Notas em Matemática Aplicada e-ISSN 2236-5915

Volume 14, 2012

Editado por

Eliana X.L. de Andrade
Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

Rubens Sampaio
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro -
Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Geraldo N. Silva
Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2012

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7), as figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
http://www.sbmac.org.br/notas.php

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2012

A LÓGICA NA CONSTRUÇÃO DOS ARGUMENTOS

Angela Cruz - UFRN
angela@ufrnet.br

José Eduardo de Almeida Moura
jemoura@ufrnet.br

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

São Carlos - SP, Brasil
2012

Coordenação Editorial: Véra Lucia da Rocha Lopes

Coordenação Editorial da Série: Geraldo Nunes Silva

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Catalogação elaborada pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

Cruz, Angela.
A lógica na construção dos argumentos.
- São Carlos, SP: SBMAC, 2012, 50 p., 20.5 cm
- (Notas em Matemática Aplicada; v. 14)

e-ISBN 978-85-86883-81-1

1. Pensamento Racional. 2. Análise de Argumentos.
3. Discurso. 4. Regras de inferência e demonstração de validade.
I. Cruz, Angela. II. Moura, José Eduardo de Almeida. III. Título.
IV. Série.

CDD - 51

Esta é uma republicação em formato de e-book do livro original do mesmo título publicado em 2005 nesta mesma série pela SBMAC.

Prefácio

Para a tradição ocidental, o pensamento racional se constrói a partir de cânones propostos desde a antiguidade (por Aristóteles, por exemplo, no livro IV da *Metafísica*) e discutidos na contemporaneidade por Brouwer, Łukasiewicz e outros lógicos, denominados de princípios da não-contradição, do terceiro excluído e da identidade. Com base nesses princípios se construiu a lógica clássica. O pensamento quando expresso através de linguagens - do senso comum ou da ciência - pode se traduzir em um discurso logicamente correto caso se preserve determinada estrutura lógica. Neste trabalho pretende-se apresentar princípios e regras de inferência da lógica clássica úteis à análise e à construção de argumentos e, com isto, distinguir as noções de argumentação e demonstração (de validade).

Trata-se de um tema que tem suscitado interesse em vários domínios da ciência e do seu ensino. Para ilustrar cita-se alguns casos de solicitações de cursos de graduação e pós-graduação: a) na Biblioteconomia, visando propiciar condições formais para a extração e organização das informações; b) no Direito, com preocupações sobre formas logicamente corretas de argumentação e sobre a modelagem lógica dos discursos normativos; e, c) na Matemática para garantir o rigor formal mas, também, com o objetivo de tornar essa ciência mais compreensível a partir da explicitação de propriedades matemáticas e de regras de inferências subjacentes aos seus teoremas.

O conteúdo necessário para alcançar o objetivo delineado está distribuído em cinco capítulos. O texto não é exaustivo, ou seja, tem-se consciência de que ele não esgota todas as explicações dos conceitos envolvidos na temática. No entanto, os capítulos trazem a discussão dos aspectos mais relevantes da lógica na construção dos argumentos. Portanto, entende-se que esse texto pode servir a alunos de graduação, de pós-graduação e professores interessados na explicitação da estrutura lógica dos discursos.

Angela Maria Paiva Cruz
José Eduardo de Almeida Moura

Agradecimentos

Agradecemos aos alunos dos cursos de Lógica que propiciam a discussão sobre o assunto, com suas dúvidas e aos colegas da Base de Pesquisa ”Lógica, Conhecimento e Educação”da UFRN, sempre disponíveis a contribuir para a construção e disseminação do conhecimento.

Conteúdo

Capítulo 1

PRINCÍPIOS DO PENSAMENTO RACIONAL

1.1 O PENSAMENTO RACIONAL

Falar do pensamento racional remete a Aristóteles, filósofo da antiguidade que em sua obra denominada *Metafísica* se pergunta sobre a possibilidade de uma ciência que explique as causas primeiras das coisas. Nos Livros IV e VI desta obra e nos *Segundos Analíticos* ele afirma que cabe à Filosofia essa tarefa, e exige também desta o estabelecimento dos princípios da demonstração (*Metafísica*, Livro IV, 1003b 15), segundo os quais uma explicação racional verdadeira deve ser construída.

Ele estabelece ainda (Livro IV) que a Filosofia investiga as causas mais gerais e necessárias, enquanto as ciências particulares (tais como a matemática, a física) tratam das causas distintas e menos gerais, sem questionarem os princípios ou a-xiomas estabelecidos pela primeira, porém seguindo-os com vistas à obtenção de demonstrações logicamente corretas (*Metafísica*, Livro IV, 1005a 25, 30). Portanto, é a Filosofia que apresenta o modelo do pensamento racional.

1.1.1 Provar, argumentar, demonstrar

A preocupação de Aristóteles com a ciência (a filosofia) foi muito além da apresentação e discussão de seus princípios constitutivos. Ele investigou e resolveu problemas metodológicos da mais variada natureza e, sistematizando os procedimentos de prova (apresentração das razões (justificativas)) das "verdades" propostas, construiu as bases de duas grandes áreas atuais de investigação. De sua obra nascem, de um lado, a lógica, que estuda exaustivamente os mecanismos e formas de demonstração, e do outro, a retórica, que estuda e estabelece os mecanismos e as formas de argumentação.

No discurso comum, provar, argumentar e demonstrar são usados com muitos e variados significados. O uso do dia-a-dia, impreciso por sua própria natureza, não gera confusão ou desentendimento. Com a mesma insistência com que se exige "Prove que estou errado!", se diz que "Esse seu argumento não se sustenta" ou "Não tem quem consiga demonstar que ele está mentindo". Os pesquisadores das ciências humanas e sociais nada provam, mas argumentam a favor de suas teses. Por sua vez, os físicos e químicos não argumentam a favor de seus resultados, mas os demonstram empiricamente. Os matemáticos às vezes provam, outras vezes demonstram.

Afinal, há distinções razoáveis entre os significados desses termos? O que se ganha com distingui-los e diferenciá-los?

Essa questão será tratada, primeiramente, com o olhar voltado para o passado. Na *Metafísica* (Met. 1025b 25), Aristóteles classifica as ciências como:

1. ciências teoréticas, que têm como próposito último o conhecimento (a matemática, a física, a metafísica);

2. ciências práticas, que visam ao conhecimento da conduta humana (a ética, a política);

3. ciências produtivas, voltados para o conhecimento da construção de objetos úteis e bonitos (a estética).

A parte da obra aristotélica reunida sob o título *Organon* estuda questões que não podem ser incluídas em nenhuma dessas classes. Com efeito, o que hoje é conhecido como Lógica,

> não é de fato, de acordo com Aristóteles, uma ciência substantiva, mas uma parte da cultura geral que todos deveriam aprender antes de estudar qualquer ciênca, e que sozinha habilitará a saber para que tipos de proposição pede-se prova e que tipos de prova se pediria para elas. (P.A. (*De Partibus Animalium*) 639a 4; Met. 1005b 3, 1006a 6; E N. (*Ethica Nicomachea*) 1094b 23). (cf. [12], p. 20).

Na verdade, Aristóteles não usava a palavra "lógica", mas "analítica" para se referir ao estudo do raciocínio, o conjunto dos conteúdos que estabeleceu no Órganon (como se pronuncia):

1. nos *Analytica Priora*, estabeleceu a teoria do silogismo, exibido em todas as suas formas, sem levar em conta o conteúdo – é esta matéria que pode ser chamada de lógica formal ou lógica de consistência;

2. nos *Analytica Posteriora*, aplica a teoria do silogismo para caracterizar o raciocínio científico – é uma lógica interessada na verdade, uma lógica material, cujos conteúdos são, depois, absorvidos pela metodologia e pela filosofia da ciência e, mesmo, pela teoria do conhecimento; e

3. nos *Topica* e nos *Sophistici Elenchi*, riquíssimo estudo de raciocínios silogisticamente corretos, mas que não satisfazem as condições para serem científicos.

> Aristóteles tem, embora não discuta explicitamente a questão, uma clara idéia da diferença entre a lógica e outros estudos com os quais ela tem sido muitas vezes identificada ou confundida – gramática, psicologia, metafísica. A lógica é, para ele, um estudo não de palavras, mas do pensamento do qual as palavras são signos; do pensamento não com referência a sua história natural, mas com referência a seu sucesso ou fracasso em atingir a verdade; do pensamento não como construindo, mas como apreendendo a natureza das coisas. ([12], p. 21)

Os demais livors do *Organon*, os *Categoriae* e *De Interpretatione* estudam os termos e as proposições[1]. Devem ser considerados como preliminares. De fato, nas edições do *Organon*, são os dois primeiros estudos.

As *Categoriae* começa com considerações de fatos lingüísticos: distingue "coisas ditas sem combinação"de "coisas ditas em combinação"(Cat. Ia 16), para tratar de termos e conceitos. As "palavras não combinadas"significam uma ou outra das seguintes coisas (Cat. Ib 25):

1. substância (ex. 'homem')
2. quantidade (ex. 'dois cúbitos de comprimento')
3. qualidade (ex. 'branco')
4. relação (ex. 'dobro')
5. lugar (ex. 'no Liceu')
6. data (ex. 'ontem')
7. postura (ex. 'senta')
8. posse (ex. 'está calçado')
9. ação (ex. 'corta')
10. passividade (ex. 'é cortado')

Essa lista aparece em quase todos os trabalhos, e a doutrina é sempre tratada como algo já estabelecido. É claro que Aristóteles estudou distinções lingüísticas, mas não há lista de partes do discurso que sirva como base para as categorias (coisas que a gramática distingue, as categorias juntam e categorias juntam coisas que a gramática distingue (Cat. 6b6-11, 8a17-28)), as únicas partes do discurso que ele distingue são o nome e o verbo (De Int. 2,3).

"Categoria" significa "predicado", mas a primeira categoria, substância, tem como membros substâncias individuais, que são sempre sujeitos. A substância é a categoria primária: substrato pressuposto por todas as outras.

[1]No decorrer deste texto as expressões 'proposição', 'enunciado' e 'sentença' são usadas sem se considerar os diversos significados que lhes são atribuídos. Não cabe, aqui, esta discussão.

Estabelecidos os “termos”, o *De Interpretatione* faz o estudo da proposição como união ou separação de conceitos conforme a realidade. A “separação” (“divisão”) pode ser vista, também, como união, composição com o conceito negativo. Decorre, daí, também, uma visão de verdade como correspondência.

As proposições são analisadas em *nome*, que é *um som que tem um significado estabelecido por convenção e não tem referência temporal, e do qual nenhuma parte tomada em si tem um significado* (De Int. 16a19 s), e *verbo*, que é *aquele que, além de ter um significado definido como a um nome, tem uma referência temporal e indica algo asserido de algo mais* (De Int. 16b6-8, 19-20).

Aristóteles reonhece a necessidade de nomes e verbos indefinidos – indefinidos porque podem ser asseridos de todo tipo de coisas, existentes e não-existentes –, e se põe como tarefa principal o estudo das relações de oposição entre as proposições que podem ser construídas.

Porque Aristóteles considera o termo “é” – a cópula –, um elemento distinto do nome (sujeito) e do verbo (predicado) nas proposições, as apresenta na forma 'A é B' ou 'B pertence a A'. E classifica-as pela *qualidade*, como afirmativas ou negativas, e pela *quantidade*, em universais e particulares.

Sobre a natureza da negação, é importante levar em conta o que é dito na *Metafísica*:

> A negação não é a rejeição de uma afirmação prévia. É a rejeição de uma conexão sugerida, mas é igualmente verdadeiro que a afirmação é a aceitação de uma conexão sugerida (Met. 1017a31-35).

Aristóteles, no entanto, não comete o erro de reduzir o negativo ao afirmativo, dizendo que ”A não é B”significa ”A é não-B”, que é uma afirmação com um predicado estranho e sem importância

Essas quatro proposições:

A Universal Afirmativa: “Todo A é B”, Todo homem é mortal;

E Universal Negativa: “Nenhuma A é B”, Nenhum homem é mortal;

I Particular Afirmativa: “Algum A é B”, Algum homem é mortal; e

O Particular Negativa: “Algum A não é B”, Algum homem não é mortal.

vão ser estudadas exaustivamente no Quadrado de Oposições e aí serão estabelecidas as inferências imediatas, fundamentais para o processo de tranformação conhecido como *conversão*.

O *Quadrado de Oposições* estabelece, basicamente, o seguinte:

1. “Todo A é B” e “Algum A não é B” são contraditórias;
2. “Nenhum A é B” e “Algum A é B” são contraditórias;
3. “Todo A é B” e “Nenhum A é B” são contrárias;
4. “Algum A é B” e “Algum A não é B” são subcontrárias;

5. “Algum A é B” é subalterna de ”Todo A é B”;
6. “Algum A não é B” é subalterna de “Nenhum A á B”.

As definições seguintes esclarecem o significado dos “termos técnicos” usados no *Quadrado*:

Definição 1 *Duas proposições são* contraditórias *se e somente se não podem ser ambas verdadeiras, nem podem ser ambas falsas.*

Definição 2 *Duas proposições são* contrárias *se e somente se não podem ser ambas verdadeiras.*

Definição 3 *Duas proposições são* subcontrárias *se e somente se não podem ser ambas falsas.*

Definição 4 *Uma proposição é uma* subalterna *de outra se e somente se deve ser verdadeira se sua “superalterna” é verdadeira e a “superalterna” deve ser falsa se a subalterna é falsa.*

Definição 5 *O termo Sujeito é distribuído nas proposições Universais e o termo Predicado é distribuído nas proposições Negativas.*

Usando um “d” junto ao S(ujeito) ou ao P(redicado) para indicar que o termo é distribuído, obtém-se a seguinte Tabela de Distribuição:

Tipo	Letra	Representação	Sentença padrão
Universal Afirmativa	*A*	Sd *A* P	Todo A é B
Universal Negativa	*E*	Sd *E* Pd	Nenhum A é B
Particular Afirmativa	*I*	S *I* P	Algum A é B
Particular Negativa	*O*	S *O* Pd	Algum A não é B

que se aplica, junto com as regras que serão enunciadas adiante, para a avaliação da validade do tipo de “raciocínio” mais conhecido e estudado: o *Silogismo Categórico*.

1.1.2 Silogismos Categóricos

O Silogismo Categórico é um tipo de prova (argumento ou demonstração), composto exatamente por duas *premissas* e uma *conclusão*, nas quais ocorrem somente três termos distintos.

Os termos Sujeito e Predicado da conclusão são chamados, *termo menor* e *termo maior*, respectivamente, e as premissas em que eles ocorrem *premissa menor* e *premissa maior*. O terceiro termo, que está presente nas premissas e não ocorre na conclusão, é o *termo médio*, assim chamado por “mediar” a passagem entre os outros termos, por ter uma “extensão” intermediária.

Assim, a validade de qualquer silogismo categórico pode ser determinada pela aplicação das seguintes *Regras de Avaliação*:

1. O termo médio está distribuído exatamente uma vez.
2. Nenhum termo extremo pode estar distribuído apenas uma vez.
3. O número de premissas negativas deve ser igual ao número de conclusões negativas.

