Gupta, North-Holland, Amsterdam.
- [38] E. Sanchez e R. Bartolin, “Fuzzy inference and medical diagnosis, a case study”, *Int. J. Biom. Fuzzy Systems Ass.*, **1** (1990), 4-21.
- [39] L.B.S. Valle, F.R.M. Oliveira, R. De Luca e S. Olga, “Farmacologia integrada e farmacologia básica”, **1**, Editora Atheneu, 1988.
- [40] M.F.S. Villela, P.B. Santos e R.S.M. Jafelice, “Diagnóstico Médico Fuzzy de Doenças Infantis”, *FAMAT em Revista* **9** (2007), 329-346.

- [41] M.F.S. Villela, P.B. Santos e R.S.M. Jafelice, “Diagnóstico Médico Fuzzy de Doenças Infantis”, In *Anais da 7ª Semana da Matemática da Universidade Federal de Uberlândia* (2007), 94-95.
- [42] M.F.S. Villela, K.B. Freitas e R.S.M. Jafelice, “Modelo p-fuzzy de Transferência da População HIV Assintomática para Sintomática”, In *Anais do XIV do Congresso Latino-Americano de Biomatemática*, (2007), 39.
- [43] A.C. Zanini e S. Olga, “Farmacologia Aplicada”, Editora Atheneu, 5ª Edição, 1998.

Índice

- Níveis conjunto fuzzy, 26
- Base de regras, 39, 66, 85
- Centro de Gravidade, 42
- Clearance de Creatinina, 84
- Conjunto fuzzy, 13
 - complementar, 20
 - intersecção, 20
 - união, 20
- Defuzzificação, 41
- Diagnóstico médico, 57
- Diferença limitada, 26
- Eliminação de fármaco, 81
- Equações dif. ordinárias, 66, 105
- Esperança fuzzy, 31, 72, 77
- Evolução AIDS, 62
- Funções de Pertinência, 105
- Funções de pertinência, 13, 44, 49, 50, 66, 67, 98
- Fuzzificação, 38
- HIV, 29, 65, 100
- Intersecção drástica, 26
- Intersecção padrão, 25
- Linfócito $T CD4+$, 29, 63
- Método de Mamdani, 40
- Método de Takagi-Sugeno, 40, 91
- Malthus, 97
- Medida fuzzy, 31
- Meia-vida fármaco, 82
- Número fuzzy, 27
 - multiplicação escalar, 27
 - soma, 27
- p-fuzzy, 97, 100
- pH sérico, 84
- Presença-Predador, 102
- Princípio de Extensão, 28
- Produto algébrico, 26
- Qualidade da água, 50
- Regras fuzzy, 37
- Relação fuzzy, 33
 - composição, 34
- Risco de obesidade, 46
- S-norma triangular, 23
- Sistema baseado regras fuzzy, 37
- Soma algébrica, 23
- Soma limitada, 24

T-norma triangular, 24
Taxa de transferência, 66, 76
Taxa de transferência , 77

União drástica, 24
União padrão, 23

Variáveis linguísticas, 37, 43, 66
Vitalidade das violetas, 43
Volume urinário, 83