Uma observação atenta das possibilidades de combinação das Proposiçoes Categóricas (que são quatro), três a três (duas premissas e uma conclusão), com três termos diferentes (um dos quais não ocorre na conclusão), permite constituir grupos caracterizados pels posição desse termo médio, chamados *figuras*, que são as seguintes:

1. 1^a figura: o termo médio é sujeito na premissa maior e predicado na menor
2. 2^a figura: o termo médio é predicado nas duas premissas
3. 3^a figura: o termo médio é sujeito nas duas premissas
4. 4^a figura: o termo médio é predicado na premissa maior e sujeito na menor

Pois bem, das 256 formas possíveis de silogismo, somente são válidas as seguintes:

1.1.3 Formas válidas do silogismo categórico

1^a FIG.	$\begin{array}{c} Md\ A\ P \\ Sd\ A\ M \\ \hline Sd\ A\ P \end{array}$	$\begin{array}{c} Md\ E\ Pd \\ Sd\ A\ M \\ \hline Sd\ E\ Pd \end{array}$	$\begin{array}{c} Md\ A\ P \\ S\ I\ M \\ \hline S\ I\ P \end{array}$	$\begin{array}{c} Md\ E\ Pd \\ S\ I\ M \\ \hline S\ O\ Pd \end{array}$
2^a FIG.	$\begin{array}{c} Pd\ E\ Md \\ Sd\ A\ M \\ \hline Sd\ E\ Pd \end{array}$	$\begin{array}{c} Pd\ A\ M \\ Sd\ E\ Md \\ \hline Sd\ E\ Pd \end{array}$	$\begin{array}{c} Pd\ E\ Md \\ S\ I\ M \\ \hline S\ O\ Pd \end{array}$	$\begin{array}{c} Pd\ A\ M \\ S\ O\ Md \\ \hline S\ O\ Pd \end{array}$
3^a FIG.	$\begin{array}{c} M\ I\ P \\ Md\ A\ S \\ \hline S\ I\ P \end{array}$	$\begin{array}{c} Md\ A\ P \\ M\ I\ S \\ \hline S\ I\ P \end{array}$	$\begin{array}{c} M\ O\ Pd \\ Md\ A\ S \\ \hline S\ O\ Pd \end{array}$	$\begin{array}{c} Md\ E\ Pd \\ M\ I\ S \\ \hline S\ O\ Pd \end{array}$
4^a FIG.	$\begin{array}{c} Pd\ A\ M \\ Md\ E\ Sd \\ \hline Sd\ E\ Pd \end{array}$	$\begin{array}{c} P\ I\ M \\ Md\ A\ S \\ \hline S\ I\ P \end{array}$	$\begin{array}{c} Pd\ E\ Md \\ M\ I\ S \\ \hline S\ O\ Pd \end{array}$	

1.1.4 Formas válidas adicionais (ANTIGAS)

$$\begin{array}{r|c|c|}
3^a \text{ FIG.} & \begin{array}{c} Md\ A\ P \\ Md\ A\ S \\ \hline S\ I\ P \end{array} & \begin{array}{c} Md\ E\ Pd \\ Md\ A\ S \\ \hline S\ O\ Pd \end{array} \\
\hline
4^a \text{ FIG.} & \begin{array}{c} Pd\ A\ M \\ Md\ A\ S \\ \hline S\ I\ P \end{array} & \begin{array}{c} Pd\ E\ Md \\ Md\ A\ S \\ \hline S\ O\ Pd \end{array}
\end{array}$$

– *O que valida estas formas estranhas?*
– *A suposição de existência (não-vacuidade do sujeito) das universais.*

É a partir da teoria do silogismo válido que Aristóteles constrói, por uma lado, a idéia de demonstração, e, por outro, a de argumentação, como se usa hoje.

Como somente o silogismo garante que a verdade das premissas se "transmite" para a conclusão, a prova científica – demonstração – estudada nos *Segundos Analíticos* é caracterizada como um silogismo cujas premissas são "verdadeiras e primeiras", i. e., são evidências que se impõem à razão. É esta vertente, estritamente formal, que trata a relação entre premissas e conclusão somente a partir da forma lógica das proposiçoes que as representam, que gerou as discussões do fim do século XIX e fizeram surgir as reflexões de De Morgan, Boole e Frege que originaram a lógica contemporânea, que oferece os mais requintados instrumentos para a análise das demonstrações matemáticas. Os sistemas axiomáticos e de dedução natural de hoje são as conseqüências históricas mais marcantes dos esforços para criticar e aperfeiçoar as intuições aristotélicas.

Da mesma forma, as atuais teorias da argumentação, nascem das elaborações aristotélicas dos *Tópicos* e da *Retórica*. E se referem como as demonstrações ao mesmo silogismo. A diferença fundamental está na natureza das premissas. Agora, elas podem ser opiniões aceitas "por todos os homens, pela maioria dos homens, ou pelos sábios ou pela maioria deles".

Assim, pode-se, hoje, associar à argumentação toda forma de prova que envolve controvérsia, ou tem como finalidade persuadir ou convencer. A discussão, o diálogo são situações argumentativas típicas, tratadas pela *teoria da argumentação* e pela *lógica informal*. Esse campo de estudos afasta-se da lógica e da teoria da demonstração, também, por dispensar e considerar impossível a tradução do que é expresso em linguagem natural em fórmulas ou outro recurso que reduza a riqueza de significados contida nos contextos de enunciação.

Assim, embora muita claramente distintas e distinguidas, prova, demonstração e argumentação continuam sendo usadas, em todos os campos, imprecisamente, sem causar confusão.

1.2 O MODELO ARISTOTÉLICO

O modelo de racionalidade científica, elaborado a partir das idéias de Aristóteles, também denominado de realismo aristotélico, se caracteriza por assumir que as coisas realmente existem e pela exigência da demonstração.

Segundo este modelo, há uma realidade (mundo real que está-aí) que se apresenta ao sujeito pesquisador para ser explicada. Para Aristóteles, conhecer algo é conhecer a causa pela qual a coisa é e não pode ser de outra forma. Ou seja, ao conhecimento científico estão associadas as noções de causalidade e de necessidade. Assim, só se conhece o que uma coisa é se a coisa está determinada pela sua causa.

Nessa perspectiva, as explicações da realidade construídas pelo senso comum ou pela ciência podem ser verdadeiras (ou aproximadamente verdadeiras) na medida em que descrevem e apreendem as relações causais do mundo real. Desse modo, o discurso sobre o mundo tem por objetivo apresentar as causas e princípios necessários das coisas. Esta característica imprime à ciência aristotélica o caráter demonstrativo, isto é, as teorias científicas ou outros discursos que buscam explicar fenômenos, devem apresentar uma estrutura dedutiva fundamentada em princípios ou axiomas. Este aspecto demonstrativo está explícito também nos *Analíticos Posteriores* (Livro I, 71a) onde Aristóteles afirma que todo conhecimento se funda em um conhecimento anterior (prévio), com base no qual o novo se constrói. Explicitar esses fundamentos é o que se faz a seguir.

1.3 OS PRINCÍPIOS

Por *princípio* designa-se a causa, a premissa, o axioma ou postulado que se estabelece, como conhecimento prévio, para garantir a validade lógica de uma argumentação sobre determinado tema. De acordo com fontes contemporâneas ([6]), são três os princípios básicos do pensamento racional, a saber: da identidade, da contradição ou não-contradição e do terceiro excluído. No Livro IV da *Metafísica*, Aristóteles apresenta os dois últimos, mas não insiste na defesa da identidade com o status de princípio.

Interpretações mais atuais (tais como a de Łukasiewicz, apud [6]), sugerem uma formulação ontológica e uma formulação lógica dos princípios. É o que vem a seguir:

1. Princípio da Identidade ou da Reflexividade
   - Formulação ontológica:
     a) O ente é ente, ou ainda "o não ente é não ente" (*Metafísica*, Livro IV, 1003b 10, 12)
     b) O que é é.
     c) Toda coisa que é, é aquilo que é.
     d) A é A.
   - Formulação lógica na linguagem da lógica proposicional (caso a) e b)) e na linguagem da lógica de predicados (caso c):

a) $p \rightarrow p$
b) $p \leftrightarrow p$
c) $\forall$ x (x = x).

2. Não-contradição:

   - Formulação ontológica:

     a) É impossível ser e não ser simultaneamente. (*Metafísica*, Livro IV, 1006a 4, 5).

     b) O mesmo atributo não pode, ao mesmo tempo, pertencer e não pertencer ao mesmo sujeito com relação à mesma coisa. (*Metafísica*, Livro IV, 1005b 19, 20).

   - Formulação lógica:

     a) Dadas duas proposições contraditórias uma delas é falsa. (*Metafísica*, Livro IV, 1006b 30)

     b) $\sim (A \wedge \sim A)$ (na linguagem da lógica proposicional)

   De acordo com este princípio, não é possível afirmar, por exemplo, que o vírus tem o atributo de "ser vivo"e também não ter este atributo. Se fosse possível fazer tal afirmação sobre o vírus, toda a informação sobre vírus e sobre qualquer coisa poderia ser formulada, e na mesma medida, nada poderia ser dito com verdade sobre as coisas. Isto ocorre porque, se a mesma coisa pode possuir e não possuir uma certa propriedade, não haveria distinção possível entre as coisas, entre os fenômenos, e não seria possível, portanto, haver pensamento (racional) sobre o mundo.

3. Terceiro excluído:

   - Formulação ontológica:

     a) Entre os contraditórios não existe um meio termo. (*Metafísica*, Livro IV, 1011b 20, 25)

     b) Ou algo é ou não é.

   - Formulação lógica:

     a) A é B ou A não é B.

     b) $(A \vee \sim A)$ (na linguagem da lógica proposicional)

Para exemplificar, dado o enunciado "O vírus é um ser vivo", obedecer a estes princípios significa que:

a) O vírus é ser vivo e esta é a característica que fornece identidade ao vírus, sendo portanto, impossível ser de outro modo.

b) É impossível que o vírus seja um ser vivo e não seja um ser vivo, simultaneamente.

c) O vírus é um ser vivo ou não é um ser vivo, ou seja, o enunciado "O vírus é um ser vivo", ou é verdadeiro ou é falso, não havendo uma terceira alternativa entre o verdadeiro e o falso.

A lógica que satisfaz estes princípios é denominada "clássica" e no âmbito dessa lógica há várias discussões sobre as relações entre eles. Essa lógica é considerada a lógica subjacente ao pensamento racional desde a antiguidade e é esperado que discursos sobre a realidade, seja do senso comum ou da ciência, sejam estruturados segundo ela. Discute-se a seguir, o papel da lógica clássica na construção e análise dos argumentos constituintes dos discursos.

Capítulo 2

PENSAMENTO *versus* LINGUAGEM

Um pensamento, entendido aqui como processo mental, pode conter um raciocínio, ou seja, ele pode inferir um juízo (ou asserção) com base em outros juízos que lhe dão suporte estrutural. Assim, nem todo pensamento é um raciocínio, mas todo raciocínio é um pensamento. ([5])

A expressão do pensamento inferencial ou raciocínio em alguma linguagem constitui o que se chama de *argumento*. Desse modo, tal como o raciocínio é formado por juízos, o argumento é formado por sentenças. Uma destas sentenças é denominada *conclusão* e as demais, que podem oferecer explicações para esta, são denominadas *premissas*.

A construção de um discurso (oral ou escrito) se fundamenta assim, no estabelecimento de relações entre sentenças, de modo a se obter desde argumentos mais simples por exemplo, com apenas uma premissa, até argumentos mais complexos, os quais estruturam o texto (oral ou escrito) em parágrafos menores ou maiores. Por conseguinte, um discurso é um argumento, composto por vários outros argumentos mais simples. É importante notar, no entanto, que os discursos não contêm apenas argumentos. Outros recursos lingüísticos podem ser encontrados permeando os discursos, principalmente com funções estéticas. Assim como na construção de um discurso as sentenças devem ser usadas para a elaboração de uma estrutura argumentativa, a análise de discursos exige o reconhecimento dos argumentos, desde os mais simples até os mais complexos, como uma primeira tarefa.

Nos trechos a seguir, distingue-se argumentos de outras associações de sentenças:

1 Se alguém quer formar uma opinião real sobre alguém, pode observar a impressão que causa a primeira observação de uma carta escrita por essa pessoa;

2 Foi assinalado que, embora os ciclos de negócios não sejam períodos, são adequadamente descritos pelo termo “ciclos” e, portanto, são suscetíveis de medição.

No primeiro caso, há apenas uma sentença na forma “se ...., então...”; já no caso b) as informações contidas nas sentenças indicam que o termo “portanto” está apontando uma conclusão logicamente inferida das primeiras.

Algumas vezes o contexto permite distinguir as premissas da conclusão, mas há na linguagem, palavras ou expressões que as distinguem, a saber, *pois, uma vez que, visto que, porque, considerando que, etc.*, indicam que as sentenças que se seguem são premissas, e palavras ou expressões tais como *portanto, daí, segue-se que, conseqüentemente, conclui-se que, logo, assim, então, etc.*, indicam que a sentença seguinte é a conclusão do argumento.

Propõe-se que, após uma leitura cuidadosa dos trechos de variados discursos, colocados a seguir, identifique-se aqueles que contêm argumentos:

1. Citando o dito da Rainha de Navarra, ocorre-me que entre o povo, quando uma pessoa vê outra arrufada, costuma perguntar-lhes: "Gentes, quem matou seus cachorrinhos?", como se dissesse "quem lhe levou os amores, as aventuras secretas, etc." Mas este capítulo não é sério. (Machado de Assis, Memórias póstumas de Brás Cubas "O que não é sério").

2. Sempre que observamos um eclipse da Lua, vemos que a forma da sombra nela projetada é curva. Ora, o corpo que projeta sua sombra na Lua é a Terra. Por conseguinte, a forma da Terra deve ser redonda.

3. A abolição não melhorou de modo algum a situação social e econômica dos antigos escravos no Brasil. De fato, aqueles que, no passado, constituíam "as mãos e os pés"do senhor de engenho, aqueles que só recebiam "pão, pau e pano", isto é, alimento barato, castigos em profusão e roupa barata, aqueles que foram escravos de nossos antepassados continuaram a trabalhar no campo e na cidade em condições subhumanas. Nenhuma real oportunidade de progresso na escala social lhes foi oferecida.

4. Se dermos à eternidade o significado não de duração temporal infinita mas de intemporalidade, então a vida eterna pertence aos que vivem no presente. (Wittgenstein, Tractatus Lógico-Philosophicus).

5. Peça o mesmo para mim, pois os amigos devem ter todas as coisas em comum. (Platão, Fedro).

6. A nenhum homem é consentido ser juiz em causa própria, porque seu interesse certamente influirá em seu julgamento e, não improvavelmente, corromperá sua integridade.

7. Ainda que exista um embusteiro, sumamente poderoso, sumamente ardiloso, que empregue todos os seus esforços para manter-me perpetuamente ludibriado, não pode subsistir dúvida alguma de que existo, uma vez que ele me ludibria; e por mais que me engane a seu bel-prazer, jamais conseguirá que eu não exista, enquanto eu continuar pensando que sou alguma coisa. Então, uma vez ponderados escrupulosamente todos os argumentos, tenho de concluir que, sempre que digo ou concebo em meu espírito Eu sou, logo eu existo, esta proposição tem que ser necessariamente verdadeira. (René Descartes, Meditações Metafísicas).

É fácil concluir que as sentenças contidas no texto 1) constituem uma narrativa não qual não há indicador, seja explícito ou implícito, de premissas ou de conclusão. E a sentença que compõe o texto 4) é apenas um sentença condicional, caracterizada pelo uso de "se ..., então ...". Assim 1) e 4) não contêm argumentos. Mas, os demais textos possuem uma estrutura argumentativa. No exemplo 2), a expressão "por conseguinte" indica que a sentença "a forma da Terra deve ser redonda" é a conclusão do argumento; no exemplo 3), todas as sentenças que se seguem à expressão "De fato" são evidências ou premissas para a sentença "A abolição não melhorou de modo algum a situação social e econômica dos antigos escravos no Brasil", que constitui a conclusão; no exemplo 5), a palavra "pois" explica a conclusão que a antecede, o que ocorre também com o exemplo seguinte; no exemplo 7), todas as sentenças que precedem a expressão "tenho de concluir que", explicam que *"Eu sou, logo eu existo"* é uma proposição verdadeira.

Capítulo 3

FORMAS DE ARGUMENTAÇÃO: DEDUÇÃO E INDUÇÃO

3.1 Principais formas de argumentação

A sustentabilidade ou força que as premissas fornecem à conclusão é variável, pois dada a natureza do que o discurso pretende descrever, duas possibilidades se apresentam: a) as premissas oferecem evidência total (ou conclusiva) para a conclusão; ou b) as premissas oferecem evidência parcial para a conclusão. No primeiro caso, os argumentos são ditos *dedutivos* e no segundo, *indutivos*.

Nos casos a seguir identificar-se-ão os argumentos dedutivos e indutivos ([11]):

1. Como os testes demonstraram que foram precisos, pelo menos 2,3 segundos para manobrar a culatra do rifle de Oswald, é óbvio que Oswald não poderia ter disparado três vezes – atingindo Kennedy duas vezes e Connally uma vez – em 5,6 segundos ou menos.

2. Jânio Quadros renunciou à presidência em circunstâncias excepcionais. Ora, todo aquele que renuncia à presidência em circunstâncias excepcionais pretende ser reconduzido triunfalmente ao poder. Portanto, o que Jânio pretendia era isso: ser reconduzido ao poder.

3. O Japão possui baixa renda *per capita* e nível calórico alimentar insuficiente, mas sua indústria é altamente desenvolvida. Portanto, um país desenvolvido pode apresentar características de subdesenvolvimento.

4. O analfabetismo é igualmente um dos traços do subdesenvolvimento. Enquanto a proporção de maiores de 10 anos de idade iletrados é de no máximo

4% nos países desenvolvidos, ela aumenta consideravelmente nos subdesenvolvidos. As taxas são as seguintes: 17% na Argentina, 23% na Itália e na Espanha, 41% na Grécia, 40% em Portugal, 57% no Brasil e na Venezuela, 70% na Turquia, 86% no Egito e Malásia, mais de 90% na Índia e na África Negra. A única exceção é o Japão com apenas 5%.

Observa-se que, nos dois primeiros exemplos, a conclusão do argumento (respectivamente, "Oswald não poderia ter disparado três vezes – atingindo Kennedy duas vezes e Connally uma vez – em 5,6 segundos ou menos" e "o que Jânio pretendia era isso: ser reconduzido ao poder") é uma conseqüência lógica das premissas, sendo portanto impossível, que estas sejam verdadeiras e a conclusão seja falsa. Porém, o exemplo 3 apresenta um argumento indutivo, pois a conclusão "um país desenvolvido pode apresentar características de subdesenvolvimento"é enunciada a partir da observação de apenas um caso de país desenvolvido, o Japão. O mesmo ocorre com o último exemplo, porque embora se apresentem várias evidências (as taxas altas de iletrados em vários países subdesenvolvidos) para se concluir que "O analfabetismo é igualmente um dos traços do subdesenvolvimento", elas ainda não são suficientes para garantir a verdade dessa conclusão.

Os argumentos dedutivos são *válidos* quando o conteúdo da conclusão já está contido no conteúdo das premissas e, assim, a verdade das premissas implica na verdade da conclusão. Não ocorre, portanto, que em um argumento válido as premissas sejam verdadeiras e sua conclusão seja falsa. Caso contrário, o argumento dedutivo é inválido.

Nos exemplos a seguir distingue-se os argumentos dedutivos válidos dos dedutivos inválidos.

1. Se o mordomo estivesse presente, então teria sido visto. Se tivesse sido visto, teria sido interrogado. Se tivesse sido interrogado, teria respondido e se tivesse respondido teria sido ouvido. Mas o mordomo não foi ouvido. Se não foi visto nem ouvido, então o mordomo estaria no seu trabalho; e se estivesse no seu trabalho, deveria ter estado presente. Assim, o mordomo foi interrogado.

2. Quando os preços são baixos, as vendas são altas. Se forem vendidos produtos de qualidade, então os clientes ficarão satisfeitos. Conseqüentemente, se os preços forem baixos e se venderem produtos de qualidade, as vendas serão altas ou os clientes ficarão satisfeitos.

No exemplo 1, as informações contidas nas premissas conduzem logicamente à conclusão de que o mordomo não foi interrogado. Logo, o argumento segue um esquema dedutivo, mas apresenta uma falha lógica ao enunciar a conclusão "o mordomo foi interrogado". O exemplo 2 apresenta um argumento dedutivo, cuja conclusão, mais complexa que a do exemplo 1, segue logicamente das premissas.

A distinção entre argumentos dedutivos válidos e dedutivos inválidos é possível ser feita com um certo esforço analítico, salvo em argumentos mais longos e complexos. Para avaliar essa capacidade analítica o exercício que se propõe é esboçar a conclusão dos argumentos que se seguem:

1. Se todos os nossos atos têm uma causa, então não há atos livres. Se não há atos livres, então todos os nossos atos têm uma causa. Logo, ...

2. Carlos Drumond é poeta e mineiro. Assim, ...

3. Se o mundo está em desordem, então se um sábio não aparece, o mundo não é reformável. Se, porém, o mundo está em desordem, não aparece um sábio. Por conseguinte, ...

É possível também, deduzir a conclusão dos argumentos abaixo (ver [1]), onde o símbolo $\vdash$ representa a relação de conseqüência lógica:

a) $x + 0 = y \rightarrow x = y, x + 0 = y \vdash$
b) $x \neq 0 \rightarrow x + y \neq y, x + y = y \vdash$
c) $x + 8 = 12 \vee x \neq 4, x + 8 \neq 12 \vdash$
d) $xy = 6 \rightarrow xy + 5 = 11, xy + 5 = 11 \rightarrow y = 2 \vdash$

Os argumentos indutivos, grosso modo, são classificados em *fortes* ou *fracos*, conforme o grau de certeza que a conclusão recebe das premissas. Nesses argumentos, a conclusão contém informações que não estavam contidas nas premissas. Suas formas mais comuns são a enumeração, a analogia e a eliminação.

3.1.1 Indução por enumeração

Um tipo especial de indução por enumeração já havia sido estabelecida por Aristóteles que a denominava indução completa ou formal. A enumeração é utilizada quando uma conclusão é enunciada para todos os elementos ou para um determinado elemento de uma categoria, a partir de elementos dessa categoria que foram observados ou analisados. A indução por enumeração completa (aristotélica) é aquela em que todos os elementos da categoria foram observado, como ilustra o exemplo a seguir:

a) Se a segunda-feira, a terça-feira, a quarta-feira, a quinta-feira, a sexta-feira, o sábado e o domingo têm 24 horas de duração e são os dias da semana, conclui-se que todos os dias da semana têm 24 horas.

Uma análise superficial desse argumento é suficiente para mostrar que a conclusão é garantida logicamente pelas premissas, pois se já é dada uma característica de todos os elementos (terem 24 horas de duração), não constitui algo novo ou diferente o que está afirmado na conclusão. Esse resultado é ressaltado quando Galileu Galilei (1564 - 1642) e Francis Bacon (1561 - 1626) propuseram como modelo a "indução incompleta" também denominada de "científica", a qual se fundamenta na observação de que vários elementos do universo de análise (mas não todos) possuem uma determinada característica e enuncia-se uma conclusão atribuindo essa característica a todos os elementos ou a um elemento não observado. Os exemplos a seguir ilustram esse tipo de agumento indutivo:

a) Todos os números primos analisados podem ser escritos sob determinada forma. Logo, todos os números primos são expressos por essa forma.

b) Cerca de 80% dos estudantes de Ciências Exatas gostam de Física. Portanto, Carlos, aluno de Matemática, gosta de Física.

c) Da população de 170 milhões de pessoas com diabetes no mundo, 90% apresentam colesterol alto. Logo, 90% das pessoas no mundo têm colesterol alto.

d) A maioria dos brasileiros ganha salário mínimo. Daí conclui-se que José ganha salário mínimo.

É importante descrever as várias possibilidades de se usar esse tipo de lógica nos argumentos.

1. De uma amostra para uma população

a) Generalização indutiva: quando da amostra se elabora uma conclusão universal (hipótese).

Todos os animais observados eram mamíferos.

Logo, todos os animais são mamíferos.

b) Generalizações universais: a partir de informações obtidas de elementos observados obtém-se uma conclusão generalizando as informações para todos os elementos de uma amostra.

Todo universitário observado, da amostra, era usuário da internet.

Logo, todo universitário é usuário da internet.

c) Generalizações estatísticas: afirmam que apenas uma parte dos elementos de um conjunto possui uma tal propriedade.

85% das pessoas consultadas votaram no Partido dos trabalhadores (PT).

Portanto, 85% das pessoas são eleitores do PT.

2. De uma população para uma amostra da população

a) Estatística direta: a partir de informações sobre a população gera-se informações sobre uma de suas amostras tomada ao acaso.

80% dos estudantes de cursos noturnos trabalham.

Logo, 80% dos que irão matricular-se nos cursos noturnos serão pessoas que trabalham.

b) Singular: parte de uma população para um caso específico de seus componentes tomado ao acaso.

A maioria das pessoas que ganha salários fixos não possui casa própria.

Assim, José Américo, um assalariado (aleatoriamente escolhido) não possui casa própria.

3. De uma amostra para uma amostra

a) Preditiva-padrão: com base em elementos observados obtém-se uma conclusão para uma amostra aleatória.

Todas os metais até hoje observados dilataram-se quando são submetidos ao calor.

Logo, a estrutura metálica da ponte X, se dilatará quando aquecida.

b) Preditiva estatística: similar ao caso anterior, porém indicando o percentual estatístico:

Cerca de 85% dos estudantes de filosofia que conhecem grego, têm mais facilidade para ler obras originais.

Logo, de um grupo de estudantes de filosofia, escolhidos aleatoriamente, se conhecerem grego, cerca de 85% terão mais facilidade para ler as obras filosóficas originais.

c) Preditiva singular: semelhante ao caso anterior mas concluindo para um caso particular da amostra, tomado aleatoriamente.

Grande parte dos alunos de ciências humanas não gosta de matemática ou de lógica.

Logo, Igor, estudante de Comunicação, escolhido aleatoriamente, não gosta de matemática ou de lógica.

4. De conseqüências verificáveis de uma hipótese para a própria hipótese

Neste caso colocam-se os exemplos, próprios das ciências empíricas, em que a impossibilidade de se testar diretamente uma hipótese, que é um enunciado geral, parte-se das conseqüências verificáveis para se concluir a hipótese, como é possível observar no exemplo:

Com base nas informações obtidas através de fotografias tiradas a grande altitude ou do afastamento de um navio em relação a um observador em terra, é possível verificar que a terra é redonda.

Logo, a Terra é redonda.

3.1.2 Indução por analogia

Um argumento indutivo por analogia pode ser enunciado quando os objetos de um certo tipo são bastante semelhantes, em determinados aspectos, a objetos de outro tipo. Sabendo-se que os do primeiro tipo têm certo aspecto e não sabendo se os do segundo tipo apresentam esse aspecto, conclui-se, em função das semelhanças nos demais aspectos, que esses possuem o aspecto em pauta. Isso pode ser resumido na forma abaixo:

Objetos do tipo X têm as propriedades G, H, etc.
Objetos do tipo Y têm as propriedades G, H, etc.
Objetos do tipo X têm a propriedade F.
Logo, objetos do tipo Y têm a propriedade F.

Os argumentos indutivos por analogia são muito utilizados seja na linguagem comum, no discurso científico ou filosófico. Alguns textos ilustram isso:

a) Alguns pacifistas, em defesa da paz, da justiça e da fraternidade, argumentam mais ou menos nesses moldes: quando se planta trigo é o trigo que se colhe; quando se planta centeio, o centeio é que nasce; quem planta amoras não espera colher morangos. De maneira análoga, plantando o ódio e a morte, não é possível obter paz, justiça e fraternidade.

b) Uma das formas de discutir o problema da existência de outras mentes é indicar que existem outras mentes, pela experiência individual. Cada pessoa tem conhecimento de seus próprios estados mentais, como os resultantes de uma sensação de dor ou de alegria. A partir da crença de que as pessoas têm experiências muito parecidas, infere-se que elas também têm mente, porque estão agindo como se estivessem pensando, duvidando, desejando, sentindo dor ou prazer, etc.

c) Um argumento usado para explicar a existência de Deus, refere-se às criações e aos seus criadores: "(...) Olhem para o mundo: contemplem-no e notem cada uma de suas partes: verão que não passa de uma grande máquina, subdividida numa infinidade de mecanismos menores, subdivididos, por seu turno, em partes ainda menores, até um ponto que as faculdades humanas são incapazes de acompanhar e explicar. Todas essas máquinas e todas as suas diminutas peças estão minuciosamente ajustadas, provocando a admiração de todos os homens que a examinaram. A feliz combinação de meios e fins, em toda a natureza, embora muito mais perfeita, lembra a que se dá nas produções do engenho humano, projetadas com sabedoria e inteligência. Como os efeitos se parecem, inferimos, guiados pelas regras da analogia, que também as causas são semelhantes; inferimos que o Autor da Natureza é, de algum modo, parecido com a mente humana, embora, com muito maiores poderes, compatíveis com a grandiosidade da obra que executou."(David Hume, Dialogues concerning natural religion).

d) Podemos observar uma semelhança muito grande entre esta Terra que habitamos e os outros planetas, Saturno, Júpiter, Marte, Vênus e Mercúrio. Todos eles gravitam em torno do Sol, tal como a Terra, embora a diferentes distâncias e em períodos diferentes. Todos recebem sua luz do Sol, tal como a Terra. Sabe-se que muitos deles giram em redor de seus eixos, tal como a Terra; e, por isso, devem também apresentar uma sucessão de dias e noites. Alguns deles têm luas, que servem para dar-lhes luz na ausência do Sol, tal como nossa Lua nos dá. Todos eles, em seus movimentos, estão sujeitos à mesma lei de gravitação, tal como acontece à Terra. Baseando-se em todas estas semelhanças, não é disparatado pensar que esses planetas, à semelhança da Terra, possam estar habitados por criaturas viventes de várias ordens. Existe uma certa probabilidade nesta conclusão por analogia. (Thomas Reid, Essays on the Intellectual Powers of Man (Ensaio I, capítulo 4).

e) Dissemos que as pessoas normais têm pouca motivação para desenvolver esforços especiais no estudo por iniciativa própria. A mesma coisa é verdadeira

> a respeito da aritmética. Se a motivação não fosse suprida pelos pais e a pressão da escola, haveria pouca aprendizagem em matemática. Por analogia, parece possível que as crianças pudessem ser motivadas e treinadas para usar seus recursos mentais na resolução de problemas emocionais. Elas não recebem quase nenhum treino nesse importante domínio, atualmente. (John Dollard, Neal E. Miller, Personality and Psichotherapy. Copyright, 1950. McGraw-Hill Book Company, Inc.).

Evidentemente, algumas falhas podem ocorrer nessa forma de argumentar. Observa-se, por exemplo, que a) contém uma analogia bastante fraca, por tratar de "plantações"de diferentes tipos, e que o analogia contida em d) é forte.

3.1.3 Indução por eliminação

Outra forma de argumento indutivo é utilizada, principalmente, na investigação científica, quando se deseja explicar os fenômenos, pela formulação de uma hipótese. As hipóteses formuladas procuram estabelecer as relações necessárias ou suficientes entre os condicionantes e os fenômenos, mas nem todas as hipóteses cumprem essa função de explicação causal. Para decidir, numa lista de hipóteses, qual aquela que estabelece uma relação causal, evidenciando a causa necessária ou suficiente para um dado fenômeno, usa-se os Métodos de Eliminação. Os dois princípios básicos da eliminação são:

a) Uma condição necessária de um fenômeno não pode estar ausente quando o fenômeno estar presente.

b) Uma condição suficiente de um fenômeno não pode estar presente quando o fenômeno está ausente.

Para utilizar esses princípios, alguns métodos foram estabelecidos. Entre eles encontram-se: o método da concordância, método da diferença, o método combinado da concordância direta e da diferença. Esses métodos são designados por "Métodos de Mill de inferência indutiva", propostos por John Stuart Mill (1806-1873).

A formulação geral do Método da Concordância é: Se dois ou mais casos do fenômeno que se investiga têm somente uma circunstância em comum, a circunstância em que todos os casos concordam é a causa necessária do fenômeno dado. Se letras maiúsculas representam as circunstâncias e as letras minúsculas representam os fenômenos, tem-se o seguinte argumento:

A B C D ocorrem juntamente com a b c d.
A E F G ocorrem juntamente com a e f g.
Portanto, A é a causa de a.

Exemplo:

As possíveis propriedades condicionantes da combustão são a presença de oxigênio (O), de hidrogênio (H), de uma centelha (C) e o aumento de temperatura

(A). Após algumas observações constata-se que é a presença de oxigênio que causa combustão, conforme tabela abaixo.

Tabela 1

Caso	Possíveis condicionantes				Fenômeno
	A	C	O	H	E
1	P	P	P	A	P
2	P	A	P	P	P
3	A	P	P	A	P

No caso 1. observa-se que o hidrogênio está ausente quando o fenômeno está presente. Isso significa que não pode ser a causa necessária. Os casos 2 e 3 mostram que a centelha e o aumento de temperatura, respectivamente, não podem ser condições necessárias do fenômeno, visto que estão ausentes quando o fenômeno está presente. A condicionante não eliminada é o oxigênio. Portanto, a possível condição necessária para que ocorra a combustão é a presença de oxigênio.

Método da Diferença: deseja-se determinar condições suficientes de um fenômeno numa ocorrência particular.

Exemplo:

As hipóteses para a morte de um cidadão são: A = afogamento, C = colapso, S = estrangulamento, V = envenenamento. São feitas três observações apresentadas na tabela 2.

Tabela 2

Caso	Possíveis condicionantes				Fenômeno
	A	S	C	V	E
x	P	A	P	P	P
1	P	A	A	P	A
2	A	A	A	A	A

Obtém-se que o caso 1 elimina A e V como condição suficiente, pois estão presentes quando o fenômeno está ausente. O caso 2 reforça essa conclusão porque na ausência das referidas condições o fenômeno não correu. A condição S não foi eliminada como condição suficiente pelo princípio de eliminação, mas não pode ser responsável pelo fenômeno no caso x, por estar ausente nesse caso e uma propriedade só pode ser a condição suficiente do fenômeno para essa ocorrência particular, quando ela está presente nessa ocorrência e ausente todas as vezes que o fenômeno estiver ausente.

O Método Combinado é utilizado quando se quer determinar a condição necessária e a condição suficiente para um fenômeno, em uma certa ocorrência x.

Exemplo:

Suponha que se tenha como possíveis causas da complicação do quadro de um paciente que fez uma cirurgia as condições L = lesão cerebral, T = trombose, H = hepatite, I = infecção bacteriana. Na tabela que segue são apresentadas três observações.

Tabela 3

Caso	Possíveis condicionantes								Fenômeno
	Simples				Complexas				
	T	H	L	U	∼T	∼H	∼L	∼U	E
x	P	A	P	A	A	P	A	P	P
2	P	A	A	A	A	P	P	P	A
3	A	P	P	P	P	A	A	A	P

Pelo Método da Diferença, observa-se que as propriedades T, L, ∼ H e ∼U podem ser condição suficiente do fenômeno, pois em x estão presentes na presença do fenômeno. Mas a observação 1 evidencia que T, ∼U e ∼H não o podem ser, dado que estão presentes quando o fenômeno está ausente. A única possível é a condição L, ausente, quando o fenômeno não ocorre. Já as condições H, U, ∼T e ∼L são eliminadas como condição necessária para E, na ocorrência x, pois estão ausentes quando E ocorre. Observa-se que apenas a condição L, está presente em todas as ocorrências de E. Portanto L é a condição necessária e suficiente para a ocorrência do fenômeno.

Esses métodos formulados por Stuart Mill, acrescentando o Método dos Resíduos e de Variação Concomitante, constituem verdadeiros cânones da inferência indutiva. Apenas para ilustrar, apresentam-se os esquemas dos dois últimos.

Método dos Resíduos:

A B C -------- a b c

B é causa conhecida de b.

C é a causa conhecida de c

Logo, A é a causa de a.

O exemplo apresentado por ([5], p. 348), é o do argumento sobre a descoberta do planeta Netuno.

"Em 1821, Bouvard de Paris publicou tábuas de movimentos de alguns planetas, entre eles e Urano. Ao preparar as tábuas do último, depara-se com uma grande dificuldade para fazer concordar a órbita calculada, baseada, a partir das observações realizadas, imediatamente após sua descoberta. Finalmente, pôs de lado as observações mais antigas e baseou suas tábuas nas observações mais recentes. Mas, em poucos anos, as posições calculadas das tábuas divergiam das posições observados dos planetas, e, em 1844, a discrepância atingia 2 minutos de arco. Como os movimentos de todos os outros planetas coincidiam com os calculados anteriormente, a discrepância no caso de Urano originou muitas discussões.

Em 1845, Leverrier, então um jovem, atacou o problema. Reviu os cálculos de Bouvard e achou-os, essencialmente, corretos. Pressentiu, então, que a única explicação satisfatória para o problema deveria ser encontrada na presença de um planeta que estivesse situado mais além de Urano, e que perturbaria os movimentos deste. Em meados de 1846, Leverrier concluiu os seus cálculos. Em setembro, escreveu a Galle, em Berlim, e solicitou-lhe que procurasse um novo planeta em determinada região do céu. Da qual novos mapas das estrelas tinham sido, recentemente, preparados na Alemanha; porém, segundo parecia, Leverrier ainda não recebera cópias. Em 23 de setembro, Galle iniciou a busca e, em menos de uma hora, encontrou um objeto que não figurava no mapa. Na noite seguinte, esse objeto moveu-se apreciavelmente, e o novo planeta, logo batizado de Netuno, foi descoberto a 1º do lugar que fora previsto. Esta descoberta figura entre as maiores realizações da astronomia matemática."

O Método da Variação Concomitante é mais complicado, mas tenta refletir a interconexão entre fenômenos e pode ser resumido como segue: Um fenômeno que varia de qualquer maneira, sempre que um outro fenômeno varia de uma determinada maneira, é uma causa ou um efeito desse fenômeno, ou está com ele relacionado, através de algum fato de causalidade.

Nos outros métodos obtém-se apenas as causas necessárias ou suficientes de um dado fenômeno e esse é um aspecto qualitativo da investigação científica. O Método da Variação Concomitante introduz o aspecto quantitativo, quando avalia em que grau (+ e -, para indicar, respectivamente, "maior" ou "menor" grau) um fenômeno variável está presente em determinada situação. O esquema abaixo representa essa variação.

A B C ------- a b c

A + B C------- a + b c

A - B C ------- a - b c

Portanto, A e a estão causalmente ligados.

Variados são os exemplos que a ciência em geral fornece desse método. Apenas para ilustrar, cita-se o caso dos preços das mercadorias e de suas vendas, e o da dimensão de uma colheita e a qualidade do fertilizante utilizado, etc.

Sem mais detalhes, é importante ressaltar que o uso rigoroso dos métodos apresentados, ainda não é suficiente para garantir que as conclusões obtidas nos argumentos sejam verdadeiras. Nessas formas indutivas de argumentação, a conclusão dos argumentos são apenas verdades possíveis, mesmo que todos os pressupostos (premissas) sejam verdadeiros.

3.2 Análise de argumentos por enumeração e analogia

A análise dos argumentos indutivos expostos seja por enumeração ou por analogia, indica que mesmo que as suas premissas sejam verdadeiras, suas conclusões podem ser falsas. Assim, a argumentação por indução não assegura a certeza da conclusão, as premissas apenas conferem verossimilhança ou probabilidade de sua certeza. Porém, há critérios para se dizer se esses argumentos são fortes ou fracos (falaciosos). Na enumeração, são relevantes a quantidade e a qualidade dos objetos observados, de modo que, quanto maior a amostra e quanto mais representativa ela for, maior será a força indutiva, ou seja, maior será a probabilidade de se obter uma conclusão verdadeira. De acordo com esses critérios, o argumento contido no item b), acima, é um argumento forte, pois a premissa fornece uma informação sobre 80% dos alunos das Ciências Exatas, enquanto o item c) contém um argumento falacioso, uma vez que a conclusão traz uma generalização estatística fundamentada em uma amostra que é insuficiente (dos 170 milhões de diabéticos) e tendenciosa (os diabéticos em relação à população mundial).

Na analogia a análise recai, principalmente, na quantidade de objetos comparados, de semelhanças e dessemelhanças entre os objetos, de modo que, quanto maior o número de objetos comparados e de semelhanças entre eles, maior a força indutiva das premissas para a conclusão. Inversamente, a certeza da conclusão diminui à medida em que aumenta o número de dessemelhanças entre os objetos comparados. Desse modo, as conclusões sobre o uso de certas substâncias em humanos a partir de observações e experimentos com ratos têm alta probabilidade de serem verdadeiras, enquanto que a conclusão sobre a existência de seres vivos em Marte tem baixa probabilidade de ser verdadeira, face à informação de que, tal como a Terra, Marte recebe a luz do Sol.

A avaliação da força dos argumentos indutivos é tarefa inerente à lógica denominada "indutiva"e a discussão sobre a validade dos argumentos dedutivos é parte da tarefa da lógica chamada "dedutiva". Obviamente, os argumentos dedutivos e indutivos se mesclam nos discursos, mas é objetivo deste trabalho a avaliação da validade dos argumentos. E assim, tratar-se-á no próximo capítulo da contribuição da lógica formal nessa avaliação.

Capítulo 4

LINGUAGEM E LÓGICA FORMAL

Na linguagem informal, é possível se cometer erros lógicos na argumentação. Tais erros denominados de *falácias formais* decorrem, geralmente, de ambigüidades e imprecisões da linguagem natural ou ainda devido a falhas no modo de gerar inferências do ser humano (aspecto não muito raro segundo Pinker [10]). Por exemplo, se à sentença *Se chove, as ruas ficam molhadas*, acrescenta-se a sentença que informa que *As ruas estão molhadas*, alguém pode concluir, erroneamente, que *Choveu*. Mas se à primeira sentença adiciona-se *Choveu*, conclui-se corretamente que *As ruas estão molhadas*.

Evidencia-se assim que, a forma segundo a qual as sentenças estão arranjadas em um argumento (e conseqüentemente, em um discurso) é um fator determinante na sua correção lógica. Considerando que a lógica formal trata dos arranjos dos elementos constituintes de uma linguagem segundo certos princípios, depreende-se que as falhas lógicas podem ser percebidas e corrigidas mais facilmente, pela avaliação dos argumentos no âmbito dessa lógica, entendida aqui como um sistema formal com linguagem (vocabulário e regras de formação) e postulados (regras ou axiomas) e uma noção de conseqüência lógica bem definidos. Esse era o ideal de Frege. Nesta perspectiva apresenta-se, a seguir, a linguagem de uma Lógica de Predicados, P, de 1ª Ordem.([8]).

4.1 LINGUAGEM

Seja L a linguagem de P. A linguagem L contém tem os símbolos lógicos e os não-lógicos. Os primeiros são:

a) conectivos: $\sim$ (negação), $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção), $\rightarrow$ (condicional), $\leftrightarrow$ (bicondicional),

b) quantificadores: $\forall$ (quantificador universal), $\exists$ (quantificador existencial),

c) parênteses: (,).

E os símbolos não-lógicos são:
a) letras predicativas: A, B, C, ...Z, A_1, B_1, C_1,..., Z_1, ...
b) constantes ou letras funcionais: a, b, c, ..., t, a_1, b_1, c_1, ..., t_1,...
c) variáveis individuais: u, v, x, y, z, w, u_1, v_1, x_1, y_1, z_1, w_1, ...

Com essa linguagem é possível obter-se inúmeras seqüências finitas de símbolos lógicos e não-lógicos, que são denominadas *expressões* ou, simplesmente, *fórmulas*. Por exemplo, xb(Av), A $\forall \rightarrow$, $\forall$x(Ax $\rightarrow Bx$) e (A $\vee$ B) são expressões, das quais algumas têm um significado que será especificado da definição de *fórmulas bem formadas*.

Definição 6 *(fórmulas bem formadas (fbf) ou fórmula):*

1. *Se Φ é uma letra predicativa seguida de zero ou mais constantes, Φ é uma fbf (fórmula atômica)*

2. *Se Φ é uma fbf, então $\sim \Phi$ é uma fbf.*

3. *Se Φ e Ψ são fbfs, então $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \rightarrow \Psi)$ e $(\Phi \leftrightarrow \Psi)$ são fbf's.*

4. *Se Φ é uma fbf e β é uma variável, então $\forall\beta\Phi^{\beta}/_{\alpha}$ é uma fbf, onde $\Phi^{\beta}/_{\alpha}$ é o resultado da substituição de todas as ocorrências da constante α de Φ por uma variável β que não ocorre em Φ.*

5. *Se Φ é uma fbf e β é uma variável, então $\exists\beta\Phi^{\beta}/_{\alpha}$ é uma fbf, onde $\Phi^{\beta}/_{\alpha}$ é o resultado da substituição de todas as ocorrências da constante α de Φ por uma variável β que não ocorre em Φ.*

6. *Φ é uma fbf se, e somente se, é obtida pelas condições acima enumeradas.*

De acordo com essa definição, as formulas xb(Av) e A$\forall \rightarrow$ não são bem formadas, mas $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$ e (A $\vee$ B) o são.

Um exercício de aplicação da definição dada, consiste em aplicá-la para determinar quais das expressões abaixo são fórmulas bem formadas:

1. $\forall x \exists y Fx$

2. $\exists x Fx \vee Ba$

3. $\forall x Ax \wedge \exists y Fy$

4. ($\sim$ R)

5. Ba $\rightarrow\sim$ A

6. $\sim$ P $\leftrightarrow$ (Q $\wedge$ R)

Por aplicação da definição constata-se que os itens 1 e 4 não contêm fórmula pelos itens 5 e 1 respectivamente.

4.2 REGRAS DE INFERÊNCIA

Introdução da Conjunção (I$\wedge$):

$$\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi$$

Eliminação da Conjunção (E$\wedge$):

$$\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi$$

$$\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi$$

Introdução da Disjunção (I$\vee$):

$$\Phi \vdash \Phi \vee \Psi$$

$$\Psi \vdash \Phi \vee \Psi$$

Eliminação da Disjunção (E$\vee$):

$$\Phi \vee \Psi, \Phi \rightarrow \Theta, \Psi \rightarrow \Theta \vdash \Theta$$

Introdução da Negação (Prova Indireta ou Redução ao Absurdo) (RAA):
Se

$$\Phi \vdash \Psi$$

e

$$\Phi \vdash \sim \Psi$$

então

$$\sim \Phi$$

Eliminação da Negação (E$\sim$):

$$\sim\sim \Phi \vdash \Phi$$

Introdução do Condicional (Prova Direta ou Condicionalização) (I$\rightarrow$ ou PC):
Se

$$\Phi \vdash \Psi$$

então

$$\vdash \Phi \rightarrow \Psi$$

Eliminação do Condicional (*Modus Ponens*) (E$\rightarrow$):

$$\Phi \rightarrow \Psi, \Phi \vdash \Psi$$

Introdução do Bicondicional (I$\leftrightarrow$):

$$\Phi \rightarrow \Psi, \Psi \rightarrow \Phi \vdash \Phi \leftrightarrow \Psi$$

Eliminação do Bicondicional (E$\leftrightarrow$):

$$\Phi \leftrightarrow \Psi \vdash \Phi \rightarrow \Psi$$

$$\Phi \leftrightarrow \Psi \vdash \Psi \rightarrow \Phi$$

Introdução do Quantificador Universal (I$\forall$):

$$\Phi \vdash \forall\beta\Phi^{\beta}/_{\alpha}$$

desde que a constante α não ocorra em premissa ou hipótese vigente na linha em que Φ ocorre.

Eliminação do Quantificador Universal (E$\forall$):

$$\forall\beta\Phi \vdash \Phi^{\alpha}/_{\beta}$$

Introdução do Quantificador Existencial (I$\exists$):

$$\Phi \vdash \exists\beta\Phi^{\beta}/_{\alpha}$$

Eliminação do Quantificador Existencial (E$\exists$):

Se da fbf $\exists\beta\Phi$ e de uma hipótese $\Phi^{\alpha}/_{\beta}$ deriva-se uma fbf Ψ, então descarta-se a hipótese e infere-se Ψ, se α não ocorre em Ψ, nem em premissa ou em hipótese vigente no momento da aplicação da regra.

As definições de dedução e de teorema são necessárias para a finalidade deste trabalho.

Definição 7 *(dedução ou derivação de um conjunto Γ de fbf's): Uma dedução a partir de Γ é uma seqüência finita de fórmulas $\Phi_1, ..., \Phi_n$ de L em que cada $\Phi_i, 1 \leq i \leq n$, satisfaz uma das seguintes condições:*
1 $\Phi_i \in \Gamma$, ou
2 Φ_i é obtida de fbf's anteriores pela aplicação de uma regra de inferência.

Definição 8 *(Teorema de P): Uma fbf Φ é um teorema de P se somente se $\{ \}$ $\vdash \Phi$ (ou simplesmente $\vdash \Phi$).*

A lógica de predicados de 1ª ordem, assim definida, é uma lógica clássica, isto é, ela satisfaz os princípios tratados no item 1, que balizam a construção e a análise de discursos sobre a realidade, e particularmente a construção e a análise de argumentos. Se a argumentação é uma tarefa tão essencial à produção do conhecimento, não menos essencial é a tarefa de garantir a correção lógica da estrutura argumentativa, o que será feito a seguir. Os argumentos abaixo poderão ser avaliados após a sua tradução na linguagem L.

1. Nenhum atleta é estudioso. Carol não é atleta, pois ela é estudiosa.
2. Todas as operações no interior de uma máquina têm uma causa, porque todo evento tem uma causa e além disso, todas essas operações são eventos.
3. Os argumentos matemáticos são todos dedutivos. Ora, muitos argumentos matemáticos não são silogismos. Logo, muitos argumentos dedutivos não são silogismos.
4. Toda pedra é uma substância e todo ser vivo é também substância. Dado que todo homem é um ser vivo, conclui-se que todo homem é substância.
5. Todos os que exploram a confiança do povo são políticos ambiciosos. Os demagogos exploram a confiança do povo. Então os demagogos são políticos ambiciosos.
6. Todos os legumes são saborosos, mas alguns não alimentam. Sabendo-se que os legumes são vegetais, segue-se que alguns vegetais são saborosos mas não alimentam.

Alguns argumentos são instâncias das regras de inferências, ou seja, eles já se encontram na mesma forma de uma das regras apresentadas, Outros, porém, se apresentam em forma mais complexa e a derivação da conclusão pode exigir uma conjugação de várias regras ou uma aplicação reiterada da mesma regra.

Além das regras de inferências, consideradas primitivas, há muitas outras regras de inferências derivadas dessas que são bastante úteis na demonstração da validade dos argumentos. Algumas delas são apresentadas.

Modus Tollens (MT): Das fórmulas $\Phi \rightarrow \Psi$ e $\sim \Psi$, obtém-se $\sim \Phi$.

$$\Phi \rightarrow \Psi, \sim \Psi \vdash \sim \Phi$$

Demonstração:

1.	$\Phi \rightarrow \Psi$ premissa	
2.	$\sim \Psi$	premissa
3.	$\sim\sim \Phi$	hipótese por Redução ao Absurdo
4.	Φ	3 / E $\sim$
5.	Ψ	1, 4 / E $\rightarrow$
6.	$\Psi \wedge \Psi$	2, 5 / I $\wedge$
7.	$\sim\sim\sim \Phi$	3 - 6 / por Redução ao absurdo
8.	$\sim \Phi$	7 / E $\sim$

Alguns argumentos parecem ter essa forma lógica mas são falaciosos. Os exemplos são ilustrativos:

a) Se Rebeca estudar bastante, então será aprovada no exame final. Rebeca não estuda bastante. Logo, ela será reprovada no exame.

Trata-se de uma falácia, denominada "falácia da negação do antecedente", pois não necessariamente Rebeca será reprovada, caso não estude.

b) Se Rebeca estudar bastante, então será aprovada no exame final. Rebeca foi aprovada. Logo, ela estudou bastante.

Afirmar "Rebeca foi aprovada", que é afirmação do conseqüente da primeira premissa, não tem como conseqüência lógica que "ela tenha estudado".

Essa forma de argumento se chama "falácia da afirmação do conseqüente".

As falácias apresentadas, por suas semelhanças às Regras de Modus Ponens e de Modus Tollens, representam modos de argumentar muito comum, pelos falantes em geral, inclusive por pessoas com vida escolar ampla. O exemplo a seguir pode ilustrar isso:

> Se os senhores desejam pagar maiores impostos e comprar menos com o seu dinheiro e acreditam que não vale a pena ter um governo honesto, então os senhores devem votar no meu oponente. Não é verdade que os senhores estejam dispostos a pagar maiores impostos e a comprar menos com seu dinheiro ou que acreditem não valer a pena ter um governo honesto. Portanto, os senhores não devem votar no meu oponente. Votem em mim!

Contradição (CON): Das fórmulas Φ e $\sim\Phi$, infere-se qualquer fórmula Ψ.

$$\Phi, \sim\Phi \vdash \Psi$$

Demonstração:

1.	Φ	premissa
2.	$\sim\Phi$	premissa
3.	$\sim\Psi$	hipótese para Redução ao Absurdo
4.	$\Phi\wedge\sim\Phi$	1, 2 / I $\wedge$
5.	$\sim\sim\Psi$	3 - 4 / Redução ao Absurdo
6.	Ψ	5 / E $\sim$

Silogismo Disjuntivo (SD): Com base nas fórmulas $\Phi\vee\Psi$ e $\sim\Phi$, deduz-se Ψ.

$$\Phi\vee\Psi, \sim\Phi \vdash \Psi.$$

ou,

$$\Phi\vee\Psi, \sim\Psi \vdash \Phi.$$

Demonstração:

1.	$\Phi\vee\Psi$	premissa
2.	$\sim\Psi$	premissa
3.	Ψ	hipótese para I $\rightarrow$
4.	$\Psi\wedge\sim\Psi$	2, 3 / I $\wedge$
5.	Φ	4 / CON
6.	$\Psi\rightarrow\Phi$	3 - 5 / I $\rightarrow$
7.	Φ	hipótese para I $\rightarrow$
8.	$\Phi\rightarrow\Phi$	7 - 7 / I $\rightarrow$
9.	Φ	1, 6, 8 / E $\vee$

Silogismo hipotético (SH): Das fórmulas $\Phi \rightarrow \Psi$ e $\Psi \rightarrow \Lambda$, infere-se $\Phi \rightarrow \Lambda$

$$\Phi \rightarrow \Psi,\ \Psi \rightarrow \Lambda \vdash \Phi \rightarrow \Lambda$$

Demonstração:

1.	$\Phi \rightarrow \Psi$	premissa
2.	$\Psi \rightarrow \Lambda$	premissa
3.	Φ	hipótese por I $\rightarrow$
4.	Ψ	1, 3 / E $\rightarrow$
5.	Λ	2, 4 / E $\rightarrow$
6.	$\Phi \rightarrow \Lambda$	3 - 5 / I $\rightarrow$

Essa regra expressa que o operador condicional ($\rightarrow$) tem a propriedade de transitividade, o que mostra a sua larga utilização para justificar a validade de cadeias de sentenças condicionais, como ilustra o seguinte exemplo: "Se um dado polígono tem três lados, então ele possui três ângulos. Se o polígono possui três ângulos, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180º. Logo, se um polígono tem três lados, então a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180º."

Dilema Construtivo (DC): Das fórmulas $\Phi \vee \Psi$, $\Phi \rightarrow \Lambda$ e $\Psi \rightarrow \Xi$, segue-se que $\Lambda \vee \Xi$.

$$\Phi \vee \Psi,\ \Phi \rightarrow \Lambda,\ \Psi \rightarrow \Xi \vdash \Lambda \vee \Xi.$$

Essa regra representa *dilemas* em geral, que muitas vezes, mas não necessariamente, envolve uma escolha que não é agradável ou confortável para quem decide. Seguem exemplos para mostrar essa característica.

1. Um motorista foi obrigado a comparecer a um tribunal porque foi acusado de cometer uma infração, que realmente, não havia cometido. Ao ser interrogado sobre sua culpa ele se sente em dilema. Ou se diz culpado ou se considera inocente. Se se diz culpado, deverá pagar uma multa (não muito alta para ele) pela infração cometida. Ao se declarar inocente ficará o dia todo no tribunal para justificar (o que também lhe causaria transtornos). Logo, ou paga a multa por falta não cometida ou passa o dia no tribunal.

2. Sobre a existência do mal no universo não há muita discordância, apesar de existirem discussões sobre a sua natureza e implicações ou sobre sua presença na definição da natureza humana. A partir dessa afirmação, tem-se que Deus não pode ou não quer evitar o mal. Se Ele não deseja evitar o mal, Deus não é benevolente. Se Deus não pode evitar o mal, Ele não é onipotente. Portanto, ou Deus não é benevolente ou não é onipotente.

Introdução ou substituição de equivalentes: Se Φ e Ψ são interderiváveis e Φ é uma subfórmula (isto é, parte de uma fórmula bem formada que é uma fórmula bem formada) de alguma fórmula bem formada Λ, então de Λ infere-se o resultado da substituição de uma ou mais ocorrências de Φ em Λ por Ψ.

Além das regras derivadas acrescentam-se, agora, várias equivalências lógicas (suas denominações e respectivas abreviaturas), que podem ser demonstradas a partir de um conjunto de regras e que também são bastante úteis nas demonstrações, principalmente para contextos em que vale a regra de substituição de equivalentes.

1.	$\sim(\Phi \wedge \Psi) \leftrightarrow (\sim\Phi \vee \sim\Psi)$	Lei de De Morgan (DM)
2.	$\sim(\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow (\sim\Phi \wedge \sim\Psi)$	Lei de De Morgan (DM)
3.	$(\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow (\Psi \vee \Phi)$	Comutação (COMD)
4.	$(\Phi \wedge \Psi) \leftrightarrow (\Psi \wedge \Phi)$	Comutação (COMC)
5.	$(\Phi \vee (\Psi \vee \Lambda)) \leftrightarrow ((\Phi \vee \Psi) \vee \Lambda)$	Associação (ASSOC)
6.	$(\Phi \wedge (\Psi \wedge \Lambda)) \leftrightarrow ((\Phi \wedge \Psi) \wedge \Lambda)$	Associação (ASSOC)
7.	$(\Phi \wedge (\Psi \vee \Lambda)) \leftrightarrow ((\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Lambda))$	Distribuição (DIST)
8.	$(\Phi \vee (\Psi \wedge \Lambda)) \leftrightarrow ((\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \Lambda))$	Distribuição (DIST)
9.	$\Phi \leftrightarrow \sim\sim\Phi$	Dupla negação (DN)
10.	$(\Phi \rightarrow \Psi) \leftrightarrow (\sim\Psi \rightarrow \sim\Phi)$	Transposição (TRANS)
11.	$(\Phi \rightarrow \Psi) \leftrightarrow (\sim\Phi \text{ v } \Psi)$	Implicação material (IM)
12.	$((\Phi \wedge \Psi) \rightarrow \Lambda) \leftrightarrow (\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Lambda))$	Exportação (EXP)
13.	$\Phi \leftrightarrow (\Phi \wedge \Phi)$	Idempotência (IDEM)
14.	$\Phi \leftrightarrow (\Phi \text{ v } \Phi)$	Idempotência (IDEM)

O exemplo a seguir ilustra que o uso de regras derivadas e equivalências pode abreviar demonstrações que seriam muito longas, se fossem utilizadas apenas as regras de inferências primitivas.

Prove que $A \rightarrow (B \rightarrow \sim C), C \vdash \sim A \text{ v } \sim B$

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow \sim C)$	premissa
2.	C	premissa
3.	$(A \wedge B) \rightarrow \sim C$	1/ EXP
4.	$\sim\sim C$	2 / DN
5.	$\sim(A \wedge B)$	3, 4 / MT
6.	$\sim A \vee \sim B$	5 / DM

Com os recursos sintáticos aqui apresentados é possível provar a validade de argumentos com mais rigor. Retoma-se agora alguns dos argumentos listados na seção 3.1 para serem completados com uma conclusão que o tornassem válidos (p. 14). Após apresentar uma conclusão possível passa-se ao esboço da sua demonstração:

1. Se todos os atos têm uma causa , então não há ato livre. Se não há ato livre, então todos os nossos atos têm uma causa. Logo, os atos têm uma causa se, e somente se, não há ato livre.

   Simbolização:

   $\forall x(Ax \rightarrow Cx) \rightarrow\sim \exists xLx, \sim \exists xLx \rightarrow \forall x(Ax \rightarrow Cx) \vdash \forall x(Ax \rightarrow Cx) \rightarrow\sim \exists xLx) \leftrightarrow (\sim \exists xLx \rightarrow \forall x(Ax \rightarrow Cx))$

   Demonstração:

1.	$\forall x(Ax \rightarrow Cx) \rightarrow\sim \exists xLx$	premissa
2.	$\sim \exists xLx \rightarrow \forall x(Ax \rightarrow Cx)$	premissa
3.	$\forall x(Ax \rightarrow Cx) \rightarrow\sim \exists xLx) \leftrightarrow (\sim \exists xLx \rightarrow \forall x(Ax \rightarrow Cx))$	1, 2 / I $\leftrightarrow$

2. Carlos Drumond é poeta ou mineiro. Assim, Drumond é poeta.

   Simbolização:

   $Pc \wedge Mc \vdash Pc$

   Demonstração:

1.	$Pc \wedge Mc$	premissa
2.	Pc	1 / E $\wedge$

3. Se o mundo está em desordem, então se um sábio não aparece, o mundo não é reformável. Se, porém, o mundo está em desordem, não aparece um sábio. Por conseguinte, o mundo não é reformável, se está em desordem.

   Simbolização:

   $D \rightarrow (\sim S \rightarrow \sim R), D \rightarrow \sim S \vdash D \rightarrow \sim R$

   Demonstração:

1.	D $\rightarrow$ (~S $\rightarrow$ ~R)	premissa
2.	D $\rightarrow$ ~S	premissa
3.	(D $\wedge$ ~ S) $\rightarrow$ ~ R	1/ Exp
4.	D	hipótese por I $\rightarrow$
5.	~ S $\rightarrow$ ~R	1, 4 / E $\rightarrow$
6.	~ S	2, 5 / E $\rightarrow$
7.	~ R	5, 6 / E $\rightarrow$
8.	D $\rightarrow$ ~R	4 - 7 / I $\rightarrow$

4. xy = 6 $\rightarrow$ xy + 5 = 11, xy + 5 = 11 $\rightarrow$ y = 2 $\vdash$ xy = 6 $\rightarrow$ y = 2

   Simbolização:

   A $\rightarrow$ B, B $\rightarrow$ C $\vdash$ A $\rightarrow$ C

   Demonstração:

1.	A $\rightarrow$ B	premissa
2.	B $\rightarrow$ C	premissa
3.	A $\rightarrow$ C	1, 2 / SH

Agora serão esboçadas as demonstrações dos argumentos listados na seção 4.2, p. 29.

1. Nenhum atleta é estudioso. Carol não é atleta, pois ela é estudiosa.

   Simbolização:

   $\forall x$ (Ax $\rightarrow$ ~ Ex), Ec $\vdash$ ~Ac

   Demonstração:

1.	$\forall x$ (Ax $\rightarrow \sim$ Ex)	premissa
2.	Ec	premissa
3.	Ac $\rightarrow \sim$ Ec	1 / E$\forall$
4.	$\sim$ Ac	2, 3 / MT

2. Todas as operações no interior de uma máquina têm uma causa, porque todo evento tem uma causa e além disso, todos essas operações são eventos.

   Simbolização:

   $\forall$x (Ex $\rightarrow$ Cx), $\forall$x (Ox $\rightarrow$ Ex) $\vdash \forall x$ (Ox $\rightarrow$ Cx),

   Demonstração:

1.	$\forall$x (Ex $\rightarrow$ Cx)	premissa
2.	$\forall$x (Ox $\rightarrow$ Ex)	premissa
3.	Ea $\rightarrow$ Ca	1 / E$\forall$
4.	Oa $\rightarrow$ Ea	2 / E$\forall$
5.	Oa $\rightarrow$ Ca	3, 4 / SH
6.	$\forall$x (Ox $\rightarrow$ Cx)	5 / I$\forall$

3. Os argumentos matemáticos são todos dedutivos. Ora, muitos argumentos matemáticos não são silogísticos. Logo, muitos argumentos dedutivos não são silogísticos.

   Simbolização:

   $\forall$x (Ax $\rightarrow$ Dx), $\exists$x (Ax $\wedge \sim$ Sx) $\vdash \exists$x (Dx $\wedge \sim$Sx)

   Demonstração:

1.	$\forall$x (Ax $\rightarrow$ Dx)	premissa
2.	$\exists$x (Ax $\wedge \sim$ Sx)	premissa
3.	Aa $\wedge \sim$Sa	hipótese por E$\exists$
4.	Aa $\rightarrow$ Da	1 / E$\forall$
5.	Aa	3 / E $\wedge$
6.	Da	4, 5 / E $\rightarrow$
7.	$\sim$ Sa	3 / E $\wedge$
8.	Da $\wedge \sim$ Aa	6, 7 / I $\wedge$
9.	Da $\wedge \sim$ Aa	3 - 8 / E $\exists$
10.	$\exists$x (Dx $\wedge \sim$ Sx)	9 / I $\exists$

4. Toda pedra é uma substância e todo ser vivo é, também, substância. Dado que todo homem é um ser vivo, conclui-se que todo homem é substância.

   Simbolização:

   $\forall$x (Px $\rightarrow$ Sx), $\forall$x (Vx $\rightarrow$ Sx), $\forall$x (Hx $\rightarrow$ Vx) $\vdash \forall$x (Hx $\rightarrow$ Sx)

   Demonstração:

1.	$\forall$x (Px $\rightarrow$ Sx)	premissa
2.	$\forall$x (Vx $\rightarrow$ Sx)	premissa
3.	$\forall$x (Hx $\rightarrow$ Vx)	premissa
4.	Va $\rightarrow$ Sa	2 / E $\forall$
5.	Ha $\rightarrow$ Va	3 / E $\forall$
6.	Ha $\rightarrow$ Sa	4, 5 / SH
7.	$\forall$x (Hx $\rightarrow$ Sx)	6 / I $\forall$

Nessa demonstração, a primeira premissa, "$\forall$x (Px $\rightarrow$ Sx)", não foi utilizada para deduzir a conclusão, o que indica que ela é irrelevante para se obter $\forall$x (Hx $\rightarrow$ Sx).

5. Todos os que exploram a confiança do povo são políticos ambiciosos. Os demagogos exploram a confiança do povo. Então os demagogos são políticos ambiciosos.

   Simbolização:

   $\forall$x (Ex $\rightarrow$ Ax), $\forall$x (Dx $\rightarrow$ Ex) $\vdash$ $\forall$x (Dx $\rightarrow$ Ax)

   Demonstração:

1.	$\forall$x (Ex $\rightarrow$ Ax)	premissa
2.	$\forall$x (Dx $\rightarrow$ Ex)	premissa
3.	Ea $\rightarrow$ Aa	1 / E $\forall$
4.	Da $\rightarrow$ Ea	2 / E $\forall$
5.	Da $\rightarrow$ Aa	3, 4 / SH
6.	$\forall$x (Dx $\rightarrow$ Ax)	5 / I $\forall$

6. Todos os legumes são saborosos, mas alguns não alimentam. Sabendo-se que os legumes são vegetais, segue-se que alguns vegetais são saborosos mas não alimentam.

   Simbolização:

   $\forall$x (Lx $\rightarrow$ Sx), $\exists$x (Lx $\wedge \sim$ Ax), $\forall$x (Lx $\rightarrow$ Gx) $\vdash$ $\exists$x ((Gx $\wedge$ Sx) $\wedge \sim$ Ax)

   Demonstração:

1.	$\forall$x (Lx $\rightarrow$ Sx)	premissa
2.	$\exists$x (Lx $\wedge \sim$ Ax)	premissa
3.	$\forall$x (Lx $\rightarrow$ Gx)	premissa
4.	La $\wedge \sim$ Aa	hipótese por E $\exists$
5.	La	4 / E $\wedge$
6.	$\sim$ Aa	4 / E $\wedge$
7.	La $\rightarrow$ Sa	1 / E $\forall$
8.	La $\rightarrow$ Ga	3 / E $\forall$
9.	Sa	5, 7 / E $\rightarrow$
10.	Ga	5, 8 / E $\rightarrow$
11.	Ga $\wedge$ Sa	10, 9 / I $\wedge$
12.	(Ga $\wedge$ Sa) $\wedge \sim$ Aa	11, 6 / I $\wedge$
13.	(Ga $\wedge$ Sa) $\wedge \sim$ Aa	4 - 12 / E $\exists$
14.	$\exists$x ((Gx $\wedge$ Sx) $\wedge \sim$ Ax)	13 / I $\exists$

O uso das regras de inferências é útil, como foi visto, para provar, a validade dos argumentos. Mas não constitui um mecanismo para decidir se um argumento é ou não válido. Só com o tratamento semântico dos operadores lógicos é possível fazer essa análise. Para isso, serão apresentadas a seguir as definições semânticas dos operadores da linguagem L, a partir das quais se pode esboçar um procedimento para mostrar a não validade de argumentos.

4.2.1 Aspectos semânticos

Considerando que a lógica P, aqui apresentada, é clássica, vale o princípio do terceiro excluído, também denominado 'princípio da bivalência" por Jan Lukasiewicz. Segundo esse princípio, uma sentença tem apenas um valor de verdade. Assim, se Φ é uma sentença, o valor de verdade de Φ, $\mathbf{V}(\Phi) = \text{V}$ (Verdadeiro) ou $\mathbf{V}(\Phi) = \text{F}$ (Falso).

Para efeito de simplificação, cuida-se nessa seção dos aspectos semânticos da parte proposicional ou sentencial de P. Isso requer que seja apresentado o significado dos operadores de negação, ($\sim$), de conjunção ($\wedge$), de disjunção ($\vee$), de condicional ou implicação ($\rightarrow$) e de bicondicional ($\leftrightarrow$), ao que se seguirá um procedimento para a análise semântica de fórmulas bem formadas compostas.

A *negação* ($\sim$) é uma operação simples porém radical. É simples porque é monádica, ou seja, ela afeta uma sentença, atômica ou composta. E é radical porque altera, simetricamente, o sentido primitivo da sentença, de tal modo que, se a sentença é verdadeira, sua negação é falsa e vice-versa. Em resumo tem-se uma tabela de verdade para Φ e $\sim \Phi$:

Tabela 4

Φ	$\sim \Phi$
V	F
F	V

Assim, se a sentença "Hoje é sexta-feira" é verdadeira, sua negação "Hoje não é sexta-feira" é falsa e vice-versa.

A *conjunção* ($\wedge$) de duas sentenças também pode ser verdadeira ou falsa dependendo dos valores que cada sentença assume. A sentença "Newton é cientista e Newton é filósofo" é verdadeira se é verdadeiro que "Newton é cientista" e que "Newton é filósofo". Mas se ao menos uma dessas sentenças é falsa, a conjunção é falsa. Isso pode ser resumido como segue:

Tabela 5

Φ	Ψ	$\Phi \wedge \Psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A *disjunção* ($\vee$) é obtida quando sentenças são conectadas pela palavra *ou*, a qual pode ser interpretada de duas maneiras: inclusiva e exclusiva. Na lógica P, quando o contexto não especificar o contrário, Φ v Ψ é uma disjunção inclusiva, ou seja, ou Φ é verdadeira, ou Ψ é verdadeira ou ambas são verdadeiras. Usando as sentenças do exemplo anterior, "Newton é cientista ou filósofo" constitui uma disjunção inclusiva, própria da lógica clássica, uma vez que é possível também, que seja verdadeiro que "Newton é cientista" e que "Newton é filósofo". Desse modo, uma disjunção só é falsa quando ambas as sentenças constituintes (chamadas *disjunctos*) são falsas:

Tabela 6

Φ	Ψ	$\Phi \vee \Psi$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A disjunção exclusiva significa que apenas uma das sentenças componentes pode ser verdadeira. Na sentença "O número natural n ou é par ou é ímpar" o *ou* é exclusivo, pois ou "n é par" é verdadeira ou "n é ímpar" é verdadeira, ou ambas falsas, não sendo possível "n é par e n é ímpar" ser verdadeira também. Nesse caso, o *ou* significa alternação, cujo significado pode ser dado por $(\Phi \vee \Psi) \wedge \sim (\Phi \wedge \Psi)$ cuja tabela de verdade é:

Tabela 7

Φ	Ψ	$(\Phi \vee \Psi) \wedge \sim(\Phi \wedge \Psi)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

O *condicional* ($\rightarrow$) é chamado *condicional material*. A sentença $\Phi \rightarrow \Psi$ é verdadeira se e somente se, não é o caso que Φ é verdadeira e Ψ é falsa, ou seja, $\Phi \rightarrow \Psi$ é equivalente a $\sim (\Phi \wedge \sim \Psi)$. Assim, o condicional material é falso se o seu antecedente (Φ) é verdadeiro e conseqüente (Ψ) é falso. A sentença 'Se Newton é cientista, então é filósofo" é verdadeira em todos os casos, exceto quando a sentença "Newton é cientista" é verdadeira e "Newton é filósofo" é falsa. A seguir a tabela de valores:

Tabela 8

Φ	Ψ	$(\Phi \rightarrow \Psi)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Embora existam outros tipos de condicional, o condicional material ($\rightarrow$) tem sido usado em lógica e em matemática, pela sua simplicidade e ao mesmo tempo, pela sua abrangência.

O *bicondicional* ($\leftrightarrow$) é um condicional material em duas vias, pois $\Phi \leftrightarrow \Psi$ significa que $(\Phi \rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \rightarrow \Phi)$. A sentença "Newton é cientista" se, e somente se, "Newton é filósofo" é verdadeira se "Newton é cientista" e "Newton é filósofo" tiverem o mesmo valor de verdade.

Tabela 9

Φ	Ψ	$(\Phi \leftrightarrow \Psi)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

As tabelas de verdade para uma fórmula complexa Φ, tem o número de linhas diretamente proporcional ao número de sentenças constitutivas de Φ. Isto significa que o número de linhas da tabela é determinado pelo número de letras predicativas (de grau zero) de Φ, cujo valor é obtido por aplicação do princípio fundamental da contagem. Quando se tem n letras predicativas em Φ, cada uma das quais só pode ser **V** ou **F**, o número de linhas é dado por $\underbrace{2.2.2.....2}_{n\ vezes} = 2^n$.

Cada uma das n colunas da tabela de verdade de Φ deve ser preenchida com blocos de $\frac{2^n}{2}$ V's e $\frac{2^n}{2}$ F's, que representam as combinações possíveis de V's e F's das sentenças constituintes. Após o preenchimento das colunas que contêm letras predicativas calcula-se o valor de verdade de cada subfórmula de Φ. O valor de verdade de Φ é dado pela coluna de valores do operador principal de Φ.

Pode ser obtido nesse resultado final, uma coluna de V's, uma coluna de F's ou uma coluna com V's e F's. De acordo com esse resultado a sentença complexa Φ

pode ser *tautológica*, quando todos os valores são verdadeiros, *inconsistente* quando todos os valores são F's, e *contingente*, quando há V's e F's.

A tabela de verdade, construída de acordo com essas regras, constitui um procedimento efetivo (mecânico, pois cada passo pode ser realizado rigorosamente, através de aplicação de regras) para se decidir se um certo argumento é válido ou inválido.

Dado um argumento, faz-se a simbolização na linguagem L, constrói-se a tabela de verdade do condicional correspondente ao argumento (isto é, o condicional cujo antecedente é formado pela conjunção de todas as premissas e cujo conseqüente é a conclusão do argumento) e analisa-se o resultado final. Se esse resultado apresenta uma tautologia, o argumento é *válido*, se apresenta uma inconsistência ou uma contingência o argumento é *inválido*.

Desse modo, a tabela de verdade é um procedimento efetivo para decidir sobre a invalidade ou validade dos argumentos, como ilustram os exemplos.

1. Carlos Drumond é poeta ou mineiro. Assim, Drumond é poeta.

Simbolização: Pc $\wedge$ Mc $\vdash$ Pc

Condicional correspondente: (Pc $\wedge$ Mc) $\rightarrow$ Pc

Tabela 10

Pc	Mc	Pc $\wedge$ Mc	(Pc $\wedge$ Mc) $\rightarrow$ Pc
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

A validade desse argumento já havia sido demonstrada, anteriormente, por aplicação de regras de inferência. O procedimento semântico deve, portanto, confirmar esse resultado. De acordo com o resultado final, o condicional correspondente ao argumento (dado pela fórmula (Pc $\wedge$ Mc) $\rightarrow$ Pc) é tautológico, o que garante semanticamente a sua validade.

2. Se o mundo está em desordem, então se um sábio não aparece, o mundo não é reformável. Se, porém, o mundo está em desordem, não aparece um sábio. Por conseguinte, o mundo não é reformável, se está em desordem.

Simbolização: D $\rightarrow$ ($\sim$S $\rightarrow$ $\sim$R), D $\rightarrow$ $\sim$S $\vdash$ D $\rightarrow$ $\sim$R

Condicional correspondente: : ((D $\rightarrow$ ($\sim$S $\rightarrow$ $\sim$R)) $\wedge$ (D $\rightarrow$ $\sim$S)) $\rightarrow$ (D $\rightarrow$ $\sim$R)

Esse argumento contém três sentenças diferentes representadas por D, S e R. Daí, a tabela terá $2^3 = 8$ linhas. Os algarismos de 1 - 8, colocados abaixo dos operadores indicam a ordem de cálculo das operações lógicas.

Tabela 11

D	S	R	~S	~R	$((D \rightarrow (\sim S \rightarrow \sim R)) \wedge (D \rightarrow \sim S)) \rightarrow (D \rightarrow \sim R)$					
			(1)	(2)	(4)	(3)	(6)	(5)	(8)	(7)
V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	F
F	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V

Conforme o resultado obtido na coluna (8), o condicional correspondente é tautológico, do que se segue a validade do argumento analisado.

3. Se 7 é menor que quatro, então 7 não é primo. 7 não é menor que 4. Logo, 7 é primo.

Simbolização: S $\rightarrow \sim$ P, $\sim$ S $\vdash$ P

Condicional correspondente: ((S $\rightarrow \sim$ P) $\wedge \sim$ S) $\rightarrow$ P

Tabela 12

S	P	~S	~P	S → ~P	$((S \rightarrow \sim P) \wedge \sim S))$	$((S \rightarrow \sim P)) \wedge \sim S) \rightarrow P$
V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	F

É possível observar que o condicional correspondente ao argumento é contingente, pois apresenta na linha 4 da tabela o valor F (falso). Isso mostra que o argumento é inválido. Esse resultado esclarece a definição de argumento dedutivo válido, anteriormente, apresentada. A definição estabelece que o argumento dedutivo válido é aquele em que não ocorre que as premissas sejam verdadeiras (V) e a conclusão seja falsa (F), isto é, em um argumento válido, quando as premissas são verdadeiras, a conclusão também é verdadeira.

As tabelas de verdade são mecanismos bastante interessantes para a parte proposicional da lógica. Contudo, elas não constituem um procedimento adequado para testar a invalidade dos argumentos que envolvem os quantificadores e variáveis, uma vez que as variáveis assumem valores em domínios que podem ser conjuntos finitos com grande cardinalidade ou conjuntos infinitos. Quando isso ocorre, um procedimento algorítmico, mecânico, não pode ser aplicado. Esse resultado é chamado de *indecidibilidade* do cálculo de predicados de 1ª ordem. Existem, entretanto, alguns métodos que podem ser utilizados para certas formas de argumentos desse cálculo. Entre esses métodos encontram-se os *diagramas de Euler* (mais conhecidos por *diagramas de Venn*) e as árvores de refutação. Mas nenhum dos dois se aplica de forma geral nem pode garantir que, seguindo um conjunto de passos, mesmo um grande número deles, se obtenha a resposta procurada, qual seja, a invalidade ou validade do argumento analisado. Por essa razão, a análise desses argumentos através do uso de regras de inferências é mais adequada. No entanto, isso não significa que a lógica de predicados não tenha uma semântica bem definida (ver [9]).

Capítulo 5

ARGUMENTAÇÃO E DEMONSTRAÇÃO DE VALIDADE

Conforme os capítulos anteriores, fica evidenciado que a argumentação é uma tarefa lingüística, mas a garantia de sua correção lógica pode ser fornecida no plano de uma linguagem formal. O exercício a ser feito é simbolizar os argumentos na linguagem formal da lógica em apreço e desenvolver uma derivação da conclusão a partir do conjunto de premissas do argumento, utilizando-se para isto as regras de inferências já estabelecidas. Além disto, com base nessa derivação e na regra de condicionalização (referida anteriormente) a fórmula resultante da simbolização de um argumento válido é um teorema do sistema, visto que a demonstração da sua validade pode ser feita na lógica P.

A seguinte sentença da teoria de conjuntos (formalizada com base na lógica de predicados de 1ª ordem P) ilustra o que foi afirmado:

"Dados os conjuntos A, B e D, se $A \subset B$ e $B \subset D$, então $A \subset D$".

Para provar a validade deste argumento, faz-se primeiramente a tradução para linguagem formal e em seguida a dedução.

Premissa 1. $\forall x\ (Ax \rightarrow Bx)$

Premissa 2. $\forall x\ (Bx \rightarrow Dx)$

Conclusão: $\forall x\ (Ax \rightarrow Dx)$

O teorema correspondente a essa forma de argumento é a fórmula $((\forall x\ (Ax \rightarrow Bx) \land \forall x\ (Bx \rightarrow Dx)) \rightarrow \forall x\ (Ax \rightarrow Dx))$.

Dedução:

1.	$\forall$ x (Ax $\rightarrow$ Bx) $\wedge$ $\forall$ x (Bx $\rightarrow$ Dx)	Hipótese.
2.	$\forall$ x (Ax $\rightarrow$ Bx)	1/ E$\wedge$
3.	$\forall$ x (Bx $\rightarrow$ Dx)	1/ E$\wedge$
4.	Aa $\rightarrow$ Ba	2/ E$\forall$
5.	Ba $\rightarrow$ Da	3/ E$\forall$
6.	Aa $\rightarrow$ Da	4, 5 (Transit. de $\rightarrow$)
7.	$\forall$ x (Ax $\rightarrow$ Dx)	6 / I$\forall$
8.	(($\forall$ x (Ax $\rightarrow$ Bx) $\wedge$ $\forall$ x (Bx $\rightarrow$ Dx))$\rightarrow$ $\forall$ x (Ax $\rightarrow$ Dx)	1 − 7/ I$\rightarrow$

Assim obtém-se que $\vdash$ (($\forall$ x (Ax $\rightarrow$ Bx) $\wedge$ $\forall$ x (Bx $\rightarrow$ Dx))$\rightarrow$ $\forall$ (Ax $\rightarrow$ Dx), ou seja, a sentença "Dados os conjuntos A, B e D, se A $\subset$ B e B $\subset$ D, então A $\subset$ D" é um teorema da referida teoria.

Antes de apresentar outros exemplos das formas de demonstração de validade (que aqui está sendo denominada de dedução) é importante apresentar os vários modos de se apresentar os teoremas nas teorias matemáticas, bem como alguns teoremas lógicos fundamentais para facilitar as simbolizações em L e as deduções, tendo como subjacente a lógica P.

Os teoremas das teorias matemáticas apresentam-se, em geral, na forma de:
a) enunciado condicional (se ..., então ...),
b) enunciado universal (para todo), ou
c) enunciado existencial.

No primeiro caso os enunciados são simbolizados na forma $\Phi \rightarrow \Psi$. Em relação a esse condicional define-se o seu *recíproco* por $\Psi \rightarrow \Phi$, o *contrário* por $\sim \Phi \rightarrow \sim \Psi$, e o *contrapositivo* por $\sim \Psi \rightarrow \sim \Phi$, que são denominados enunciados *aparentados* .

Um exemplo pode mostrar como esses enunciados e suas conversões são freqüentes em matemática. Dado o enunciado "Se dois lados de um triângulo são congruentes, então os ângulos opostos aos lados congruentes são congruentes", os condicionais aparentados são os que se seguem.

Recíproco: "Se os ângulos opostos aos lados congruentes de um triângulo são congruentes, então os dois lados do triângulo são congruentes".

Contrário: "Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos aos lados congruentes não são congruentes".

Contrapositivo: "Se os ângulos opostos aos lados congruentes de um triângulo não são congruentes, então os dois lados do triângulo não são congruentes".

É fácil provar as seguintes equivalências lógicas:

a) $\vdash (\Phi \rightarrow \Psi) \leftrightarrow (\sim \Psi \rightarrow \sim \Phi)$ (o condicional é equivalente ao seu contrapositivo)

b) $\vdash (\Psi \rightarrow \Phi) \leftrightarrow (\sim \Phi \rightarrow \sim \Psi)$ (o recíproco é equivalente ao contrário do condicional).

Essas equivalências podem ser utilizadas para melhorar a compreensão de um teorema e de sua demonstração. Por exemplo, para o condicional: se A $\subset$ B e B $\subset$ D, então A $\subset$ D, o seu recíproco é "se A $\subset$ D, então A $\subset$ B e B $\subset$ D"; o contrário é "A $\not\subset$ B ou B $\not\subset$ D, então A $\not\subset$ D"; e o contrapositivo é "se A $\not\subset$ D, então A $\not\subset$ B ou B $\not\subset$ D".

Para os enunciados contendo quantificadores as seguintes equivalências lógicas podem ser demonstradas:

a) $\vdash \forall$ x Fx $\leftrightarrow\sim \exists$ x $\sim$ Fx
b) $\vdash \forall$ x $\sim$ Fx $\leftrightarrow\sim \exists$ x Fx
c) $\vdash \exists$ x Fx $\rightarrow\sim \forall$ x $\sim$ Fx
d) $\vdash \exists$ x $\sim$ Fx $\rightarrow\sim \forall$ x Fx

Quando F estiver representando o predicado "$x^2 \leq 0$, para $x \in \mathcal{R}$", a fórmula do item a) afirma que $\forall$ x ($x^2 \leq 0$) $\leftrightarrow\sim \exists$ x ($x^2 > 0$).

Ainda para ilustrar o uso de regras de inferências demonstra-se aqui a equivalência do item (c): $\exists$x Fx $\leftrightarrow \sim \forall$x $\sim$ Fx.

Demonstração:

1.	$\exists$xFx	hipótese por I $\rightarrow$
2.	Fa	hipótese por E$\exists$
3.	$\forall$x $\sim$ Fx	hipótese por Redução ao Absurdo
4.	$\sim$ Fa	3 / E$\forall$
5.	Fa $\wedge \sim$ Fa	2, 4 / I $\wedge$
6.	$\sim\forall$x $\sim$ Fx	3 - 5 / Redução ao Absurdo
7.	$\sim\forall$x $\sim$ Fx	1, 2 - 6 / E$\exists$
8.	$\exists$x Fx $\rightarrow \sim\forall$x $\sim$ Fx	1 - 7 / I $\rightarrow$
9.	$\sim\forall$x $\sim$Fx	hipótese por I $\rightarrow$
10.	$\sim\exists$x Fx	hipótese por Redução ao Absurdo
11.	Fa	hipótese por Redução ao Absurdo
12.	$\exists$x Fx	11 / I $\exists$
13.	$\exists$x Fx $\wedge \sim \exists$x Fx	10, 12 / I $\exists$
14.	$\sim$ Fa	11 - 13 / Redução ao Absurdo
15.	$\forall$x $\sim$ Fx	14 / I $\forall$
16.	$\forall$x $\sim$ Fx $\wedge \sim \forall$x $\sim$ Fx	9, 15 / I $\wedge$
17.	$\sim \sim \exists$x Fx	10 - 16 / Redução ao Absurdo
18.	$\exists$x Fx	17 / E $\sim$
19.	$\sim\forall$x $\sim$Fx $\rightarrow \exists$x Fx	9 - 18 / I $\rightarrow$
20.	$\exists$x Fx $\leftrightarrow \sim\forall$x $\sim$ Fx	8, 19 / I $\leftrightarrow$

As equivalências mencionadas podem ser utilizadas nas demonstrações de enunciados quantificados sempre que isso facilitar a aplicação das regras de inferências.

Todas essas equivalências são úteis, uma vez que na matemática em geral considera-se que cada teorema T, tem a forma Hipótese (H) $\rightarrow$ Tese (T) e que, demonstrar a validade de T consiste em assumir a hipótese, H, como verdadeira e deduzir T, por aplicações de axiomas, teoremas e regras de inferências. É tarefa da lógica dedutiva explicitar todos os passos dessas deduções H $\vdash$ T.

As técnicas de demonstração dos teoremas podem ser caracterizadas, de modo geral, pelas seguintes denominações: prova direta, prova indireta, prova por indução e prova por casos.

A prova direta (também conhecida por *técnica condicional*) pode ser usada sempre que se puder reescrever o teorema na forma condicional, e consiste na aplicação da regra de introdução do condicional (I$\rightarrow$), como pode ser visto no teorema antes demonstrado. Contudo, essa técnica de demonstração exige mais esclarecimentos quando a hipótese ou a tese envolve um conceito cujo significado depende do significado de outros conceitos. Explicitamos a seguir os casos de hipótese e tese conjuntivas ou disjuntivas (de acordo com [4]).

Caso 1: Teorema com hipótese conjuntiva

Se um teorema tem uma hipótese conjuntiva, ele pode ser representado por $H_1 \wedge H_2 \rightarrow T$. Nesse caso, intuitivamente, se pretende demonstrar que $(H_1 \rightarrow T) \wedge (H_2 \rightarrow T)$. Mas do ponto de vista lógico, é suficiente demonstrar que ou $(H_1 \rightarrow T)$ ou $(H_2 \rightarrow T)$ para garantir que $H_1 \wedge H_2 \rightarrow T$, pois são possíveis os seguintes teoremas:

a) $(H_1 \rightarrow T) \rightarrow ((H_1 \wedge H_2) \rightarrow T)$

b) $(H_2 \rightarrow T) \rightarrow ((H_1 \wedge H_2) \rightarrow T)$.

Apresenta-se aqui a demonstração de a).

Demonstração:

1.	$H_1 \rightarrow T$	hipótese por I $\rightarrow$
2.	$H_1 \wedge H_2$	hipótese por I $\rightarrow$
3.	H_1	2 / E $\wedge$
4.	T	1, 3 / E $\rightarrow$
5.	$(H_1 \wedge H_2) \rightarrow T$	2 - 4 / I $\rightarrow$
6.	$(H_1 \rightarrow T) \rightarrow ((H_1 \wedge H_2) \rightarrow T)$	1 - 5 / I $\rightarrow$

Caso 2: Teorema com tese conjuntiva

Quando o teorema possui a tese conjuntiva, representado por $H \rightarrow (T_1 \rightarrow T_2)$, é fácil demonstrar, usando propriedades da lógica de 1ª ordem, P, que é necessário demonstrar que $H \rightarrow T_1$ e $H \rightarrow T_2$, ou seja, $\vdash (H \rightarrow (T_1 \wedge T_2)) \leftrightarrow ((H \rightarrow T_1) \wedge (H \rightarrow T_2))$, cuja demonstração é a que segue.

Demonstração:

1.	$(H \rightarrow T_1) \wedge (H \rightarrow T_2)$	hipótese por I $\rightarrow$
2.	$\sim (H \wedge \sim T_1) \wedge \sim (H \wedge \sim T_2)$	1 / IM e DM
3.	$\sim ((H \wedge \sim T_1) \text{ v } (H \wedge \sim T_2))$	2 / DM
4.	$\sim (H \wedge (\sim T_1 \text{ v } \sim T_2))$	3 / DIST
5.	$\sim (H \wedge \sim (T_1 \wedge T_2))$	4 / DM
6.	$H \rightarrow (T_1 \wedge T_2)$	5 / IM e DM
7.	$((H \rightarrow T_1) \wedge (H \rightarrow T_2)) \rightarrow (H \rightarrow (T_1 \wedge T_2))$	1 - 6 / I $\rightarrow$
8.	$(H \rightarrow (T_1 \wedge T_2)) \rightarrow ((H \rightarrow T_1) \wedge (H \rightarrow T_2))$	6 - 1
9.	$(H \rightarrow (T_1 \wedge T_2)) \leftrightarrow ((H \rightarrow T_1) \wedge (H \rightarrow T_2))$	7, 8 / I $\leftrightarrow$

A sentença “Em todo paralelogramo, os lados opostos são congruentes e os ângulos opostos são congruentes” é um teorema dessa categoria.

Caso 3. Teorema com hipótese disjuntiva

Esse tipo de inferência ocorre quando a hipótese inclui diferentes situações a serem analisadas e pode ser representada por $H_1 \vee H_2 \rightarrow T$. Considerando a definição da disjunção, é necessário demonstrar que de cada caso, H_1 ou H_2, se deduz T. Isso é o que fica estabelecido pela seguinte equivalência lógica $\vdash ((H_1 \vee H_2) \rightarrow T) \leftrightarrow ((H_1 \rightarrow T) \wedge (H_2 \rightarrow T))$. A demonstração do teorema "O produto de dois números inteiros consecutivos é par", tem essa característica, pois ela exige que se considere os dois casos: H_1: sejam a = 2k e b = 2k + 1 e H_2: sejam a = 2k + 1 e b = 2k + 1, para obter que em ambos os casos o produto de a e b é um número par.

Segue a demonstração de $((H_1 \text{v } H_2) \rightarrow T) \leftrightarrow ((H_1 \rightarrow T) \wedge (H_2 \rightarrow T))$:

Demonstração:

1.	$(H_1 \rightarrow T) \wedge (H_2 \rightarrow T)$	hipótese por I $\rightarrow$
2.	$\sim (H_1 \wedge \sim T) \wedge \sim (H_2 \wedge \sim T)$	1 / IM e DM
3.	$\sim ((H_1 \wedge \sim T) \text{ v } (H_2 \wedge \sim T))$	2 / DM
4.	$\sim ((H_1 \text{ v } H_2) \wedge \sim T))$	3/ DIST
5.	$(H_1 \text{ v } H_2) \rightarrow T$	4 / DM e IM
6.	$((H_1 \rightarrow T) \wedge (H_2 \rightarrow T)) \rightarrow ((H_1 \text{ v } H_2) \rightarrow T)$	1 - 5 / I $\rightarrow$
7.	$((H_1 \text{ v } H_2) \rightarrow T)) \rightarrow ((H_1 \rightarrow T) \wedge (H_2 \rightarrow T))$	5 - 1
8.	$((H_1 \text{ v } H_2) \rightarrow T)) \leftrightarrow ((H_1 \rightarrow T) \wedge (H_2 \rightarrow T))$	6, 7 / I $\leftrightarrow$

Caso 4. Teorema com tese disjuntiva

O teorema "Se a reta r é perpendicular à s, e esta é perpendicular à t, então r e t são retas paralelas ou retas coincidentes", possui a tese disjuntiva. Esse caso pode ser representado por $H \rightarrow (T_1 \vee T_2)$, cujo significado é que $H \rightarrow T_1$ ou $H \rightarrow T_2$. Em P, demonstra-se que $\vdash ((H \rightarrow (T_1 \vee T_2) \leftrightarrow ((H \rightarrow T_1) \vee (H \rightarrow T_2))$.

Demonstração:

1.	$H \rightarrow (T_1 \vee T_2)$	I $\rightarrow$
2.	$\sim (H \wedge \sim (T_1 \vee T_2))$	1 / IM e DM
3.	$\sim (H \wedge (\sim T_1 \wedge \sim T_2))$	2 / DM
4.	$\sim ((H \wedge H) \wedge (\sim T_1 \wedge \sim T_2))$	3 / IDEM
5.	$\sim (H \wedge \sim T_1) \wedge (H \wedge \sim T_2))$	4 /ASSOC e COMC
6.	$\sim (H \wedge \sim T_1) \vee \sim (H \wedge \sim T_2)$	5 / DM
7.	$(H \rightarrow T_1) \vee (H \rightarrow T_2)$	6 / DM e IM
8.	$(H \rightarrow (T_1 \vee T_2)) \rightarrow ((H \rightarrow T_1) \vee (H \rightarrow T_2))$	1 - 7 / I $\rightarrow$
9.	$((H \rightarrow T_1) \vee (H \rightarrow T_2)) \rightarrow (H \rightarrow (T_1 \vee T_2))$	7 - 1
10.	$(H \rightarrow (T_1 \vee T_2)) \leftrightarrow ((H \rightarrow T_1) \vee (H \rightarrow T_2))$	8, 9 / I $\leftrightarrow$

Nem sempre é possível demonstrar teoremas na forma direta $H \rightarrow T$. Nessas circunstâncias uma das estratégias é usar a prova indireta, que pode ser resumida em dois tipos. O primeiro consiste em utilizar a equivalência de um condicional ao seu contrapositivo, ou seja, $(H \rightarrow T) \leftrightarrow (\sim T \rightarrow \sim H)$. Usar essa equivalência lógica significa recorrer a uma prova direta, pois a demonstração consistirá em assumir a negação da tese, $\sim T$, para demonstrar a negação da hipótese, $\sim H$. O segundo tipo de prova indireta é a técnica de redução ao absurdo, apresentada como a regra de inferência, também denominada introdução da negação. Em resumo, a prova por redução ao absurdo consiste em acrescentar a negação da tese, $\sim T$, como hipótese e, através da aplicação de regras e do uso de propriedades já demonstradas, gerar uma contradição, da qual se infere a afirmação da tese,T. Essa prova se traduz na equivalência (H $\rightarrow$ T) $\leftrightarrow$ ((H $\wedge \sim$ T) $\rightarrow$ T). O teorema "Em todo triângulo, se um ângulo é reto, os outros são agudos" pode ser demonstrado, facilmente, pela forma indireta:

Seja H = m(A) = 90^o
Tese: m(B) < 90^o e m(C) < 90^o.
1. m(A) = 90^o, hipótese
2. m(B) $\geq 90^o \wedge$ m(C) $\geq 90^o$, Hipótese por Redução ao Absurdo
3. m(A) + m(B) + m(C) > 180^o, 1 e 2
4. m(A) + m(B) + m(C) = 180^o, propriedade da geometria euclidiana
5. $\Phi \wedge \sim \Phi$, 3,4/I$\wedge$
6. m(B) < 90^o e m(C) < 90^o.

A indução matemática (IM) constitui uma das mais poderosas técnicas de demonstração, visto que ela pode ser aplicada às sentenças que afirmam que uma certa propriedade vale para um certo conjunto de indivíduos ([7]). Essas sentenças podem ser vistas como aquelas que são quantificadas universalmente. A IM pode ser utilizada sempre que o universo do discurso que as variaveis percorrem seja um conjunto enumerável. Isso ocorre, por exemplo com certas propriedades dos números naturais. Em toda demonstração de validade por indução matemática a sentença a ser demonstrada tem a forma "Para todo x, x $\in$ N, P(x)" ou P é uma propriedade que se aplica aos elementos de um conjunto enumerável.

A demonstração por IM consiste em duas partes:
1. provar que P vale para o menor elemento do conjunto ao qual P se refere;
2. provar que para todo x, se P(x) $\rightarrow$ P(x + 1).

A parte 1 é denominada a *base da indução* e a parte 2 constitui o *passo indutivo*, no qual P(x) representa a *hipótese da indução*. Assim, a demonstração por IM se resume nas etapas seguintes: a) demonstrar que P vale para um menor valor de x, P(Base); b) assumir P(n); e c) demonstrar P(n + 1).

Os vários exemplos, a seguir, têm por objetivo ilustrar melhor essa técnica.
a) Para todo número natural n, n $\leq$ 1, $3^n \leq$ 1 + 2n.
Demonstração por IM:
Base: n = 1: $3^1 \leq$ 1 + 2.1.
Hipótese indutiva: 3^k
1) $3^k \leq$ 1 + 2k   P(k)
2) $3.3^k \leq$ 3(1 + 2k)
3) $3^{k+1} \leq$ 1 + 2k + 2 + 4k
4) 1 + 2k + 2 + 4k $\leq$ 1 + 2k + 2
5) $3^{k+1} \leq$ 1 + 2k + 2
6) $3^{k+1} \leq$ 1 + 2(k + 1)
i. e. $\forall$ n, vale P(n).

b) 1 + 2 + ... + n = $\frac{n(n+1)}{2}$
Base: n = 1
$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

Passo Indutivo:
Hipótese indutiva (HI): P(n) = 1 + 2 + ... + n = $\frac{n(n+1)}{2}$
Provar P(n + 1) = 1 + 2 + ... + n + n + 1 = $\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

1. 1 + 2 + ... + n + n + 1 = $\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$ Por HI
2. 1 + 2 + ... + n + n + 1 = $\frac{n^2+n)}{2} + (n+1)$
3. 1 + 2 + ... + n + n + 1 = $\frac{n^2+n+2n+2}{2}$
4. 1 + 2 + ... + n + n + 1 = $\frac{n^2+3n+2}{2}$
5. 1 + 2 + ... + n + n + 1 = $\frac{(n+1)(n+2}{2}$
6. 1 + 2 + ... + n + n + 1 = $\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

Logo, a propriedade vale para todo número natural.

c) $3n(n+1)$ é divisível por 6
Base: n = 1
$3n(n+1) = 3.1(1+1) = 6$
Passo indutivo: Se $3n(n+1)$ é divisível por 6, então $3(n+1)((n+1)+1)$ é divisível por 6.
Hipótese Indutiva (HI): $3n(n+1)$ é divisível por 6.
Ora, $3(n+1)((n+1)+1) = (3n+3)(n+2) = 3n^2+3n+6n+6 = 3n(n+1)+6n+6$.
Pela hipótese indutiva a primeira parcela do resultado, $3n(n+1)$, é divisível por 6. Dado que as outras parcelas são também divisíveis por 6, a sua soma também o é.
Portanto, a propriedade vale para os números naturais.

d)Para todo $x \in N, a^{m+x} = a^m.a^x$.
Base: P(1): $a^{m+1} = \underbrace{a.a.a.a......a}_{m\ vezes}.a = a^m.a$

Passo indutivo: Assumir $P(n) = a^{m+n} = a^m.a^n$ e provar $P(n+1) = a^{m+(n+1)} = a^m.a^{(n+1)}$.

1.	$a^{m+n} = a^m.a^n$	HI
2.	$a^{m+n}.a = a^m.a^n.a$	Princípio multiplicativo
3.	$a^{m+n}.a = a^{(m+n)+1} = a^{m+(n+1)}$	Princípio associativo da adição
4.	$a^{m+(n+1)} = a^{m+n}.a = a^m.a^n.a$	2,3 / Associatividade
5.	$a^{m+(n+1)} = (a^m.a^n).a$	4 / Associatividade
6.	$(a^m.a^n).a = a^m.(a^n.a)$	5 / Associativade
7.	$a^m.(a^n.a) = a^m.(a^{n+1})$	Propriedade de potência
8.	$a^{m+(n+1)} = a^m.(a^{n+1})$	5 a 7 por transitividade

Portanto, considerando a base e o passo indutivo, para todo $x \in N$, $a^{m+x} = a^m.a^x$.

e) Provar que $x! > x^2$, para todo $x \in N - \{1, 2, 3\}$
Base: P(4) = 4! = 4.3.2.1 = 24 > 16 = 4^2.
Passo indutivo: assumindo $P(n) = n! > n^2$, provar que $P(n+1) = (n+1)! > (n+1)^2$.

1.	$(n+1)! = (n+1).n!$	Por definição
2.	$(n+1).n! > (n+1).n^2$	pela HI
3.	$n^2 > n+1$	Propriedade da teoria dos números
4.	$(n+1)! > (n+1).(n+1)$	2, 3 / Substituição
5.	$(n+1)! > (n+1)^2$	4 / Propriedade de potência

Logo, vale a propriedade enunciada para $x \in N - \{1, 2, 3\}$.

f) Para todo $x \in N$, x é divisível por 1.
Base: $n = 1$.
P(1): 1 é divisível por ele mesmo, propriedade da divisão.
Passo indutivo: Se $P(n)$, então $P(n+1)$.
Hipótese indutiva: n é divisível por 1.

1.	n é divisível por 1	HI
2.	1 é divisível por 1	Base
3.	n é divisível por 1 e 1 é divisível por1	1, 2 /I $\wedge$
4.	Se n e 1 são divisíveis por 1, então $n+1$ é divisível por 1	Teorema
5.	$n+1$ é divisível por 1	3, 4 /E $\rightarrow$

Assim, vale a propriedade enunciada para todo número natural.

A prova por caso já foi referida no Caso 3 da prova direta. Ela pode ser utilizada naquele caso, utilizando a equivalência $\vdash ((H_1 \vee H_2) \rightarrow T) \leftrightarrow ((H_1 \rightarrow T) \wedge (H_2 \rightarrow T))$ e sempre que a fórmula a ser provada dependa de uma hipótese que tenha forma disjuntiva, pela regra de eliminação da disjunção.

As técnicas de demonstração apresentadas podem ser utilizadas concomitantemente na demonstração de um mesmo teorema. Por exemplo, pode ser necessário associar prova direta e redução ao absurdo na mesma demonstração, a partir de diferentes hipóteses, como já foi visto anteriormente.

Textos envolvendo argumentos complexos e outros exemplos de prova de validade de argumentos de acordo com a lógica acima referida são analisados na literatura especializada.

Bibliografia

[1] Alencar Filho, E. de, *Iniciação à lógica matemática*, Nobel, São Paulo, 1984.

[2] Aristóteles, *Metafísica*. 2 ed. Tradução por Valentin García Yebra. Gredos, Madrid, 1970.

[3] Aristóteles, *Posterior Analytics*, 71a, 1-75a,36. (Trad. Por G.R.G. Mure). In: HUTCHINS, R.M. (Ed.). Great Books of the Western World, 8. Aristotle: I, Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952, pp.97-103

[4] Barbosa, R. M., *Elementos de lógica aplicados ao ensino secundário*, Nobel, São Paulo, 1968.

[5] Copi, I., *Introdução à lógica*. 2 ed. Trad. Álvaro Cabral, Mestre Jou, São Paulo, 1978.

[6] Da Costa, N. C. A., *Ensaios sobre os fundamentos da lógica*, Hucitec, São Paulo, 1980.

[7] Fossa, J., *Técnicas de demonstração em matemática*, Clima, Natal, 1990.

[8] Nolt, J., Rohatyn, D., *Lógica*, McGraw-Hill, São Paulo, 1991.

[9] Mendelson, E. Introduction to mathematical logic. 3rd ed. Wadsworth, California, 1987.

[10] Pinker, S., *Como a mente funciona*, Tradução de Laura Teixeira Motta, Cia das Letras, São Paulo, 1998.

[11] Pinto, P. R. M., *Introdução à lógica simbólica*, Editora UFMG, Belo Horizonte, 2001.

[12] Ross, D. *Aristotle*, Methuen, London, 1974.